ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

R. FORTET

Condition de Doeblin et quasi-compacité

Annales de l'I. H. P., section B, tome 14, nº 4 (1978), p. 379-390

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_4_379_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIV, n° 4, 1978, p. 379-390.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Condition de Doeblin et quasi-compacité

par

R. FORTET (*)
Laboratoire de Probabilités, Tour 56,
4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — Soient $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ un espace mesurable, et $\mathscr{M}$ l'espace de Banach des fonctions d'ensemble m σ-additives à variation totale bornée sur $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$; une probabilité de transition $P(x; dy)$ de $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ dans $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$, détermine un opérateur P dans $\mathscr{M}$, par : $m \overset{P}{\rightarrow} n$ avec :

$$n(e) = \int_{\mathscr{X}} P(x; e) m(dx).$$

Il est connu que la « condition de Doeblin » est suffisante pour que P soit quasi-compact; cependant à ma connaissance, les démonstrations publiées (cf. par exemple [*1*], p. 192 et suivantes) nécessitent quelque hypothèse restrictive sur $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$. L'objet du présent article est de fournir une démonstration libre de toute restriction.

SUMMARY. — Let $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ be a measurable space, and $\mathscr{M}$ be the Banach space of the set functions over $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$, which are σ-additive with bounded total variation. A transition probability $P(x; dy)$ from $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ into $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$, determines an operator P in $\mathscr{M}$, by : $m \overset{P}{\rightarrow} n$, with :

$$n(e) = \int_{\mathscr{X}} P(x; e) m(dx).$$

(*) Laboratoire associé au C. N. R. S. (N° 224) « Processus stochastiques et applications ».

It is known that « Doeblin's Condition » is sufficient, for P being quasi-compact; published proofs however, assume some restrictive assumption about $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$. The aim of the present paper, is to establish a proof, free of any assumption.

1° PRÉLIMINAIRES

Soient : $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ un espace mesurable ; $\mathscr{M}$ l'espace de Banach, avec sa norme habituelle, des fonctions (numériques complexes) m de $e \in \mathscr{B}$, σ-additives et à variation totale bornée sur $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$. $m \in \mathscr{M}$ est une mesure, si $\forall e \in \mathscr{B}$, $m(e)$ est réel $\geqq 0$; $\mathscr{M}^+ \subset \mathscr{M}$ désignera l'ensemble des mesures. A $m \in \mathscr{M}$, s'associent sa variation absolue $|m| \in \mathscr{M}^+$, et sa norme ou variation totale $\|m\|$ $(= |m|(\mathscr{X}))$ dans $\mathscr{M}$.

« Opérateur » signifiera : une application linéaire bornée d'un espace de Banach B_1 dans un espace de Banach B_2 ; si $B_2 = B_1$, nous dirons : opérateur dans B_1.

Rappelons qu'un opérateur A dans B_1 est dit *quasi-compact* si $\exists$ un entier $r > 0$ et un opérateur compact U dans B_1, tels que : $\| A^r - U \| < 1$. Le transformé d'un élément a par un opérateur A sera noté $A \circ a$.

Soient $m \in \mathscr{M}^+$, $n \in \mathscr{M}$, et :

$$\forall e \in \mathscr{B}, \qquad n(e) = A(e) + \Delta(e) \tag{1,1}$$

la décomposition de Lebesgue de n par rapport à m, où : $A(\cdot)$ est la partie de n absolument continue par rapport à m, et $\Delta(\cdot)$ sa partie disjointe de m. On a :

$$\forall e \in \mathscr{B}, \qquad |n|(e) = |A|(e) + |\Delta|(e).$$

Si $m_1, m_2 \in \mathscr{M}^+$, on a :

$$\forall e \in \mathscr{B}, \qquad |m_1 + m_2|(e) = |m_1|(e) + |m_2|(e). \tag{1,2}$$

Pour $m_1, m_2 \in \mathscr{M}^+$, nous écrirons : $m_1 < m_2$, si : $\forall e \in \mathscr{B}$, $m_1(e) \leqq m_2(e)$.

π-opérateurs. — Un opérateur Φ dans $\mathscr{M}$, est un π-opérateur, si : $\forall m \in \mathscr{M}^+$, $\Phi \circ m \in \mathscr{M}^+$. Si Φ est un π-opérateur, si $m_1, m_2 \in \mathscr{M}^+$ et si $m_1 < m_2$, $\Phi \circ m_1 < \Phi \circ m_2$.

