ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

M. EMERY

Une définition faible de BMO

Annales de l'I. H. P., section B, tome 21, nº 1 (1985), p. 59-71

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1985__21_1_59_0>

© Gauthier-Villars, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 21, n° 1, 1985, p. 59-71. *Probabilités et Statistiques*

Une définition faible de BMO

par

M. EMERY

IRMA (laboratoire associé au CNRS), Université Louis Pasteur,
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex

Représente-toi Béhémoth !
Il se nourrit d'herbe, comme le bœuf.
Vois, sa force réside dans ses reins,
sa vigueur dans les muscles de son ventre.
Il raidit sa queue comme un cèdre,
les nerfs de ses cuisses s'entrelacent.
Ses vertèbres sont des tubes d'airain,
ses os sont durs comme du fer forgé.
C'est lui la fleur des œuvres de Dieu.

Job 40, 15-19.

RÉSUMÉ. — Une martingale M est dans BMO dès que pour une fonction croissante Φ sur $\mathbb{R}_+$ et pour une constante $c < \sup \Phi$,

$\forall$T temps d'arrêt $E[\Phi(|M_\infty - M_{T-}|) | \mathscr{F}_T] \leqq c$,

ou $\forall$T temps d'arrêt $E[\Phi([M, M]_\infty - [M, M]_{T-}) | \mathscr{F}_T] \leqq c$.

Quand $\Phi(x) = x^p \, (p \geqq 1)$, on retrouve la caractérisation L^p classique ; quand $\Phi = I_{[a,\infty[}$, on obtient une sorte de caractérisation L^0.

ABSTRACT. — A martingale M belongs to BMO if for some non-decreasing function Φ on $\mathbb{R}_+$ and some constant $c < \sup \Phi$,

$\forall$T stopping time $E[\Phi(|M_\infty - M_{T-}|) | \mathscr{F}_T] \leqq c$,

or $\forall$T stopping time $E[\Phi([M, M]_\infty - [M, M]_{T-}) | \mathscr{F}_T] \leqq c$.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques - Vol. 21, 0246-0203
85/01/59/13/$ 3,30/© Gauthier-Villars

When $\Phi(x) = x^p$ ($p \geqq 1$), this reduces to the classical L^p-criterion; when $\Phi = I_{[a,\infty[}$, this yields a kind of L^0-criterion.

Il est bien connu que les martingales de BMO possèdent des propriétés d'intégrabilité exponentielle (inégalité de John et Nirenberg). Nous allons établir dans cet exposé qu'une propriété apparemment bien plus faible que l'hypothèse BMO implique une décroissance exponentielle de la répartition, résultat qui équivaut à l'inégalité de John et Nirenberg, et qui entraîne *a fortiori* l'appartenance à BMO. En gros, nous montrons que la définition classique $\exists c\ \forall T\ E[\ldots \mid \mathscr{F}_T] \leqq c$ peut être remplacée par une condition de la forme $\exists a \geqq 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall T\ P[\ldots > a \mid \mathscr{F}_T] \leqq 1 - \varepsilon$.

Les définitions usuelles de BMO sont de deux types : certaines concernent les processus croissants associés à une martingale (processus maximal, crochet) d'autres la martingale elle-même ; d'où les deux versants de cet exposé, relatifs l'un aux processus croissants, l'autre aux processus càdlàg adaptés.

Nous fixons un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, P, (\mathscr{F}_t)_{t \geqq 0})$ vérifiant les conditions habituelles ; on convient que les processus croissants sont positifs ou nuls, càdlàg et adaptés, et que les processus càdlàg adaptés X ont une limite à gauche en zéro $X_{0-} = 0$; on pose $X_t^* = \sup_{0 \leqq s \leqq t} |X_s|$ et $X_\infty^* = \sup_{t \geqslant 0} |X_t|$. On fait aussi la convention que $\infty - \infty = 0$.

PROPOSITION 1. — *Soit $(A_t)_{0 \leqq t \leqq \infty}$ un processus croissant, à valeurs finies ou non, pouvant avoir un saut à l'infini. On suppose qu'il existe deux constantes $a \geqq 0$ et $\varepsilon > 0$ telles que, pour tout temps d'arrêt* T, *on ait*

$$P[A_\infty - A_{T-} > a \mid \mathscr{F}_T] \leqq 1 - \varepsilon .$$

Alors A_∞ est p.s. fini, et, pour tout entier n et tout temps d'arrêt T,

$$P[A_\infty - A_{T-} > na \mid \mathscr{F}_T] \leqq (1 - \varepsilon)^n .$$

Démonstration. — Il suffit d'établir l'inégalité ; en prenant $T = 0$, de sorte que $A_{T-} = 0$, on aura $P[A_\infty > na] \leqq (1 - \varepsilon)^n$, donc $A_\infty < \infty$. Nous sommes ainsi ramenés au lemme que voici.

