ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JACQUES FRANCHI
YVES LE JAN

Sur les trajectoires intrinsèques des processus de Markov et le théorème de Shih

Annales de l'I. H. P., section B, tome 20, nº 2 (1984), p. 103-126
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1984__20_2_103_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 20, n° 2, 1984, p. 103-126. *Probabilités et Statistiques*

Sur les trajectoires intrinsèques des processus de Markov et le théorème de Shih

par

Jacques FRANCHI et Yves LE JAN (*)

RÉSUMÉ. — Le propos de ce travail est de montrer comment les distributions d'entrée déterminent la loi des trajectoires intrinsèques des processus de Markov, en utilisant les propriétés d'une algèbre de temps d'arrêt intrinsèques appelés « temps arborescents », et d'en déduire le théorème de Shih. On redémontre au passage les théorèmes de Chacon-Jamison et de Blumenthal-Getoor-Mc Kean.

ABSTRACT. — The purpose of this work is to study how the entrance distributions determine the law of intrinsic trajectories of Markov processes, using a lattice of intrinsic stopping times called « arborescent times » and obtain in this way Shih's theorem. It includes proofs of Chacon-Jamison and Blumenthal-Getoor-Mc Kean theorems.

INTRODUCTION

Blumenthal, Getoor et Mc Kean ont montré en 1962 ([*2*]) que deux processus standards ayant mêmes distributions d'entrée dans les compacts diffèrent par un changement de temps inverse d'une fonctionnelle additive (la réciproque étant évidente).

Une nouvelle démonstration du théorème a été donnée par Chacon

(*) Université Paris VI, Laboratoire de Probabilités, 4, place Jussieu, Tour 56, 3e étage, 75230 Paris Cedex 05.

et Jamison dans [*4*]. Cette démonstration est basée sur le théorème de Chacon et Jamison qui montre que les arcs de trajectoire des processus de Markov sans point d'arrêt sont parcourus de manière déterministe.

C. T. Shih a étendu dans [*8*] le résultat du théorème de Blumenthal-Getoor-Mc Kean en montrant qu'un processus standard dont les distributions d'entrée dans les compacts sont majorées par celles d'un autre processus standard s'en déduit par une subordination et un changement de temps.

Le propos de ce travail est de montrer comment les distributions d'entrée déterminent les trajectoires intrinsèques des processus de Markov, en utilisant les propriétés d'une algèbre de temps d'arrêt intrinsèques appelés « temps arborescents », et d'en déduire le théorème de Shih. On redémontre au passage les théorèmes de Chacon-Jamison et de Blumenthal-Getoor-Mc Kean.

Dans un premier temps, on ne considère que des processus sans point d'arrêt avant ζ, ce qui permet d'obtenir des résultats d'unicité. L'utilisation des « temps arborescents » permet d'éviter l'hypothèse de quasi-continuité à gauche, ainsi que beaucoup de difficultés de la démonstration originale.

Ces travaux généralisent et sur certains points simplifient les résultats obtenus par le premier auteur dans sa thèse (cf. [*11*]).

Nous tenons à exprimer nos remerciements à C. Dellacherie qui nous a beaucoup aidé en lisant le manuscrit et en relevant les erreurs.

I. GÉNÉRALITÉS

Soient E un espace localement compact à base dénombrable et $\mathscr{E}$ sa tribu borélienne. Nous lui adjoignons un « cimetière » $\delta \in \mathrm{E}$, et nous notons $\mathscr{E}_\delta$ les boréliens de $\mathrm{E}_\delta = \mathrm{E} \cup \{\delta\}$.

Soit Ω l'ensemble des trajectoires « branchées » $\omega = (x, \overline{\omega})$, où x varie dans E et $\overline{\omega}$ dans l'ensemble des trajectoires à valeurs dans E, définies sur un intervalle de temps $[0, \zeta(\omega)[$, continues à droite et pourvues de limites à gauche (« cadlag »), et sans intervalle de constance ; nous convenons de prolonger $\overline{\omega}$ par δ sur $[\zeta(\omega), +\infty]$.

Nous notons $\mathrm{X}_{0-}(\omega) = x$ et $\mathrm{X}_t(\omega) = \overline{\omega}(t)$ les coordonnées, $\mathscr{F}_t^0$ les tribus $\sigma[\{\mathrm{X}_s \mid s \in \{0-\} \cup [0, t]\}]$, et θ_t les opérateurs usuels de translation sur Ω, avec de plus la convention :

$$\mathrm{X}_{0-} \circ \theta_t = \mathrm{X}_{t-}\,.$$

$\mathscr{T}_0$ désigne l'ensemble des $(\mathscr{F}_t^0)$-temps d'arrêt majorés par ζ.

Nous convenons d'appeler processus de Markov la donnée d'une famille $(\mathbb{P}_x, x \in E)$ de probabilités sur $(\Omega, \mathscr{F}^0_\infty)$ telle que :

a) Pour tout F de $\mathscr{F}^0_\infty$, $\mathbb{P}_x(F)$ est $\mathscr{E}$-mesurable en x.

b) Pour tout x de E, $\mathbb{P}_x(X_{O-} = x) = 1$.

c) Pour toute suite monotone de temps de $\mathscr{T}_0$: $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $T \in \mathscr{T}_0$, pour tout A de $\mathscr{E}$ et tout t de $\mathbb{R}_+$, on a :

$$P_x(\{X_{T+t} \in A\} / \lim_n{}' \mathscr{F}^0_{T_n}) = \mathbb{P}_{\lim_n X_{T_n}}(\{X_t \in A\}) \quad \text{sur} \quad \{T < \zeta\} \quad \mathbb{P}\text{-p. s.}$$

où P-p. s. signifie : P_x-presque sûrement pour tout x de E.

Remarques :

∗ cette propriété s'étend aussitôt (en prenant A = E) aux A pris dans $\mathscr{E}_\delta$.

∗ puisque $T = \lim_n T_n \in \lim_n \mathscr{F}^0_{T_n}$, cette propriété s'écrit aussi :

$$\mathbb{P}_x(\{X_{T+t} \in A\} \cap \{T < \zeta\} \mid \lim_n \mathscr{F}^0_{T_n}) = \mathbb{P}_{\lim_n X_{T_n}}(\{X_t \in A\}) . 1_{\{T<\zeta\}} \qquad \mathbb{P}\text{-p. s.}$$

∗ On a pour tout x de E : $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 0$ ou 1.

∗ Les hypothèses ci-dessus sont par exemple vérifiées par le processus canonique associé à un semi-groupe de Ray (P_t) sans point d'arrêt, c'est-à-dire tel que pour tout x

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1 - P_t(x, \{x\})}{t} = \infty .$$

II. TEMPS ET ÉVÉNEMENTS INTRINSÈQUES

DÉFINITION 2.1. — *Un temps* T *défini sur* Ω *est intrinsèque lorsqu'il vérifie la propriété suivante : si deux trajectoires* ω *et* ω' *de* Ω *sont telles que* $X_{O-}(\omega) = X_{O-}(\omega')$ *et qu'il existe une bijection croissante* ϕ *de* $[0, \zeta(\omega')]$ *sur* $[0, \zeta(\omega)]$ *avec* $\omega' = \omega \circ \phi$ *sur* $[0, \zeta(\omega')]$, *alors on a* $T(\omega) = \phi(T(\omega'))$.

$\mathscr{T}$ *désignera l'ensemble des temps d'arrêt intrinsèques, c'est-à-dire l'ensemble des temps intrinsèques qui sont dans* $\mathscr{T}_0$.

Remarque. — $\mathscr{T}$ est réticulé et stable par limites croissantes.

DÉFINITION 2.2. — *Pour tout* A *de* $\mathscr{E}$ *posons*

$$\gamma_A = \operatorname{Inf}\{t \geq 0 / X_{t-} \in A^c \quad \text{ou} \quad X_t \in A^c\} .$$

Propriétés 2.3. — *a*) *Si* A *est fermé*

$$\gamma_A = \operatorname{Inf}\{t \geq 0 / X_{t-} \in A^c\} = 1_{\{X_{O-} \in A\}} . \operatorname{Inf}\{t \geq 0 / X_t \in A^c\}$$

est un temps intrinsèque.

b) $A' \subset A \Rightarrow \gamma_{A'} \leq \gamma_A$ *et* $\gamma_A = \gamma_A + \gamma_{A'} \circ \theta_{\gamma_A} = \gamma_{A'} + \gamma_A \circ \theta_{\gamma_{A'}}$.

c) $\gamma_{A \cap A'} = \gamma_A \wedge \gamma_{A'}$

d) $\gamma_\emptyset = 0$ *et* $\gamma_E = \zeta$.

e) Si $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite de compacts croissant fortement vers un ouvert* G *de* E, *c'est-à-dire telle que* $\bigcup_n K_n = G$ *et* $K_n \subset \overset{0}{K}_{n+1}$ *pour tout n, alors* $\gamma_{K_n} \uparrow \gamma_G$, $\lim X_{\gamma_{K_n}} \in G^c$ *et vaut* X_{γ_G} *ou* $X_{\gamma_{G-}}$ *sur chaque* ω.

f) Pour tout ouvert G *de* E, $\gamma_G \in \mathscr{T}$

Preuve de la propriété (*e*) :

e) Soit $\tau_G = \lim_n \uparrow \gamma_{K_n}$; $\tau_G \leq \gamma_G$, et selon que $(\forall n, \gamma_{K_n} < \tau_G)$ ou $(\exists n, \gamma_{K_n} = \tau_G)$, on a $X_{\gamma_{K_n}} \to X_{\tau_G -}$ ou $X_{\gamma_{K_n}} \to X_{\tau_G}$; or X_{O-} ou $X_{\gamma_{K_n}} \in \overline{K_n^c} \subset K_{n-1}^c$ d'après (*a*), et donc soit X_{O-} soit $X_{\tau_G -}$ soit X_{τ_G} est dans $\bigcap_n K_{n-1}^c = G^c$, ce qui prouve que $\tau_G \geq \gamma_G$.

DÉFINITION 2.4. — *Fixons un ouvert quelconque* G *de* E *et notons* $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *n'importe quelle suite de compacts croissant fortement vers* G ; (*au sens de* 2.3 *e*) :

a) La variable Y_G *est définie par* : X_{O-} sur $\{X_{O-} \in G^c\}$, δ sur $\{X_{O-} \in G\} \cap \{\gamma_G = \zeta\}$, et $\lim_n X_{\gamma_{K_n}}$ *sur* $\{X_{O-} \in G\} \cap \{\gamma_G < \zeta\}$.

b) Pour A *dans* $\mathscr{E}_\delta$ *et x dans* E *posons* : $H_G(x, A) = \mathbb{P}_x(\{Y_G \in A\} \cap \{\gamma_G < \zeta\})$.

c) La sous-tribu $\mathscr{F}_G^0$ *de* $\mathscr{F}_\infty^0$ *est définie par* :

$$\mathscr{F}^0_{G|\{X_{O-}\in G^c\}} = \sigma(\{X_{O-}\})_{|\{X_{O-}\in G^c\}} \quad et \quad \mathscr{F}^0_{G|\{X_{O-}\in G\}} = \left(\bigvee_n \mathscr{F}^0_{\gamma_{K_n}}\right)_{|\{X_{O-}\in G\}}$$

d) L'opérateur de translation θ_G *est défini sur* Ω *par* :

$$X_{O-} \circ \theta_G = Y_G$$

et pour tout t de $\mathbb{R}_+$: $X_t \circ \theta_G = X_{t+\gamma_G}$ $(= X_t \circ \theta_{\gamma_G})$.

e) Pour tout T *de* $\mathscr{T}_0$ *nous noterons* $T * \gamma_G$ *le temps composé* :

$$T * \gamma_G = \gamma_G + T \circ \theta_G.$$

PROPRIÉTÉ 2.5. — *a)* Y_G *et* γ_G *sont* $\mathscr{F}_G^0$*-mesurables.*

b) $T \in \mathscr{T} \Rightarrow T * \gamma_G \in \mathscr{T}$.

c) Pour tout F *de* $\mathscr{F}_\infty^0$ *on a* :

$$\mathbb{P}_x(\theta_G^{-1}(F) \mid \mathscr{F}_G^0) = \mathbb{P}_{Y_G}(F) \qquad \mathbb{P}\text{-p. s.} \quad sur \quad \{\gamma_G < \zeta\}.$$

d) Pour T *dans* $\mathscr{T}$ *et* f *dans* $\mathscr{E}_\delta$ *nulle en* δ *et* x *dans* E *on a :*

$$\mathbb{E}_x(f \circ X_{T * \gamma_G}) = \int_E \mathbb{E}_y(f \circ X_T) H_G(x, dy)$$

(*autrement dit* $P_{T * \gamma_G} = H_G P_T$).

e) $G' \subset G \Rightarrow \gamma_{G'} * \gamma_G = \gamma_G * \gamma_{G'} = \gamma_G$.

