ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

DANIELLE FLORENS-ZMIROU

Statistiques de diffusions et temps local

Annales de l'I. H. P., section B, tome 24, nº 1 (1988), p. 99-130

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1988__24_1_99_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 24, n° 1, 1988, p. 99-130. *Probabilités et Statistiques*

Statistiques de diffusions et temps local

par

Danielle FLORENS-ZMIROU

Université Paris-V, U.A. n° 743,
45, rue des Saint-Pères, 75006 Paris

RÉSUMÉ. — On considère une diffusion sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation :

$$dX_t = b(\theta, X_t) + \sigma\, dW_t$$

où θ est un paramètre inconnu que l'on estime en observant seulement les instants de passages à un niveau donné.

On étudie les propriétés de ces estimateurs dans l'asymptotique où le temps d'observation tend vers l'infini.

Mots clés : Processus de diffusion, temps local, inverse du temps local, mesure de Lévy, processus à accroissements indépendants, vraisemblances et quasi-vraisemblances.

ABSTRACT. — We study a model of recurrent diffusion on $\mathbb{R}$, solution of:

$$dX_t = b(\theta, X_t) + \sigma\, dW_t$$

where W is a standard brownian motion starting in zero.

We want to estimate the unknown parameter θ when we observe the zero crossing times of X up to the time t. We study the properties of the estimators based on these observations when t goes to infinity.

Classification A.M.S. : 60 J 60, 60 J 75, 60 J 30, 60 J 55, 62 H 05, 62 F 12.

INTRODUCTION

Nous étudions un modèle de diffusion stationnaire associé à une équation différentielle stochastique :

$$dX_t = b(\theta, X_t)\,dt + \sigma\,dW_t \tag{1}$$

où σ est positif et θ est un paramètre inconnu de $\mathbb{R}^k$. L'observation complète d'une trajectoire (bien que physiquement difficilement réalisable) a conduit à des études statistiques de type classique ([11], [12]).

Nous étudions ici un exemple d'observation partielle de la trajectoire : celle qui consiste à n'observer que les instants de passages à un niveau donné de la diffusion (le niveau zéro ici). Dans certaines expériences de physique appliquée, on est amené à n'observer d'un processus stationnaire que ses passages par un état moyen. Dans le cas où les trajectoires sont régulières, les passages en zéro ont déjà été utilisés [13] pour des problèmes d'estimation à partir de la méthode des moments. Mais pour un processus à trajectoires irrégulières, comme cela est pour une diffusion, l'ensemble des zéros est trop riche pour être mesuré par un système physique toujours doté d'une certaine inertie.

Nous proposons une étude statistique fondée sur l'observation des excursions hors de zéro, de taille supérieure à ε, où ε traduit l'inertie du système de mesure (cette alternative est bien adaptée aux modélisations faisant intervenir des équations différentielles stochastiques classiques et peut être mise en œuvre par des systèmes opto-électroniques). Il s'agit donc d'une méthode de discrétisation aléatoire.

Mathématiquement l'ensemble des zéros de la diffusion est lié au temps local L (pris ici comme objet statistique, c'est-à-dire comme densité de la mesure d'occupation par rapport à une mesure de référence) et à son inverse τ.

Le modèle de statistique de diffusion observée en 0 est transformé en un modèle de processus τ à accroissements indépendants (P.A.I.).

Du fait de l'inertie du système de mesure, l'observation est réduite aux sauts de τ de taille supérieure à ε, donc au P.A.I., τ^ε, égal à la somme de tels sauts; on n'observe de τ^ε que l'amplitude des sauts (et non les instants de sauts). On construit des « quasi-vraisemblances », explicitées ci-dessous, et une suite d'estimateurs $\hat{\theta}_t^\varepsilon$, $\varepsilon \geqq 0$, du maximum de quasi-vraisemblance (vraisemblance normalisée), asymptotiquement normaux et efficaces pour l'observation considérée. Dans le cas $\varepsilon = 0$, l'efficacité relative à celle de l'observation de toute la trajectoire est de 61 % pour la diffusion d'Ornstein-Ulhenbeck, et, elle décroît lentement lorsque ε croît.

Le plan de l'article est le suivant :

Dans la première partie, on introduit l'ensemble des notations liées aux diffusions récurrentes positives, au temps local et à son inverse. La relation qui lie les transformées de Laplace de la densité de transition $p_t(0, 0)$ de X et de la mesure de Lévy n de τ, nous permet de déduire des hypothèses sur le modèle initial [c'est-à-dire sur la dérive $b(x)$] des propriétés de n.

Dans la deuxième partie, nous introduisons le modèle de P.A.I. lié à l'observation des zéros, nous donnons la vraisemblance de τ pour une durée d'observation aléatoire ayant un sens concret. Seules les amplitudes des sauts de τ étant observables, pour $\varepsilon > 0$ on est amené à utiliser une quasi-vraisemblance, la vraisemblance n'étant pas fonction de ces seules amplitudes. Il est remarquable que même pour $\varepsilon > 0$ l'identifiabilité du modèle à partir de l'observation partielle demeure.