μ-opérateurs. — Un opérateur Φ dans $\mathscr{M}$, est un μ-opérateur, si Φ est un π-opérateur, et si :

$$\forall m \in \mathscr{M}, \qquad \forall e \in \mathscr{B}, \qquad |(\Phi \circ m)(e)| \leqq (\Phi \circ |m|)(e).$$

Si Φ est un μ-opérateur :

1° $\quad \forall e \in \mathscr{B}, \quad \forall m \in \mathscr{M}, \quad |\Phi \circ m|(e) \leqq (\Phi \circ |m|)(e)$;

2° $\quad |\Phi \circ m| < \Phi \circ |m|, \quad \|\Phi \circ m\| \leqq \|\Phi \circ |m|\|$.

Réciproquement, si Φ est un opérateur dans $\mathscr{M}$, si

$$\forall m \in \mathscr{M} \qquad |\Phi \circ m| < \Phi \circ |m|,$$

Φ est un μ-opérateur.

Si Φ, Ψ sont des μ-opérateurs, $\Psi\Phi$ est un μ-opérateurs.

Exemple (1,1)

Soient : $m_0 \in \mathscr{M}^+$, $m \in \mathscr{M}$, et : $m(\cdot) = \mathrm{A}(\cdot) + \Delta(\cdot)$ la décomposition de Lebesgue (1,1) de m par rapport à m_0 ; soient : D l'application qui, à m fait correspondre A ; S l'application qui à m fait correspondre Δ. D, S sont des μ-opérateurs.

Exemple (1,2)

Soit $\mathrm{H}(\cdot, \cdot)$ une fonction de $(x, e) \in \mathscr{X} \times \mathscr{B}$, bornée et telle que :

1° $\forall x \in \mathscr{X}$, $\mathrm{H}(x, \cdot)$ est une mesure.

2° $\forall e \in \mathscr{B}$, $\mathrm{H}(\cdot, e)$ est une fonction $\mathscr{B}$-mesurable.

A $m \in \mathscr{M}$, faisons correspondre $n \in \mathscr{M}$ par :

$$n(\cdot) = \int_{\mathscr{X}} \mathrm{H}(x, \cdot) m(dx); \tag{1,3}$$

nous définissons ainsi un opérateur H dans $\mathscr{M}$; de :

$$\forall e \in \mathscr{B}, \qquad |n(e)| \leqq \int_{\mathscr{X}} \mathrm{H}(x, e)\, |m|(dx)$$

résulte :

$$|n|(e) \leqq \int_{\mathscr{X}} \mathrm{H}(x, e)\, |m|(dx),$$

donc : sous les conditions 1°, 2°, H est un μ-opérateur. ■

Soient Φ, Ψ des opérateurs dans $\mathscr{M}$:

— si Φ, Ψ sont des π-opérateurs, $\Phi + \Psi$ est un π-opérateur ;

— si Φ, Ψ sont des μ-opérateurs, $\Phi + \Psi$ est un μ-opérateur.

L'espace $\mathscr{M}_0$:

Soit $m_0 \in \mathscr{M}^+$ déterminée quelconque ; nous désignerons par $\mathscr{M}_0$ l'ensemble des $m \in \mathscr{M}$, qui sont absolument continues par rapport à m_0 ; soient $m \in \mathscr{M}_0$, et $\sigma(\cdot)$ la densité de m par rapport à m_0 ; on a :

$$\sigma(\cdot) \in \mathrm{L}^1(\mathscr{X}, \mathscr{B}, m_0) ;$$

la formule :

$$\forall e \in \mathscr{B}, \qquad m(e) = \int_e \sigma(x) m_0(dx)$$

est une application bijective et isométrique de $\mathrm{L}^1(\mathscr{X}, \mathscr{B}, m_0)$ sur $\mathscr{M}_0$, qui est un sous-espace de Banach de $\mathscr{M}$.

Les notions de π-opérateur, de μ-opérateur s'adaptent au cas de $\mathscr{M}_0$ au lieu de $\mathscr{M}$. ■

En règle générale, pour un ensemble e, $\check{e}$ désignera son complémentaire.