Preuve. — (*e*) *et* (*a*) sont très simples et (*d*) découle immédiatement de (*c*). (*b*) $T * \gamma_G$ est dans $\mathscr{T}_0$ d'après le lemme 4.3 de [*10*]; vérifions qu'il est intrinsèque; soient ω et ω' comme dans 2.1; notons ψ l'application : $t \to \phi(t + \gamma_G(\omega')) - \gamma_G(\omega)$; c'est une bijection croissante de $[0, \zeta(\theta_G \omega')]$ sur $[0, \zeta(\theta_G \omega)]$; $\theta_G \omega' = (\theta_G \omega) \circ \psi$ sur $[0, \zeta(\theta_G \omega')]$ et $X_{O-}(\theta_G \omega') = X_{O-}(\theta_G \omega)$ (car $X_{\gamma_{K_n}}(\omega') = X_{\phi(\gamma_{K_n}(\omega'))}(\omega) = X_{\gamma_{K_n}}(\omega) \ldots$); on a donc

$$\begin{aligned}\phi(T * \gamma_G(\omega')) &= \phi(\gamma_G(\omega') + T \circ \theta_G(\omega')) \\ &= \psi(T(\theta_G \omega')) + \gamma_G(\omega) = T(\theta_G \omega) + \gamma_G(\omega) = T * \gamma_G(\omega).\end{aligned}$$

c) Sur $\{ X_{O-} \in G^c \} \cap \{ \gamma_G < \zeta \}$, la propriété se réduit à :

$$\mathbb{P}_x(F \mid X_{O-}) = \mathbb{P}_{X_{O-}}(F) \qquad \mathbb{P}\text{-p. s.}$$

qui est vérifié; plaçons-nous donc sur $\{ X_{O-} \in G \} \cap \{ \gamma_G < \zeta \}$, et prenons F de la forme $1_{A_0}(X_{O-}) 1_{A_1}(X_{t_1}) \ldots 1_{A_k}(X_{t_k})$ avec $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 < \ldots < t_k$, $A_i \in \mathscr{E}_\delta$; la propriété de Markov I-*c* appliquée par récurrence avec $T_n = T = \gamma_G$ donne $\mathbb{P}$-p. s. :

$$\mathbb{E}_x(1_{A_1}(X_{\gamma_G + t_1}) \ldots 1_{A_k}(X_{\gamma_G + t_k}) \mid \mathscr{F}^0_{\gamma_G}) = \mathbb{E}_{X_{\gamma_G}}(1_{A_1}(X_{t_1}) \ldots 1_{A_k}(X_{t_k}));$$

ensuite on a $\mathbb{P}$-p. s. :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(\theta_G^{-1}(F) \mid \mathscr{F}^0_G) &= \mathbb{P}_x(\theta_G^{-1}(F) \mid \mathscr{F}^0_{\gamma_G} \mid \mathscr{F}^0_G) \\ &= 1_{A_0}(Y_G) \cdot \mathbb{E}_x(1_{A_1}(X_{\gamma_G + t_1}) \ldots 1_{A_k}(X_{\gamma_G + t_k}) \mid \mathscr{F}^0_{\gamma_G} \mid \mathscr{F}^0_G) \\ &= 1_{A_0}(Y_G) \cdot \mathbb{E}_x\left(\mathbb{E}_{X_{\gamma_G}}(1_{A_1}(X_{t_1}) \ldots 1_{A_k}(X_{t_k})) \,\middle|\, \bigvee_n \mathscr{F}^0_{\gamma_{K_n}} \right)\end{aligned}$$

ce qui donne en appliquant la propriété de Markov I-*c* avec

$T_n = \gamma_{K_n}$, $T = \gamma_G$, $t = 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(\theta_G^{-1}(F) \mid \mathscr{F}^0_G) &= 1_{A_0}(Y_G) \mathbb{E}_{Y_G}(1_{A_1}(X_{t_1}) \ldots 1_{A_k}(X_{t_k})) \\ &= \mathbb{P}_{Y_G}(F) \qquad \mathbb{P}\text{-p. s.}\end{aligned}$$

DÉFINITIONS 2.6. — *Soit* T *un temps d'arrêt intrinsèque.*

a) Deux trajectoires ω *et* ω' *de* Ω *sont équivalentes sur* $[0, T]$ (*on notera* *ceci :* $\omega \sim \omega'$ *sur* $[0, \mathrm{T}])$ *si et seulement si :* $\mathrm{X}_{\mathrm{O}-}(\omega) = \mathrm{X}_{\mathrm{O}-}(\omega')$ *et il existe une bijection croissante* ϕ *de* $[0, \mathrm{T}(\omega')]$ *sur* $[0, \mathrm{T}(\omega)]$ *telle que* $\omega' = \omega \circ \phi$ *sur* $[0, \mathrm{T}(\omega')]$.

$\omega \sim \omega'$ *signifiera :* $\omega \sim \omega'$ *sur* $[0, \zeta]$.

b) Posons $\mathscr{S}_{\mathrm{T}} = \{ \mathrm{A} \in \mathscr{F}^0_\infty \mid \omega \sim \omega'$ *sur* $[0, \mathrm{T}] \Rightarrow 1_{\mathrm{A}}(\omega) = 1_{\mathrm{A}}(\omega') \}$ *et* $\mathscr{S} = \mathscr{S}_\zeta$.

Les éléments de $\mathscr{S}$ *sont appelés événements intrinsèques.*

Lemme 2.7. — *a) Étant donnés* T *dans* $\mathscr{C}_0$, ω' *et* ω'' *dans* Ω, *si* $\omega' = \omega''$ *sur* $\{\mathrm{O}-\} \cup [0, \mathrm{T}(\omega')]$, *alors* $\mathrm{T}(\omega') = \mathrm{T}(\omega'')$.

b) Soient S *et* T *dans* $\mathscr{C}$, ω *et* ω' *dans* Ω *telles que* $\mathrm{X}_{\mathrm{O}-}(\omega) = \mathrm{X}_{\mathrm{O}-}(\omega')$ *et* $\omega' = \omega \circ \phi$ *sur* $[0, \mathrm{T}(\omega')]$, ϕ *étant une application bijective croissante de* $[0, \mathrm{T}(\omega')]$ *sur* $[0, \mathrm{T}(\omega)]$ *; alors si* $\mathrm{S}(\omega') \leq \mathrm{T}(\omega')$, *on a* $\mathrm{S}(\omega) = \phi(\mathrm{S}(\omega'))$.

Preuve. — *a*) Cf. ([*10*], 1.3 corollaire 1). (Il s'agit surtout de voir que l'on a :

$$(\forall t \geq 0)\ \mathscr{F}^0_t = \{ \mathrm{A} \in \mathscr{F}^0_\infty \mid (\omega = \omega' \text{ sur } [0, t] \text{ et en } \mathrm{O}-) \Rightarrow 1_{\mathrm{A}}(\omega) = 1_{\mathrm{A}}(\omega') \},$$

ce qui ressemble à la définition de $\mathscr{S}_{\mathrm{T}}$ ci-dessus).

b) $\tilde{\phi} = \phi$ *sur* $[0, \mathrm{T}(\omega')]$ et pour $t \geq 0$: $\tilde{\phi}(t + \mathrm{T}(\omega')) = t + \mathrm{T}(\omega)$; $\tilde{\phi}$ est une bijection croissante, et si $\omega'' = \omega \circ \tilde{\phi}$, on a $\omega'' \sim \omega$ par $\tilde{\phi}$, et donc $\mathrm{S}(\omega) = \phi(\mathrm{S}(\omega''))$; puis, d'après (*a*), $\mathrm{T}(\omega') = \mathrm{T}(\omega'')$ et $\mathrm{S}(\omega') = \mathrm{S}(\omega'')$, et donc $\mathrm{S}(\omega) = \phi(\mathrm{S}(\omega'))$.

CONSÉQUENCES 2.8. — *Soient* S *et* T *deux temps de* $\mathscr{C}$ *et* G *un ouvert de* G.

a) $\mathrm{S} \leq \mathrm{T} \Rightarrow \mathscr{S}_{\mathrm{S}} \subset \mathscr{S}_{\mathrm{T}} \subset \mathscr{S}$.

b) $\{\mathrm{S} \leq \mathrm{T}\}$, $\{\mathrm{S} < \mathrm{T}\}$, $\{\mathrm{S} = \mathrm{T}\}$ *sont dans* $\mathscr{S}_{\mathrm{T}}$ (*et* $\mathscr{S}_{\mathrm{S}}$).

c) $\mathscr{S}_{\mathrm{T}} \cap \mathscr{S}_{\mathrm{S}} = \mathscr{S}_{\mathrm{T} \wedge \mathrm{S}}$.

d) $\mathrm{T} = \mathrm{S}$ *sur* $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_{\mathrm{T}} \Rightarrow \mathrm{A} \in \mathscr{S}_{\mathrm{S}}$.

e) $\mathrm{Y}_{\mathrm{G}} \in \mathscr{S}_{\gamma_{\mathrm{G}}}$ *et* $\mathrm{X}_{\mathrm{T}} \in \mathscr{S}_{\mathrm{T}}$.

f) $\mathscr{S}_{\mathrm{T}} = \mathscr{S} \cap \mathscr{F}^0_{\mathrm{T}}$ (*et* $\mathscr{S}_{\gamma_{\mathrm{G}}} \supset \mathscr{S} \cap \mathscr{F}^0_{\mathrm{G}}$).

Preuve. — *a*, *b*, *c*, *d* et *e* découlent facilement de (2.6) et (2.7).

f) On se reférera au théorème 1.4 de [*10*]. Comme $\mathscr{F}^0_t$, $\mathscr{F}^0_{\mathrm{T}}$ se caractérise comme $\{ \mathrm{A} \in \mathscr{F}^0_\infty \mid \omega = \omega'$ sur $[0, \mathrm{T}]$ et en $\mathrm{O}- \Rightarrow 1_{\mathrm{A}}(\omega) = 1_{\mathrm{A}}(\omega') \}$. *Ceci entraîne d'abord* que $\mathscr{S}_{\mathrm{T}} \subset \mathscr{F}^0_{\mathrm{T}}$; ensuite, si $\mathrm{A} \in \mathscr{S} \cap \mathscr{F}^0_{\mathrm{T}}$ et si ω, ω' de Ω sont données comme dans (2.7 *b*), prenant $\tilde{\phi}$ et ω'' comme dans la preuve de (2.7 *b*), on a $\omega'' \sim \omega \Rightarrow 1_{\mathrm{A}}(\omega'') = 1_{\mathrm{A}}(\omega)$ et $\omega' = \omega''$ sur $[0, \mathrm{T}] \Rightarrow 1_{\mathrm{A}}(\omega'') = 1_{\mathrm{A}}(\omega')$, et donc $1_{\mathrm{A}}(\omega) = 1_{\mathrm{A}}(\omega')$;
A appartient donc à $\mathscr{S}_{\mathrm{T}}$.

III. TEMPS ARBORESCENTS

Soit $\mathcal{O}$ une base dénombrable de la topologie de E stabilisée par réunions et intersections finies, et contenant $\emptyset$ et E.
Soit $\mathcal{P}$ l'algèbre de Boole engendrée par $\mathcal{O}$ et δ.

