ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J.-C. LOOTGIETER

Problèmes de récurrence concernant des mouvements aléatoires de particules sur Z avec destruction

Annales de l'I. H. P., section B, tome 13, nº 2 (1977), p. 127-139
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1977__13_2_127_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIII, n° 2, 1977, p. 127-139.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Problèmes de récurrence concernant des mouvements aléatoires de particules sur $\mathbb{Z}$ avec destruction

par

J.-C. LOOTGIETER
Laboratoire de Probabilités, 4, Place Jussieu, Tour 56

SOMMAIRE. — Dans [*1*], Adelman démontre une conjecture de Erdös et Ney [*2*] ; nous en donnons ici une démonstration se basant sur une approche, en partie différente, de celle adoptée dans [*1*].

SUMMARY. — In [*1*], Adelman proves a conjecture of Erdös and Ney [*2*] ; we give here a partly different approach to prove the same result.

INTRODUCTION

Rappelons d'abord les données du problème (cas I) : tous les points de $\mathbb{Z}$, excepté 0, sont initialement occupés par des chats et tout chat, indépendamment des autres, saute du point q qu'il occupe à l'instant n, $n \in \mathbb{N}$, au point $q - 1$ (resp. $q + 1$) avec probabilité p (resp. $1 - p$) (p est fixé une fois pour toutes et ne dépend pas du chat observé) ; une paire de chats disparaît dès que ceux-ci se croisent ou occupent un même point de $\mathbb{Z}$ (nous dirons qu'il y a collision).

Nous avons donc deux règles de collision possibles :

$$\text{règle (1)} \quad \underset{\quad x \qquad x+1 \qquad\qquad \mathbb{Z}}{\overset{\rightleftarrows}{\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}}}$$

$$\text{règle (2)} \quad \underset{x-1 \qquad x \qquad x+1 \qquad\qquad \mathbb{Z}}{\overset{\rightarrow \quad \leftarrow}{\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}}} \quad (x \text{ non occupé})$$

La conjecture de Erdös et Ney démontrée par Adelman est la suivante :

« Soit l'événement $V(0) = \{ 0 \text{ est visité} \}$; alors la probabilité $P(V(0))$ de $V(0)$ est égale à 1 ».

Comme nous allons le voir plus loin, l'étude du cas I est liée à celle du cas suivant (cas II) : tous les points de $\mathbb{Z}$, 0 compris sont initialement occupés par des chats, le mouvement et la disparition de tout chat étant soumis aux mêmes règles que dans le cas I.

Le but de cet exposé est de démontrer que dans les cas I et II tous les points de $\mathbb{Z}$ sont récurrents : en d'autres termes, quel que soit $q \in \mathbb{Z}$, il y a une probabilité 1 de visiter une infinité de fois q ; *a fortiori* la conjecture de Erdös et Ney est alors établie.

Nous supposons que $p \neq 0$, sans quoi l'étude des cas I et II devient triviale.

ÉTUDE DU CAS II

A. Remarques préliminaires et notations

Nous verrons plus loin (cf. Lemme 2 *a* qui suit) que tout chat disparaît au bout d'un temps fini aléatoire dépendant du chat observé. Comme les chats disparaissent par paires et que la parité de la position d'un chat choisi (tant que celui-ci reste en vie) change avec le temps, on remarque facilement qu'à chaque instant n un point $\mathbb{Z}$ est occupé au plus par un chat, qu'entre deux points de $\mathbb{Z}$ consécutivement occupés il y a nécessairement un nombre pair (éventuellement nul) de points inoccupés et que toute collision ne peut se passer que suivant la seule règle (1).

A chaque instant $n \geq 0$ nous pouvons associer une distribution aléatoire m_n sur $\mathbb{Z}$ définie par :

$$(1.a) \qquad m_n(q) = \begin{cases} 1 \text{ si } q & \text{est occupé à l'instant } n, \\ 0 \text{ si } q & \text{est inoccupé à l'instant } n. \end{cases}$$

La connaissance de la distribution m_n à l'instant n dépend uniquement du mouvement des chats au cours de la n-ième étape, c'est-à-dire de ce qui s'est passé entre les instants $n - 1$ et n : à savoir les différents sauts qui ont pu avoir lieu ; de manière plus précise à chaque étape $n \geq 1$ nous associons une distribution aléatoire s_n sur $\mathbb{Z}$ définie par :

$$(2.a) \qquad s_n(q) = \begin{cases} 1 & \text{s'il y a un saut de } q \text{ vers } q + 1 \\ -1 & \text{s'il y a un saut de } q \text{ vers } q - 1 \\ 0 & \text{si } q \text{ est inoccupé à l'instant } n - 1 \,. \end{cases}$$

Il est clair que la distribution s_n des sauts à la n-ième étape ne dépend que de la distribution m_{n-1} des chats à l'instant $n-1$, laquelle ne dépend à son tour que de la distribution s_{n-1} : en résumé s_n ne dépend que de s_{n-1} (et manifestement cette dépendance est homogène dans le temps).