Dans la troisième partie les hypothèses concernant la régularité de la fonction $\alpha \to b(\alpha, x)$ sont introduites. Elles permettront d'obtenir des lemmes analytiques, traités dans l'appendice. A l'aide de ces lemmes on étudie les propriétés asymptotiques de L et τ. On en déduit la propriété de consistance de l'estimateur du maximum de vraisemblance en donnant une extension d'un théorème de [2]. La normalité asymptotique nécessite d'étudier la dérivabilité de la fonction de vraisemblance. Nous avons choisi la présentation la plus simple mais qui utilise une forte régularité de la fonction $\alpha \to b(\alpha, .)$ et la compacité de Θ.

Nous montrons que le modèle est L.A.N. au sens de Le Cam. L'application des techniques d'Ibraguimov-Has'minskii est possible en utilisant l'existence d'une transformée de Laplace bilatère pour le temps local, que l'on déduit des lemmes analytiques de l'appendice. Des restrictions comme Θ compact ou unidimensionnel ne sont donc pas importantes.

L'appendice est consacré aux lemmes analytiques.

L'étude des mesures de Levy n au voisinage de l'origine se fait en utilisant la densité de transition de la diffusion sous forme de fonctionnelle de pont brownien [3] et des techniques abéliennes et taubériennes. Au voisinage de l'infini, l'étude passe par l'utilisation de la représentation de n comme fonction de type totalement positif, issue des équations de Sturm-Liouville. Seul le cas de spectre discret $\left(\dfrac{b^2}{\sigma^2} + b' \text{ tendant vers l'infini à l'infini}\right)$ de n est envisagé pour étudier la normalité asymptotique de la quatrième partie. En fait, on est amené à utiliser un lemme de perturbation de la borne inférieure du spectre, résultat classique dans le seul cas de spectre discret.

I

I.1. La diffusion [3]

Soit C l'espace des fonctions continues $\omega : t \to X_t(\omega)$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu $\mathscr{C}$ borélienne pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}_+$.

$(C, \mathscr{C}, (X_t)_{t>0}, P^W)$ est le mouvement brownien canonique issu de zéro et $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)$ est la filtration $\{\sigma(X_s); s \leqq t\}$ complétée pour P^W et rendue continue à droite.

Soit σ une constante positive et b une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nous ferons dans ce qui suit les hypothèses suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}
H_1 : b \text{ est de classe } C^1. \\
H_2 : \text{posant } g = \dfrac{b^2}{\sigma^2} + b' \text{ on a :} \\
\qquad \limsup\limits_{x \to \infty} \dfrac{g(x)}{1+x^2} < K \quad \text{et} \quad \liminf\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{1+x^2} = 0 \\
H_3 : \text{notant} \\
\qquad s(x) = \exp - \displaystyle\int_0^x \frac{2b(z)}{\sigma^2} dz \quad \text{et} \quad S(x) = \int_0^x s(y)\, dy, \\
\qquad \lim\limits_{x \to \infty} S(x) = \infty \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x \to -\infty} S(x) = -\infty.
\end{array}\right\} \tag{1}$$

Sous les hypothèses H_1, H_2, H_3 on pose (P^W p. s.)

$$M_t^b = \exp \frac{1}{\sigma^2} \left[\int_0^t b(X_s)\, dX_s - \frac{1}{2} \int_0^t b^2(X_s)\, ds \right]. \tag{2}$$

On sait qu'il existe une probabilité P^b qui satisfait sur $\mathscr{F}_t$, $P^b = M_t^b P^W$ et pour laquelle $(X_t)_{t \geqq 0}$ est une diffusion solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = b(X_t)\, dt + \sigma\, dW_t. \tag{3}$$

La diffusion est récurrente. Sa mesure invariante m a pour densité $1/\sigma^2 s$; la récurrence est positive lorsque l'on a :

H_4 : m est une mesure bornée.

Nous noterons (H) l'ensemble (H_1, H_2, H_3, H_4).

Soit $(L(t, a))_{t>0,\, a \in \mathbb{R}}$ le processus des temps locaux du mouvement brownien. Il satisfait P^W (donc P^b) p. s., pour toute f bornée, à :

$$\int_0^t f(X_s)\, ds = \int f(a)\, L(t, a)\, da. \tag{4}$$

On pose $L(t) = L(t, 0)$ et $\tau(t) = \inf\{u;\ L(u) > t\}$. D'après [7] pour P^W (resp. P^b), τ est un P.A.I. homogène, croissant, continu de mesure de Lévy n^W (resp. n^b). D'autre part, la récurrence implique $\tau(t) < \infty$, P^W p. s. donc P^b p. s.

I.2. Vraisemblances

Puisque $\tau(t)$ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt fini pour P^W et P^b on a donc

$$P^b = M^b_{\tau(t)}\, P^W \qquad \text{sur} \quad \mathscr{F}_{\tau(t)}. \tag{5}$$

