ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ANDREJ PÁZMAN

Plans d'expérience pour les estimations de fonctionnelles non-linéaires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 13, nº 3 (1977), p. 259-267

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1977__13_3_259_0>

© Gauthier-Villars, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XIII, n° 3, 1977, p. 259-267. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Plans d'expérience pour les estimations de fonctionnelles non-linéaires

par

Andrej PÁZMAN

Institut de Mesure et de la Technique de Mesure,
Académie Slovaque des Sciences, Bratislava, Tchécoslovaquie
Laboratoire de Probabilités, Paris VI,
Tour 56, 4, Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — Les plans d'expérience pour les estimations des polynômes sont considérés dans des expériences de régression généralisées, avec observations non corrélées. Des bornes de la variance d'un estimateur sans biais sont obtenues par des méthodes du chaos de Wiener. Celles-ci permettent d'éliminer la dépendance de la variance de la moyenne des observations (inconnue d'avance) et de réduire la considération d'un plan pour l'estimation d'un polynôme homogène à la considération d'un plan pour l'estimation d'une fonctionnelle linéaire dans une expérience modifiée.

ABSTRACT. — The experimental designs for the estimation of polynomials are considered in generalized regression experiments with non correlated observations. Boundaries of the variance of an unbiassed estimate are obtained using the methods of the chaos of Wiener. This allows to eliminate the dependence of the variance from the means of the observed variables (non known *a priori*) and to consider a design for an estimation of a linear functional in a modified experiment instead of the design for an estimation of a homogeneous polynomial.

Une expérience de régression généralisée (avec observations non-corrélées) peut être définie de la façon suivante [*3*] : soit X un espace métrique, compact, muni de la tribu borélienne $\mathscr{F}$. Soit Θ un espace vectoriel de fonctions continues sur X. Un plan d'expérience est une probabilité ξ qui est définie sur $(X, \mathscr{F})$. Les variables qui sont directement observables dans l'expérience sont des variables aléatoires gaussiennes $\{ Y^{\xi}(F) ; F \in \mathscr{F} \}$

(définies sur un espace $(\Omega, \mathscr{S}, P_\theta)$) et ayant les propriétés suivantes ($\theta \in \Theta$) :

$$E_\theta Y^\xi(F) = \int_F \theta d\xi \qquad (F \in \mathscr{F})$$

$$\mathrm{cov}_\theta\,[Y^\xi(F), Y^\xi(F')] = \xi(F \cap F') \qquad (F, F' \in \mathscr{F})$$

$$Y^\xi\Big(\bigcup_{i=1}^{k} F_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} Y^\xi(F_i)\,; \qquad F_i \cap F_j = \varnothing \quad \text{si} \quad i \neq j$$

La fonction $\theta \in \Theta$ correspond à l'état du système physique observé et elle n'est pas connue par l'expérimentateur qui connaît seulement l'espace Θ.

Dans un modèle de régression usuel [*1*] le plan ξ est la distribution des points $x \in X$ d'observations qui ont pour moyennes les valeurs de $\theta(x)$.

Le but d'une expérience est l'estimation de fonctionnelles réelles définies sur Θ. La proposition suivante est valable (pour la démonstration détaillée voir [*3*]).

PROPOSITION 1. — *Soit* $g : \Theta \to \mathbb{R}$ *une fonctionnelle linéaire. Alors dans l'espace* H *des estimateurs linéaires, sous-espace de* $L_2(P)$ *engendrés par les* $Y^\xi(F)$ $(F \in \mathscr{F})$, *il existe un estimateur de g qui est sans biais, si et seulement si*

$$g(\theta) = \int l\theta d\xi \qquad (\theta \in \Theta)$$

pour un élément unique l de la fermeture de Θ *dans* $L_2(X, \mathscr{F}, \xi)$. *La variance minimale d'un estimateur sans biais de g est alors égale à*

$$\int l^2 d\xi = \| l \|^2_{L_2(\xi)} \tag{1}$$

Dénotons comme d'habitude par $\Theta^{\odot i}$ (voir [*2*]) la i-ième puissance tensorielle symétrique de Θ et par $\theta_1 \odot \ldots \odot \theta_k$ l'élément de $\Theta^{\odot i}$

$$\theta_1 \odot \ldots \odot \theta_k = \frac{1}{\sqrt{k\,!}} \sum_\sigma \theta_{\sigma_1} \otimes \ldots \otimes \theta_{\sigma_k}$$

où la somme est faite sur toutes les permutations σ de $\{1, \ldots, k\}$.