Ces considérations nous amènent à définir les objets qui suivent :

$$\mathscr{E} = \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{Z}}, \qquad \Omega = \mathscr{E}^{\mathbb{N}_1} \qquad \text{où} \qquad \mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

$\bar{\mathscr{E}}$ (resp. $\bar{\mathscr{E}}_A$ pour $A \subset \mathbb{Z}$) désigne la plus petite σ-algèbre de parties de $\mathscr{E}$ rendant mesurables les applications coordonnées $s(q)$, $q \in \mathbb{Z}$, de $\mathscr{E}$ dans $\{-1, 0, 1\}$ (resp. les applications coordonnées $s(q)$, $q \in A$). Définition analogue pour les σ-algèbres $\bar{\Omega}$ et $\bar{\Omega}_A$ pour $A \subset \mathbb{N}_1$. Il est clair que la famille des σ-algèbres $\left\{ \bigotimes_{j=1}^{n} \bar{\mathscr{E}}_{i_j},\ n \geq 1 \text{ et } i_j \in \mathbb{Z} \right\}$ engendre la σ-algèbre $\bar{\Omega}$:

$$(3.a) \qquad \bar{\Omega} = \sigma\left(\bigotimes_{j=1}^{n} \bar{\mathscr{E}}_{i_j},\ n \geq 1 \text{ et } i_j \in \mathbb{Z} \right).$$

Nous désignons par τ_q, $q \in \mathbb{Z}$, les translations de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définies par : $\tau_q(r) = r + q$. Sur Ω nous définissons également un opérateur de translation θ : pour $\omega = \{ s_n, n \geq 1 \}$, $\theta(\omega) = \{ \tilde{s}_n, n \geq 1 \}$ avec $\tilde{s}_n(q+1) = s_n(q)$. Il est clair que θ est une application bijective de Ω sur Ω qui envoie $\bar{\Omega}$ sur $\bar{\Omega}$. Pour $q \geq 1$ θ^q (resp. θ^{-q}) désigne l'itérée q-ième de θ (resp. l'itérée q-ième de l'application inverse θ^{-1}) ; θ^0 désigne l'application identique sur Ω.

La chaîne $\{ s_n, n \geq 1 \}$ des distributions définies par la relation $(2.a)$ est alors visiblement une chaîne de Markov stationnaire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \bar{\Omega}, \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ désigne l'habituelle probabilité construite à partir de la loi de s_1 comme loi initiale et de la probabilité de transition de la dite chaîne (probabilité de transition qu'il semble difficile d'expliciter).

Cela dit, le lecteur admettra sans difficultés, puisque le support $(= \mathbb{Z})$ de la distribution fixe m_0 reste inchangé par toute translation τ_q, que les applications θ^q préservant la probabilité $\mathbb{P}$:

$$(4.a) \qquad \begin{cases} \mathbb{P}(\theta^q)(A) = \mathbb{P}(A) \text{ quel que soit } A \in \Omega \text{ et } q \in \mathbb{Z}, \text{ ce} \\ \quad \text{qui est équivalent à :} \\ f \circ \theta^q \text{ a même loi que } f \text{ quel que soit } f \text{ mesurable} \\ \quad \text{de } \Omega \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } q \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Nous serons amenés à considérer des distributions initiales de chats distinctes de la distribution m_0 du cas II. Pour $A \subset \mathbb{Z}$, m_0^A désigne la distribution sur $\mathbb{Z}$ définie par :

$$m_0^A(q) = \begin{cases} 1 \text{ si } q \in A \\ 0 \text{ si } q \notin A. \end{cases}$$

${}_A\mathbb{P}$ désigne l'analogue de $\mathbb{P}$ pour la distribution initiale m_0^A.

Si $A = [q\,;+\infty[$ (resp. $A =]-\infty, q]$) nous écrirons $m_0^{q\rightarrow}$ (resp. $m_0^{\leftarrow q}$) et ${}_{q\rightarrow}\mathbb{P}$ (resp. ${}_{\leftarrow q}\mathbb{P}$) ; si $A = \{ q \}$ nous écrirons m_0^q et ${}_q\mathbb{P}$: dans ce cas on retrouve une promenade aléatoire classique pour laquelle on a le résultat bien connu suivant (cf. Principles of Random Walk [3]) :

LEMME 1 *a.* — *Soit l'événement* $V(0) = \{ 0$ *est visité* $\}$. *Alors pour tout* $q \in \mathbb{Z}$:

$$ {}_q\mathbb{P}(V(0)) = \inf\left(\left(\frac{p}{1-p}\right)^q, 1\right). $$

Nous avions promis au début de cette partie le lemme suivant :

LEMME 2 *a.* — *Tout chat disparaît au bout d'un temps fini* $\mathbb{P}$*-p. s.*