Notons $N[I \times B]$ la mesure de Poisson représentant le nombre de sauts de τ, pendant l'intervalle de temps I, appartenant à B et $N^\varepsilon(t) = N([0, t] \times [\varepsilon, \infty[)$. Soit $\mathbb{G} = (\mathscr{G}_t)_{t \geq 0}$ la filtration $\{\sigma(\tau(s));\ s \leqq t\}$ rendue continue à droite et complétée pour P^W. On a [1] :

$$P^b \ll P^W \qquad \text{sur} \quad \mathscr{G}_t. \tag{6}$$

D'après [15], $n^b = f^b n^W$ et $\int_0^\infty (\sqrt{f^b} - 1)^2\, dn^W < \infty$. Posons sur $\mathscr{G}_t$, $P^b = Z^b_t P^W$. Sous les hypothèses H on montrera (lemmes A 6 et A 7) que $\operatorname{Log} f^b \in L^1(n)$ et $(f^b - 1) \in L^1(n)$; Z^b_t peut alors s'écrire [8] :

$$Z^b_t = \exp\left[\int_0^t \int_0^\infty \operatorname{Log} f^b(l)\, N(du, dl) - t \int_0^\infty (f^b - 1)\, dn^W\right]. \tag{7}$$

On étudiera dans la suite le cas où l'observation de X est restreinte aux passages successifs en zéro distants de plus de ε, $\varepsilon > 0$ (excursion hors de zéro, de longueur supérieure à ε) c'est-à-dire aux amplitudes des sauts de τ supérieures à ε.

$$\tau^\varepsilon(t) = \int_0^t \int_\varepsilon^\infty l\, N(du, dl) \tag{7.1}$$

τ^ε est un P.A.I. homogène, pour P^W et P^b.

II. OBSERVATIONS AU NIVEAU ZÉRO

II.1. Tous les passages en zéro de la diffusion sont observables

Seuls les passages en zéro de la diffusion sont observables. C'est pourquoi on ne parle ici que de processus déclenchés en zéro ($X_0=0$) et on décide de s'arrêter à l'instant $D_t=\text{Inf}(s;\ s\geqq t,\ X_s=0)$ du premier passage en zéro postérieur à t, et non au temps t; D_t est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt fini (P^W p. s.) et donc d'après (5)

$$P^b=M^b_{D_t}P^W \qquad \text{sur} \quad \mathscr{F}_{D_t}.$$

On a $L(D_t)=L(t)$ et $\tau(L(t))=D_t$; L_t est un G-temps d'arrêt :

$$\tilde{G}_t=G_{L(t)}\subset\mathscr{F}_{D_t};$$

et d'après (6), sur $\tilde{G}_t$ on a :

$$P^b\ll P^W \qquad \text{et} \qquad P^b=Z^b_{L(t)}P^W=\tilde{Z}^b_t P^W.$$

Nous démontrons [(15) du lemme A 6] que $\int_0^\infty (dn^b-dn^W)=0$, $\tilde{Z}^b$ peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{Z}^b_t=\exp\left[\int_0^{L(t)}\int_0^\infty \text{Log}\,f^b(l)\,N(du,\,dl)\right]=\exp\Big[\sum_{l=\sigma(e),\ e\in\mathscr{E}_t}\text{Log}\,f^b(l)\Big] \tag{8}$$

où $\mathscr{E}_t$ est l'ensemble des excursions hors de zéro de X, débutant avant t, et $\sigma(e)$ est la longueur de l'excursion e.

Si tous les passages en zéro sont observables pendant l'intervalle $[0,\,D_t]$, $\tilde{Z}^b_t$ est calculable à l'aide des observations. D'où le choix de s'arrêter en D_t et non en t.

II.2. Seuls les passages en zéro distants de plus de ε sont observables

Lorsque l'on n'observe que les passages en zéro distants de plus de ε, on décide de s'arrêter à l'instant D^ε_t où la somme des excursions hors de zéro, plus grandes que ε, dépasse t.

Appelons G_p^ε et D_p^ε le début et la fin de la p-ième excursion de longueur $>\varepsilon$. D'après (7.1) τ^ε effectue aux instants $L(D_p^\varepsilon)$ un saut d'amplitude $l_p^\varepsilon=D_p^\varepsilon-G_p^\varepsilon$. Posons $S_p^\varepsilon=L(D_p^\varepsilon)$. Soit $U_k^\varepsilon=\sum_{p<k} l_p^\varepsilon$; $U_0^\varepsilon=0$.

On a $\tau^\varepsilon(S_p^\varepsilon)=U_p^\varepsilon$, soit $L^\varepsilon(u)=\inf\{t;\ \tau^\varepsilon(t)>u\}$ un pseudo-inverse de τ^ε; alors pour $U_{k-1}^\varepsilon\leqq u<U_k^\varepsilon$:

$$L^\varepsilon(u)=S_k^\varepsilon$$

et si

$$\left.\begin{aligned} &D^\varepsilon(u)=\inf(D_k^\varepsilon;\ U_k^\varepsilon>u),\\ &L(D^\varepsilon(u))=L(D_k^\varepsilon)=S_k^\varepsilon.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Donc

$$L(D^\varepsilon(u))=L^\varepsilon(u). \tag{10}$$

Soit $\mathbb{G}^\varepsilon=(G_t^\varepsilon)_{t\geqq 0}$ la filtration $(\sigma(\tau^\varepsilon(s);\ s\leqq t))$ complétée pour P^W et rendue continue à droite. On a sur G_t^ε en posant $h(l)=\int_l^\infty n(du)$: $P^b=Z_t^{\varepsilon,\,b}\,P^W$ avec d'après (7)

$$Z_t^{\varepsilon,\,b}=\exp\left[\int_0^t\int_\varepsilon^\infty \operatorname{Log} f^b(l)\,N(du,\,dl)-t\,(h^b-h^W)(\varepsilon)\right] \tag{10.1}$$