DÉFINITIONS 3.1. — *Posons* $\mathcal{A}_0 = \{0\}$ *et définissons par récurrence les ensembles de temps aléatoires* $\mathcal{A}_n$ *de la façon suivante :* $T \in \mathcal{A}_{n+1}$ *ssi il existe* k *et* l *dans* $\mathbb{N}^*$, $\{A_i\}_{1 \le i \le k}$ *et* $\{B_j\}_{1 \le j \le l}$ *deux partitions de* E_δ *avec* A_i *et* B_j *dans* $\mathcal{P}$, *des éléments* T_{ij} *dans* $\mathcal{A}_n$, *et* G *dans* $\mathcal{O}$ *tels que :*

$$T = \sum_{i,j} 1_{\{Y_G \in A_i, X_{\gamma_G} \in B_j\}} T_{ij} * \gamma_G \quad \textit{que l'on notera} \quad \sigma(G, A_i, B_j, T_{ij}).$$

Les temps arborescents sont les éléments de $\mathcal{A} = \bigcup_n \uparrow \mathcal{A}_n$.
La longueur de T *arborescent est :* $l(T) = \operatorname{Min}\{n \in \mathbb{N} \mid T \in \mathcal{A}_n\}$.
La composition d'un temps U *de* $\mathcal{T}_0$ *par un temps* T *de* $\mathcal{A}$ *est définie par :* $U * T = T + U \circ \theta_T$, *où* $\theta_T\omega$ *est défini par récurrence par :*

$$\theta_{\sigma(G,A_i,B_j,T_{ij})}\omega = \sum_{i,j} 1_{\{Y_G \in A_i, X_{\gamma_G} \in B_j\}}(\omega) \cdot \theta_{T_{ij}}\theta_G\omega .$$

(*Cette définition étend celles de* (2.4 *e*) *et* (2.4 *d*).

PROPOSITION 3.2. — $\mathcal{A}$ *est dénombrable, stable par composition, contenu dans* $\mathcal{T}$, *et réticulé.*

Preuve :

* $\mathcal{A}_n$ est dénombrable parce que $\mathcal{A}_{n-1}$, $\mathcal{O}$ et $\mathcal{P}$ le sont.

* La stabilité de $\mathcal{A}$ par : $(T, S) \to T * S$ se voit par récurrence sur $l(S)$: si $S = \sigma(G, A_i, B_j, S_{ij})$, $T * S = \sigma(G, A_i, B_j, T * S_{ij}) \in \mathcal{A}$ puisque chaque $T * S_{ij} \in \mathcal{A}$.

* La preuve de (2.5 *b*), avec (2.8 *e*), montre que $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$.

* Enfin montrons en détail que $\mathcal{A}$ est réticulé.

Soient S et T dans $\mathcal{A}$; puisqu'il n'y a pas de problème si $S = 0$ ou $T = 0$, on peut supposer que $T = \sigma(G, A_i, B_j, T_{ij})$ et $S = \sigma(L, A'_k, B'_l, S_{kl})$ avec $l(T_{ij}) < l(T)$ et $l(S_{kl}) < l(S)$.

Effectuons une récurrence sur $l(S) + l(T)$, et faisons la preuve pour $\wedge$, ce qui suit étant valable tel quel avec partout $\vee$ au lieu de $\wedge$; nous supposons donc que $T_{ij} \wedge S$, $T \wedge S_{kl}$ et $T_{ij} \wedge S_{kl}$ sont dans $\mathcal{A}$;

LEMME. — $\{ \gamma_G < \gamma_L \} = \{ Y_{G \cap L} \in L, X_{\gamma_{G \cap L}} \in L \}$.

Preuve du lemme. — Puisque $Y_{G \cap L}$ vaut soit $X_{\gamma_{G \cap L}}$, soit $X_{\gamma_{G \cap L}-}$, on a :

$$\{ X_{\gamma_{G \cap L}-} \in L, X_{\gamma_{G \cap L}} \in L \} \subset \{ Y_{G \cap L} \in L, X_{\gamma_{G \cap L}} \in L \},$$

et réciproquement si $Y_{G \cap L} = X_{\gamma_{G \cap L}} \in L$ et $X_{\gamma_{G \cap L}-} \neq X_{\gamma_{G \cap L}}$, c'est que si $\{ K_n \}$ croît fortement vers $G \cap L$ on a $\gamma_{K_n} = \gamma_{G \cap L}$ pour n assez grand et donc $X_t \in K_n$ pour $t < \gamma_{G \cap L}$ et donc encore $X_{\gamma_{G \cap L}-} \in K_n \subset L$; c'est-à-dire que l'on a au total :

$$\begin{aligned}\{ \gamma_L \neq \gamma_{G \cap L} = \gamma_G \} &= \{ \gamma_{G \cap L} < \gamma_L \} \\ &= \{ X_{\gamma_{G \cap L}-} \in L, X_{\gamma_{G \cap L}} \in L \} = \{ Y_{G \cap L} \in L, X_{\gamma_{G \cap L}} \in L \},\end{aligned}$$

Fin de la démonstration. — Sur $\{ \gamma_G < \gamma_L \} = \{ Y_{G \cap L} \in L, X_{\gamma_{G \cap L}} \in L \}$ on a $S = S * \gamma_{G \cap L}$ et $T = \sigma(G \cap L, A_i, B_j, T_{ij})$ et donc

$$T \wedge S = \sigma(G \cap L, A_i, B_j, T_{ij} \wedge S).$$

Sur $\{ \gamma_L < \gamma_G \} = \{ Y_{G \cap L} \in G, X_{\gamma_{G \cap L}} \in G \}$ on a de même

$$T \wedge S = \sigma(G \cap L, A'_k, B'_l, T \wedge S_{kl})$$

et sur $\{ \gamma_L = \gamma_G \} = \{ Y_{G \cap L} \in L^c \text{ ou } X_{\gamma_{G \cap L}} \in L^c \} \cap \{ Y_{G \cap L} \in G^c \text{ ou } X_{\gamma_{G \cap L}} \in G^c \}$ on a $T \wedge S = \sigma(G \cap L, A_i \cap A'_k, B_j \cap B'_l, T_{ij} \wedge S_{kl})$.

On peut alors en regroupant les trois cas précédents écrire une formule explicite $T \wedge S = \sigma(G \cap L, \ldots)$, ce qui prouve par récurrence que $T \wedge S \in \mathscr{A}$.

PROPOSITION 3.3. — *Pour* S *dans* $\mathscr{A}$ *et* G *dans* $\mathscr{O}$, *on a* $l(S \wedge \gamma_G) \leq l(S)$.

Preuve. — Effectuons une récurrence sur $l(S)$; c'est clair si $S = 0$, et si $S = \sigma(G', A_i, B_j, S_{ij})$ avec $l(S_{ij}) < l(S)$, on a $l(S_{ij} \wedge \gamma_G) \leq l(S_{ij})$ et $S \wedge \gamma_G = \sum 1_{\{Y_G \in A_i, X_{\gamma_{G'}} \in B_j\}} (S_{ij} * \gamma_{G'}) \wedge \gamma_G$; or

$$\begin{aligned}(S_{ij} * \gamma_{G'}) \wedge \gamma_G = {} & 1_{\{Y_{G' \cap G} \in G, X_{\gamma_{G' \cap G}} \in G\}} (S_{ij} \wedge \gamma_G) * \gamma_{G \cap G'} \\ & + 1_{\{Y_{G' \cap G} \in G^c \text{ ou } X_{\gamma_{G' \cap G}} \in G^c\}} \gamma_{G \cap G'}\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}S \wedge \gamma_G = {} & \sum_{i,j} 1_{\{Y_{G \cap G'} \in A_i \cap G, X_{\gamma_{G \cap G'}} \in B_j \cap G\}} (S_{ij} \wedge \gamma_G) * \gamma_{G \cap G'} \\ & + 1_{\{Y_{G \cap G'} \in G^c\}} \gamma_{G \cap G'} + 1_{\{Y_{G \cap G'} \in G, X_{\gamma_{G \cap G'}} \in G^c\}} \gamma_{G \cap G'}\end{aligned}$$

est de longueur $\leq 1 + l(S_{ij} \wedge \gamma_G) \leq 1 + l(S_{ij}) \leq l(S)$.

PROPOSITION 3.4. — $\mathscr{A}(\omega)$ *est dense dans* $[0, \zeta(\omega)]$ *pour tout* ω *de* Ω.

Preuve. — Soit $t \in [0, \zeta(\omega)]$; soit $t' = \sup \{ \sigma(\omega) \mid \sigma \in \mathscr{A} \mid \sigma(\omega) \leq t \} \in [0, t]$: supposons que $t' < t$; notons $l = X_{t'-}(\omega)$ et $m = X_{t'}(\omega)$; puisque ω est sans point d'arrêt avant t, on peut supposer que $X_t(\omega) \neq l$ et $X_t(\omega) \neq m$, quitte pour cela à changer t en $t'' \in]t', t[$; par définition de l, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour u dans $]t' - \varepsilon, t'[$ on ait $d(X_u(\omega), l) < \frac{1}{2} d(l, X_t(\omega)) = r$; par définition de t', il existe σ dans $\mathscr{A}$ tel que $\sigma(\omega)$ soit dans $\left]t' - \frac{\varepsilon}{2}, t'\right]$; soient alors G et G′ dans $\mathscr{O}$ tels que $B(l, r) \subset G'$, $m \in G'$, $\overline{G'} \subset G$ et $X_t(\omega) \notin G$; alors $u \in \left[\sigma(\omega) - \frac{\varepsilon}{2}, t'\right] \Rightarrow u \in]t' - \varepsilon, t'] \Rightarrow X_u(\omega) \in G'$; donc $t' < \gamma_G * \sigma(\omega)$, puisque $\sigma(\omega) \leq v \leq t' \Rightarrow X_v(\omega) \in G$ et $X_{v-}(\omega) \in G$; or $X_t(\omega) \notin G \Rightarrow \gamma_G * \sigma_G(\omega) \leq t$, ce qui est contradictoire puisque $\gamma_G * \sigma \in \mathscr{A}$.

LEMME 3.5. — *Soit d une distance sur le compactifié E_δ. Il existe un temps arborescent S_l tel que $(\forall l \in \mathbb{N})\ S_l > 0$ sur $\{ 0 < \zeta \}$ et $\lim\limits_{l \to \infty} \downarrow S_l = 0$ sur Ω.*

Preuve. — Soit $\{ W_{k,l} \}_k$ une partition finie de E_δ formée d'éléments de $\mathscr{P}$ de diamètre $< 2^{-2l}$; soit $V_{k,l}$ un ouvert de $\mathscr{O}$ de diamètre $< 2^{-2l+2}$ contenant les boules ouvertes de rayon 2^{-2l} centrée en un point de $W_{k,l}$;
$S_l = \sum_k 1_{W_{k,l}}(X_0) \cdot \gamma_{V_{k,l}} \vee \sum_k 1_{W_{k,l}}(X_{0-}) \cdot \gamma_{V_{k,l}}$ convient.

IV. ENSEMBLES ARBORESCENTS

DÉFINITION 4.1. — *Pour tout G de $\mathscr{O}$ notons $\mathscr{D}_G^0 = \{ \varnothing, \Omega \}$ et par récurrence $\mathscr{D}_G^{n+1}$ l'ensemble des parties de Ω défini de la façon suivante : F est dans $\mathscr{D}_G^{n+1}$ ssi il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $l \in \mathbb{N}^*$, $\{ A_i \}_{1 \leq i \leq k}$ et $\{ B_j \}_{1 \leq j \leq l}$ deux partitions de E_δ avec A_i et B_j dans $\mathscr{P}$, des éléments F_{ij} de $\mathscr{D}_G^n$ et G′ dans*

$$\mathscr{O}_G = \{ G' \in \mathscr{O} \mid G' \subset G \},$$

tels que $F = \bigcup_{i,j} [\{ Y_{G'} \in A_i, X_{\gamma_{G'}} \in B_j \} \cap \theta_{G'}^{-1}(F_{ij})]$, *que l'on notera* $\rho(G', A_i, B_j, F_{ij})$.

Les ensembles arborescents sont les éléments de $\mathscr{D}_G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \uparrow \mathscr{D}_G^n$.