Démonstration. — Soient les événements $E(q) = \{$ un chat situé initialement en q ne disparaît pas $\}$, $q \in \mathbb{Z}$. Le lecteur admettra sans difficultés que deux chats situés initialement en des points q et r ($q \neq r$) ont plus de chances de ne pas disparaître en l'absence de tout autre chat qu'en présence d'autres chats, en d'autres termes :

$$ \mathbb{P}(E(q) \cap E(r)) \leq {}_{\{q,r\}}\mathbb{P}(E(q) \cap E(r)) . $$

Mais (cf. Spitzer : Principles of Random Walk) il n'est pas difficile de voir que :

$$ {}_{\{q,r\}}\mathbb{P}(E(q) \cap E(r)) = 0 \qquad \text{pour } q \neq r . $$

Par suite, de ce qui précède, il résulte que les événements $E(q)$, $q \in \mathbb{Z}$, sont mutuellement disjoints $\mathbb{P}$-p. s. ; mais $\mathbb{P}(E(q))$ est constant de q (cf. (4.*a*)):

$$ \mathbb{P}(E(q)) = \mathbb{P}(\theta(E(q))) = \mathbb{P}(E(q+1)) , $$

si bien que $\mathbb{P}(E(q)) = 0$ pour tout $q \in \mathbb{Z}$.

Du lemme 2 *a* résulte que $\mathbb{P}$-p. s. un nombre fini de chats ne peut visiter une infinité de fois un point q de $\mathbb{Z}$; par suite :

LEMME 3 *a.* — $\mathbb{P}$*-p. s. un point* $q \in \mathbb{Z}$ *est visité une infinité de fois par des chats initialement situés dans une partie* $A \subset \mathbb{Z}$ *si et seulement si* q *est visité par une infinité de chats initialement situés dans* A.

Enfin nous avons le lemme suivant dont nous laissons au lecteur la démonstration :

LEMME 4 *a.* — $\mathbb{P}$*-p. s. à chaque instant* n *il y a une infinité de points situés à droite de* 0 (*resp. à gauche de* 0) *occupés par des chats.*

La partie qui suit précise les propriétés de θ et leurs premières conséquences.

B. Propriétés de l'opérateur de θ

Suivant alors une remarque de M. H. Heinich, nous avons la proposition suivante :

PROPOSITION 1 (Propriété de mélange). — *Quel que soit* F *et* $G \in \bar{\Omega}$ *on a :*

$$\lim_{|q| \to +\infty} \mathbb{P}(F \cap \theta^q(G)) = \mathbb{P}(F)\mathbb{P}(G)$$

Démonstration. — Il résulte des théorèmes usuels d'approximation de la théorie de la mesure et des relations (3.*a*) et (4.*a*) qu'il suffit de prouver la proposition 1 dans le cas où F et G appartiennent à une sous-σ-algèbre de $\bar{\Omega}$ de la forme $\bigotimes_{j=1}^{n} \bar{\mathscr{E}}_{i_j}$, $n \in \mathbb{N}_1$ et $i_j \in \mathbb{Z}$. Posons :

$$d = \sup_{1 \leq j \leq n} i_j - \inf_{1 \leq j \leq n} i_j$$

Il est clair que si $G \in \bigotimes_{j=1}^{n} \bar{\mathscr{E}}_{i_j}$, alors $\theta^q(G) \in \bigotimes_{j=1}^{n} \bar{\mathscr{E}}_{\tau_q(i_j)}$.

Des propriétés du mouvement des chats (les mouvements des chats sont mutuellement indépendants et pendant une unité de temps un chat parcourt au plus une distance 1) résulte que pour $|q|$ assez grand, par exemple $|q| \geq 3n + d$, les σ-algèbres $\bigotimes_{j=1}^{n} \bar{\mathscr{E}}_{i_j}$ et $\bigotimes_{j=1}^{n} \bar{\mathscr{E}}_{\tau_q(i_j)}$ sont indépendantes : en d'autres termes l'histoire du bloc $\{ i_1, i_2, \ldots, i_n \}$ est indépendante de l'histoire du bloc $\{ \tau_q(i_1), \tau_q(i_2), \ldots, \tau_q(i_n) \}$ jusqu'au temps n (cf. Adelman [*1*]). Par suite, pour $|q| \geq 3n + d$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F \cap \theta^q(G)) &= \mathbb{P}(F)\mathbb{P}(\theta^q(G)) \\ &= \mathbb{P}(F)\mathbb{P}(G) \qquad \text{d'après } (4.a). \end{aligned}$$

La démonstration de la proposition 1 est donc achevée.

La proposition 1 implique immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.1 (Propriété d'ergodicité). — *Si* $\theta^q(F) = F$ *pour un* $F \in \bar{\Omega}$ *et un* $q \neq 0$, *alors* $\mathbb{P}(F)$ *est égale à* 0 *ou* 1.