L^ε est un $\mathbb{G}^\varepsilon$ temps d'arrêt fini donc :

$$P^b=\hat Z_t^{\varepsilon,\,b}\,P^W \quad \text{sur } G_{L^\varepsilon(t)}^\varepsilon \qquad \text{avec } \hat Z_t^{\varepsilon,\,b}=Z_{L^\varepsilon(t)}^{\varepsilon,\,b}. \tag{11}$$

On a à t fixé

$$\tilde Z_t^b=\lim_{\varepsilon\to 0}\hat Z_t^{\varepsilon,\,b} \qquad \text{car} \quad \tau^\varepsilon(t)\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\tau(t).$$

Notons $\hat N^\varepsilon(t)$ le nombre d'excursions hors de zéro de X, débutant avant t, dont la longueur est supérieure à ε.

On a alors

$$\hat N^\varepsilon(D_t)=N^\varepsilon(L(t)) \qquad \text{où} \quad N^\varepsilon(t)=N([0,\,t]\times[\varepsilon,\,\infty[)$$

et aussi

$$\hat N^\varepsilon(D_t^\varepsilon)=N^\varepsilon(L^\varepsilon(t)).$$

On a le résultat suivant (valable p. s. pour P^b et P^W) ([17] et [10])

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\hat N^\varepsilon(t)}{h(\varepsilon)}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} L(t)\\ &\frac{\hat N^\varepsilon(D_t^\varepsilon)}{h(\varepsilon)}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} L(t).\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Remarquons qu'observer les passages en zéro distants de plus de ε ne permet pas de connaître complètement τ^ε mais seulement ses sauts. Les instants S_p^ε de sauts de τ^ε ne sont pas observables, seules les amplitudes l_p^ε sont connues. Par contre D_t^ε défini en (9) l'est et $\hat{N}^\varepsilon(D_t^\varepsilon)$ également.

Alors (11) s'écrit :

$$\hat{Z}_t^{\varepsilon, b} = \exp\left(\sum_{p=1}^{\hat{N}^\varepsilon(D_t)} \operatorname{Log} f^b(l_t^\varepsilon) - L_t^\varepsilon(h^b(\varepsilon) - h^W(\varepsilon)) \right).$$

$\hat{Z}_t^{\varepsilon, b}$ n'est pas calculable à l'aide des observations puisque $L^\varepsilon(t)$ n'est pas observable.

Pour ε petit, $h^b(\varepsilon) - h^W(\varepsilon)$ est petit ce qui pourrait conduire à substituer à $\hat{Z}_t^{\varepsilon, b}$ le contraste :

$$\hat{\hat{Z}}_t^{\varepsilon, b} = \exp \int_0^{L^\varepsilon(t)} \int_\varepsilon^\infty \operatorname{Log} f^b(l)\, N(du, dl) = \exp\left(\sum_{p=1}^{\hat{N}^\varepsilon(D_t^\varepsilon)} \operatorname{Log} f^b(l_p^\varepsilon) \right). \tag{13}$$

Mais un estimateur maximisant une expression de ce type n'est en général pas consistant; nous lui substituerons la quasi-vraisemblance :

$$\begin{gathered} \tilde{Z}_t^{\varepsilon, b} = \exp\left(\int_0^{L^\varepsilon(t)} \int_\varepsilon^\infty \operatorname{Log} f^{\varepsilon, b}(l)\, N(du, dl) \right) \\ f^{\varepsilon, b}(l) = f^b(l) . \frac{h^W(\varepsilon)}{h^b(\varepsilon)}, \end{gathered} \tag{14}$$

qui conduira à des estimateurs consistants.

III. MODÈLE STATISTIQUE

Soit Θ un compact de $\mathbb{R}$ (pour simplifier, mais on obtiendrait les mêmes résultats pour Θ compact de $\mathbb{R}^k$).

On appellera dans la suite θ, la valeur vraie du paramètre, et l'on supposera θ dans l'intérieur de Θ. Soit $(b(\alpha, .))_{\alpha \in \Theta}$ une famille de variables aléatoires sur $\mathbb{R}$. Nous nous placerons dorénavant sous les hypothèses (K) suivantes :

K 1 : (H) est réalisée pour chaque fonction $b(\alpha, .)$;

K 2 : le modèle est identifiable c'est-à-dire que

$$\alpha \neq \beta \quad \Rightarrow \quad b(\alpha, .) \neq b(\beta, .);$$

K3 :
(i) (H_2) est réalisée uniformément en α,
(ii) $g(\alpha, x)$ est de classe $\mathbb{C}^1$ en (α, x),
(iii) $\sup_{\alpha \in \Theta} g(\alpha, 0) < \infty$.

On dira que $h \in \mathcal{M}_\beta$ s'il existe $\beta > 0$ et $K > 0$ tel que $|h(x) - h(0)| < K(|x| \vee |x|^\beta)$.

K4 : il existe $\beta_i > 0$ tel que, uniformément en α

$$D^{(i)} g_\alpha \in \mathcal{M}_{\beta_i}, \qquad i = 1, 2, 3$$

où $D^{(j)} g_\beta(.)$ est la valeur en β de la j-ième dérivée en α de $g(\alpha, .)$. K3 et K4 seront utilisées dans l'appendice.