LEMME. — *S'il existe a, b, α et β dans $\mathbb{R}_+$ tels que pour tout* T *l'on ait*

$$P[A_\infty - A_{T-} > a \mid \mathscr{F}_T] \leqq \alpha \qquad et \qquad P[A_\infty - A_{T-} > b \mid \mathscr{F}_T] \leqq \beta ,$$

on a alors aussi

$$P[A_\infty - A_{T-} > a + b \mid \mathscr{F}_T] \leqq \alpha\beta .$$

Démonstration. — Étant donné T, définissons un autre temps d'arrêt $U \geqq T$ par $U = \inf\{ t : A_t - A_{T-} > a \}$. Puisque l'événement $\{ A_\infty - A_{T-} > a \}$ est dans $\mathscr{F}_U$ (car son complémentaire est $\{ U = \infty$ et $A_U - A_{T-} \leqq a \}$) et puisque $A_{U-} - A_{T-} \leqq a$, on a

$$\begin{aligned} P[A_\infty - A_{T-} > a + b \mid \mathscr{F}_T] &\leqq P[A_\infty - A_{U-} > b, A_\infty - A_{T-} > a \mid \mathscr{F}_T] \\ &= E[I_{\{A_\infty - A_{T-} > a\}} P[A_\infty - A_{U-} > b \mid \mathscr{F}_U] \mid \mathscr{F}_T] \leqq \alpha\beta . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

REMARQUE. — Si $A_\infty = A_{\infty -}$, la démonstration de la proposition fait apparaître une suite croissante de temps d'arrêt telle que

$$P[T_{n+1} < \infty \mid \mathscr{F}_{T_n}] \leqq 1 - \varepsilon ;$$

c'est la notion de « γ-graded sequence », due à Varopoulos [7] (ou peut-être Garnett ?), et qui semble centrale dans bien des questions relatives à BMO.

COROLLAIRE 1. — *Sous les hypothèses de la proposition, si* G *est une fonction croissante de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}_+$, *on a pour tout temps d'arrêt* T

$$E[G(A_\infty - A_{T-}) \mid \mathscr{F}_T] \leqq \varepsilon \sum_{n \geqq 0} (1 - \varepsilon)^n G((n+1)a) \leqq \infty .$$

En particulier, $E[A_\infty - A_{T-} \mid \mathscr{F}_T] \leqq \frac{a}{\varepsilon}$, *et, pour* $0 \leqq \alpha < \frac{1}{a} \operatorname{Log} \frac{1}{1 - \varepsilon}$,

$$E[\exp(\alpha(A_\infty - A_{T-})) \mid \mathscr{F}_T] \leqq c(a, \varepsilon, \alpha) < \infty .$$

Démonstration du corollaire. — Il suffit d'établir que, si $X \geqq 0$ est une variable aléatoire vérifiant $p_n = P[X > na] \leqq (1 - \varepsilon)^n$, alors

$$E[G \circ X] \leqq \varepsilon \sum_{n \geqq 1} (1 - \varepsilon)^{n-1} g_n ,$$

où l'on a posé $g_n = G(na)$. On écrit

$$\begin{aligned} E[G \circ X] &= G(0)P[X = 0] + \sum_{n \geqq 0} E[G \circ X\, I_{\{na < X \leqq (n+1)a\}}] \\ &\leqq g_0(1 - p_0) + \sum_{n \geqq 0} g_{n+1}(p_n - p_{n+1}) . \end{aligned}$$

Si la série $\Sigma g_n(1-\varepsilon)^n$ diverge, il n'y a rien à démontrer ; si elle converge, il en va de même de $\Sigma g_{n+1}p_{n+1}$ et de $\Sigma g_{n+1}p_n$ et deux sommations par parties successives donnent

$$\mathrm{E}[\mathrm{G}\circ\mathrm{X}] \leqq g_0(1-p_0) + \sum_{n\geq 1} g_n(p_{n-1}-p_n) = g_0 + \sum_{n\geq 0} p_n(g_{n+1}-g_n)$$

$$\leqq g_0 + \sum_{n\geq 0}(1-\varepsilon)^n(g_{n+1}-g_n) = \varepsilon \sum_{n\geq 1} g_n(1-\varepsilon)^{n-1}. \quad \blacksquare$$

Remarques. — *a*) Les constantes figurant dans la conclusion ne peuvent être améliorées. Elles sont toutes atteintes lorsque A est le processus à temps discret $\mathrm{A}_n = a(n \wedge \mathrm{S})$ placé dans sa filtration naturelle, S désignant une variable aléatoire de loi géométrique. (Attention ! S + 1 est un temps d'arrêt, mais pas S.)

b) En perdant un peu sur les constantes, on peut donner à la conclusion de la proposition une forme non discrète : Pour $\lambda \geqq a$,

$$\mathrm{P}[\mathrm{A}_\infty - \mathrm{A}_{\mathrm{T}-} > \lambda \mid \mathscr{F}_\mathrm{T}] \leqq \mathrm{P}\left[\mathrm{A}_\infty - \mathrm{A}_{\mathrm{T}-} > a\left[\frac{\lambda}{a}\right] \mid \mathscr{F}_\mathrm{T}\right]$$

$$\leqq (1-\varepsilon)^{\left[\frac{\lambda}{a}\right]} < (1-\varepsilon)^{\frac{\lambda}{a}-1}.$$