REMARQUE 1.*b*. — Soit, pour tout $q \in \mathbb{Z}$, l'événement $S(q, q+1)$ défini par :

$$S(q, q+1) = \{ \text{il y a au moins un saut de } q \text{ vers } q+1 \text{ ou de } q+1 \text{ vers } q \text{ au moins pendant une étape } n \geq 1 \}.$$

Comme les chats disparaissent par paires, avec un peu d'attention on remarque que :

$$S^c(0, 1) \subset S(q, q+1) \qquad \mathbb{P}\text{-p. s. pour tout } q \text{ impair de } \mathbb{Z},$$

d'où :

$$(1.b) \qquad S^c(0, 1) \subset \bigcap_{\substack{q \in \mathbb{Z} \\ q \text{ impair}}} S(q, q+1) \qquad \mathbb{P}\text{-p. s.}$$

Posons $F_1 = \bigcap_{\substack{q \in \mathbb{Z} \\ q \text{ impair}}} S(q, q+1)$; il est clair que $\theta^2(F_1) = F_1$ $\mathbb{P}$-p. s.

Le corollaire 1.1 implique alors $\mathbb{P}(F_1) = 0$ ou 1.

Comme $\mathbb{P}(S(0, 1)) = \mathbb{P}(\theta(S(0, 1))) = \mathbb{P}(S(1, 2))$, il est facile de déduire de l'inclusion (1.*b*) que :

$$(2.b) \qquad \mathbb{P}(S^c(0, 1)) = 0.$$

D'autre part, un argument d'indépendance assure visiblement que :

$$(3.b) \qquad \mathbb{P}(S^c(0, 1)) = (1 - {}_{1\to}\mathbb{P}(V(0)))(1 - {}_{\leftarrow 0}\mathbb{P}(V(1)))$$

où $V(0) = \{ 0 \text{ est visité} \}$ et $V(1) = \{ 1 \text{ est visité} \}$. Posons :

$$\alpha(p) = {}_{1\to}\mathbb{P}(V(0)) \qquad \text{et} \qquad \beta(p) = {}_{\leftarrow 0}\mathbb{P}(V(1)).$$

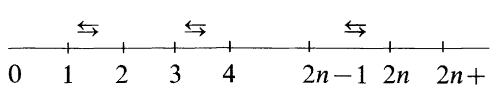
Il va de soi que $\beta(p) = \alpha(1-p)$; par suite il résulte des égalités (2.*b*) et (3.*b*) que l'une des quantités $\alpha(p)$ et $\alpha(1-p)$ est égale à 1.

En particulier, pour $p = \frac{1}{2}$, $\alpha\left(\frac{1}{2}\right) = 1$: on retrouve ainsi un résultat d'Adelman [*1*].

Pour $p \neq \frac{1}{2}$ laquelle des quantités $\alpha(p)$ et $\alpha(1-p)$ est égale à 1 ? Pour répondre à cette question plaçons-nous dans le cas où la distribution initiale des chats est $m_0^{1\to}$ et considérons les événements D_{2n}, $n \geq 1$, définis par :

$D_{2n} = \{$ les chats initialement situés dans l'intervalle $[1, 2n]$ se *détruisent mutuellement* pendant la 1^re^ étape $\}$.

Comme l'illustre ce dessin :



nécessairement $D_{2n} = \{ s_1(q) = (-1)^{q+1} \text{ pour } 1 \leq q \leq 2n \}$; il va de soi que ${}_{1\to}\mathbb{P}(D_{2n}) = \frac{1}{2^{2n}}$.

Supposons que ${}_{1\to}\mathbb{P}(\mathrm{V}(0)) = 1$; en ce cas il est clair que :

$$ {}_{1\to}\mathbb{P}(\mathrm{D}_{2n}) = {}_{1\to}\mathbb{P}(\mathrm{D}_{2n} \cap \mathrm{V}(0)) . $$

En utilisant un argument d'indépendance, avec un peu d'attention on remarque que :

$$ {}_{1\to}\mathbb{P}(\mathrm{D}_{2n} \cap \mathrm{V}(0)) = {}_{1\to}\mathbb{P}(\mathrm{D}_{2n})\ {}_{2n+1\to}\mathbb{P}(\mathrm{V}(0)) . $$

Par suite ${}_{2n+1\to}\mathbb{P}(\mathrm{V}(0)) = 1$. Soient alors les événements :

$$ \mathrm{V}_q(0) = \{ \text{un chat est initialement en } q \text{ et visite ultérieurement } 0 \} . $$

Il est clair que :

$$ {}_{2n+1\to}\mathbb{P}(\mathrm{V}(0)) \leq \sum_{q \geq 2n+1} {}_{2n+1\to}\mathbb{P}(\mathrm{V}_q(0)) . \tag{4.b} $$

Le lecteur admettra sans difficultés qu'un chat seul au départ a plus de chances d'atteindre le point 0 qu'en présence d'autres chats, en d'autres termes pour $\mathrm{A} \subset \mathrm{Z}$ et $q \in \mathrm{A}$ nous avons :

$$ {}_{\mathrm{A}}\mathbb{P}(\mathrm{V}_q(0)) \leq {}_{q}\mathbb{P}(\mathrm{V}(0)) . \tag{5.b} $$