On reprend les notations de I, où l'on note m_α, n_α, f_α... les fonctions correspondantes à $P^\alpha = P^{b(\alpha, \cdot)}$.

III.1. Problèmes statistiques

Cas 1. — A partir de l'observation II.1 on pourra étudier un estimateur du maximum de vraisemblance (e. m. v.) de θ.

Cas 2. — Si ε est une fonction de t, on étudiera un estimateur qui maximise $\hat{\hat{Z}}_t^{\varepsilon, \alpha}$ définie en (13).

Cas 3. — Pour l'observation II.2 de la suite $(G_p^\varepsilon, D_p^\varepsilon)$ jusqu'à D_p^ε on utilisera la quasi-vraisemblance $\tilde{Z}_t^{\varepsilon, \alpha}$ définie en (14) et un estimateur qui la maximise.

III.2. Propriétés asymptotiques

Soient des processus à valeurs réelles, à temps continu sur un espace muni d'une probabilité P. Notons $\xrightarrow{\text{f. d.}}$ la convergence finidimensionnelle P et lorsque ces processus sont continus, notons $\mathscr{C}$ la convergence des lois sur $\mathscr{C}(P)$.

PROPOSITION 1. — *Posons*

$$E_\alpha(\tau_1) = m_\alpha(\mathbb{R}) = \rho_\alpha = \int_0^\infty l n_\alpha(dl)$$

et

$$E_\alpha(\tau_1^\varepsilon)=\rho_\alpha^\varepsilon=\int_\varepsilon^\infty l n_\alpha(dl).$$

Pour $\lambda\to\infty$, *et pour tout* $\varepsilon\geqq 0$

(*a*) $\dfrac{\tau^\varepsilon(\lambda t)}{\lambda}\to t\,\rho_\alpha^\varepsilon$; $\dfrac{L^\varepsilon(\lambda t)}{\lambda}\to\dfrac{t}{\rho_\alpha^\varepsilon}$;

(*b*) $\dfrac{D^\varepsilon(\lambda t)}{\lambda}\to t\dfrac{\rho_\alpha}{\rho_\alpha^\varepsilon}$.

Les propriétés (*a*) sont évidentes en lois finidimensionnelles. On en déduit les résultats dans $\mathscr{C}(P^\alpha)$ à l'aide des résultats suivants :

R 1. — Appelons « processus croissant » un processus $A=(A_t)_{t\geqq 0}$ réel tel que $A_0=0$ et dont les trajectoires sont croissantes et c. a. d. la. g. Son « pseudo-inverse » est $B=(B_t)_{t\geqq 0}$: $B_t=\inf\{u;\ A_u>t\}$. On a alors [17] :

1° si (A^λ) est une famille de processus croissants de pseudo-inverses (B^λ) et si a est un processus croissant déterministe de pseudo inverse b :

$$A^\lambda \underset{\lambda\to\infty}{\xrightarrow{\text{f. d.}}} a \quad\Rightarrow\quad B^\lambda \underset{\lambda\to\infty}{\xrightarrow{\text{f. d.}}} b$$

2° si A et a sont continues alors

$$A^\lambda \xrightarrow{\text{f. d.}} a \quad\Rightarrow\quad A^\lambda \xrightarrow{\mathscr{C}} a.$$

La propriété (*b*) résulte de (10) :

$$\frac{L(D^\varepsilon(t\lambda)}{D^\varepsilon(t\lambda)}\times\frac{D^\varepsilon(t\lambda)}{\lambda}\to\frac{t}{\rho_\alpha^\varepsilon}$$

III.3. Étude de $\hat\theta_t$, e. m. v.

Cas 1. — Soit $\hat\theta_t$ un estimateur tel que

$$\tilde Z_t^{\hat\theta_t}=\sup_{\alpha\in\Theta}\tilde Z_t^\alpha \tag{15}$$

nous allons montrer que $\hat\theta_t$ est consistant.

Proposition 2. — *Soit*

$$V_t^\alpha=\operatorname{Log}\tilde Z_t^\alpha=\int_0^{L(t)}\int_0^\infty \operatorname{Log} f_\alpha(l)\,N(du,\,dl) \tag{16}$$

(i) $\frac{1}{t}(V_t^\alpha - V_t^\theta)$ *converge en* P_θ *probabilité lorsque* t *tend vers l'infini vers* $K(\alpha, \theta)$ *défini par :*

$$K(\alpha, \theta) = \frac{1}{\rho_\theta} \int_0^\infty \operatorname{Log} \frac{f_\alpha(l)}{f_\theta(l)} n_\theta(dl) \tag{17}$$

(ii) *La fonction* $\alpha \to K(\alpha, \theta)$ *a un maximum unique en* $\alpha = \theta$.

Démonstration. — (i) Nous utiliserons les résultats suivants :

R 2. — Soit M une martingale continue de carré intégrable, de processus croissant continu $\langle M \rangle$.

Si $\frac{1}{\lambda}\langle M_{\lambda t} \rangle \xrightarrow{\mathscr{C}} mt$, alors $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} M_{\lambda t} \xrightarrow{\mathscr{C}} \sqrt{m}\, W_t$ où W est un mouvement brownien.