En particulier, la fonction de répartition de A_∞ présente une décroissance au moins exponentielle à l'infini. Ceci peut aussi se déduire de l'inégalité de John et Nirenberg elle-même : Toute variable aléatoire exponentiellement intégrable a une répartition à décroissance exponentielle, car

$$\mathrm{P}[\mathrm{X} > \lambda] = \mathrm{P}[e^{\alpha \mathrm{X}} > e^{\alpha\lambda}] \leqq e^{-\alpha\lambda}\mathrm{E}[e^{\alpha \mathrm{X}}].$$

c) L'exposant critique $\frac{1}{a}\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{1-\varepsilon}$ obtenu dans le corollaire ne permet pas de retrouver toute la force de l'inégalité de John et Nirenberg : Si l'on suppose $\mathrm{E}[\mathrm{A}_\infty - \mathrm{A}_{\mathrm{T}-} \mid \mathscr{F}_\mathrm{T}] \leqq c$, on en déduit, en prenant dans le corollaire $a = ec$ et $1-\varepsilon = \frac{1}{e}$, que $\mathrm{E}\,[\exp(\alpha(\mathrm{A}_\infty - \mathrm{A}_{\mathrm{T}-})) \mid \mathscr{F}_\mathrm{T}]$ est bornée pour $0 \leqq \alpha < \frac{1}{ec}$, ce qui est moins fort que la condition $\alpha < \frac{1}{c}$ que l'on sait optimale (voir Dellacherie et Meyer [*2*]).

COROLLAIRE 2. — *Soit* A *un processus croissant, fini ou non, pouvant sauter à l'infini. On suppose qu'il existe une fonction croissante* Φ *de* $\overline{\mathbb{R}}_+$

dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ *et une constante* $c < \sup_{x<\infty} \Phi(x)$ *telles que, pour tout temps d'arrêt* T, *on ait*

$$E[\Phi(A_\infty - A_{T-}) \mid \mathcal{F}_T] \leqq c.$$

Alors A_∞ *est fini, et, pour tout* T,

$$P[A_\infty - A_{T-} > \lambda \mid \mathcal{F}_T] \leqq \alpha e^{-\beta\lambda},$$

où α *et* β *ne dépendent que de* Φ *et* c. *En particulier, le potentiel gauche* $E[A_\infty - A_{T-} \mid \mathcal{F}_T]$ *engendré par* A *est borné.*

Démonstration. — En remplaçant si nécessaire Φ par $\Phi \wedge (c+1)$, on peut supposer Φ finie. Il existe par hypothèse $a < \infty$ tel que $c < \Phi(a) < \infty$; on a donc

$$\begin{aligned} P[A_\infty - A_{T-} > a \mid \mathcal{F}_T] &\leqq P[\Phi(A_\infty - A_{T-}) \geqq \Phi(a) \mid \mathcal{F}_T] \\ &\leqq \frac{1}{\Phi(a)} E[\Phi(A_\infty - A_{T-}) \mid \mathcal{F}_T] \leqq \frac{c}{\Phi(a)}, \end{aligned}$$

et on peut appliquer la proposition 1, le corollaire 1 et la remarque b ci-dessus. ■

Lorsque $\Phi(x) = x^p$ avec $0 < p < 1$, ce résultat est dû à Meyer [*6*]. Quand $\Phi = I_{]a,\infty]}$, on retrouve la proposition 1. Ce que dit le corollaire, c'est que si l'hypothèse a lieu pour une fonction Φ, elle a alors lieu pour toute fonction qui croît moins vite que les exponentielles. Ceci est classique pour les fonctions convexes ; s'il est étonnant qu'on puisse prendre une croissance arbitrairement lente, il l'est encore plus qu'on puisse se permettre les fonctions bornées !

Voici les mêmes énoncés, habillés en termes d'espace BMO de martingales. Nous ne tenterons pas de préciser la norme dont nous munissons BMO, d'où l'apparition de constantes universelles notées c.

Soit M *une martingale locale.*

1) *Si, pour tout* T, $P[[M,M]_\infty - [M,M]_{T-} > a \mid \mathcal{F}_T] \leqq 1 - \varepsilon$, *alors* M *est dans* BMO, *avec* $\| M \|_{BMO}^2 \leqq c\frac{a}{\varepsilon}$.

2) *Si, pour tout* T, $P[\sup_{t \geqq 0} | M_{T+t} - M_{T-} | > a \mid \mathcal{F}_T] \leqq 1 - \varepsilon$, *alors* M *est dans* BMO, *avec* $\| M \|_{BMO} \leqq c\frac{a}{\varepsilon}$.

3) *Si* M *est dans* BMO,

$$P[[M,M]_\infty - [M,M]_{T-} > \lambda \mid \mathcal{F}_T] \leqq c' \exp(-c\lambda / \| M \|_{BMO}^2).$$

4) *Si* M *est dans* BMO,

$$P\,[\sup_{t\geqq 0} |\,M_{T+t} - M_{T-}\,| > \lambda \,|\, \mathscr{F}_T] \leqq c' \exp(-\,c\lambda/\,\|\,M\,\|_{BMO}).$$

Les points 2) et 4) s'obtiennent à l'aide du processus croissant $A = M^*$, en remarquant que $M^*_\infty - M^*_{T-} \leqq \sup_{t\geqq 0} |\,M_{T+t} - M_{T-}\,|$. L'assertion 2) ne nécessite pas que M soit une martingale locale, mais il faut alors supposer que M_∞ existe, et on obtient que la variable aléatoire M_∞ est aans BMO; de toute façon, nous verrons mieux avec la proposition 2. On pourrait, comme dans le corollaire 2, donner un air plus général aux énoncés 1) et 2) en faisant intervenir une fonction croissante arbitraire Φ.