Le lemme 1 *a* de la partie A et les relations (4.*b*) et (5.*b*) impliquent alors :

$$ {}_{2n+1\to}\mathbb{P}(\mathrm{V}(0)) \leq \sum_{q \geq 2n+1} \inf\left(\left(\frac{p}{1-p}\right)^q, 1\right) $$

pour tout $n \geq 1$. De ce qui précède il découle alors visiblement que l'hypothèse ${}_{1\to}\mathbb{P}(\mathrm{V}(0)) = 1$ implique $p \geq \frac{1}{2}$.

En résumé, si $p \geq \frac{1}{2}$ $\alpha(p) = 1$, si $p < \frac{1}{2}$ $\alpha(p) < 1$.

Nous allons définir maintenant quelques événements remarquables. Pour tout $q \in \mathbb{Z}$:

$\mathrm{I}(q) = \{ q$ est visité une infinité de fois $\}$,

$\mathrm{I}_g(q)$ (resp. $\mathrm{I}_d(q)) = \{ q$ est visité une infinité de fois par des chats situés initialement en des points $\leq q$ (resp. $\leq q$) $\}$,

$\dot{\mathrm{IS}}(q, q+1) = \{$ il y a une infinité de sauts de q *en* $q+1$ ou de $q+1$ *en* $q \}$,

un saut de q *en* $q + 1$ (resp. $q - 1$) signifiant qu'un chat a effectivement sauté du point q au point $q + 1$ (resp. $q - 1$) sans avoir croisé d'autre chat.

LEMME 1 *b*. — (i) *Les probabilités* $\mathbb{P}(\mathrm{I}(q))$, $\mathbb{P}(\mathrm{I}_g(q))$, $\mathbb{P}(\mathrm{I}_d(q))$ *et* $\mathbb{P}(\mathrm{I}\dot{\mathrm{S}}(q, q+1))$ *sont constantes de* q *et n'ont pour valeurs possibles que* 0 *ou* 1.

(ii) *Si* $p < \frac{1}{2}\left(\text{resp. } p > \frac{1}{2}\right)$ $\mathbb{P}(\mathrm{I}_d(q)) = 0$ (resp. $\mathbb{P}(\mathrm{I}_g(q)) = 0$).

(iii) *Si* $p = \frac{1}{2}$ $\mathbb{P}(\mathrm{I}_d(q)) = \mathbb{P}(\mathrm{I}_g(q))$.

Démonstration. — (*i*) Fixons q et r avec $q > r$. Pour k_0 assez grand les intervalles $[r + nk_0, q + nk_0]$, $n \geq 0$, sont mutuellement disjoints et :

$$\mathrm{I}(q + nk_0) \cap \mathrm{I}^c(r + nk_0) = \theta^{nk_0}(\mathrm{I}(q) \cap \mathrm{I}^c(r)),$$

d'où (cf. (4.*a*)) :

$$\mathbb{P}(\mathrm{I}(q + nk_0) \cap \mathrm{I}^c(r + nk_0)) = \mathbb{P}(\mathrm{I}(q) \cap \mathrm{I}^c(r)). \tag{6.b}$$

Mais les événements $\mathrm{I}(q + nk_0) \cap \mathrm{I}^c(r + nk_0)$, $n \geq 0$, sont mutuellement disjoints $\mathbb{P}$-p. s. du fait que chaque chat disparaît au bout d'un temps fini et que par suite le point $r + nk_0$ ne peut être visité une infinité de fois si $q + mk_0$ et $q + nk_0$, pour $m < n$, ne sont visités qu'un nombre fini de fois; par suite l'égalité (6.*b*) implique $\mathbb{P}(\mathrm{I}(q) \cap \mathrm{I}^c(r)) = 0$.

On peut donc conclure que :

$$\mathrm{I}(q) = \bigcap_{r \in \mathbb{Z}} \mathrm{I}(r) \qquad \text{pour tout } q \in \mathbb{Z}. \tag{7.b}$$

$\mathbb{P}(\mathrm{I}(q))$ est donc constant de q, et comme visiblement l'égalité (7.*b*) entraîne $\theta(\mathrm{I}(q)) = \mathrm{I}(q)$, le corollaire 1.1 assure que la valeur constante de $\mathbb{P}(\mathrm{I}(q))$ est 0 ou 1.

Le cas des probabilités $\mathbb{P}(\mathrm{I}\dot{\mathrm{S}}(q, q + 1))$ se traite de manière analogue.