2° LA CONDITION DE DOEBLIN

Soit $\mathrm{P}(x ; dy)$ une probabilité de transition dans $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$:

$\forall x \in \mathscr{X}$, $\mathrm{P}(x ; \cdot)$ est une mesure sur $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ avec : $\mathrm{P}(x ; \mathscr{X}) = 1$;
$\forall e \in \mathscr{B}$, $\mathrm{P}(\cdot ; e)$ est $\mathscr{B}$-mesurable.

Définissons les itérées $\mathrm{P}(h | x ; dy)$ ($h = 1, 2, \ldots$) par la récurrence :

$$\mathrm{P}(1 \mid x ; dy) = \mathrm{P}(x ; dy) ; \quad \mathrm{P}(h + 1 \mid x ; dy) = \int_{\mathscr{X}} \mathrm{P}(h | z ; dy) \mathrm{P}(x ; dz)$$
$$= \int_{\mathscr{X}} \mathrm{P}(z ; dy) \mathrm{P}(h | x ; dz) ;$$

par la formule :

$$\forall e \in \mathscr{B}, \qquad n(e) = \int_{\mathscr{X}} \mathrm{P}(x ; e) m(dx),$$

$\mathrm{P}(x ; dy) = \mathrm{P}(1 | x ; dy)$ définit un opérateur P dans $\mathscr{M}$; plus généralement, la formule :

$$\forall e \in \mathscr{B}, \qquad n(e) = \int_{\mathscr{X}} \mathrm{P}(h \mid x ; e) m(dx),$$

définit un opérateur dans $\mathscr{M}$, qui n'est autre que P^h. On a :

$$\| \mathrm{P} \| = \| \mathrm{P}^h \| = 1. \qquad ■$$

r étant un entier > 0, P satisfait à la condition (D_r) de Doeblin, si $\exists \eta > 0$ et une *mesure de probabilité* $m_0(dx)$ sur $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$, tels que : $\forall x \in \mathscr{X}$, $\forall \omega \in \mathscr{B}$ tel que $m_0(\omega) \leqq \eta$, $\mathrm{P}(r \mid x ; \omega) \leqq 1 - \eta$.

P satisfait à la condition (D) de Doeblin, si $\exists$ un entier $r > 0$ et fini, tel que P satisfait à (D_r). ■

Avec les notations ci-dessus, supposons dorénavant que P satisfait à la condition (D_1).

Sur $(\mathscr{X} \times \mathscr{X}, \mathscr{B} \otimes \mathscr{B})$, considérons :

— la mesure produit $m_0 \times m_0$;

— la mesure n_0 définie par :

$$\forall e \in \mathscr{B} \otimes \mathscr{B}, \qquad n_0(e) = \iint_e P(x\,;\,dy)m_0(dx)\,;$$

introduisons la décomposition de Lebesgue de n_0 par rapport à $m_0 \times m_0$, soit :

$$n_0 = A_0 + \Delta_0\,,$$

où A_0, de densité $\rho_0(x, y)$, est la partie absolument continue, tandis que Δ_0 est la partie disjointe.

Soit $N \in \mathscr{B} \otimes \mathscr{B}$ tel que : $(m_0 \times m_0)(N) = 0$ et que : $\forall e \in \mathscr{B} \otimes \mathscr{B}$, $\Delta_0(e) = \Delta_0(e \cap N)$; $\forall x \in \mathscr{X}$, soit :

$$N_x = \{ (x', y') \in \mathscr{X} \times \mathscr{X} \mid (x', y') \in N,\ x' = x \} \ldots.$$

On a :

LEMME (2,1). — $\exists\, U_1 \in \mathscr{B}$ tel que : $m_0(U_1) = 0$ et que : $\forall x \notin U_1$, $m_0(N_x) = 0$. ■

Définissons $\Omega \in \mathscr{B} \otimes \mathscr{B}$; et $\forall x \in \mathscr{X}$, $\Omega_x \in \mathscr{B}$, par :

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathscr{X} \times \mathscr{X} \mid \rho_0(x, y) > \frac{1}{\eta} \right\}$$

$$\Omega_x = \{ (x', y') \in \mathscr{X} \times \mathscr{X} \mid (x', y') \in \Omega,\ x' = x \}\,.$$