Nous nous intéressons maintenant à l'autre aspect de BMO, celui qui concerne les processus càdlàg adaptés. La proposition ci-dessous, lorsqu'on l'applique à un processus croissant, contient pour l'essentiel la proposition 1, mais avec des constantes moins précises. Nous allons en donner une démonstration directe, indépendante de la proposition 1.

PROPOSITION 2. — *Soient* $(X_t)_{0\leqq t<\infty}$ *un processus càdlàg adapté et* Z *une variable aléatoire finie ou non, mesurable pour* $\mathscr{F}_\infty$. *On suppose qu'il existe trois constantes* $a \geqq 0, b \geqq 0$ *et* $\varepsilon > 0$ *telles que l'on ait, pour tout temps d'arrêt fini* T,

$$P[\,|\,Z - X_{T-}\,| > a \,|\, \mathscr{F}_T] \leqq 1 - \varepsilon\,; \qquad |\,\Delta X_T\,| \leqq b\,.$$

Alors X^* *engendre un potentiel gauche borné et* Z *est dans* BMO. *Plus précisément*

$$E\,[\sup_{t\geqq 0} |\,X_{T+t} - X_{T-}\,|\,|\,\mathscr{F}_T] \leqq \frac{2a+b}{\varepsilon}\,; \qquad E[\,|\,Z - X_{T-}\,|\,|\,\mathscr{F}_T] \leqq a + \frac{2a+b}{\varepsilon}\,.$$

On a en outre pour tout entier $n \geqq 0$ *les inégalités de distribution*

$$P\,[\sup_{t\geqq 0} |\,X_{T+t} - X_{T-}\,| > (n+1)(2a+b) \,|\, \mathscr{F}_T] \leqq \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)(1+\varepsilon)^{-n}\,;$$

$$P[\,|\,Z - X_{T-}\,| > a + n(2a+b) \,|\, \mathscr{F}_T] \leqq (1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^{-n}\,.$$

Remarques. — *a) Lorsque* ε *est plus grand que* $\frac{1}{2}$, *l'hypothèse* $|\,\Delta X\,| \leqq b$ *est automatiquement satisfaite, avec* $b = 2a$. En effet, remplacer T par $T + \frac{1}{n}$ donne $P[\,|\,Z - X_{\left(T+\frac{1}{n}\right)-}\,| > a \,|\, \mathscr{F}_T] \leqq 1 - \varepsilon$, d'où l'on tire, par limite inférieure, $P[\,|\,Z - X_T\,| > a \,|\, \mathscr{F}_T] \leqq 1 - \varepsilon$ et

$$I_{\{|\Delta X_T| > 2a\}} \leqq P[\{\,|\,Z - X_T\,| > a\} \cup \{\,|\,Z - X_{T-}\,| > a\} \,|\, \mathscr{F}_T] \leqq 2 - 2\varepsilon < 1\,.$$

b) Les inégalités de distribution obtenues peuvent se mettre sous forme non discrète :

$$P\,[\sup_{t\geqq 0} |X_{T+t} - X_{T-}| > \lambda \,|\, \mathscr{F}_T] < \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)(1+\varepsilon)^{2-\frac{\lambda}{2a+b}};$$

$$P[\,|Z - X_{T-}| > \lambda \,|\, \mathscr{F}_T] < (1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^{2+\frac{a-\lambda}{2a+b}}.$$

Démonstration de la proposition. Il suffit d'établir les inégalités inconditionnelles

$$E[X^*_\infty] \leqq \frac{2a+b}{\varepsilon}; \qquad P[X^*_\infty > (n+1)(2a+b)] \leqq \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)(1+\varepsilon)^n$$

$$E[\,|Z|\,] \leqq a + \frac{2a+b}{\varepsilon}; \qquad P[\,|Z| > a + n(2a+b)] \leqq (1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^{-n},$$

car elles fournissent le résultat annoncé lorsqu'on les applique au processus $\overline{X}_t = X_{T+t} - X_{T-}$ et à $\overline{Z} = Z - X_{T-}$ pour la filtration $\overline{\mathscr{F}}_t = \mathscr{F}_{T+t}$ et la probabilité $P[\,.\,|\,B]$, où B est dans $\mathscr{F}_T$.

Pour tout temps d'arrêt T, on a

$$I_{\{T<\infty\}} P[\,|Z - X_{T-}| > a \,|\, \mathscr{F}_T] \leqq (1-\varepsilon) I_{\{T<\infty\}}$$

car cette inégalité est vraie sur $\{T < n\}$ (appliquer l'hypothèse à $T \wedge n$). En prenant $T = \inf\left\{ t : M_t \geqq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right\}$, où M_t est la martingale $P[|Z| > X^*_\infty + a \,|\, \mathscr{F}_t]$, on a

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) I_{\{T<\infty\}} \leqq M_T I_{\{T<\infty\}} = I_{\{T<\infty\}} P[\,|Z| > X^*_\infty + a \,|\, \mathscr{F}_T]$$

$$\leqq I_{\{T<\infty\}} P[\,|Z| > |X_{T-}| + a \,|\, \mathscr{F}_T] \leqq (1-\varepsilon) I_{\{T<\infty\}},$$

ce qui entraîne que T est p.s. infini, et donc $|Z| \leqq X^*_\infty + a$.