La « longueur » de F arborescent est $l(F) = \operatorname{Min} \{ n \in \mathbb{N} \mid F \in \mathscr{D}_G^n \}$.

On a pour tout F *de* $\mathscr{D}_G$ *: soit* $F = \emptyset$ *ou* Ω, *soit* $F = \rho(G', A_i, B_j, F_{ij})$ *avec* $l(F_{ij}) < l(F)$.

PROPOSITION 4.2. — $\mathscr{D}_G$ *est une algèbre de Boole.*

Preuve. — Tout d'abord $(\rho(G', A_i, B_j, F_{ij}))^c = \rho(G', A_i, B_j, F_{ij}^c)$ montre par une récurrence immédiate que $F \in \mathscr{D}_G \Rightarrow F^c \in \mathscr{D}_G$.

Soient ensuite F_1 et F_2 deux éléments de $\mathscr{D}_G$. On montre que $F_1 \cap F_2 \in \mathscr{D}_G$ en raisonnant par récurrence sur $l(F_1) + l(F_2)$ comme dans la preuve de 3.2. On peut en effet factoriser $F_1 \cap F_2$ par $\theta_{G_1 \cap G_2}^{-1}$ exactement comme on a factorisé $T \wedge S$ par $\gamma_{G \cap L}$.

PROPOSITION 4.3. — *Pour* T *dans* $\mathscr{T}$ *et* S *dans* $\mathscr{A}$ *on a :*

$$\mathscr{S}_T = \sigma[\{X_{T \wedge U} \mid U \in \mathscr{A}\} \cup \{X_{O-}\}] \quad et \quad \mathscr{S}_{T*S} = \mathscr{S}_S \vee \theta_S^{-1}(\mathscr{S}_T).$$

Preuve. — Tout d'abord $U \in \mathscr{A} \Rightarrow T \wedge U \in \mathscr{T} \Rightarrow X_{T \wedge U} \in \mathscr{S}_{T \wedge U} \subset \mathscr{S}_T$. Ensuite notons D l'ensemble des diadiques de $[0, 1]$, et comme Dellacherie dans [7] si $d \in D \setminus \{0, 1\}$, $d = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i 2^{-i}$, $\alpha_k = 1$, notons

$$T_d = U_1 \, (\alpha_1) \left(U_2 \, (\alpha_2) \left(U_3 \, (\alpha_3) \ldots \left(U_{k-1} \, (\alpha_{k-1}) \, U_k\right) \ldots\right)\right),$$

où $(\alpha_i) = \wedge$ si $\alpha_i = 0$ et $(\alpha_i) = \vee$ si $\alpha_i = 1$, et où $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une énumération de $\mathscr{A}$; d'après (3.2) les T_d sont dans $\mathscr{A}$; et de plus $(d \to T_d)$ est croissante continue (en tout ω de Ω) sur D et on a $\bigcup_{U \in \mathscr{A}} [\![U]\!] = \bigcup_{d \in D} [\![T_d]\!]$, ce qui fait que les T_d sont également denses dans $[0, \zeta]$.

Soient alors ω et ω' dans Ω telles que $X_{O-}(\omega) = X_{O-}(\omega')$ et $X_{T \wedge U}(\omega) = X_{T \wedge U}(\omega')$ pour tout U de $\mathscr{A}$; on a alors bien sûr $X_{T \wedge T_d}(\omega) = X_{T \wedge T_d}(\omega')$ pour tout d de D ; les propriétés de $(d \to T_d)$ et l'absence de point d'arrêt avant ζ permettent alors de définir en posant : $\phi(T \wedge T_d(\omega')) = T \wedge T_d(\omega)$ une application ϕ sur une partie dense de $[0, T(\omega')]$, qui est nécessairement strictement croissante continue, à image dense dans $[0, T(\omega)]$; en la prolongeant par continuité, on obtient une bijection croissante de $[0, T(\omega')]$ sur $[0, T(\omega)]$, telle que $\omega' = \omega \circ \phi$ sur $[0, T(\omega')]$; ceci permet alors d'appliquer le théorème de Blackwell pour obtenir la première identité.

Celle-ci entraîne alors l'égalité :

$$\theta_S^{-1}(\mathscr{S}_T) = \sigma[\{X_{(T\wedge U)*S} \mid U \in \mathscr{A}\} \cup \{X_{O-} \circ \theta_S\}];$$

or $\{S \wedge U \mid U \in \mathscr{A}\} \cup \{(T \wedge U) * S \mid U \in \mathscr{A}\}$ est dense dans $[0, T * S]$, et on peut donc reprendre le raisonnement précédent, en appliquant encore le théorème de Blackwell, ce qui prouve la seconde identité.

PROPOSITION 4.4. — *On a* $\sigma(\mathscr{D}_G) = \mathscr{S}_{\gamma_G}$ *pour tout* G *de* $\mathcal{O}$.

Preuve. — Tout d'abord, pour G dans $\mathcal{O}$, G′ dans $\mathcal{O}_G$ et F_{ij} dans $\mathscr{S}_{\gamma_{G'}}$, on a $\theta_{G'}^{-1}(F_{ij}) \in \mathscr{S}_{\gamma_G * \gamma_{G'}} = \mathscr{S}_{\gamma_G}$ par (4.3), et donc $\rho(G', A_i, B_j, F_{ij}) \in \mathscr{S}_{\gamma_G}$; ce qui prouve par récurrence que $\mathscr{D}_G \subset \mathscr{S}_{\gamma_G}$, et donc que $\sigma(\mathscr{D}_G) \subset \mathscr{S}_{\gamma_G}$. Réciproquement, si $T \in \mathscr{A}$, $T \leq \gamma_G$, effectuons une récurrence sur $l(T)$ pour montrer que X_T est $\sigma(\mathscr{D}_G)$-mesurable ; c'est clair si $T = 0$, et si $T = \sigma(G', A_i, B_j, T_{ij})$ avec $l(T_{ij}) < l(T)$, alors $T \leq \gamma_G$ entraîne $\gamma_{G'} \leq \gamma_G$ et donc $G' \subset G$, puis $T = T \wedge \gamma_G = \sigma(G', A_i, B_j, T_{ij} \wedge \gamma_G)$; or d'après (3.3) $l(T_{ij} \wedge \gamma_G) \leqslant l(T_{ij}) < l(T)$, et donc $X_{T_{ij}\wedge\gamma_G}$, puis par conséquent X_T, sont $\sigma(\mathscr{D}_G)$-mesurables ; ceci prouve avec (4.3) l'inclusion de $\mathscr{S}_{\gamma_G}$ dans $\sigma(\mathscr{D}_G)$.

V. PARAMÉTRAGE INTRINSÈQUE

LEMME 5.1. — *Pour tout* F *dans* $b\mathscr{F}^0$, *x dans* E_δ *et* T *dans* $\mathscr{C}$, *on a :*

$$\mathbb{E}_x(F \mid \mathscr{F}_T^0 \mid \mathscr{S}) = \mathbb{E}_x(F \mid \mathscr{S} \mid \mathscr{F}_T^0) = \mathbb{E}_x(F \mid \mathscr{S}_T)$$

il suffit de montrer :

i) $(\forall F' \in \mathscr{S})\ \mathbb{E}_x(F' \mid \mathscr{F}_T^0) \in \mathscr{S}_T$, i. e. : $(\forall G \in \mathscr{F}_T^0)\ \mathbb{E}_x(F' \cdot G) = \mathbb{E}_x(\mathbb{E}_x(F' \mid \mathscr{S}_T) \cdot G)$

et

ii) $(\forall G \in \mathscr{F}_T^0)\ \mathbb{E}_x(G \mid \mathscr{S}) \in \mathscr{S}_T$, i. e. : $(\forall F' \in \mathscr{S})\mathbb{E}_x(G \cdot F') = \mathbb{E}_x(\mathbb{E}_x(G \mid \mathscr{S}_T) \cdot F')$

il est clair que (*i*) $\Leftrightarrow$ (*ii*), il suffit donc de prouver (*ii*), avec d'après (4.3) $F' = A \circ \theta_T \cdot B$, $A \in \mathscr{S}$, $B \in \mathscr{S}_T$; on a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x(A \circ \theta_T \cdot B \cdot G) = \mathbb{E}_x(\mathbb{E}_x(A \circ \theta_T \mid \mathscr{F}_T^0) \cdot B \cdot G) &= \mathbb{E}_x(\mathbb{E}_{X_T}(A) \cdot B \cdot \mathbb{E}_x(G \mid \mathscr{S}_T)) \\ &= \mathbb{E}_x(A \circ \theta_T B \cdot \mathbb{E}_x(G \mid \mathscr{S}_T)).\end{aligned}$$

5.2. — $\mathscr{S}_T$ étant séparable (d'après 4.3), on peut trouver, pour tout F dans $b\mathscr{F}^0$, une version $\mathscr{E} \otimes \mathscr{S}_T$ mesurable $H(x, \omega)$ des espérances conditionnelles $E_x(F \mid \mathscr{S}_T)$ et donc une version commune $H(X_{O-}^{(\omega)}, \omega)$.

Soit T_n, $n \in \mathbb{N}$, une énumération de $\mathscr{A}$.

Supposons jusqu'à nouvel ordre, que $E_x(\zeta)$ est fini pour tout x. On peut choisir, pour tout n, une version $\mathscr{S}_{T_n}$-mesurable des espérances conditionnelles $\mathbb{E}_x(T_n \mid \mathscr{S}_{T_n})$, notée B^n de manière à avoir $B^n \leq B^m$ sur $\{T_n \leq T_m\}$ pour tout couple m, n (on peut remplacer B^n par $\sup_m B^m 1_{\{T_m \leq T_n\}}$).

D'autre part d'après 5.1, $B^n = \mathbb{E}_x(T_n \mid \mathscr{S})$ $\mathbb{P}_x$-p. s. pour tout x. Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $B_t = \inf\{B^n, T_n > t\}$ pour $t < \zeta$ et $B_t = B^\infty$ pour $t \geq \zeta$.

Il est clair que B_t est croissant, continu à droite, $\mathscr{F}^0_{t+}$-adapté et que $B_{T_n} \geq B^n$ pour tout n.

De plus, si $\omega' = \omega \circ \phi$ sur $[0, \zeta(\omega')]$ avec ω et ω' dans Ω et ϕ bijection croissante de $[0, \zeta(\omega')]$ sur $[0, \zeta(\omega)]$, on a $B^n(\omega) = B^n(\omega')$ pour tout n et donc $B_{\phi(t)}(\omega) = B_t(\omega')$.

On dit que B est un *processus intrinsèque.*

5.3. — Montrons que $B_{T_n} = B^n$ p. s.

Si (S_l) est la suite de temps d'arrêt définis en 3.5, les temps $S_l * T_n$ sont des temps de $\mathscr{A}$. Il existe donc une famille d'entiers $\alpha(l, n)$ tels que $S_l * T_n = T_{\alpha(l,n)}$ et l'on a $T_n = \lim\limits_{t\uparrow\infty} \downarrow T_{\alpha(l,n)}$, avec $T_{\alpha(l,n)} > T_n$ sur $\{T_n < \zeta\}$, ce qui implique que $B_{T_n} \leq B^{\alpha(l,n)}$, et que $B^n = \lim \downarrow B^{\alpha(l,n)}$ presque sûrement, ce qui permet de conclure.

Montrons enfin que B_t est p. s. continu.

Pour tout n, notons $S_{n,p}$ le réarrangement croissant des T_p, $p \leq n$. Les $S_{n,p}$ sont des temps d'arrêt de $\mathscr{A}$. Posons $S_{n,n+1} = \zeta$ et $S_{n,0} = 0$. Posons $\phi(t) = t^2$ si $t \leqslant 1$ et $= 2t - 1$ si $t \geqslant 1$. On vérifie que :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{n} \phi(B_{S_{n,p+1}} - B_{S_{n,p}}) = \sum_{t=0}^{\zeta} \phi(B_t - B_{t-}),$$

en restant majoré par $2B_\zeta = 2B^\infty$. (Cela résulte du fait que $\{T_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, \zeta(\omega)]$).