Considérons un polynôme p_n de degré n qui est défini sur Θ, c. à. d. une fonctionnelle

$$p_n(\theta) = \sum_{i=0}^{n} g_i(\theta, \ldots, \theta) \qquad (\theta \in \Theta) \tag{2}$$

où $g_i : \Theta^i \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle i-linéaire. Il existe une bijection linéaire qui à chaque polynôme sur Θ de degré n fait correspondre une fonctionnelle linéaire sur $\sum_{i=0}^{n} \Theta^{\odot i}$ [2]. Le but de cet article est de considérer la possibilité d'obtenir des plans d'expérience pour l'estimation de p_n à la base des plans d'expérience pour l'estimation d'une fonctionnelle linéaire sur $\sum_{i=0}^{n} \Theta^{\odot i}$ (ou bien sur $\Theta^{\odot n}$).

Notons maintenant quelques résultats préliminaires qui sont démontrés dans [2]. Supposons pour un instant que $\theta = \Theta$. Il existe un isomorphisme (canonique) ϕ de $L_2(\xi)$ dans H définie par

$$\phi(I_F) = Y^{\xi}(F) \qquad (F \in \mathscr{F}).$$

Soit $\mathscr{B}(H)$ la sous-tribu de $\mathscr{S}$ engendrée par les éléments de H et dénotons par $L_2[\mathscr{B}(H)]$ le sous-espace de $L_2(\Omega, \mathscr{S}, P_0)$ de fonctions mesurables par rapport à $\mathscr{B}(H)$. Il existe un isomorphisme Ψ de l'espace hilbertien $\sum_{i=0}^{\infty} [L_2(\xi)]^{\odot i}$ sur l'espace hilbertien $L_2[\mathscr{B}(H)]$ qui est défini par les égalités :

$$\Psi[\exp \odot f] = \exp\left[\phi(f) - \frac{1}{2} E[\phi^2(f)]\right]; \qquad (f \in L_2(\xi))$$

où $\exp \odot f$ est la somme $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{\odot i}}{i!}$. Il s'ensuit que pour chaque $l \in \sum_{i=0}^{\infty} [L_2(\xi)]^{\odot i}$ nous avons

$$\begin{aligned} E_0[\Psi(l)] &= 0 \\ \operatorname{var}_0 [\Psi(l)] &= \| l \|^2 \end{aligned} \tag{3}$$

où $\| \,.\, \|$ est la norme dans $\sum_{i=0}^{\infty} [L_2(\xi)]^{\odot i}$.

Revenons maintenant à la situation générale de $\theta \neq 0$. Il est démontré dans [2] que

$$\frac{dP_\theta}{dP_0} = \exp\left[\phi(\theta) - \frac{1}{2} E[\phi^2(\theta)]\right]$$

Ainsi pour chaque $l \in \sum_{i=0}^{\infty} [L_2(\xi)]^{\odot i}$ nous avons

$$E_\theta \Psi(l) = \int \Psi(l) \exp\left[\phi(\theta) - \frac{1}{2} E[\phi^2(\theta)]\right] dP_0 = \langle l, \exp \odot \theta \rangle. \tag{4}$$

En accordance avec (2) un estimateur (non-linéaire) $\Psi(l)$ du polynôme p_n est sans biais si et seulement si

$$p_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \langle l_i, \theta^{\odot i} \rangle \tag{5}$$

où $\sum l_i$ est la décomposition de l dans les espaces $[L_2(\xi)]^{\odot i}$. La variance de $\Psi(l)$ sera trouvée dans la proposition 2.