Pour $\lambda \geqq 0$, en appliquant maintenant à $T = \inf\{ t : |X_t| > \lambda \}$ l'inégalité $I_{\{T<\infty\}} P[\,|Z - X_{T-}| \leqq a \,|\, \mathscr{F}_T] \geqq \varepsilon I_{\{T<\infty\}}$, on obtient

$$\varepsilon P[X^*_\infty > \lambda] = \varepsilon P[T < \infty] \leqq P[T < \infty, |Z - X_{T-}| \leqq a].$$

Mais, sur $\{T < \infty, |Z - X_{T-}| \leqq a\}$, on a $|X_{T-}| \leqq \lambda \leqq |X_T|$, donc $\lambda - b \leqq |X_{T-}| \leqq \lambda$, et $\lambda - b - a \leqq |Z| \leqq \lambda + a$. Ainsi

$$\varepsilon P[X^*_\infty > \lambda] \leqq P[\lambda - b - a \leqq |Z| \leqq \lambda + a].$$

En remplaçant λ par $\lambda + \frac{1}{n}$ et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient l'inégalité de distribution

$$(*) \qquad \varepsilon P[X^*_\infty > \lambda] \leqq P[\lambda - b - a < |Z| \leqq \lambda + a].$$

En intégrant cette inégalité sur la demi-droite positive, on trouve

$$\varepsilon \mathrm{E}[\mathrm{X}_\infty^*] \leqq \mathrm{E}\left[\int_{|\mathrm{Z}|-a}^{|\mathrm{Z}|+a+b} \mathrm{I}_{\{\lambda>0\}} d\lambda\right] \leqq 2a + b\,;$$

puisque $|\mathrm{Z}| \leqq \mathrm{X}_\infty^* + a$, ceci fournit la première partie de la conclusion.

Afin d'obtenir l'inégalité de distribution portant sur $|\mathrm{Z}|$, posons $\mathrm{F}(\lambda) = \mathrm{P}[|\mathrm{Z}| > \lambda]$, et minorons le premier membre de (*) par $\varepsilon \mathrm{P}[|\mathrm{Z}| > \lambda + a]$; il vient, toujours pour $\lambda \geqq 0$,

$$\varepsilon \mathrm{F}(\lambda + a) \leqq \mathrm{F}(\lambda - a - b) - \mathrm{F}(\lambda + a)\,,$$

donc, pour $\lambda \geqq -a-b$, $\mathrm{F}(\lambda + 2a + b) \leqq \dfrac{1}{1+\varepsilon}\mathrm{F}(\lambda)$. Puisque par hypothèse $\mathrm{F}(a) \leqq 1 - \varepsilon$ (prendre $\mathrm{T}=0$), on en déduit $\mathrm{F}(a + n(2a+b)) \leqq (1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^{-n}$, la majoration annoncée. En prenant maintenant $\lambda = (n+1)(2a+b)$ dans (*), on trouve

$$\varepsilon \mathrm{P}[\mathrm{X}_\infty^* > (n+1)(2a+b)] \leqq \mathrm{P}[|\mathrm{Z}| > a + n(2a+b)] \leqq (1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^{-n}\,,$$

et la proposition est démontrée. ∎

COROLLAIRE 1. — *Soit* $(\mathrm{X}_t)_{0 \leqq t < \infty}$ *un processus càdlàg adapté. On suppose qu'il existe trois constantes* $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ *et* $\varepsilon > 0$ *telles que, pour tout temps d'arrêt fini* T,

$$\mathrm{P}[\{\nexists \mathrm{X}_\infty \in \mathbb{R}\} \cup \{|\mathrm{X}_\infty - \mathrm{X}_{\mathrm{T}-}| > a\} \mid \mathscr{F}_\mathrm{T}] \leqq 1 - \varepsilon\,,$$

$$|\Delta \mathrm{X}_\mathrm{T}| \leqq b \qquad \left(\text{toujours vrai avec} \quad b = 2a \quad \text{si} \quad \varepsilon > \frac{1}{2}\right).$$

La limite X_∞ *existe alors p.s. dans* $\mathbb{R}$ *et vérifie* $\|\mathrm{X}_\infty\|_{\mathrm{BMO}} \leqq c\left(a + \dfrac{2a+b}{\varepsilon}\right)$.

Démonstration. — Comme me l'a fait remarquer Zheng Wei An, la martingale $\mathrm{P}[\nexists \mathrm{X}_\infty \in \mathbb{R} \mid \mathscr{F}_t]$ étant bornée par $1 - \varepsilon$, X_∞ existe p.s.; il ne reste qu'à prendre $\mathrm{Z} = \mathrm{X}_\infty$ dans la proposition. ∎

COROLLAIRE 2. — *Si* $(\mathrm{X}_t)_{0 \leqq t < \infty}$ *est un processus càdlàg adapté, et s'il existe deux constantes* $a \geqq 0$ *et* $\varepsilon > 0$ *telles que, pour tous les temps d'arrêt finis* S *et* T *vérifiant* $\mathrm{S} \leqq \mathrm{T}$, *on ait* $\mathrm{P}[|\mathrm{X}_\mathrm{T} - \mathrm{X}_{\mathrm{S}-}| > a \mid \mathscr{F}_\mathrm{S}] \leqq 1 - \varepsilon$, *alors*

$$\mathrm{P}[|\mathrm{X}_\mathrm{T} - \mathrm{X}_{\mathrm{S}-}| > (3n+1)a \mid \mathscr{F}_\mathrm{S}] \leqq (1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^{-n}$$

$$\mathrm{P}[\sup_{t \geqq 0} |\mathrm{X}_{\mathrm{S}+t} - \mathrm{X}_{\mathrm{S}-}| > 3(n+1)a \mid \mathscr{F}_\mathrm{S}] \leqq \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)(1+\varepsilon)^{-n}.$$