Mais $\phi(B_{S_{n,p+1}} - B_{S_{n,p}}) \leq \mathbb{E}_x(\phi(S_{n,p+1} - S_{n,p}) \mid \mathscr{S})$ $\mathbb{P}_x$-p. s. pour tout x d'après l'inégalité de Jensen. Or, $\sum\limits_{p=0}^{n} \phi(S_{n,p+1} - S_{n,p}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (en restant majoré par 2ζ).

Soit B^c_t la partie continue de B_t. B^c_t est p. s. égal à B_t. C'est un processus intrinsèque $\mathscr{F}^0_t$ adapté. On en déduit que pour tout temps d'arrêt intrinsèque $T \in \mathscr{C}$

$$B^c_T \in \mathscr{F}^0_T \cap \mathscr{S} = \mathscr{S}_T.$$

D'après 5.1, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x(B^c_\zeta - B^c_{T_n} \mid \mathscr{F}^0_{T_n}) &= \mathbb{E}_x(\zeta - T_n \mid \mathscr{S} \mid \mathscr{F}_{T_n}) \\ &= \mathbb{E}_x(\zeta - T_n \mid \mathscr{F}_{T_n} \mid \mathscr{S}) = \mathbb{E}_{X_{T_n}}(\zeta) \quad \mathbb{P}_x\text{-p. s. pour tout } x.\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\mathbb{E}_x(B^c_\zeta - B^c_{T_n} \mid \mathscr{F}^0_{T_n}) = \mathbb{E}_x(\zeta - T_n \mid \mathscr{F}^0_{T_n})$.

Les versions continues à droite des surmartingales $\mathbb{E}_x(B^c_\zeta - B^c_t \mid \mathscr{F}_t)$ et $\mathbb{E}_x(\zeta - \zeta \wedge t \mid \mathscr{F}_t)$ coïncident donc presque sûrement. L'unicité de la décomposition de Doob-Meyer montre alors qu'on a presque sûrement $B^c_t = t \wedge \zeta$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

5.4. — Nous allons maintenant lever l'hypothèse $\mathbb{E}_x(\zeta) < \infty$.

Soit R un temps aléatoire indépendant de $\mathscr{F}$, de distribution exponentielle de paramètre 1. Considérons la réalisation canonique du processus $X_t 1_{\{t<R\}} + \delta 1_{\{t \geq R\}}$. Les probabilités $\tilde{\mathbb{P}}_x$ ainsi définies sur Ω vérifient la propriété suivante.

$$(*) \qquad \forall t > 0,\ \forall A \in \mathscr{F}^0_t,\ \tilde{\mathbb{P}}_x(A \cap \{ t < \zeta \}) = e^{-t}\mathbb{P}_x(A \cap \{ t < \zeta \}).$$

D'autre part $\tilde{\mathbb{E}}_x(\zeta) \leq 1$ et donc ce qui précède s'applique à $(\tilde{\mathbb{P}}_x, x \in E)$. Il existe donc un processus intrinsèque continu et $\mathscr{F}^0_t$ adapté B^c_t, tel que $B^c_t = t$ sur $\{ t < \zeta \}$ pour tout t, $\tilde{\mathbb{P}}_x$-p. s. et donc $\mathbb{P}_x$-p. s. d'après $(*)$.

5.5. — Posons $\tau_t = \operatorname{Inf}(s, B^c_s \geq t) \wedge \zeta$. Il est clair que τ_t est un temps d'arrêt de $\mathscr{C}$. (Il est intrinsèque car B^c_t est intrinsèque, et $(\mathscr{F}^0_t)$-adapté car B^c l'est et est continu). Enfin τ_t est continu à gauche en t et $\mathbb{P}$-presque sûrement égal à $t \wedge \zeta$ pour tout t, comme son inverse B^c_t. Il est strictement croissant avant ζ.

Posant $N = \{ \omega \in \Omega/(\exists n \in N) B^n \neq T_n \}$, il résulte de ce qui précède que N est $\mathbb{P}$-négligeable. B^n étant intrinsèque, deux trajectoires équivalentes de $\Omega - N$ sont nécessairement égales.

Il n'est pas long de passer de là à la version générale du théorème de Chacon et Jamison qui affirme l'existence d'un ensemble $\overline{N}$ $\mathbb{P}$-négligeable tel que si $\omega \in \Omega \backslash \overline{N}$ et $\omega' \in \Omega \backslash \overline{N}$, si $\omega' = \omega \circ \phi$ sur $[t'_1, t'_2]$, avec ϕ bijection croissante de $[t'_1, t'_2]$ sur $[t_1, t_2]$, alors $t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1$ (voir [*6*]).

PROPOSITION 5.6. — *Pour tout* $T \in \mathscr{C}$, *la complétion de* $\mathscr{S}_T$ *contient* $\mathscr{F}^0_T$. *On a en effet* $\mathscr{F}^0_T = \sigma(X_{T \wedge t}, t \in Q^+)$ *et* $X_{t \wedge T} = X_{T \wedge \tau_t}$ *p. s.* τ_t *étant intrinsèque,* $X_{T \wedge \tau_t} \in \mathscr{S}_T$.

VI. LOI DES TRAJECTOIRES INTRINSÈQUES D'UN PROCESSUS DE MARKOV

Soient $(\mathbb{P}_x, x \in E)$ et $(\mathbb{P}^*_x, x \in E)$ deux processus de Markov sur E. Pour tout T de $\mathscr{C}_0$ et tout G ouvert de E posons : $(\forall f \in b\mathscr{E}_\delta)$

$$H_T f(x) = \mathbb{E}_x(f \circ X_T \cdot 1_{\{T<\zeta\}}) \quad \text{et} \quad H^*_T f(x) = \mathbb{E}^*_x(f \circ X_T \cdot 1_{\{T<\zeta\}}),$$

$$H_G f(x) = \mathbb{E}_x(f \circ Y_G \cdot 1_{\{\gamma_G<\zeta\}}) \quad \text{et} \quad H^*_G f(x) = \mathbb{E}^*_x(f \circ Y_G \cdot 1_{\{\gamma_G<\zeta\}}),$$

$$(\forall t \geq 0) \quad P_t f(x) = \mathbb{E}_x(f \circ X_t \cdot 1_{\{t<\zeta\}}) \quad \text{et} \quad P^*_t f(x) = \mathbb{E}^*_x(f \circ X_t \cdot 1_{\{t<\zeta\}}).$$

PROPOSITION 6.1. — *$\mathbb{P}_x$ et $\mathbb{P}_x^*$ coïncident sur $\mathscr{S}$ pour tout x si et seulement si $H_G = H_G^*$ pour tout G de $\mathcal{O}$.*

Preuve. — La condition est évidemment nécessaire par (2.8 *b* et *e*). Montrons en détail qu'elle est suffisante; on suppose donc $H_G = H_G^*$ pour tous les G de $\mathcal{O}$.

a) Notons $H'_G f(x) = \mathbb{E}_x(f(Y_G))$ pour $f \in \mathscr{E}_\delta$, $G \in \mathcal{O}$, $x \in E_\delta$; en écrivant $f = f \cdot 1_E + f(\delta)1_{\{\delta\}}$, on a :

$$\begin{aligned} H'_G f(x) &= H_G f(x) + f(\delta)\cdot(1 - H_G 1_E(x)) \quad \text{car} \quad \{ Y_G \in E \} = \{ \gamma_G < \zeta \} \\ &= H_G^* f(x) + f(\delta)\cdot(1 - H_G^* 1_E(x)) = H'^*_G f(x) : H'_G = H'^*_G \quad (\forall G \in \mathcal{O}). \end{aligned}$$

b) Posons de même

$$P'_0 f(x) = \mathbb{E}_x(f \circ X_0) \quad \text{et} \quad P'^*_0 f(x) = \mathbb{E}_x^*(f \circ X_0);$$

fixons x dans E et f continue bornée sur E_δ; alors si G décroît vers x $H'_G f(x) \to P'_0 f(x)$ et $H'^*_G f(x) \to P'^*_0 f(x)$, et donc $P'_0 = P'^*_0$.

c) Montrons par récurrence sur $l(F)$ que pour $x \in E$, G dans $\mathcal{O}$ et F dans $\mathscr{D}_G$ on a : $\mathbb{P}_x(F) = \mathbb{P}_x^*(F)$; c'est clair si $F = \emptyset$ ou Ω, et si c'est vrai pour F' tel que $l(F') < l(F)$ et si $F = \rho(G', A_i, B_j, F_{ij})$ avec $l(F_{ij}) < l(F)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(F) &= \sum_{i,j} \mathbb{P}_x(\{ Y_{G'} \in A_i \} \cap \{ X_{\gamma_{G'}} \in B_j \} \cap \theta_{G'}^{-1}(F_{ij})) \\ &= \sum_{i,j} \mathbb{P}_x(\{ Y_{G'} \in A_i \} \cap \theta_{G'}^{-1}(\{ X_0 \in B_j \} \cap F_{ij})) \\ &= \sum_{i,j} \mathbb{E}_x(1_{A_i}(Y_{G'}) \cdot \mathbb{P}_{Y_{G'}}(\{ X_0 \in B_j \} \cap F_{ij})) \qquad \text{par } (2.5\ c) \\ &= \sum_{i,j} H'_{G'} 1_{A_i} P'_0 1_{B_j} \mathbb{P}_{\cdot}(F_{ij})(x) \\ &= \sum_{i,j} H'^*_{G'} 1_{A_i} P'^*_0 1_{B_j} P^*_{\cdot}(F_{ij})(x) = \mathbb{P}_x^*(F). \end{aligned}$$

d) Par le théorème de classe monotone, on a donc $\mathbb{P}_x(F) = \mathbb{P}_x^*(F)$ pour tout x et tout F de $\mathscr{S}$, d'après (4.4) appliqué avec $G = E$.

REMARQUE 6.1 *bis*. — *Le* (*b*) *de la démonstration précédente montre également que* $[H_G \geq H_G^*$ *pour tout* G *de* $\mathcal{O}] \Rightarrow P_0 \geq P_0^*$.

PROPOSITION 6.2. — $H^*_{\gamma_L} \leq H_{\gamma_L}$ *pour tout* L *de* $\mathcal{O}$ $\Rightarrow$ $H^*_{\gamma_K} \leq H_{\gamma_K}$ *pour tout compact* K *de* E *et* $H^*_{\gamma_K} \leq H_{\gamma_K}$ *pour tout compact* K *de* E $\Rightarrow$ $H^*_G \leq H_G$ *pour tout* G *ouvert de* E.

Preuve. — *a*) Montrons d'abord la première implication ; fixons un compact K ; il existe une suite $\{ L_n \}$ d'ouverts de $\mathcal{O}$ décroissant fortement vers K : $\overline{L_{n+1}} \subset L_n$ et $\bigcap_n L_n = K$. γ_{L_n} décroît vers γ_K et $X_{\gamma_{L_n}} \to X_{\gamma_K}$, et donc $H_{\gamma_K} f = \lim_n H_{\gamma_{L_n}} f$ pour f continue bornée sur E_δ ; donc $H^*_{\gamma_L} f \leq H_{\gamma_L} f$ pour tout L de $\mathcal{O}$ et f continue positive bornée sur E_δ entraîne $H^*_{\gamma_K} f \leq H_{\gamma_K} f$, et on a donc bien $H^*_{\gamma_K} \leq H_{\gamma_K}$.

b) On veut maintenant calculer H_G, G ouvert fixé, en fonction des H_{γ_K}, K compact de E.

La difficulté provient du fait que si $\gamma_G = \lim_n \uparrow \gamma_{K_n}$, on peut avoir $\gamma_G = \zeta$ et $\gamma_{K_n} < \zeta$ pour tout *n*.

Sur $\{ \gamma_G < \zeta \}$ on a $Y_G \in E$ et $X_{\gamma_G} \in E$ et donc d'après (2.5 *c*)

$$\mathbb{P}_{Y_G}(\zeta > 0) = \mathbb{P}_{Y_G}(X_0 \in E) = \mathbb{P}_{X_{O-}}(\{ X_{\gamma_G} \in E \} \mid \mathcal{F}^0_G) = 1 \qquad \mathbb{P}\text{-p. s.},$$

donc si en reprenant les notations de 3.5, on pose $T_l = \sum_k 1_{W_{k,l}}(X_{O-})^{\gamma}\overline{V}_{k,l}$, on a $H_G f = \lim_{l \to \infty} H_G(f H_{T_l} 1)$ pour tout $f \in b\mathcal{E}_\zeta$.