R 3. — Soit (A^λ) une famille de processus croissants continus (*cf.* R 1) tel que $A^\lambda \xrightarrow{\mathscr{C}} A$ et (X^λ) une famille de processus continus tels que $X^\lambda \xrightarrow{\mathscr{C}} X$; alors $X^\lambda . A^\lambda \xrightarrow{\mathscr{C}} X . A$.

Appliquons le résultat R2 à :

$$D_{\lambda t} = \int_0^{\lambda t} \int_0^\infty \operatorname{Log} f_\alpha(l)\, N(du, dl)$$

et

$$M_{\lambda t} = D_{\lambda t} - C_{\lambda t} \qquad \text{avec} \quad C_{\lambda t} = \lambda t \int_0^\infty \operatorname{Log} f_\alpha \, dn_\theta = \lambda\, t\, C(\alpha, \theta)$$

$C(\alpha, \theta) < \infty$ d'après (16) du lemme A 7

$$\frac{1}{\lambda} C_{\lambda t} \xrightarrow{\mathscr{C}} t\, C(\alpha, \theta)$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \langle M_{\lambda t} \rangle = \frac{t}{\lambda} \int_0^\infty (\operatorname{Log} f_\alpha)^2 \, dn_\theta \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} 0$$

car

$$\int_0^\infty (\operatorname{Log} f_\alpha)^2 \, dn_\theta < \infty$$

d'après (18.1) du lemme A 7.

Donc $\frac{D_{\lambda t}}{\lambda} \xrightarrow{\mathscr{C}} t\,C(\alpha;\,\theta)$; et d'après R 3 et la proposition 1

$$\frac{D_{L(\lambda t)}}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\int_0^{L(\lambda t)}\int_0^{\infty} \operatorname{Log} f_\alpha(l)\,N(du,\,dl) \to t\frac{1}{\rho_\theta}C(\alpha,\,\theta).$$

En posant $t=1$, on en déduit que

$$\frac{1}{\lambda}(V_\lambda^\alpha - V_\lambda^\theta) \to \frac{1}{\rho_\theta}[C(\alpha,\,\theta)-C(\theta,\,\theta)]=K(\alpha,\,\theta)$$

comme $\int_0^\infty (dn_\alpha - dn_\theta)=0$ [(15) lemme A 6],

(ii) $-\rho(\theta)\,K(\alpha,\,\theta)=\int_0^\infty \left(\frac{f_\theta}{f_\alpha}\operatorname{Log}\frac{f_\theta}{f_\alpha}+1-\frac{f_\theta}{f_\alpha}\right)dn_\alpha$ est l'information de Kullback de n_θ en rapport à n_α et atteint donc son minimum en $\alpha=\theta$, unique sous l'hypothèse d'identifiabilité K 2 car $b_\alpha \neq b_\theta$ implique $n_\alpha \neq n_\beta$ d'après (10.1).

Soit $\hat{\theta}_t$ tel que $V_t^{\hat{\theta}_t}=\operatorname{Sup}[V_t^\alpha;\ \alpha\in\Theta]$. Montrons que $\hat{\theta}_t$ est un estimateur consistant de θ.

Nous adapterons tout d'abord le théorème 3.2.8 de [2].

PROPOSITION 3. — *On se donne un modèle statistique* $(\Omega,\,\alpha,\,(P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ *avec* Θ *métrique compact, et une filtration* $\mathbb{F}=(\mathscr{F}_t)$.

Soit $F_t(\alpha)$ *un processus adapté à* $\mathbb{F}$ *pour chaque* α; *ce sera une « quasi-vraisemblance » si pour chaque* θ, $F_t(\alpha) \xrightarrow{P_\theta} K(\alpha,\,\theta)$ *où* $K(\,.\,,\,\theta)$ *est continue, et a un maximum unique en* θ.

On suppose donné pour chaque h *un processus* $W_t(h)$ *satisfaisant :*

(*a*) *pour* $|\alpha-\alpha'|\leqq h$, $|F_t(\alpha)-F_t(\alpha')|<W_t(h)$;

(*b*) $\overline{\lim}_{t\to\infty} W_t(h)=\psi(h)\,P_\theta$ *p. s., où* $\psi(h)$ *est une fonction déterministe telle que :*

(*c*) $\lim_{h\to 0}\psi(h)=0$.

Alors tout estimateur du maximum de quasi-vraisemblance est consistant.

Démonstration. — Soit B une boule ouverte non vide centrée en θ; $K(\theta,\,\theta)-K(\,.\,,\,\theta)$ est minorée sur $\Theta\diagdown B$ par un nombre $2\varepsilon>0$. Prenons η tel que $\psi(\eta)<\varepsilon$ et un recouvrement de $\Theta\diagdown B$ par un nombre fini de boules $B(\theta_i, \eta)$ $(1 \leqq i \leqq N)$. Pour $\alpha \in B(\theta_i, \eta)$ on a

$$\begin{aligned} F_t(\alpha) &\leqq F_t(\theta_i) + |F_t(\alpha) - F_t(\theta_i)| \\ &\leqq F_t(\theta_i) + W_t(\eta) \end{aligned}$$

$$\sup_{\alpha \in \Theta \setminus B} F_t(\alpha) \leqq \sup_i F_t(\theta_i) + W_t(\eta).$$