$\forall A \in \mathscr{B}$, on a :

$$m_0(A) = n_0(A \times \mathscr{X}) \geqq \int_A \left[\int_{\Omega_x} \rho_0(x, y)m_0(dy) \right] m_0(dx) \geqq \frac{1}{\eta} \int_A m_0(\Omega_x)m_0(dx)\,;$$

donc :

LEMME (2,2). — $\exists\, U_2 \in \mathscr{B}$, tel que $m_0(U_2) = 0$ et que : $\forall x \notin U_2$, $m_0(\Omega_x) \leqq \eta$. ■

Posons :

1°
$$\rho_1(x, y) = \begin{cases} \rho_0(x, y) & \text{si } (x, y) \notin \Omega\,, \\ \dfrac{1}{\eta} & \text{si } (x, y) \in \Omega\,. \end{cases} \tag{2,1}$$

2°
$$\rho_2(x, y) = \rho_0(x, y) - \rho_1(x, y)\,,$$

de sorte que :

$$\rho_2(x, y) \geqq 0, \qquad \rho_2(x, y) = 0 \qquad \text{si} \quad (x, y) \notin \Omega.$$

3° $$\mathrm{M} = \mathrm{N} \cup \Omega, \qquad \mathrm{M}_x = \mathrm{N}_x \cup \Omega_x. \qquad \blacksquare$$

Pour tout $e \in \mathscr{B} \otimes \mathscr{B}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} n_0(e) &= \iint_e \mathrm{P}(x\,; dy) m_0(dx) \\ &= \iint_e \rho_1(x, y) m_0(dx) m_0(dy) + \iint_e \rho_2(x, y) m_0(dx) m_0(dy) + \Delta_0(e). \end{aligned}$$

Prenons $e = \mathrm{A} \times \omega$, avec : $\mathrm{A}, \omega \in \mathscr{B}$; on a :

$$n_0(\mathrm{A} \times \omega) = n_0((\mathrm{A} \times \omega) \cap \mathrm{M}) + n_0((\mathrm{A} \times \omega) \cap \check{\mathrm{M}})\,;$$

$\Delta_0((\mathrm{A} \times \omega) \cap \check{\mathrm{M}}) = 0$; $\rho_2(x, y) = 0$ si $\{ x, y \} \in \check{\mathrm{M}}$; donc :

$$n_0[(\mathrm{A} \times \omega) \cap \check{\mathrm{M}}] = \int_{\mathrm{A}} \left[\int_{\omega \cap \check{\mathrm{M}}_x} \rho_1(x, y) m_0(dy) \right] m_0(dx)\,; \tag{2,1}$$

comme :

$$\int_{\omega \cap \mathrm{M}_x} \rho_2(x, y) m_0(dy) = \int_{\omega \cap \Omega_x} \rho_2(x, y) m_0(dy)\,;$$

et que :

$$\Delta_0[(\mathrm{A} \times \omega) \cap \mathrm{M}] = \Delta_0[(\mathrm{A} \times \omega) \cap \mathrm{N}],$$

il vient :

$$\begin{aligned} n_0[(\mathrm{A} \times \omega) \cap \mathrm{M}] &= \int_{\mathrm{A}} \int_{\omega \cap \mathrm{M}_x} \mathrm{P}(x\,; dy) m_0(dx) = \int_{\mathrm{A}} \mathrm{P}(x\,; \omega \cap \mathrm{M}_x) m_0(dx) \\ &= \int_{\mathrm{A}} \left[\int_{\omega \cap \mathrm{M}_x} \rho_1(x, y) m_0(dy) \right] m_0(dx) \\ &\quad + \int_{\mathrm{A}} \left[\int_{\omega \cap \Omega_x} \rho_2(x, y) m_0(dy) \right] m_0(dx) + \Delta_0[(\mathrm{A} \times \omega) \cap \mathrm{N}]\,; \end{aligned} \tag{2,2}$$

mais si $x \notin \mathrm{U}_1 \cup \mathrm{U}_2$, on a :

$$m_0(\omega \cap \mathrm{M}_x) \leqq m_0(\mathrm{N}_x) + m_0(\Omega_x) = m_0(\Omega_x) \leqq \eta\,;$$

donc :