Il suffit de prendre f en escalier, de la forme $\sum_i \alpha_i 1_{U_i}$.

Alors $H_G(f H_{T_l} 1)(x) = \sum_i \sum_k \alpha_i \mathbb{E}_x(1_{U_i}(Y_G) \cdot 1_{W_{k,l}}(Y_G) \cdot 1_{\{\gamma \overline{V}_{k,l} * \gamma_G < \zeta\}})$, et il suffit donc de savoir calculer en fonction des H_{γ_K}, K compact de E :

$\mathbb{P}_x(\{ Y_G \in U \} \cap \{ \gamma_V * \gamma_G < \zeta \}) = H_G(1_U H_{\gamma_V} 1)(x)$, où V est un voisinage compact de $\overline{U}$.

c) *Lemme.* — Soit $\{ K_n \}$ une suite de compacts croissant fortement vers G ; on a alors $\gamma_V * \gamma_G(\omega) = \gamma_V * \gamma_{K_n}(\omega)$ pour *n* assez grand et ω dans $\{ Y_G \in U \}$.

Preuve. — Supposons que pour tout *n* $\gamma_V * \gamma_G(\omega) > \gamma_G * \gamma_{K_n}(\omega)$; (ici $\gamma_V * \gamma_{K_n}$ signifie $\gamma_{K_n} + \gamma_V \circ \theta_{\gamma_{K_n}}$) ; si on avait $\gamma_V * \gamma_{K_n}(\omega) \geqslant \gamma_G(\omega)$, on aurait $\gamma_V * \gamma_{K_n}(\omega) = \gamma_V * \gamma_V * \gamma_{K_n}(\omega) \geq \gamma_V * \gamma_G(\omega)$ ce qui contredit l'hypothèse. On a donc $\gamma_G(\omega) > \gamma_V * \gamma_{K_n}(\omega) \geq \gamma_{K_n}(\omega)$, ce qui montre que $\gamma_V * \gamma_{K_n}(\omega)$ croît strictement (puisque $\gamma_{K_n} \uparrow \gamma_G$) vers $\gamma_G(\omega)$, et donc que $X_{\gamma_V * \gamma_{K_n}}(\omega)$ et $X_{\gamma_V * \gamma_{K_n}-}(\omega)$ tendent vers $X_{\gamma_G -}(\omega)$, ainsi que $X_{\gamma_{K_n}}(\omega)$.

Mais $X_{\gamma_G-}(\omega) = Y_G(\omega) \in U$; or $X_{\gamma_V * \gamma_{K_n}}(\omega)$ ou $X_{\gamma_V * \gamma_{K_n}-}(\omega)$ est dans V^c. Comme $d(U, V^c) > 0$, on obtient une contradiction.

Comme conséquence de ce lemme, on a que

$$\{ Y_G \in U, \gamma_V * \gamma_G < \zeta \} = \lim_n \uparrow \{ Y_G \in U, \gamma_G \leq \gamma_V * \gamma_{K_n} < \zeta \},$$

et donc que $H_G(1_U H_{\gamma_V} 1)(x) = \lim_n \uparrow \int H_{\gamma_{K_n}}(x, dy) \mathbb{P}_y(\{ Y_G \in U \} \cap \{ \gamma_G \leq \gamma_V < \zeta \})$; il nous reste donc à calculer $\mathbb{P}_y(\{ Y_G \in U \} \cap \{ \gamma_G \leq \gamma_V < \zeta \})$ en fonction des H_{γ_K}.

d) Comme sur $\{ \gamma_G < \zeta \} \cap \{ X_{O-} \in G \}$ on a toujours $\gamma_{K_m} \uparrow \gamma_G$ et $X_{\gamma_{K_m}} \to Y_G$, si U' est un ouvert tel que $\overline{U} \subset U' \subset \overline{U'} \subset \overset{\circ}{V}$, on a, sur $\{ X_{O-} G \}$:

$$\{ Y_G \in U, \gamma_G \leq \gamma_V < \zeta \} \subseteq \liminf_m \{ X_{\gamma_{K_m}} \in U', \gamma_{K_n} \leq \gamma_V < \zeta \}$$

et

$$\limsup_m \{ X_{\gamma_{K_m}} \in U', \gamma_{K_m} \leq \gamma_V < \zeta \} \subseteq \{ Y_G \in \overline{U'}, \gamma_G \leq \gamma_V < \zeta \},$$

ce qui entraîne que pour y dans G :

$$\mathbb{P}_y(\{ Y_G \in U, \gamma_G \leq \gamma_V < \zeta \}) \leq \liminf_m \mathbb{P}_y(\{ X_{\gamma_{K_m}} \in U', \gamma_{K_m} \leq \gamma_V < \zeta \}) \leq \mathbb{P}_y(\{ Y_G \in \overline{U'}, \gamma_G \leq \gamma_V \leq \zeta) \}.$$

LEMME. — On a $\{ X_{\gamma_{K_m}} \in U', \gamma_{K_m} \leq \gamma_V < \zeta \} = \{ X_{\gamma_{K_m \cap V}} \in U', \gamma_V < \zeta \}$.

Preuve. — L'égalité est claire sur $\{ X_{O-} \in V^c \}$; plaçons-nous sur $\{ X_{O-} \in V \}$; l'inclusion de gauche à droite est claire par (2.3 *c*); montrons donc l'autre inclusion : on suppose que $X_{\gamma_{K_m \cap V}}(\omega) \in U'$ et que $\gamma_V(\omega) < \zeta(\omega)$ (et que $X_{O-}(\omega) \in V$); d'après (2.3 *a*), on a : $X_{\gamma_V}(\omega) \in \overline{V^c} = (\overset{\circ}{V})^c$; or

$$U' \subset \overset{\circ}{V} \Rightarrow X_{\gamma_V}(\omega) \neq X_{\gamma_{K_m \cap V}}(\omega) = X_{\gamma_{K_m} \wedge \gamma_V}(\omega) \Rightarrow \gamma_{K_m}(\omega) < \gamma_V(\omega).$$

Ce lemme nous permet d'écrire que pour $y \in G$:

$$P_y(U) \leq \liminf_m H_{\gamma_{K_m \cap V}}(1_{U'} H_{\gamma_V} 1)(y) \leq P_y(\overline{U'}),$$

en notant $P_y(U)$ la valeur à calculer $\mathbb{P}_y(\{ Y_G \in U, \gamma_G \leq \gamma_V < \zeta \})$.

Soit $\{ U_q \}$ une suite d'ouverts croissant fortement vers U. On a d'après ce qui précède :

$$P_y(U_q) \leq \liminf_m H_{K_m \cap V}(1_{U_{q+1}} H_{\gamma_V} 1)(y) \leq P_y(\overline{U}_{q+1})$$

et ceci donne en particulier : $P_y(U) = \liminf_{q,m} H_{K_m \cap V}(1_{U_q} H_{\gamma_V} 1)(y)$ ce qui donne bien $P_y(U)$, et donc $H_G(1_U H_{\gamma_V} 1)$, et donc H_G, en fonction des H_{γ_K}.

COROLLAIRE 6.3. — *$\mathbb{P}_x$ et $\mathbb{P}_x^*$ coïncident sur $\mathcal{S}$ pour tout x si et seulement si $H_{\gamma_G} = H^*_{\gamma_G}$ pour tout G de $\mathcal{O}$, ou bien encore si et seulement si $H_{\gamma_K} = H^*_{\gamma_K}$ pour tout K compact de E.*

VII. LE THÉORÈME DE BLUMENTHAL, GETOOR, McKEAN

Ce théorème apparaît maintenant comme la réunion de 6.1 ou 6.3 et des résultats suivants :

PROPOSITION 7.1. — *Définissons le changement de temps $\sigma : \Omega \to \Omega$ par $\sigma(\omega)(t) = \omega(\tau_{t+})$ pour tout $t \geq 0$; pour tout A de $\mathcal{F}^0_\infty$, $\sigma^{-1}(A)$ appartient à $\mathcal{S}$, et $\sigma^{-1}(A) = A$ $\mathbb{P}$-presque sûrement.*

Preuve. — Il suffit de considérer une fonction d'un nombre fini de coordonnées et d'appliquer les résultats de (5.5). τ_{t+} est évidemment un temps intrinsèque (mais $\tau_{t+} \notin \mathcal{C}_0$). Pour toute f borélienne, $f(X_{\tau_{t+}}) = f(X_t)$ $\mathbb{P}$-p. s. et $f(X_{\tau_{t+}}) \in \mathcal{S}$.

Remarque. — Bien sûr σ dépend de $(\mathbb{P}_x, x \in \mathbb{E})$.

PROPOSITION 7.2. — *Si $(\mathbb{P}_x^*, x \in E)$ est un processus de Markov coïncidant avec $(\mathbb{P}_x, x \in E)$ sur $\mathcal{S}$, on a $\mathbb{P}_x = \sigma(\mathbb{P}_x^*)$ pour tout x.*

Il reste à préciser les propriétés du changement de temps σ relativement au processus $(\mathbb{P}_x^*, x \in E)$.

PROPOSITION 7.3. — *$\mathbb{P}^*$-presque sûrement B^c_t est une fonctionnelle additive continue et τ_{t+} est son inverse avant ζ.*

Démonstration. — Nous la rédigeons de manière à pouvoir l'appliquer sans modifications en 8.6.

Du fait que $B^c_t = t \wedge \zeta = \tau_{t+} = B^c_{\tau_t}$ pour tout t $\mathbb{P}$-p. s. et du fait que $\mathbb{P}_x$ et $\mathbb{P}_x^*$ coïncident sur $\mathcal{S}$, on a :

$$\mathbb{P}_x^*(\{ B^c_{\tau_{t+}} \neq t \} \cap \{ \tau_{t+} < \zeta \}) \leq \mathbb{P}_x(\{ B^c_{\tau_{t+}} \neq t \} \cap \{ \tau_{t+} < \zeta \}) = 0$$

(B^c_t, tout comme B_t, étant un processus intrinsèque).

Reste à montrer que $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$, on a, $\mathbb{P}^*$-p. s.

$$B^c_t + B^c_s \circ \theta_t = B^c_{t+s} \qquad \text{sur} \quad \{ t + s < \zeta \} .$$

Du fait que $B^c_t = t \wedge \zeta$ pour tout t, $\mathbb{P}$-p. s. on a $B_T = T \wedge \zeta$ $\mathbb{P}$-p. s. pour tout $T \in \mathcal{C}$.

Si T et S appartiennent à $\mathscr{T}$, il est facile de voir (cf. la démonstration de 2.5 *b*) que $T * S = S + T \circ \theta_S$ appartient à $\mathscr{T}$ et l'on a, par la propriété de Markov forte $B^c_T + B^c_S \circ \theta_T = B^c_{T*S}$ sur $\{ T * S < \zeta \}$ $\mathbb{P}$-p. s. et donc $\mathbb{P}^*$-p. s. Il suffit alors d'appliquer cette identité aux temps $\tau^*_t \in \mathscr{T}$ tels que $B^c_{\tau^*_t} = t \wedge \zeta$ $\mathbb{P}^*$-p. s. pour pouvoir conclure.

Nous avons bien démontré le :

THÉORÈME. — (Blumenthal-Getoor-McKean).

Si deux processus de Markov $(\mathbb{P}_x, x \in E)$ et $(\mathbb{P}^*_x, x \in E)$ sont tels que : soit $H_G = H^*_G$ pour tout G de $\mathcal{O}$, soit $H_{\gamma_G} = H^*_{\gamma_G}$ pour tout G de $\mathcal{O}$, soit $H_{\gamma_K} = H^*_{\gamma_K}$ pour tout compact K de E, alors $(\mathbb{P}_x, x \in E)$ est le changé de temps de $(\mathbb{P}^*_x, x \in E)$ par l'inverse d'une fonctionnelle additive continue strictement croissante avant ζ.