Soit $\{ f_k \}_{k=1}^{\infty}$ une base orthogonale de $L_2(\xi)$. Pour chaque suite d'entiers non-négative $\{ n_k \}_{k \in N}$, les éléments de $\sum_i [L_2(\xi)]^{\odot i}$:

$$f_{\{n_k\}} \equiv \bigodot_{k \in N} \frac{f_k^{\odot n_k}}{\sqrt{n_k!}} \, ; \qquad \left(\sum_{k \in N} n_k = i \right)$$

forment une base orthogonale de $[L_2(\xi)]^{\odot i}$. La base correspondante dans un sous-espace de $L_2[\mathscr{B}(H)]$ est obtenue de la formule [*2*] :

$$\Psi(f_{\{n_k\}}) = \prod_{k \in N} h_{n_k}[\phi(f_k)] \tag{6}$$

où h_n est le n-ième polynôme d'Hermite réel

$$h_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-\frac{x^2}{2}} \, ; \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

Ceci permet d'écrire

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left[x - \frac{d}{dx} \right]^n 1 \, ; \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

(remarquons que h_n est normé de telle façon que

$$\int h_n^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} [2\pi]^{-1/2} dx = 1).$$

Proposition 2. — *Pour chaque* $l \in \sum_{i=0}^{n} [L_2(\xi)]^{\odot i}$

$$\operatorname{var}_\theta \Psi(l) \leq \| l \|^2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{k-1} \binom{k}{s} \frac{\left[\int \theta^2 d\xi \right]^s}{s!} \tag{8}$$

En particulier si $l \in [\mathrm{L}_2(\xi)]^{\odot k}$ *des bornes de* $\mathrm{var}_\theta\, \Psi(l)$ *plus serrées sont données par*

$$\| l \|^2 \leq \mathrm{var}_\theta\, \Psi(l) \leq \| l \|^2 \sum_{s=0}^{k=1} \binom{k}{s} \frac{\left[\int \theta^2 d\xi \right]^s}{s\,!} \tag{9}$$

Démonstration. — 1) Considérons d'abord le cas de $l \in [\mathrm{L}_2(\xi)]^{\odot k}$. La décomposition de l

$$l = \sum_{\Sigma n_i = k} c_{\{n_i\}} f_{\{n_i\}}$$

permet d'écrire que

$$\mathrm{var}_\theta\, \Psi(l) = \mathrm{var}_0 \left\{ \sum_{\Sigma n_i = k} c_{\{n_i\}} \prod_i h_{n_i} \left[\phi(f_i) + \int f_i \theta d\xi \right] \right\} \tag{10}$$

Avec l'aide de (7) nous pouvons écrire la série dans (10) (en la dénotant par $\mathrm{Z}(l)$) comme

$$\mathrm{Z}(l) = \sum_{\Sigma n_i = k} c_{\{n_i\}} \prod_i \frac{1}{\sqrt{n_i\,!}} \left[\phi(f_i) + \int f_i \theta d\xi - \frac{\partial}{\partial \phi(f_i)} \right]^{n_i} 1$$

(La série converge dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{P}_0)$ comme on le voit sur l'expression (11)).

A chaque suite finie $i_1, \ldots, i_k$ d'entiers positifs nous pouvons associer une suite $\{ n_i \}_{i \in \mathrm{N}}$ telle que $\Sigma n_i = k$ et que la suite $i_1, \ldots, i_k$ contient l'entier j exactement n_j fois. Nous dénotons

$$b_{i_1, \ldots, i_r} = c_{\{n_i\}} \sqrt{\frac{\prod_{\mathrm{N}} n_i\,!}{k\,!}}$$

Grâce à la symétrie de $b_{i_1, \ldots, i_k}$ nous avons alors

$$\mathrm{Z}(l) = \frac{1}{\sqrt{k\,!}} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{\infty} b_{i_1, \ldots, i_k} \prod_{s=1}^{k} \left[\phi(f_{i_s}) - \frac{\partial}{\partial \phi(f_{i_s})} + \int f_{i_s} \theta d\xi \right] 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k\,!}} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{\infty} b_{i_1, \ldots, i_k} \prod_{s=1}^{r} \int f_{i_s} \theta d\xi \prod_{t=r+1}^{k} \left[\phi(f_{i_t}) - \frac{d}{d\phi(f_{i_t})} \right] 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k\,!}} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \sum_{i_{r+1}, \ldots, i_k = 1}^{\infty} \left\{ \left[\sum_{i_1, \ldots, i_r = 1}^{\infty} b_{i_1, \ldots, i_k} \prod_{s=1}^{r} \int f_{i_s} \theta d\xi \right] \right.$$