D'où

$$[\hat{\theta}_t \notin B] \subset [\sup_{\alpha \in \Theta \setminus B} F_t(\alpha) > F_t(\theta)]$$

et

$$P[\hat{\theta}_t \notin B] \leqq P_\theta[W_t(\eta) > \varepsilon] + P_\theta[\inf_i \{ F_t(\theta) - F_t(\theta_i) \leqq \varepsilon \}].$$

Mais

$$\operatorname*{Inf}_{1 \leqq i \leqq N} (F_t(\theta) - F_t(\theta_i)) \xrightarrow[t \to \infty]{P_\theta} \operatorname*{Inf}_{1 \leqq i \leqq N} [K(\theta, \theta) - K(\theta, \theta_i)] \geqq 2\varepsilon.$$

D'où

$$\lim_{t \to \infty} P[\hat{\theta} \notin B] = 0.$$

THÉORÈME 1. — *L'estimateur* $\hat{\theta}_t$ *défini en* (15) *est consistant.*

Démonstration. — Soit

$$\varphi(l, h) = \operatorname{Sup}[|\operatorname{Log} f_\alpha(l) - \operatorname{Log} f_{\alpha'}(l)|; |\alpha - \alpha'| \leqq h]$$

et

$$W_t(h) = \frac{1}{t} \int_0^{L(t)} \int_0^\infty \varphi(l, h) N(du, dl).$$

Appliquons la proposition précédente à $F_t(\alpha) = \frac{1}{t} V_t^\alpha$.

(*a*) est satisfaite.

On sait que

$$\frac{1}{t} \int_0^{L(t)} \int_0^\infty \varphi(l, h) N(du, dl) \xrightarrow[t \to \infty]{P_\theta} \frac{1}{\rho_\theta} \int_0^\infty \varphi(l, h) n_\theta(dl) = \psi(h)$$

et donc :

(*b*) $\overline{\lim_t} W_t(h) \leqq \psi(h) (P_\theta - \text{p. s.})$.

Il reste à prouver

(*c*) $\lim_{h \to 0} \psi(h) = 0$.

D'après (16) du lemme A 7, il existe K tel que pour tout $l > K$, $\varphi(l, h) \leqq 4 \lambda^* l$ et d'après (12) du lemme A 6, il existe η tel que pour tout

$l < \eta$, $\varphi(l, h) < C(\eta)\,\omega(g, h)\,l$ où

$$\omega(g, h) = \operatorname{Sup}(\,|g_\alpha(0) - g_{\alpha'}(0)|;\ |\alpha - \alpha'| \leqq h).$$

En notant $\bar{\omega}(h, \eta, K) = \operatorname{Sup}(\varphi(l, h);\ l \in [\eta, K])$, on a :

$$\varphi(l, h) \leqq 4\lambda^* l\, I_{[l > K]} + C(\eta)\,\omega(g, h)\, l\, I_{[l < \eta]} + \bar{\omega}(h, \eta, K)\, I_{[\eta \leqq l \leqq K]}.$$

Donc pour tout δ, il existe $K(\delta)$ tel que :

$$4\lambda^* \int_{K(\delta)}^{\infty} l n_\theta(dl) < \delta/3 \tag{18}$$

et il existe $\eta(\delta)$ et $h_1(\delta)$ tel que $C(\eta)\,\omega(g, h_1(\delta)) \int_0^{\eta(\delta)} l n_\theta(dl) < \frac{\delta}{3}$. D'autre part

$$\bar{\omega}(h, \eta(\delta), K(\delta)) \int_{\eta(\delta)}^{K(\delta)} n_\theta(dl) \leqq \frac{\bar{\omega}(h, \eta(\delta), K(\delta))}{\eta(\delta)} \int_0^{\infty} l n_\theta(dl) \quad (18.1)$$

$\int_0^{\infty} l n_\theta(dl) < \infty$ et $\bar{\omega}(h, \eta(\delta), K(\delta))$ tend vers zéro avec h. Donc il existe $h_2(\delta)$ tel que

$$\frac{\bar{\omega}(h_2(\delta), \eta(\delta), K(\delta))}{\eta(\delta)} \rho_\theta < \delta/3 \tag{19}$$

et (c) vient en choisissant $h(\delta) \leqq h_1(\delta) \wedge h_2(\delta)$.

Montrons que la fonction $\alpha \to V_t^\alpha$ est de classe $\mathbb{C}^2$.

Soit $G(\alpha, h, l) = \left[\dfrac{\operatorname{Log} f_{\alpha+h} - \operatorname{Log} f_\alpha}{h} - D \operatorname{Log} f_\alpha\right](l)$.

Pour tout h, pour tout η, il existe ε tel que pour tout $l \in [0, \varepsilon[$

$$|G(\alpha, h, l) \leqq 2 \sup_{\gamma \in B(\alpha, h)} |D \operatorname{Log} f_\gamma(l)| \leqq 2 [\sup_\gamma D g_\gamma(0)]\, l$$
$$\leqq \eta\, l \quad [(13) \text{ du lemme A 6}].$$

D'où en appliquant le théorème de Lebesgue on a :

$$\int_0^{L(t)} \int_0^{\varepsilon} G(\alpha, h, l)\, N(du, dl) \to 0.$$

$\int_0^{L(t)} \int_\varepsilon^{\infty} \operatorname{Log} f_\alpha(l)\, N(du, dl)$ est une somme finie de fonctions dérivables en α. On a donc $\alpha \to V_t^\alpha$ de classe $\mathbb{C}^1$ et on montre de la même façon que V_t^α est de classe $\mathbb{C}^2$.