En ce qui concerne les événements $\mathrm{I}_g(q)$, remarquons que le lemme 3 *a* implique visiblement :

$$\mathrm{I}_g(q) = \bigcap_{r \leq q} \mathrm{I}_g(r). \tag{8.b}$$

Comme $\mathbb{P}(\mathrm{I}_g(q)) = \mathbb{P}(\theta(\mathrm{I}_g(q)) = \mathbb{P}(\mathrm{I}_g(q + 1))$, l'égalité (8.*b*) implique sans difficultés que :

$$\mathbb{P}(\mathrm{I}_g(q)) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{r \in \mathbb{Z}} \mathrm{I}_g(r)\right). \tag{9.b}$$

L'événement $\bigcap_{r \in \mathbb{Z}} \mathrm{I}_g(r)$ étant manifestement invariant par θ, le corollaire 1.1 et l'égalité (9.*b*) assurent que la valeur constante de $\mathbb{P}(\mathrm{I}_g(q))$ est 0 ou 1. Même conclusion pour $\mathbb{P}(\mathrm{I}_d(q))$.

ii) Supposons pour fixer les idées que $p < \frac{1}{2}$. Revenons aux événements V(0) et $V_q(0)$ définis dans la remarque 1 *b*. Le lemme 3 *a* entraîne que :

$$\mathbb{P}(I_d(0)) = \mathbb{P}\,(\limsup_{q\uparrow+\infty} V_q(0))$$

Mais le lemme 1 *a* et la relation (5.*b*) (cf. remarque 1 *b*) impliquent :

$$\sum_{q\geq 1} \mathbb{P}(V_q(0)) \leq \sum_{q\geq 0} \left(\frac{p}{1-p}\right)^q < +\infty .$$

Du théorème de Borel-Cantelli résulte donc que $\mathbb{P}(I_d(0)) = 0$. De l'assertion *i*) précédemment démontrée on déduit que $\mathbb{P}(I_d(q)) = 0$ pour tout $q \in \mathbb{Z}$. Conclusion analogue pour $\mathbb{P}(I_g(q))$ quand $p > \frac{1}{2}$.

iii) Immédiat pour des raisons évidentes de symétrie.

Nous allons préciser toutes les valeurs possibles des probabilités citées dans le lemme 1 *b*. Auparavant nous donnons une information sur la distribution des chats à un instant donné.

C. Sur la distribution des chats à un instant donné

Soient pour $n \geq 1$ et $k \geq 1$ les événements suivants.

$\mathrm{IM}(n, k) = \{$ il y a un nombre impair de chats dans l'intervalle $[1, k]$ à l'instant $n\}$.

PROPOSITION 2. — *Pour tout* $n \geq 1$:

i) *si* $p \neq \frac{1}{2}$ $\quad \limsup_{k\uparrow+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{IM}(n, k)) \geq \frac{1}{4}$,

ii) *si* $p = \frac{1}{2}$ $\quad \limsup_{k\uparrow+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{IM}(n, k)) \geq \frac{1}{2}$.

Démonstration. — Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ nous définissons à partir de la distribution m_n des chats à l'instant n les variables aléatoires $d(n, k)$ et $g(n, k)$ (cf. lemme 4 *a*) :

$$d(n, k) = \inf \{ q \mid q \geq k \text{ et } m_n(q) = 1 \}$$
$$g(n, k) = \sup \{ q \mid q \leq k \text{ et } m_n(q) = 1 \}$$

Pour n fixé les variables aléatoires $d(n, k) - k$ (resp. $k - g(n\,;k)$) ont même loi $\mathscr{D}_n$ (resp. $\mathscr{G}_n$) (cf. (4.*a*)) ; et si de plus $p = \frac{1}{2}$, pour des raisons évidentes de symétrie, $\mathscr{D}_n = \mathscr{G}_n$.

Au début de cet exposé (cf. partie A) nous avons souligné qu'entre deux points de $\mathbb{Z}$ consécutivement occupés figurent nécessairement un nombre pair (éventuellement nul) de points inoccupés ; par suite pour $1 \leq s < k$ nous avons l'inclusion pour k *pair* :

$$\{ d(n, 1) \leq s \} \cap \{ d(n, k) \leq kS - 1 \} \\ \cap \{ d(n, 1) - 1 = d(n, k) - k \ (\mathrm{mod}\ 2) \} \subset \mathrm{IM}(n, k) \cup \mathrm{IM}(n, k-1).$$

Posons :

$$\delta_n(s) = \mathbb{P}(\{ d(n, 1) \leq s \}) \cap \{ d(n, 1) - 1 = 0 \ (\mathrm{mod}\ 2) \}$$
$$\gamma_n(s) = \mathbb{P}(\{ d(n, 1) \leq s \}) \cap \{ d(n, 1) - 1 = 1 \ (\mathrm{mod}\ 2) \}.$$

Pour n et s fixés, jusqu'au temps n l'histoire du bloc $[1, s]$ est indépendante de l'histoire du bloc $[k, k + s - 1]$ pourvu que k soit assez grand (cf. démonstration de la proposition 1) ; dès lors pour k assez grand *pair*, l'inclusion précédente assure que :

$$\delta_n^2(s) + \gamma_n^2(s) \leq 2 \sup (\mathbb{P}(\mathrm{IM})(n, k)), \mathbb{P}(\mathrm{IM}(n, k-1))).$$