$$\left. \times \sqrt{\prod_{i \in \mathrm{N}} m_i\,!} \prod_{i \in \mathrm{N}} h_{m_i}[\phi(f_i)] \right\}$$

où $\Sigma m_i = k - r$ et où m_i dénote le nombre d'entiers i contenus dans la suite $i_{r+1}, \ldots, i_k$. En utilisant (6), nous obtenons :

$$Z(l) = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r}^{1/2} \Psi \left\{ \sum_{i_{r+1},\ldots,i_k=1}^{\infty} \left[\sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{\infty} b_{i_1,\ldots,i_k} \times \frac{\prod_{s=1}^{r} \int f_{i_s} \theta d\xi}{\sqrt{r!}} \right] f_{i_{r+1}} \otimes \ldots \otimes f_{i_k} \right\} \tag{11}$$

Alors

$$\operatorname{var}_0 Z(l) = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k}{r} \sum_{i_{r+1},\ldots,i_k=1}^{\infty} \left[\sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{\infty} b_{i_1,\ldots,i_k} \frac{\prod_{s=1}^{r} \int f_{i_s} \theta d\xi}{\sqrt{r!}} \right]^2$$

Le premier terme de la somme par rapport à r est égal à $\| l \|^2$, donc $\operatorname{var}_\theta \Psi(l) \geq \| l \|^2$. Finalement

$$\operatorname{var}_0 Z(l) = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k}{r} \frac{1}{r!} \sum_{i_{r+1},\ldots,i_k=1}^{\infty} \left[\left\langle \sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{\infty} b_{i_1,\ldots,i_k} f_{i_1} \otimes \ldots \otimes f_{i_r}, \theta^{\otimes r} \right\rangle \right]^2$$

$$\leq \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k}{r} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} b^2_{i_1,\ldots,i_k} [\| \theta \|^2]^r / r! = \| l \|^2 \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{r} \frac{\left[\int \theta^2 d\xi \right]^r}{r!}$$

2) Passons au cas où $l \in \sum_{i=0}^{n} [L_2(\xi)]^{\odot i}$. En utilisant de nouveau le symbole $Z(l)$ dans l'expression :

$$\operatorname{var}_\theta \Psi(l) = \operatorname{var}_0 Z(l),$$

nous déduisons de (11) la formule suivante valable pour $l \in \sum_{i=0}^{n} [L_2(\xi)]^{\odot i}$:

$$Z(l) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r}^{1/2} \Psi \left\{ \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{\infty} \left[b_{i_1,\ldots,i_k} \frac{\prod_{s=1}^{r} \int f_{i_s} \theta d\xi}{\sqrt{r!}} \bigotimes_{j=r+1}^{k} f_{i_j} \right] \right\}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \Psi' \left\{ \sum_{i_1,\dots,i_r=1}^{\infty} \left[\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{k-r}^{1/2} \sum_{i_{r+1},\dots,i_k=1}^{\infty} b_{i_1,\dots,i_k} \times \frac{\prod_{s=r+1}^{k} \int f_{i_s} \theta d\xi}{\sqrt{(k-r)!}} \right] \bigotimes_{j=1}^{r} f_{i_j} \right\}$$

où, pour obtenir la dernière expression, nous avons changé l'ordre des sommes par rapport à r et à k et ensuite nous avons substitué r à $k - r$. Le terme de (12) qui correspond à $r = 0$ est la moyenne $Z(l)$. Alors

$$\operatorname{var}_0 Z(l) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{i_1,\dots,i_r=1}^{\infty} \left[\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{k-r}^{1/2} \sum_{i_{r+1},\dots,i_k=1}^{\infty} b_{i_1,\dots,i_k} \times \frac{\prod_{s=r+1}^{k} \int f_{i_s} \theta d\xi}{\sqrt{(k-r)!}} \right]^2$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \sum_{i_1,\dots,i_r=1}^{\infty}$$

$$\left[\sum_{k=r}^{n} \left\langle \sum_{i_{r+1},\dots,i_k=1}^{\infty} b_{i_1,\dots,i_k} f_{i_{r+1}} \otimes \dots \otimes f_{i_k}, \binom{k}{k-r}^{1/2} \frac{\theta^{\otimes(k-r)}}{\sqrt{(k-r)!}} \right\rangle \right]^2$$