Remarque. — La proposition 7.1 et le corollaire 7.2 font apparaître que le changement de temps ne dépend que de $(\mathbb{P}_x, x \in E)$.

VIII. PREUVE DU THÉORÈME DE SHIH

LEMME 8.1. — Fixons $T = \sigma(G, A_i, B_j, T_{ij})$ dans $\mathscr{A}$; alors l'ensemble des réunions finies d'éléments de

$$\mathscr{S}'_T = \Big\{ \sum_{i,j} \{ Y_G \in A_i \} \cap \{ X_{\gamma_G} \in B_j \} \cap \theta_G^{-1}(C_{ij}) \cap D_{ij} \cap \{ X_{\gamma_G} \in \Delta_{ij} \} \mid C_{ij} \in \mathscr{S}_{T_{ij}}, D_{ij} \in \bigvee_n \mathscr{S}_{\gamma_{K_n}}, \Delta_{ij} \in \mathscr{E}_\delta \Big\}$$

forme une algèbre de Boole, et $\mathscr{S}_T = \sigma(\mathscr{S}'_T) \cdot (\{ K_n \} \uparrow\uparrow G)$.

Preuve. — L'élément écrit ci-dessus a pour complémentaire :

$$\Big[\sum_{i,j} \{ Y_G \in A_i, X_{\gamma_G} \in B_j \} \cap \theta_G^{-1}(C_{ij}^c) \Big] \cup \Big[\sum_{i,j} \{ Y_G \in A_i, X_{\gamma_G} \in B_j \} \cap D_{ij}^c \Big] \cup \Big[\sum_{i,j} \{ Y_G \in A_i, X_{\gamma_G} \in B_j \} \cap \{ X_{\gamma_G} \in \Delta_{ij}^c \} \Big],$$

ce qui montre que $\mathscr{S}'_T$ est stable par passage au complémentaire. La stabilité par intersection est claire.

D'après 2.8 *d*, on a $\mathscr{S}_T = \left\{ \sum_{i,j} \{ Y_G \in A_i \} \cap \{ X_{\gamma_G} \in B_j \} \cap F_{ij} | F_{ij} \in \mathscr{S}_{T_{ij} * \gamma_G} \right\}$, puis $\mathscr{S}_{T_{ij}*\gamma_G} = \mathscr{S}_{\gamma_G} \vee \theta_G^{-1}(\mathscr{S}_{T_{ij}})$ d'après 4.3, et enfin le théorème de Blackwell montre comme dans 4.3 que $\mathscr{S}_{\gamma_G} = \left(\bigvee_n \mathscr{S}_{\gamma_{K_n}} \right) \vee \sigma(\{ X_{\gamma_G} \})$.

DÉFINITION 8.2. — Soit $\mathscr{A}' = \{ T = (T_1)_{A_1} \wedge (T_2)_{A_2} \wedge \ldots \wedge (T_n)_{A_n} | n \in \mathbb{N}^*, T_i \in \mathscr{A}, A_i \in \mathscr{S}_{T_1} \}$, où $(T_i)_{A_i}$ signifie $1_{A_i} T_i + 1_{A_i^c} \zeta$.

Remarque. — On peut vérifier facilement que $\mathscr{A}'$ est réticulé et $*$-stable.

REMARQUE 8.3. — $\mathscr{A}'$ est dans $\mathscr{C}$, et si $T = (T_1)_{A_1} \wedge \ldots \wedge (T_n)_{A_n} \in \mathscr{A}'$, on peut toujours supposer que $A_i = \{ T = T_i \}$ à cause de 2.8 *b*, et on a aussi $T = \sum_{i=1}^{n} 1_{A'_i} T_i + 1_A \zeta$ avec $A'_i \in \mathscr{S}_{T_i}$, $A \in \mathscr{S}_T$, en posant

$$A'_1 = \{ T = T_1 < \zeta \}, \ldots,$$
$$A'_{k+1} = \{ T = T_{k+1} \} \cap \{ T \neq T_k \} \cap \ldots \cap \{ T \neq T_1 \} \cap \{ T < \zeta \}, 0 \leq k \leq n-1,$$

et $A = A_1'^c \cap A_2'^c \cap \ldots \cap A_n'^c = \{ T = \zeta \}$; $A'_i \in \mathscr{S}_{T_i}$ par 2.8 *b* et *d*. Et $\{ A, A'_1, A'_2, \ldots, A'_n \}$ est une partition de Ω.

PROPOSITION 8.4. — Tout temps de $\mathscr{C}$ est limite décroissante d'une suite d'éléments de $\mathscr{A}'$.

Preuve. — Soit T_n, $n \in \mathbb{N}$ une énumération de $\mathscr{A}$. Posons pour tout entier m, $B_m = \{ T \leq T_m \}$. Définissons $S_n = \inf_{m \leq n} (T_m)_{B_m}$. On a, du fait que $\{ T_n(\omega), n \in \mathbb{N} \}$ est dense dans $[0, \zeta(\omega)]$, $T = \lim_{n \to \infty} \downarrow S_n$.

THÉORÈME 8.5. — L'hypothèse $H_G^* \leq H_G$ pour tout G de $\mathscr{O}$, et donc aussi l'hypothèse $H_{\gamma_G}^* \leq H_{\gamma_G}$ pour tout G de $\mathscr{O}$ ou l'hypothèse $H_{\gamma_K}^* \leq H_{\gamma_K}$ pour tout K compact de E, entraîne que : $\mathbb{P}_x^*(F \cap \{ T < \zeta \}) \leq \mathbb{P}_x(F \cap \{ T < \zeta \})$ pour tous x de E, T de $\mathscr{C}$ et F de $\mathscr{S}_T$; en particulier cela entraîne que $H_T^* \leq H_T$ pour tout T de $\mathscr{C}$.

Preuve. — *a)* Envisageons d'abord le cas où $T = \gamma_G$, $G \in \mathscr{O}$; il suffit d'après 4.4 de prendre F dans $\mathscr{D}_G$.

Effectuons une récurrence sur $l(\mathrm{F})$; soit $\mathrm{F} = \rho(\mathrm{G}', \mathrm{A}_i, \mathrm{B}_j, \mathrm{F}_{ij})$ comme dans IV ; on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x(\mathrm{F} \cap \{ \gamma_\mathrm{G} < \zeta \}) \\
&= \sum_{i,j} \mathbb{P}_x(\{ \mathrm{Y}_{\mathrm{G}'} \in \mathrm{A}_i, \mathrm{X}_{\gamma_{\mathrm{G}'}} \in \mathrm{B}_j \} \cap \theta_{\mathrm{G}'}^{-1}(\mathrm{F}_{ij}) \cap \{ \gamma_\mathrm{G} < \zeta \}) \\
&= \sum_{i,j} \mathbb{P}_x(\{ \mathrm{Y}_{\mathrm{G}'} \in \mathrm{A}_i \} \cap \{ \gamma_{\mathrm{G}'} < \zeta \} \cap \theta_{\mathrm{G}'}^{-1}(\mathrm{F}_{ij} \cap \{ \mathrm{X}_0 \in \mathrm{B}_j \} \cap \{ \gamma_\mathrm{G} < \zeta \})) \\
&= \sum_{i,j} \mathbb{E}_x([1_{\mathrm{A}_i} \mathbb{E}_.(1_{\mathrm{B}_j}(\mathrm{X}_0) \mathrm{E}_{\mathrm{X}_0}(\mathrm{F}_{ij} \cap \{ \gamma_\mathrm{G} < \zeta \}))](\mathrm{Y}_{\mathrm{G}'}) \cdot 1_{\{\gamma_{\mathrm{G}'} < \zeta\}}) \\
&= \sum_{i,j} \mathrm{H}_{\mathrm{G}'} 1_{\mathrm{A}_i} \mathrm{P}_0 1_{\mathrm{B}_j} \mathrm{P}_.(\mathrm{F}_{ij} \cap \{ \gamma_\mathrm{G} < \zeta \})(x).
\end{aligned}$$

Donc si $l(\mathrm{F}) = 0$ ou 1, il suffit de prendre $\mathrm{F}_{ij} \in \{ \varnothing, \Omega \}$, et on a : $\mathbb{P}_.(\mathrm{F}_{ij} \cap \{ \gamma_\mathrm{G} < \zeta \}) = 0$ ou $\mathrm{H}_\mathrm{G} 1_\mathrm{E} \geq \mathrm{H}_\mathrm{G}^* 1_\mathrm{E}$, et donc

$$\mathbb{P}_.(\mathrm{F}_{ij} \cap \{ \gamma_\mathrm{G} < \zeta \}) \geq \mathbb{P}_.^*(\mathrm{F}_{ij} \cap \{ \gamma_\mathrm{G} < \zeta \}),$$

ce qui fait que, d'après la remarque 6.1 *bis*, on a :

$$\mathbb{P}_x(\mathrm{F} \cap \{ \gamma_\mathrm{G} < \zeta \}) \geq \sum_{i,j} \mathrm{H}_{\mathrm{G}'}^* 1_{\mathrm{A}_i} \mathrm{P}_0^* 1_{\mathrm{B}_j} \mathbb{P}_.^*(\mathrm{F}_{ij} \cap \{ \gamma_\mathrm{G} < \zeta \})(x) = \mathbb{P}_x^*(\mathrm{F} \cap \{ \gamma_\mathrm{G} < \zeta \});$$

ceci amorce la récurrence ; et si $l(\mathrm{F}) > 1$, l'hypothèse de récurrence sur les F_{ij} permet la même minoration, ce qui donne le résultat.

b) Envisageons maintenant le cas où $\mathrm{T} \in \mathscr{A}$, et effectuons une récurrence sur $l(\mathrm{T})$. Le cas $l(\mathrm{T}) = 0$ ou 1 est exactement le (*a*). Supposons donc que $\mathrm{T} = \sigma(\mathrm{G}, \mathrm{A}_i, \mathrm{B}_j, \mathrm{T}_{ij})$ avec $l(\mathrm{T}_{ij}) < l(\mathrm{T})$, alors d'après 8.1 et par un théorème de classe monotone il suffit de prendre

$$\mathrm{F} = \sum_{i,j} \{ \mathrm{Y}_\mathrm{G} \in \mathrm{A}_i \} \cap \{ \mathrm{X}_{\gamma_\mathrm{G}} \in \mathrm{B}_j \} \cap \theta_\mathrm{G}^{-1}(\mathrm{C}_{ij}) \cap \mathrm{D}_{ij} \cap \{ \mathrm{X}_{\gamma_\mathrm{G}} \in \Delta_{ij} \}$$

avec $\mathrm{C}_{ij} \in \mathscr{S}_{\mathrm{T}_{ij}}$, $\mathrm{D}_{ij} \in \bigvee_n \mathscr{S}_{\gamma_{\mathrm{K}_n}}$, et $\Delta_{ij} \in \mathscr{E}_\delta$; on a alors :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x(F\cap\{T<\zeta\}) \\
&=\sum_{i,j}\mathbb{P}_x(\{Y_G\in A_i\}\cap D_{ij}\cap\{\gamma_G<\zeta\}\cap\theta_G^{-1}(C_{ij}\cap\{X_0\in B_j\cap\Delta_{ij}\}\cap\{T_{ij}<\zeta\})) \\
&=\sum_{i,j}\mathbb{E}_x(1_{\{Y_G\in A_i\}\cap D_{ij}\cap\{\gamma_G<\zeta\}}\cdot\mathbb{E}_{Y_G}(C_{ij}\{X_0\in B_j\cap\Delta_{ij}\}\cap\{T_{ij}<\zeta\}))\quad \text{par } (2.6\,c) \\
&\geq\sum_{i,j}\mathbb{E}_x^*(1_{\{Y_G\in A_i\}\cap D_{ij}\cap\{\gamma_G<\zeta\}}\cdot\mathbb{E}_{Y_G}^*(C_{ij}\cap\{X_0\in B_j\cap\Delta_{ij}\}\cap\{T_{ij}<\zeta\}))
\end{aligned}$$

par (*a*) et l'hypothèse de récurrence, et donc

$$\mathbb{P}_x(F\cap\{T<\zeta\})\geq\mathbb{P}_x^*(F\cap\{T<\zeta\}).$$

c) Supposons maintenant que $T\in\mathscr{A}'$: alors d'après 8.3 on peut prendre $T=\sum_{i=1}^{n}1_{A_i'}T_i+1_A\zeta$ avec $A_i'\in\mathscr{S}_{T_i}$ et $T_i\in\mathscr{A}$; soit $F\in\mathscr{S}_T$; alors $F=\sum_{i=1}^{n}F\cap A_i'+F\cap A$ et $F\cap A_i'\in\mathscr{S}_{T_i}$ par 2.8 *d* ; on a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(F\cap\{T<\zeta\})&=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}_x(F\cap A_i'\{T_i<\zeta\}) \\
&\geq\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}_x^*(F\cap A_i'\cap\{T_i<\zeta\})=\mathbb{P}_x^*(F\cap(T<\zeta\})
\end{aligned}$$

d'après (*b*).