D'où

$$\frac{1}{2}(\delta_n^2(s) + \gamma_n^2(s)) \leq \limsup_{k \uparrow +\infty} \mathbb{P}(\mathrm{IM}(n, k)),$$

et comme visiblement $\delta_n(s) + \gamma_n(s) \uparrow 1$ quand $s \uparrow +\infty$ (cf. lemme 4 *a*), il vient :

$$\frac{1}{4} \leq \limsup_{k \uparrow +\infty} \mathbb{P}(\mathrm{IM}(n, k)).$$

Si $p = \dfrac{1}{2}$ l'inégalité précédente peut être améliorée en jouant non plus sur les variables aléatoires $d(n, 1) - 1$ et $d(n, k) - k$, mais sur les variables aléatoires $d(n, 1) - 1$ et $k - g(n, k)$ qui, on l'a vu, ont alors même loi ; pour n et s fixés et k assez grand *impair*, on obtient :

$$\delta_n^2(s) + \gamma_n^2(s) \leq \mathbb{P}(\mathrm{IM}(n, k)),$$

et par suite on conclut de manière analogue :

$$\frac{1}{2} \leq \limsup_{k \uparrow +\infty} \mathbb{P}(\mathrm{IM}(n, k)).$$

REMARQUE 1 *c*. — En usant de la même méthode et en jouant sur la parité de k, on peut montrer que la proposition 2 est conservée si on remplace $\mathrm{IM}(n, k)$ par $\mathrm{IM}^c(n, k)$; l'inégalité *i*) peut certainement être améliorée.

Revenons aux événements définis au début de la partie B : $\mathrm{I}(q)$, $\mathrm{I}_g(q)$, $\mathrm{I}^d(q)$ et $\dot{\mathrm{IS}}(q, q+1)$. La proposition 2 implique le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.1. — *Pour tout* $q \in \mathbb{Z}$:

i) $\mathrm{P}(\mathrm{I}(q)) = 1$ *et* $\mathrm{P}(\mathrm{I}\dot{\mathrm{S}}(q, q+1)) = 1$.

ii) *Si* $p < \frac{1}{2}\left(\text{resp. } p > \frac{1}{2}\right)$, $\mathbb{P}(\mathrm{I}_d(q)) = 0$ *et* $\mathbb{P}(\mathrm{I}_g(q)) = 1$ (resp. $\mathbb{P}(\mathrm{I}_d(q)) = 1$ *et* $\mathbb{P}(\mathrm{I}_g(q)) = 0$).

iii) *Si* $p = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\mathrm{I}_g(q)) = \mathbb{P}(\mathrm{I}_d(q)) = 1$.

Démonstration. — *i*) Pour tout $q \in \mathbb{Z}$ et $n \geq 1$ définissons les événements suivants :

$$\dot{\mathrm{S}}_n(q, q+1) = \{\text{ il y a au moins un saut } q \textit{ en } q+1 \text{ ou de } q+1 \textit{ en } q \text{ pendant au moins une étape } m \geq n\}.$$

Il est clair que $\mathbb{P}(\dot{\mathrm{S}}_n(q, q+1))$ est constant de q (cf. (4.*a*)). Comme les chats disparaissent par paires, avec un peu d'attention on observe que

$$\mathrm{IM}(n, k) \subset \dot{\mathrm{S}}_n(0, 1) \cup \dot{\mathrm{S}}_n(k, k+1),$$

et par suite :

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}(\mathrm{IM}(n, k)) \leq \mathbb{P}(\dot{\mathrm{S}}_n(0, 1)). \tag{1.c}$$

D'autre part il est clair que $\limsup_{n \uparrow +\infty} \dot{\mathrm{S}}_n(0, 1) = \mathrm{I}\dot{\mathrm{S}}(0, 1)$; dès lors le lemme de Fatou et la proposition 2 assurent en faisant tendre d'abord $k \uparrow +\infty$, puis $n \uparrow +\infty$ dans l'inégalité (1.*c*) que :

$$\frac{1}{8} \leq \mathbb{P}(\mathrm{I}\dot{\mathrm{S}}(0, 1)). \tag{2.c}$$

Le lemme 1 *b* de la partie B et l'inégalité (2.*c*) entraînent que $\mathbb{P}(\mathrm{I}\dot{\mathrm{S}}(q, q+1)) = 1$ pour tout $q \in \mathbb{Z}$; par suite il est évident que $\mathbb{P}(\mathrm{I}(q)) \geq \frac{1}{2}$, d'où (cf. lemme 1 *b*) $\mathbb{P}(\mathrm{I}(q)) = 1$ pour tout $q \in \mathbb{Z}$.

ii) Conséquence immédiate du lemme 1 *b*, de l'assertion *i*) précédemment démontrée et du fait que $\mathrm{I}(q) = \mathrm{I}_g(q) \cup \mathrm{I}_d(q)$.

iii) Également immédiat.