$$\leq \sum_{r=1}^{n} \left[\sum_{k=r}^{n} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{\infty} b^2_{i_1,\dots,i_k} \right] \left[\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{k-r} \frac{\left[\int \theta^2 d\xi \right]^{k-r}}{(k-r)!} \right]$$

$$\leq \| l \|^2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{k-1} \binom{k}{s} \frac{\left[\int \theta^2 d\xi \right]^{s}}{s!}$$

où après avoir changé l'ordre des sommes par rapport à r et à k nous avons posé $s = k - r$. $\square$

Dans le cas général de $l \in \sum_{i=0}^{n} [L_2(\xi)]^{\odot i}$ l'inégalité $\| l \|^2 \leq \operatorname{var}_\theta \Psi(l)$ n'est pas vraie comme on le voit sur l'exemple suivant. Prenons l'espace X composé seulement d'un point et soit $Y \in N(\theta, 1)$ la variable aléatoire observée dans « l'expérience ». Soit $\Psi = Y^2 + Y$. Alors

$$\operatorname{var}_\theta \Psi = \operatorname{var}_0 \Psi + 4\theta(\theta + 1) < \operatorname{var}_0 \Psi \qquad \text{si} \quad \theta \in (-1, 0).$$

Nous voyons que dans le cas général de l'estimation d'un polynôme, l'évaluation de la variance de l'estimateur $\Psi(l)$ par $\| l \|^2$ est assez grossière. La situation est considérablement meilleure si on estime un polynôme homogène. Le terme $\| l \|^2$ est clairement distingué dans les deux bornes (9) qui sont suffisamment serrées, comme le montre (12). La valeur de $\| l \|^2$ peut être prise comme mesure de la qualité de l'estimateur $\Psi(l)$.

Le corollaire suivant s'obtient immédiatement à partir de la proposition 2 et de (5).

COROLLAIRE. — *Soit p_n un pôlynome homogène de degré n défini sur Θ. Soit $\Theta^{\odot n}$ l'espace vectoriel de fonctions symétriques définis sur X^n engendré par les fonctions*

$$\theta^{\otimes n} : (x_1, \ldots, x_n) \to \theta(x_1) \ldots \theta(x_n) ; \qquad (\theta \in \Theta)$$

et soit g la fonctionnelle linéaire définie sur $\Theta^{\odot n}$ par

$$g(\theta^{\otimes n}) = \sqrt{n!}\ p_n(\theta) ; \qquad (\theta \in \Theta)$$

Soit ξ un plan sur X et soit ξ^n le plan correspondant défini sur X^n. Alors :

1) p_n est estimable sans biais par rapport au plan ξ si et seulement si g est estimable sans biais dans l'expérience donnée par le plan ξ^n et l'espace $\Theta^{\odot n}$;

2) A chaque estimateur sans biais de p_n, soit Ψ, nous pouvons associer un estimateur sans biais de g, U, tel que pour chaque $\theta \in \Theta$

$$\text{var } U \leq \text{var}_\theta \Psi \leq \text{var } U \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} \frac{\left[\int \theta^2 d\xi \right]^r}{r!} \tag{13}$$

Inversement, si U* est l'estimateur de g qui est sans biais et de variance minimale alors il existe un estimateur de p_n, Ψ^*, et tel que (13) est valable pour U* et ξ^*.

3) Le plan ξ^* est optimal pour l'estimation de p_n si et seulement si ξ^{*n} est optimal pour l'estimation de g dans l'ensemble des plans de la forme ξ^n.

REMERCIEMENTS

Je remercie M. J. Neveu pour les fructueuses discussions que nous avons eues sur ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. KARLIN, W. J. STUDDEN, Optimal Experimental Designs. *Ann. Math. Statistics*, t. **37**, 1966, p. 783-815.

[2] J. NEVEU, *Processus aléatoires gaussiens.* Presses de l'Université de Montréal, 1968.

[3] A. PÁZMAN, *The Ordering of Experimental Designs. A Hilbert Space Approach.* Kybernetika (Prague), t. **10**, 1974, p. 373-388.

(Manuscrit reçu le 2 juin 1977)