$$\mathrm{P}(x\,; \omega \cap \mathrm{M}_x) < 1 - \eta \qquad \text{si} \quad x \notin \mathrm{U}_1 \cup \mathrm{U}_2\,; \tag{2,3}$$

d'ailleurs $m_0(\mathrm{U}_1 \cup \mathrm{U}_2) = 0$; posons :

$$\Phi_0(\mathrm{A}\,; \omega) = \int_{\mathrm{A}} \left[\int_{\omega \cap \Omega_x} \rho_2(x, y) m_0(dy) \right] m_0(dx) + \Delta_0[(\mathrm{A} \times \omega) \cap \mathrm{N}]\,;$$

de (2,2) et (2,3), on tire :

$$0 \leqq \Phi_0(A, \omega) \leqq (1 - \eta)m_0(A), \qquad \forall A, \omega \in \mathscr{B}.$$

Donc, pour tout $\omega \in \mathscr{B}$ *fixé*, il existe une fonction $\phi_0(x\,;\omega)$ qui, en x, est mesurable $- \mathscr{B}$, telle que :

$$0 \leqq \phi_0(x, \omega) \leqq 1 - \eta \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathscr{X},$$

et que :

$$\Phi_0(A, \omega) = \int_A \phi_0(x\,;\omega)m_0(dx) \qquad \text{pour tout} \quad A \in \mathscr{B}. \tag{2,4}$$

D'autre part, l'addition de (2,1) et (2,2) donne :

$$\begin{aligned} n_0(A \times \omega) &= \int_A P(x\,;\omega)m_0(dx) \\ &= \int_A \left[\int_\omega \rho_1(x, y)m_0(dy)\right] m_0(dx) + \Phi_0(A, \omega), \end{aligned} \tag{2,5}$$

pour tous A, $\omega \in \mathscr{B}$.

De (2,4) et (2,5), il résulte donc que :

LEMME (2,3). — Pour tout $\omega \in \mathscr{B}$ fixé, il existe $L(\omega) \in \mathscr{B}$ et une fonction $\phi_0(x\,;\omega)$ de $\{x, \omega\} \in \mathscr{X} \times \mathscr{B}$; tels que :

1° $m_0[L(\omega)] = 0$;

2° $\phi_0(\cdot\,;\omega)$ est $\mathscr{B}$-mesurable, avec :

$$\forall x \in \mathscr{B}, \qquad 0 \leqq \phi_0(x\,;\omega) \leqq 1 - \eta.$$

3° $$\forall x \notin L(\omega), \qquad P(x\,;\omega) = \int_\omega \rho_1(x, y)m_0(dy) + \phi_0(x\,;\omega).$$

3. Désignons par Θ l'opérateur dans $\mathscr{M}$ qui, à $m \in \mathscr{M}$, fait correspondre $l \in \mathscr{M}$ par :

$$\forall e \in \mathscr{B}, \quad l(e) = \int_{\mathscr{X}} \left[\int_e \rho_1(x, y)m_0(dy)\right] m(dx) = \int_e \left[\int_{\mathscr{X}} \rho_1(x, y)m(dx)\right] m_0(dy)\,;$$

posons :

$$\Phi = P - \Theta.$$

Soient : $\mathscr{M}_0$ le sous-espace de Banach de $\mathscr{M}$, ensemble des $m \in \mathscr{M}$ absolument continues par rapport à m_0 (cf. § 1) ; Φ_0 la restriction de Φ à $\mathscr{M}_0$.

Soit $m \in \mathcal{M}_0$, de densité $\sigma(\cdot)$ par rapport à m_0 ; soit l la transformée de m par P ; $\forall \omega \in \mathcal{B}$ fixé, on a :

$$
\begin{aligned}
l(\omega) &= \int_{\mathcal{X}} \mathrm{P}(x\,;\,\omega)m(dx) \\
&= \int_{\mathcal{X}} \mathrm{P}(x\,;\,\omega)\sigma(x)m_0(dx) \\
&= \int_{\mathcal{X}-\mathrm{L}(\omega)} \mathrm{P}(x\,;\,\omega)\sigma(x)m_0(dx) + \int_{\mathrm{L}(\omega)} \mathrm{P}(x\,;\,\omega)\sigma(x)m_0(dx)\,; \qquad (3,1)
\end{aligned}
$$