ÉTUDE DU CAS I

D. Rapports entre les cas I et II

Nous désignons par ${}_*\mathrm{P}$ l'analogue de $\mathbb{P}$ pour la distribution initiale m_0^* sur $\mathbb{Z}$: $m_0^*(0) = 0$ et $m_0^*(q) = 1$ pour $q \neq 0$.

Considérons la chaîne des distributions sur $\mathbb{Z}$ $\{m_n, n \geq 0\}$ avec pour distribution initiale m_0 (cas II) ; soient m_n^g et m_n^d les distributions sur $\mathbb{Z}$ définies par :

$$m_n^g(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \text{ est occupé à l'instant } n \text{ par un chat} \\ & \text{initialement situé dans }]-\infty, -1], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$m_n^d(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \text{ est occupé à l'instant } n \text{ par un chat} \\ & \text{initialement situé dans } [0, +\infty[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que :

$$m_n = m_n^g + m_n^d .$$

Définissons alors les distributions m_n^{*d} et m_n^* sur $\mathbb{Z}$:

$$(2.d) \qquad \begin{cases} m_n^{*d}(q+1) = m_n^d(q), \\ m_n^* = m_n^g + m_n^{*d}. \end{cases}$$

Puis considérons l'application T de $(\Omega, \bar{\Omega}, \mathbb{P})$ dans Ω définie par :

$$(3.d) \quad \mathrm{T}(\{ s_n, n \geq 1 \}) = \{ s_n^*, n \geq 1 \}$$

$$\text{où} \quad s_n^*(q) = \begin{cases} s_n(q-1) & \text{si} \quad m_{n-1}^d(q-1) = 1, \\ s_n(q) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le lecteur admettra sans difficultés que les lois des chaînes $\{ s_n^*, n \geq 1 \}$ et $\{ m_n^*, n \geq 0 \}$ sont celles qui correspondent précisément au cas où la distribution initiale des chats est m_0^* (cas I) ; il suffit d'observer que toute collision dans le cas II (nécessairement soumise à la règle (1)) entre deux chats initialement situés de part et d'autre du point $\frac{1}{2}$ est équivalente par T à une collision (nécessairement soumise à la règle (2)) entre deux chats initialement situés de part et d'autre de 0 en choisissant comme distribution initiale de chats la distribution m_0^* (cas I).

Cela dit, nous avons le corollaire suivant qui traite le Cas I :

COROLLAIRE 2.2. — *Pour tout* $q \in \mathbb{Z}$:

i) ${}_*\mathbb{P}(\mathrm{I}(q)) = 1$ *et* ${}_*\mathbb{P}(\mathrm{I\dot{S}}(q, q+1)) = 1$.

ii) *Si* $p < \frac{1}{2}\left(\text{resp. } p > \frac{1}{2}\right)$, ${}_*\mathbb{P}(\mathrm{I}_d(q)) = 0$ *et* ${}_*\mathbb{P}(\mathrm{I}_g(q)) = 1$ (resp. ${}_*\mathbb{P}(\mathrm{I}_d(q)) = 1$ *et* ${}_*\mathbb{P}(\mathrm{I}_g(q)) = 0$).

iii) *Si* $p = \frac{1}{2}$, ${}_*\mathbb{P}(\mathrm{I}_g(q)) = {}_*\mathbb{P}(\mathrm{I}_d(q)) = 1$.

Démonstration. — Nous plaçant dans le cas II, observons que si *un* *point* q_0 de Z est visité une infinité de fois avec probabilité 1 par des chats initialement situés à sa gauche (resp. à sa droite), ce qui correspond au cas $p \leq \frac{1}{2}\left(\text{resp. } p \geq \frac{1}{2}\right)$, alors il résulte du lemme 3 *a* et du corollaire 2.1 que *tout point q* de Z est visité une infinité de fois avec probabilité 1 par des chats initialement situés dans $]-\infty, -1]$ (resp. dans $[0, +\infty[$).

Par suite, compte tenu des relations (1.*d*), (2.*d*) et des remarques précédant l'énoncé du corollaire 2.2, les assertions *i*), *ii*) et *iii*) du corollaire 2.2 sont visiblement assurées.

REMERCIEMENTS

Je remercie Messieurs ADELMAN, BRU et HEINICH pour les conversations fructueuses que j'ai échangées avec eux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] O. ADELMAN, Some use of somes « symmetries » of some random processes. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Section B, Vol. XII, n° 2, 1976.

[2] P. ERDOS and P. NEY, Some problems of random intervals and annihilating particles. *Annales of Probability*, Vol. **2**, n° 5, octobre 1974.

[3] F. SPITZER, *Principles of Random Walk*. Van Nostrand.

(Manuscrit reçu le 15 février 1977)