d) Enfin pour tout T de $\mathscr{C}$ on a d'après 8.4 : $T=\lim_n\downarrow T_n$, $T_n\in\mathscr{A}'$, et si $F\in\mathscr{S}_T\subset\bigcap_n\mathscr{S}_{T_n}$ on a d'après (*c*) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(F\cap\{T<\zeta\})&=\mathbb{P}_x(F\cap\lim_n\uparrow\{T_n<\zeta\}) \\
&=\lim\uparrow\mathbb{P}_x(F\cap\{T_n<\zeta\}) \\
&\geq\lim\uparrow\mathbb{P}_x^*(F\cap\{T_n<\zeta\})=\mathbb{P}_x^*(F\cap\{T<\zeta\}).
\end{aligned}$$

COROLLAIRE 8.6. — La proposition 7.3 est valide sous les hypothèses de 8.5.

Preuve. — La preuve de 7.3 a été rédigée de manière à pouvoir s'appliquer sans modification.

THÉORÈME (Shih). — Si $(\mathbb{P}_x, x \in E)$ et $(\mathbb{P}_x^*, x \in E)$ sont deux processus de Markov tels que : soit $H_G^* \leq H_G$ pour tout G de $\mathcal{O}$, soit $H_{\gamma G}^* \leq H_{\gamma G}$ pour tout G de $\mathcal{O}$, soit $H_{\gamma K}^* \leq H_{\gamma K}$ pour tout compact K de E, alors il existe un processus de Markov $(\mathbb{P}_x, x \in E)$ subordonné à $(\mathbb{P}_x, x \in E)$ et changé de temps de $(\mathbb{P}_x^*, x \in E)$ par l'inverse d'une fonctionnelle additive continue strictement croissante avant ζ.

Preuve. — Posons $\hat{\mathbb{P}}_x = \sigma(\mathbb{P}_x^*)$ pour tout x, où σ est toujours le changement de temps de VII.

On a $\hat{P}_t = P_{\tau_{t+}}^*$ par définition de $\hat{P}_t = \hat{\mathbb{P}}(\{X_t \in ., t < \zeta\})$, et donc $\hat{P}_t = H_{\tau_{t+}}^* = H_{\tau_t}^* \leq H_{\tau_t} = P_t$ par 7.4, 8.5 et 5.5.

IX. QUESTIONS D'UNICITÉ

a) Pour le théorème de Blumenthal, Getoor, MacKean.

On suppose que $(\mathbb{P}_x, x \in E)$ est changé de temps de $(\mathbb{P}_x^*, x \in E)$ par une fonctionnelle additive A de $(\mathbb{P}_x^*, x \in E)$ $\mathbb{P}^*$-presque sûrement continue et strictement croissante avant ζ, d'inverse continu à droite strictement croissant σ (cela signifie que $\mathbb{P}^*$-p. s. on a pour tous t et u de $\mathbb{R}_+$:

$$\sigma_t = u \Leftrightarrow A_u = t \quad \text{sur} \quad \{u \leq \zeta\}).$$

On a donc $\mathbb{P} = \sigma(\mathbb{P}^*)$, $T(\omega \circ \sigma) = \sigma^{-1}(T(\omega))$ pour tout T intrinsèque et donc $\tau_{t+}(\omega \circ \sigma) = \sigma^{-1}(\tau_{t+}(\omega))$. Or $\tau_{t+}(\omega \circ \sigma) = t \wedge \zeta(\omega \circ \sigma)$ $\mathbb{P}^*$-p. s. (puisque $\tau_{t+} = t \wedge \zeta$ $\mathbb{P}$-p. s.) et donc $t \wedge \zeta = \sigma^{-1}(\tau_{t+})$ ce qui montre que $\sigma(t) = \tau_{t+}$ $\mathbb{P}^*$-p. s.

b) Pour le théorème de Shih.

Soient A et A′ deux fonctionnelles additives pour $(\mathbb{P}_x^*, x \in E)$ $\mathbb{P}^*$-presque sûrement continues strictement croissantes avant ζ, d'inverses continus à droite strictement croissants respectivement σ et ρ, telles que les processus $\hat{\mathbb{P}} = \sigma(\mathbb{P}^*)$ et $\tilde{\mathbb{P}} = \rho(\mathbb{P}^*)$ soient subordonnés à $\mathbb{P}$.

D'après un théorème de Meyer (cf. Th. 2-3 p. 101 de [*1*]), qui reste vrai sans quasi-continuité à gauche, il existe deux fonctionnelles multiplicatives pour $\mathbb{P}$ continues à droite telles que $\hat{P}_t f(x) = \mathbb{E}_x(f \circ X_t \cdot M_t)$ et $\tilde{P}_t f(x) = \mathbb{E}_x(f \circ X_t \cdot M_t')$. On peut supposer que $M_t = M_t' = 0$ sur $\{t \geq \zeta\}$. Une récurrence immédiate montre que :

$$\hat{\mathbb{E}}_x(f_1(X_{t_1}) \ldots f_n(X_{t_n})) = \mathbb{E}_x(f_1(X_{t_1}) \ldots f_n(X_{t_n}) M_{t_n}),$$

et donc que $\hat{\mathbb{E}}_x(\mathrm{F} \cap \{ t < \zeta \}) = \mathbb{E}_x(\mathrm{F} \cdot \mathrm{M}_t)$ pour tout t de $\mathbb{R}_+$ et tout F de $b\mathscr{F}_t^0$ par le théorème de classe monotone.

Ensuite, pour tout T de $\mathscr{T}_0$, soit $\mathrm{T}_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} 1_{\left\{\frac{k}{n} < \mathrm{T} \leq \frac{k+1}{n}\right\}} \frac{k+1}{n} + \infty \cdot 1_{\{\mathrm{T}=\infty\}}$;

$\mathrm{T}_n \downarrow \mathrm{T} \Rightarrow \mathrm{M}_{\mathrm{T}_n} \uparrow \mathrm{M}_\mathrm{T}$ $\mathbb{P}$-p. s., et pour tout F de $\mathscr{F}_\mathrm{T}^0$ on a :

$$\hat{\mathbb{E}}_x(\mathrm{F} \cap \{\mathrm{T}_n < \zeta\})$$
$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} \hat{\mathbb{E}}_x\left(\mathrm{F} \cap \left\{\frac{k}{n} < \mathrm{T} \leq \frac{k+1}{n}\right\} \cap \left\{\frac{k+1}{n} < \zeta\right\}\right)$$
$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_x\left(\mathrm{F} \cap \left\{\frac{k}{n} < \mathrm{T} \leq \frac{k+1}{n}\right\} \cdot \mathrm{M}_{\frac{k+1}{n}}\right) \text{ car } \mathrm{F} \cap \left\{\frac{k}{n} < \mathrm{T} \leq \frac{k+1}{n}\right\} \in \mathscr{F}^0_{\frac{k+1}{n}}$$
$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_x\left(\mathrm{F} \cap \left\{\frac{k}{n} < \mathrm{T} \leq \frac{k+1}{n}\right\} \cdot \mathrm{M}_{\mathrm{T}_n}\right) = \mathbb{E}_x(\mathrm{F} \cdot \mathrm{M}_{\mathrm{T}_n})$$

et donc à la limite : $\hat{\mathbb{E}}_x(\mathrm{F} \cap \{ \mathrm{T} < \zeta \}) = \mathbb{E}_x(\mathrm{F} \cdot \mathrm{M}_\mathrm{T})$ et de même :

$$\tilde{\mathbb{E}}_x(\mathrm{F} \cap \{ \mathrm{T} < \zeta \}) = \mathbb{E}_x(\mathrm{F} \cdot \mathrm{M}'_\mathrm{T}).$$

Puis on a $\hat{\mathrm{H}}_\mathrm{G} = \mathrm{H}^*_\mathrm{G} = \tilde{\mathrm{H}}_\mathrm{G}$ pour tout G de $\mathscr{O}$ puisque le changement de temps préserve les noyaux harmoniques, et on a donc par 8.5 : $\hat{\mathbb{E}}_x(\mathrm{F} \cap \{ \mathrm{T} < \zeta \}) = \tilde{\mathbb{E}}_x(\mathrm{F} \cap \{ \mathrm{T} < \zeta \})$ pour tout F de $\mathscr{S}_{\mathrm{T}}$, ce qui donne avec ce qui précède : $\mathbb{E}_x(\mathrm{F} \cdot \mathrm{M}_\mathrm{T}) = \mathbb{E}_x(\mathrm{F} \cdot \mathrm{M}'_\mathrm{T})$ pour tout T de $\mathscr{T}$ et tout F de $\mathscr{S}_\mathrm{T}$, puis pour tous T de $\mathscr{T}$ et F de $\mathscr{F}_\mathrm{T}$ d'après 5.6.

Enfin si on prend $\mathrm{T} = \tau_t$ de 5.5, puisque $\mathrm{M}_t \in \mathscr{F}_t$ et $\mathrm{M}'_t \in \mathscr{F}_t$, on obtient que $\mathrm{M}_t = \mathrm{M}'_t$ $\mathbb{P}$-p. s., et donc $\hat{\mathrm{P}}_t = \tilde{\mathrm{P}}_t$ pour tout t ; ce qui signifie que $\hat{\mathbb{P}}$ et $\tilde{\mathbb{P}}$ sont égaux, puis d'après (*a*) que $\mathrm{A} = \mathrm{A}'$.

On a bien l'unicité dans le théorème de Shih.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLUMENTHAL et GETOOR, *Markov Processes and Potential Theory*, Academic Press, New York, 1968.

[2] BLUMENTHAL, GETOOR, MCKEAN, Markov Processes with identical hitting distributions. *Illinois J. Math.*, t. **6**, 1962, p. 402-420.

[3] P. A. MEYER, *Probabilités et Potentiel*, Hermann, Paris.

[4] CHACON et JAMISON, A fundamental property of Markov Processes with an application to equivalence under time changes. *Israël J. Math.*, t. **33**, 1979, p. 241-269.

[5] CHACON, LE JAN, WALSH, *Spacial Trajectories* (à paraître).

[6] Y. LE JAN, Arc Length associated to a Markov Process. *Advances in Math.*, t. **42**, novembre 1981, p. 136-142.
[7] C. DELLACHERIE, *Deux remarques sur la séparabilité optionnelle.* Séminaire de Strasbourg XI.
[8] C. T. SHIH, Markov Processes whose hitting distributions are dominated by those of a given process. *Trans. America Soc.*, t. **129**, 1967, p. 157-179.
[9] CHACON et JAMISON, Sample Path Consistency for Markov Processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete*, t. **58**, 1981, p. 169-182.
[10] COURRÈGE et PRIOURET, *Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire?* Publications de l'Institut de Statistiques, t. **XIV**, n° 3, 1965.
[11] J. FRANCHI, *Une nouvelle démonstration des théorèmes de Blumenthal,* Getoor, McKean et Shih. Thèse de l'Université Paris VI, 1981.
[12] J. WALSH, *On the Chacon-Jamison theorem* (preprint).

(Manuscrit reçu le 25 octobre 1982)
(Modifié le 22 novembre 1983)