d'après le Lemme (2,3), $m_0[\mathrm{L}(\omega)] = 0$; donc (3,1) se réduit à :

$$
l(\omega) = \int_{\mathcal{X}-\mathrm{L}(\omega)} \mathrm{P}(x\,;\,\omega)\sigma(x)m_0(dx)\,;
$$

toujours d'après le Lemme (2,3), ceci s'écrit :

$$
\begin{aligned}
l(\omega) = &\int_{\mathcal{X}-\mathrm{L}(\omega)} \left[\int_{\omega} \rho_1(x,\, y)m_0(dy)\right]\sigma(x)m_0(dx) \\
&+ \int_{\mathcal{X}-\mathrm{L}(\omega)} \phi_0(x\,;\,\omega)\sigma(x)m_0(dx)\,;
\end{aligned}
$$

donc, toujours parce que $m_0[\mathrm{L}(\omega)] = 0$, on a :

$$
\begin{aligned}
l(\omega) &= \int_{\mathcal{X}} \left[\int_{\omega} \rho_1(x,\, y)m_0(dy)\right]\sigma(x)m_0(dx) + \int_{\mathcal{X}} \phi_0(x\,;\,\omega)\sigma(x)m_0(dx) \\
&= (\Theta \circ m)(\omega) + \int \phi_0(x\,;\,\omega)\sigma(x)m_0(dx)\,;
\end{aligned}
$$

en introduisant les opérateurs D, S de la décomposition de Lebesgue par rapport à m_0 (cf. § 1), il vient :

LEMME (3,1). — La restriction Φ_0 de Φ à $\mathcal{M}_0$ s'écrit :

$$
\forall \omega \in \mathcal{B}, \qquad (\Phi_0 \circ m)(\omega) = \int_{\mathcal{X}} \phi_0(x\,;\,\omega)(\mathrm{D} \circ m)(dx)\,. \qquad \blacksquare
$$

Toujours avec $m \in \mathcal{M}_0$ et les mêmes notations, posons :

$$
r = \Phi_0 \circ m, \qquad r(\omega) = (\Phi_0 \circ m)(\omega)
$$

soit $\{\, \omega_j,\, j = 1, 2, \ldots \}$ une partition *finie* de ω ; on a :

$$
\forall j, \qquad |\, r(\omega_j)\,| \leqq \int_{\mathcal{X}} \phi_0(x\,;\,\omega_j)\,|\,\sigma(x)\,|\, m_0(dx)\,,
$$

$$
\sum_j |\, r(\omega_j)\,| \leqq \int_{\mathcal{X}} \left[\sum_j \phi_0(x\,;\,\omega_j)\right] |\,\sigma(x)\,|\, m_0(dx)\,;
$$

pour *tout* x, $P(x\,;\omega)$ et $\int_\omega \rho_1(x, y)m_0(dy)$ sont des mesures en ω ; pour tout $x \in \bigcup_j L(\omega_j)$, on a donc :

$$\sum_j \phi_0(x\,;\omega_j) = \phi_0\Big(x\,;\bigcup_j \omega_j\Big) = \phi_0(x\,;\omega)\,;$$

or :

$$m_0\Big[\bigcup_j L(\omega_j)\Big] = 0\,;$$

donc :

$$\int_{\mathscr{X}}\Big[\sum_j \phi_0(x\,;\omega_j)\Big]|\,\sigma(x)\,|\,m_0(dx) = \int_{\mathscr{X}-\bigcup_j L(\omega_j)}\Big[\sum_j \phi_0(x\,;\omega_j)\Big]|\,\sigma(x)\,|\,m_0(dx)$$

$$= \int_{\mathscr{X}-\bigcup_j L(\omega_j)} \phi_0(x\,;\omega)\,|\,\sigma(x)\,|\,m_0(dx)$$

$$= \int_{\mathscr{X}} \phi_0(x\,;\omega)\,|\,\sigma(x)\,|\,m_0(dx)\,;$$

donc :

$$|\,r\,|(\omega) \leqq \int_{\mathscr{X}} \phi_0(x\,;\omega)\,|\,\sigma(x)\,|\,m_0(dx)\,,$$

de sorte que :

$$|\,r\,|(\omega) \leqq (1-\eta)\,||\,m\,||\,, \qquad ||\,r\,|| \leqq (1-\eta)\,||\,m\,||\,,$$
$$|\,\Phi_0(m)\,| < \Phi_0(\,|\,m\,|\,)\,.$$