Démonstration. — En prenant $T = S$, on trouve $|\Delta X| \leqq a$. Il suffit d'appliquer la proposition 2 à $Z = X_R$ et au processus arrêté X^R en prenant $R = T$ pour obtenir la première conclusion et en prenant $R = S + k$ $(k \to \infty)$ pour la deuxième ; cela est licite, car, pour tout temps d'arrêt fini U,

$$P[\,|Z - X^R_{U-}| > a \,|\, \mathscr{F}_U] = I_{\{R \geqq U\}} P[\,|X_{R \vee U} - X_{U-}| > a \,|\, \mathscr{F}_U] \leqq 1 - \varepsilon . \quad \blacksquare$$

Dans ce corollaire, X_∞ n'existe pas nécessairement $\left(\text{prendre } |X| \leqq \frac{a}{2}\right)$; une démonstration inspirée de la proposition 1 donnerait de meilleures constantes.

La proposition 2 permet aussi de donner une définition faible de l'espace BMO $(\mathbb{R}^d)$ des analystes. Dans l'énoncé qui suit, la notation Q est réservée aux cubes de $\mathbb{R}^d$ parallèles aux axes ; μ^Q désigne la loi de probabilité uniforme sur un tel cube et D(Q) la partition de Q en 2^d sous-cubes égaux.

COROLLAIRE 3. — *Soit f une fonction mesurable de* $\mathbb{R}^d$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}$. *On suppose qu'il existe trois constantes* $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ *et* $\varepsilon > 0$ *et pour chaque* Q *un réel* h_Q *vérifiant*

$$\mu^Q(\{x : |f(x) - h_Q| \leqq a\}) \geqq \varepsilon ;$$
$$Q' \in D(Q) \Rightarrow |h_Q - h_{Q'}| \leqq b .$$

Alors f est finie p.p. et est dans BMO ; *plus précisément*

$$\int |f(x) - h_Q| \, \mu^Q(dx) \leqq a + b + \frac{2a + 3b}{\varepsilon} .$$

En outre, si $\varepsilon > \frac{1}{2}$, *la première hypothèse implique la seconde, avec*

$$b = 2a \left(1 + \frac{d \operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}} \right) .$$

Démonstration. — Sur $\Omega = Q$ muni de la loi μ^Q et de la filtration dyadique ($\mathscr{F}_t$ ne dépend que de $n = [t]$ et est engendrée par la partition $D_n(Q)$ en 2^{nd} sous-cubes égaux), nous allons appliquer la proposition 2 à $Z = f - h_Q$ et au processus

$$X_t = \sum_{Q' \in D_n(Q)} h_{Q'} I_{Q'} \qquad \text{où} \qquad n = [t] ,$$

dont les sauts sont bornés par b. Pour T fini, on peut écrire

$$\mathrm{P}[\,|\mathrm{Z}-\mathrm{X}_{\mathrm{T}-}| > a+b \mid \mathscr{F}_{\mathrm{T}}] \leqq \mathrm{P}[\,|\mathrm{Z}-\mathrm{X}_{\mathrm{T}}| > a \mid \mathscr{F}_{\mathrm{T}}]$$

$$= \sum_{\mathrm{Q}' \text{ atome de } \mathscr{F}_{\mathrm{T}}} \mu^{\mathrm{Q}'}[\,|f - h_{\mathrm{Q}'}| > a]\mathrm{I}_{\mathrm{Q}'} \leqq 1 - \varepsilon .$$

Il est donc permis d'appliquer la proposition, qui fournit

$$\int |f - h_{\mathrm{Q}}|\, d\mu^{\mathrm{Q}} = \mathrm{E}[\,|\mathrm{Z}|\,] \leqq a + b + \frac{2(a+b)+b}{\varepsilon}.$$

Si maintenant on suppose $\varepsilon > \frac{1}{2}$, pour Q_1 et Q_2 tels que $\mathrm{Q}_2 \subset \mathrm{Q}_1$ et $\mu^{\mathrm{Q}_1}(\mathrm{Q}_2) > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, en posant $\mathrm{A}_{\mathrm{Q}} = \{\, x \in \mathrm{Q} : |f(x) - h_{\mathrm{Q}}| \leqq a \}$, on a

$$\mu^{\mathrm{Q}_1}(\mathrm{A}_{\mathrm{Q}_1} \cap \mathrm{A}_{\mathrm{Q}_2}) \geqq \mu^{\mathrm{Q}_1}(\mathrm{A}_{\mathrm{Q}_1}) + \mu^{\mathrm{Q}_1}(\mathrm{A}_{\mathrm{Q}_2}) - 1 > \varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\,\varepsilon - 1 = 0 ,$$

d'où $\mathrm{A}_{\mathrm{Q}_1} \cap \mathrm{A}_{\mathrm{Q}_2} \neq \emptyset$ et $|h_{\mathrm{Q}_1} - h_{\mathrm{Q}_2}| \leqq 2a$. Par récurrence, pour $\mathrm{Q}' \subset \mathrm{Q}$ tel que $\mu^{\mathrm{Q}}(\mathrm{Q}') > \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n$, on a $|h_{\mathrm{Q}} - h_{\mathrm{Q}'}| \leqq 2na$; pour Q' dans $\mathrm{D}(\mathrm{Q})$, ceci a lieu dès que $n > \dfrac{d \operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}$, et on a donc $|h_{\mathrm{Q}} - h_{\mathrm{Q}'}| \leqq 2a\left(1 + \dfrac{d \operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right)$.

■

Remarques. — *a*) Quand $\varepsilon \leqq \frac{1}{2}$, la première hypothèse seule ne suffit pas. Ceci peut se voir par exemple sur la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \mathrm{I}_{]3n, 3n+1]}$$

qui vérifie la première hypothèse avec $a = 0$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et

$$h_{\mathrm{Q}} = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad \mathrm{Q} \text{ rencontre plusieurs intervalles }]3n, 3n+1] \\ \text{valeur de } f \text{ la plus probable sur Q sinon.} \end{cases}$$

Si f n'est pas bornée, elle n'est pas dans BMO($\mathbb{R}$) car sa variance sur l'intervalle $]3n, 3n+2]$ est de l'ordre de a_n^2. Semblablement, pour $\frac{4}{5} \leqq k < 1$,

$f = \sum_{n \geqq 0} a_n I_{]k2^{-n}, 2^{-n}]}$ vérifie la première hypothèse avec $a=0$ et $\varepsilon = \frac{1}{2}$, mais n'est en général pas dans BMO([0, 1]).

b) La constante $a + b + \frac{2a + 3b}{\varepsilon}$ du corollaire 3 peut être un peu améliorée : en redémontrant la proposition 2 avec $| Z - X_T |$ au lieu de $| Z - X_{T-} |$ dans l'hypothèse, on obtient $a + \frac{2a + b}{\varepsilon}$.

c) Dans la proposition 2 et ses corollaires, on peut comme plus haut remplacer les hypothèses du type $P[\, | \ldots | > a \,|\, \mathscr{F}_T] \leqq 1 - \varepsilon$ par une condition de la forme $E[\Phi(\, | \ldots | \,) \,|\, \mathscr{F}_T] \leqq c < \sup_{x < \infty} \Phi(x)$, où Φ est une fonction croissante de $\overline{\mathbb{R}}_+$ dans lui-même.

Pour terminer, voici une forme multiplicative de la proposition 2 ; essentiellement due à Coifman et Fefferman [*1*], elle sert à établir l'inégalité de Hölder inverse pour l'exponentielle d'une martingale de BMO, et est démontrée — bien que non explicitement énoncée — par Doléans-Dade et Meyer [*3*] et Kazamaki et Sekiguchi [*4*] et [*5*].

Dans l'énoncé qui suit, on convient que $X_{0-} = 1$; la limite X_∞ existe p.s. car toute martingale locale positive est une surmartingale.

PROPOSITION 3. — *Soit* X *une martingale locale positive, telle que* $X_0 = 1$. *On suppose qu'il existe trois constantes* $k \geqq 1$, $\delta > 0$ *et* $\varepsilon > 0$ *telles que, pour tout temps d'arrêt fini* T, *on ait*

i) $$X_T \leqq k X_{T-}$$

ii) $$P[X_\infty < \delta X_{T-} \,|\, \mathscr{F}_T] \leqq 1 - \varepsilon .$$

Alors X *est une martingale de l'espace* $\mathscr{H}^p$ *pour un* $p > 1$. *Plus précisément, il existe* $p = p(k, \varepsilon, \delta) > 1$ *et* $c = c(k, \varepsilon, \delta) < \infty$ *tels que* $\| X \|_{\mathscr{H}^p} \leq c$.

Démonstration. — En remplaçant si nécessaire δ par une valeur plus petite, nous supposons $\delta \leqq 1$. Il est aussi très facile de s'affranchir de l'hypothèse T fini : si T est un temps d'arrêt quelconque, les conditions (*i*) et (*ii*) sont vraies sur $\{ T = \infty \}$ (car $X_{T-} = X_\infty$) et aussi pour $T \wedge n$; elles sont donc vraies pour T.

Nous allons commencer par nous ramener au cas où X est bornée. Pour $n \geqq 2$, soient donc R le temps d'arrêt $\inf \{ t : X_t > n \}$ et X^R la martingale arrêtée correspondante, qui est bornée par kn. Sur l'événement $\{ X^R_\infty < \delta X^R_{T-} \}$, on a $X^R_\infty < X^R_{T-}$, d'où $R \geqq T$, donc $X^R_{T-} = X_{T-} \leqq n$, puis $X_R = X^R_\infty < \delta n \leqq n$. Ceci entraîne $R = \infty$, et $X_\infty < \delta X_{T-}$. Ainsi

$$P[X^R_\infty < \delta X^R_{T-} \,|\, \mathscr{F}_T] \leqq P[X_\infty < \delta X_{T-} \,|\, \mathscr{F}_T] \leqq 1 - \varepsilon :$$

la martingale arrêtée X^R vérifie elle aussi les hypothèses de la proposition.