LEMME (3,2). — La restriction Φ_0 de Φ à $\mathscr{M}_0$, est un μ-opérateur, de norme $\leqq (1-\eta)$. ■

Posons :

$$\delta(\omega) = (\mathrm{SP} \circ |\,m\,|)(\omega)\,;$$

soit $l(\cdot) \in \mathscr{M}^+$ définie par :

$$\forall \omega \in \mathscr{B}, \qquad l(\omega) = \int_{\mathscr{X}} P(x\,;\omega)\,|\,m\,|\,(dx)\,;$$

$\delta(\omega)$ est la partie disjointe, par rapport à m_0, de $l(\cdot)$; il existe donc $V \in \mathscr{B}$ tel que :

$$m_0(V) = 0, \qquad \delta(\omega) = \delta(\omega \cap V)\,;$$

or :

$$\delta(\omega \cap V) \leqq l(\omega \cap V) = \int_{\mathscr{X}} P(x\,;\omega \cap V)\,|\,m\,|\,(dx)\,;$$

$m_0(\omega \cap V) \leqq m_0(V) = 0 < \eta$, donc : $P(x ; \omega \cap V) \leqq 1 - \eta$; il vient :

$$\delta(\omega) \leqq (1 - \eta) \, | \, m \, | \, (\mathscr{X}) = (1 - \eta) \, || \, m \, || :$$

LEMME (3,3). — L'opérateur SP est de norme $\leqq (1 - \eta)$. ■

On peut écrire :

$$P = DP + SP, \tag{3,4}$$

$$P^2 = PDP + PSP = \Theta DP + Q, \tag{3,5}$$

avec :

$$Q = \Phi DP + PSP.$$

P, D, S, Θ sont des μ-opérateurs; $\forall m \in \mathscr{M}$, $DP \circ m \in \mathscr{M}_0$; d'après (3,3) et (3,2) :

$$| \Phi DP \circ m | = | \Phi_0 DP \circ m | < \Phi_0 \circ | DP \circ m | < \Phi_0 DP \circ | m | ;$$

en particulier :

$$|| \Phi_0 DP \circ m || \leqq || \Phi_0 DP \circ | m | \, || \leqq (1 - \eta) || DP \circ | m | \, || ;$$

d'après l'Exemple (1,1), (3,4) et (1,2) :

$$|| P \circ | m | \, || = || DP \circ | m | \, || + || SP \circ | m | \, || ;$$

et puisque $|| P || = 1$:

$$|| \Phi DP \circ m || \leqq (1 - \eta) || P \circ | m | \, || - (1 - \eta) || SP \circ | m | \, ||$$

$$\begin{aligned} || Q \circ m || &\leqq || \Phi DP \circ m || + || PSP \circ m || \\ &\leqq (1 - \eta) || P \circ | m | \, || - (1 - \eta) || SP \circ | m | \, || + || SP \circ | m | \, || \\ &\leqq (1 - \eta) || m || + \eta \, || SP \circ | m | \, || . \end{aligned}$$

Du Lemme (3,3) résulte :

$$|| Q \circ m || \leqq (1 - \eta^2) || m ||,$$

donc :

$$|| Q || \leqq (1 - \eta^2). \quad ■ \tag{3,6}$$

D'après (3,5) :

$$\begin{aligned} P^3 &= P(\Theta DP + Q) = P\Theta DP + PQ \\ &= (\Theta + \Phi)\Theta DP + PQ \\ &= \Theta^2 DP + (\Phi\Theta DP + PQ) ; \end{aligned} \tag{3,7}$$

or :

$$|| \Phi\Theta DP \circ m || \leqq || \Phi_0 \circ | \Theta DP \circ m | \, || \leqq (1 - \eta) || \Theta DP \circ | m | \, || ;$$

et d'après (3,5) :

$$|| P^2 \circ | m | \, || = || \Theta DP \circ | m | \, || + || Q \circ | m | \, || ;$$

il vient donc :

$$\|\Phi\Theta DP\circ m\| \leqq (1-\eta)\|P^2\circ|m|\| - (1-\eta)\|Q\circ|m|\|,$$