Nous supposons donc dans la suite que X est bornée et nous cherchons à estimer $\| X_\infty \|_{L^p}$. L'hypothèse (*ii*) entraîne $P[X_\infty \geqq \delta X_{T-} \mid \mathscr{F}_T] \geqq \varepsilon$, donc

$$P[X_\infty \geqq \delta X_{T-}, T < \infty] \geqq \varepsilon P[T < \infty].$$

Pour $\lambda > 1$, appliquons ceci au temps $T = \inf\{ t : X_t > \lambda \}$. On a, sur $\{ T < \infty \}$, $X_{T-} \leqq \lambda \leqq X_T$, donc aussi $\frac{\lambda}{k} \leqq X_{T-}$ et $X_T \leqq k\lambda$; on obtient

$$\varepsilon P[T < \infty] \leqq P\left[X_\infty \geqq \frac{\delta}{k} \lambda \right].$$

On en déduit, toujours pour $\lambda > 1$, une inégalité de distribution :

$$\begin{aligned} E[X_\infty I_{\{X_\infty > \lambda\}}] &\leqq E[X_\infty I_{\{T < \infty\}}] = E[X_T I_{\{T < \infty\}}] \\ &\leqq k\lambda P[T < \infty] \leqq \frac{k\lambda}{\varepsilon} P\left[X_\infty \geqq \frac{\delta}{k} \lambda \right]. \end{aligned}$$

Soit $p > 1$, arbitraire pour l'instant. En intégrant cette inégalité par rapport à la mesure $I_{\{\lambda > 1\}}(p - 1)\lambda^{p-2} d\lambda$, on trouve

$$E[X_\infty(X_\infty^{p-1} - 1)I_{\{X_\infty > 1\}}] \leqq \frac{k(p-1)}{\varepsilon p} E\left[\left(\left(\frac{kX_\infty}{\delta} \right)^p - 1 \right) I_{\left\{ X_\infty > \frac{\delta}{k} \right\}} \right],$$

et, *a fortiori*, en posant $u = \frac{k(p-1)}{\varepsilon p} \left(\frac{k}{\delta} \right)^p$ et en remarquant que

$$E[X_\infty I_{\{X_\infty > 1\}}] \leqq E[X_\infty] = 1,$$

on peut écrire

$$-1 + E[X_\infty^p I_{\{X_\infty > 1\}}] \leqq uE[X_\infty^p] \leqq uE[X_\infty^p I_{\{X_\infty > 1\}}] + u.$$

Lorsque, k, ε, δ restant fixés, on fait tendre p vers 1, u tend vers zéro. Pour p assez voisin de 1, on a donc $u < 1$. Fixons un tel p. Il vient

$$E[X_\infty^p] \leqq E[X_\infty^p I_{\{X_\infty < 1\}}] + 1 \leqq \frac{1+u}{1-u} + 1 = \frac{2}{1-u} < \infty.$$

Puisque u ne dépend que de p, k, ε et δ, la proposition est démontrée. ■

COROLLAIRE (Inégalité de Hölder inverse). — *Sous les mêmes hypothèses, il existe $p > 1$ et $c < \infty$ tels que, pour tout temps d'arrêt* T, *on ait*

$$E[X_\infty^p \mid \mathscr{F}_T] \leqq cX_T^p.$$

Démonstration. — On remplace la probabilité P par $P[\,.\mid A]$, où $A \in \mathscr{F}_0$, et on applique la proposition ; on obtient $E[X_\infty^p \mid \mathscr{F}_0] \leqq c$. En appliquant ceci au processus $Y_t = \dfrac{X_{T+t}}{X_T}$, qui est une martingale pour la filtration $(\mathscr{F}_{T+t})_{t \geqq 0}$ et la probabilité $P[\,.\mid X_T > 0]$, on trouve $E[X_\infty^p \mid \mathscr{F}_T] I_{\{X_T > 0\}} \leqq c X_T^p$. Puisque X_∞ est nul sur $\{X_T = 0\}$ (voir [*2*], page 86), le corollaire est établi. ■

RÉFÉRENCES

[*1*] R. Coifman and C. Fefferman, Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. *Studia Math.*, t. **51**, 1974, p. 241-250.

[*2*] C. Dellacherie et P. A. Meyer, *Probabilités et potentiel : Théorie des martingales*. Hermann, Paris, 1980.

[*3*] C. Doleans-Dade et P. A. Meyer, Inégalités de normes avec poids. Séminaire de Probabilités XIII, *Lecture Notes in Math.*, t. **721**, Springer 1979.

[*4*] N. Kazamaki and T. Sekiguchi, On the transformation of some classes of martingales by a change of law. *Tôhoku Math. J.*, t. **31**, 1979, p. 261-279.

[*5*] N. Kazamaki and T. Sekiguchi, Uniform integrability of continuous exponential martingales. *Tôhoku Math. J.*, t. **35**, 1983, p. 289-301.

[*6*] P. A. Meyer, *Compléments de calcul stochastique*. Preprint, Strasbourg, 1984.

[*7*] N. Varopoulos, A probabilistic proof of the Garnett-Jones theorem on BMO. *Pacific J. Math.*, t. **90**, 1980, p. 201-221.

(Manuscrit reçu le 27 Septembre 1984)