$$\|(\Phi\Theta DP + PQ)\circ m\| \leqq (1-\eta)\|P^2\circ|m|\| - (1-\eta)\|Q\circ|m|\| + \|PQ\circ|m|\|;$$

soit puisque $\|P^2\| = \|P\| = 1$:

$$\|(\Phi\Theta DP + PQ)\circ m\| \leqq (1-\eta)\|m\| + \eta\|Q\circ|m|\|,$$

donc avec le Lemme (3,2) et (3,6) :

$$\|(\Phi\Theta DP + PQ)\circ m\| \leqq (1-\eta^3)\|m\|,$$

d'où :

$$\|\Phi\Theta DP + PQ\| \leqq (1-\eta^3). \quad \blacksquare \tag{3,8}$$

Considérons maintenant l'opérateur $\Theta^2 DP$; désignons par :

— $\mathscr{I}$ l'isométrie de $\mathscr{M}_0$ sur $L^1(\mathscr{X}, \mathscr{B}, m_0)$ qui, à $m \in \mathscr{M}_0$, fait correspondre dans $L^1(\mathscr{X}, \mathscr{B}, m_0)$, la densité de m par rapport à m_0 ;

— ρ_0 (*) l'opérateur dans $L^1(\mathscr{X}, \mathscr{B}, m_0)$ qui, à $f \in L^1(\mathscr{X}, \mathscr{B}, m_0)$, fait correspondre $g \in L^1(\mathscr{X}, \mathscr{B}, m_0)$ par la formule :

$$\forall x \in \mathscr{X}, \qquad g(x) = \int_{\mathscr{X}} \rho_1(x, y) f(x) m_0(dx).$$

Notons que :

1° Si $\quad m \in \mathscr{M}_0, \quad \Theta \circ m = (\mathscr{I}^{-1}\rho_0\mathscr{I})\circ m$;

2° $\quad \forall m \in \mathscr{M}, \quad DP\circ m \in \mathscr{M}_0$;

3° $\quad \forall m \in \mathscr{M}, \quad \Theta\circ m \in \mathscr{M}_0$.

On peut écrire :

$$\Theta^2 DP = \mathscr{I}^{-1}\rho_0\mathscr{I}\mathscr{I}^{-1}\rho_0\mathscr{I}DP = \mathscr{I}^{-1}\rho_0^2\mathscr{I}DP.$$

Compte tenu de la définition (2,1) de $\rho_1(x, y)$, un théorème classique permet d'affirmer que, dans $L^1(\mathscr{X}, \mathscr{B}, m_0)$, ρ_0^2 est un opérateur compact ; $\mathscr{I}^{-1}$, étant une isométrie, transforme tout ensemble relativement compact de $L^1(\mathscr{X}, \mathscr{B}, m_0)$, en un sous-ensemble relativement compact de $\mathscr{M}_0$, donc en un sous-ensemble relativement compact de $\mathscr{M}$; ainsi, $\Theta^2 DP$ est un opérateur compact dans $\mathscr{M}$; de (3,7) et (3,8) résulte :

LEMME (3,4). — Si P satisfait à la condition (D_1), P est quasi compact. $\blacksquare$

Maintenant, dire que P satisfait à la condition (D_r), équivaut à dire que P^r satisfait à la condition (D_1) ; donc :

(*) Nous adoptons cette solution pour différencier le « rhô » majuscule de la lettre P majuscule.

THÉORÈME (3,1). — Si P satisfait à la condition (D), P est quasi compact; plus précisément, si P satisfait à la condition (D_r) avec (m_0, η) comme ci-dessus, P^{3r} se met sous la forme : $P^{3r} = U + V$, où U est un opérateur compact, et où $\| V \| \leqq 1 - \eta^3$. ■

L'intérêt de la quasi-compacité de P, déjà marquée dans des travaux relativement anciens de Krylov, Bogoliubov, Fortet, Yosida, est rappelée dans l'article récent [*2*].

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] J. L. DOOB, *Stochastic processes*. John Wiley edit., N. Y., 1962.
[*2*] A. BRUNEL et D. REVUZ, Quelques applications probabilistes de la quasi-compacité. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, section B, t. **10**, 1974, p. 301.

(Manuscrit reçu le 19 mai 1978)