III.4. Théorème de limite centrale pour l'estimateur $\hat{\theta}_t$

Soit l'hypothèse supplémentaire :

*K*5 : Il existe $M>0$ et un voisinage V_θ tel que d'après H_2 :
$g_\theta(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \infty$;

$\operatorname{Inf}\left[\frac{Dg_\alpha}{g_\theta};\ \alpha\in V_\theta\right]>-M.$

THÉORÈME 2. — *Sous les hypothèses* (K) *et* K 5 :

$$\sqrt{t}(\hat{\theta}_t-\theta)\xrightarrow[t\to\infty]{P_\theta}\mathcal{N}(0,[I(\theta)]^{-1})$$

où

$$I(\theta)=\frac{1}{\rho_\theta}\int_0^\infty [D\log f_\theta]^2\,dn_\theta \tag{20}$$

Démonstration. — Nous montrons les trois points suivants :

(i) $\frac{1}{\sqrt{t}}DV_t(\theta)\xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}(P_\theta)}\mathcal{N}(0,I(\theta))$;

(ii) $-\frac{1}{t}D^{(2)}V_t(\theta)\xrightarrow[t\to\infty]{P_\theta}I(\theta)$;

(iii) $1_{\hat{\theta}_t\in B(\theta,h)}\sup\limits_{\alpha\leq|\hat{\theta}_t-\theta|}\frac{1}{t}|D^{(2)}V_t(\theta+\alpha)-D^{(2)}V_t(\theta)|$ converge, P_θ, p. s., vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

La démonstration de (i) est basée sur le résultat suivant :

*R*4. — Reprenons les notations de R 2 de la proposition 2 du paragraphe III.3 pour $M_t=\int_0^t\int_0^\infty [D\operatorname{Log}f_\theta](l)\,N(du,dl)$ qui est une martingale car $\int D\operatorname{Log}f_\theta\,dn_\theta=0$ d'après (20) du lemme A 9; on a :

$$\frac{1}{\lambda}\langle M_{\lambda t}\rangle=t\int_0^\infty[D\operatorname{Log}f_\theta]^2\,dn_\theta=tm$$

qui est finie d'après (18.1), lemme A 8. On en déduit :

$$\frac{M_{\lambda t}}{\sqrt{\lambda}}\xrightarrow[\lambda\to\infty]{\mathscr{C}}W_{mt}\equiv\sqrt{m}\,W_t,$$

et d'après R 3 de la proposition 2 : $\dfrac{M(L(\lambda t))}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow[\lambda \to \infty]{\mathbb{C}} W_{I(\theta)t}$

Appliquant ce résultat à $t=1$, on en déduit (i) :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(DV_\lambda)(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{L(\lambda)} \int_0^\infty D \operatorname{Log} f_\theta(l) N(du, dl) \xrightarrow[\lambda \to \infty]{\mathscr{L}(P_\theta)} \mathscr{N}(0, I(\theta))$$

Montrons (ii)

$$\frac{1}{t} D^{(2)} V_t(\theta) = \frac{1}{t} \int_0^{L(t)} \int_0^\infty [D^{(2)} \operatorname{Log} f_\theta](l) N(du, dl);$$

d'après (20) du lemme 9 :

$$\int_0^\infty [D^{(2)} n_\theta](l)\, dl = 0$$

donc

$$\frac{1}{t} \int_0^{L(t)} \int_0^\infty \frac{[D^{(2)} f_\theta]}{f_\theta}(l) N(du, dl) \to 0.$$

il suffit d'appliquer le résultat R 3 car d'après le lemme 9

$$\int_0^\infty \left[\frac{D^{(2)} f_\theta}{f_\theta}\right]^2 dn_\theta < \infty.$$

D'autre part par un raisonnement analogue à (i)

$$\frac{1}{t} \int_0^{L(t)} \int_0^\infty [D \operatorname{Log} f_\theta]^2 (l) N(du, dl) \xrightarrow[t \to \infty]{P_\theta} \frac{1}{\rho_\theta} \int_0^\infty [D \operatorname{Log} f_\theta]^2 dn_\theta$$

Montrons (iii).

Nous suivons le schéma de démonstration du paragraphe III.3, $W_t(h)$ est ici égal à

$$\operatorname{Sup}\left[\frac{1}{t} \left| D^{(2)} V_t^\alpha - D^{(2)} V_t^\theta \right|; |\alpha - \theta| \leq h\right]$$

et

$$\varphi(l, h) = \operatorname{Sup}(D^{(2)} \operatorname{Log} f_\theta - D^{(2)} \operatorname{Log} f_\alpha)(l); \; |\alpha - \theta| \leq h).$$

Il suffit de prouver que :

$$\psi(h) = \int_0^\infty \varphi(l, h)\, n_\theta(dl) \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \tag{21}$$

puisque

$$\frac{1}{t}\int_0^{L(t)}\int_0^{\infty}\varphi(l,h)\,N(du,dl)\xrightarrow[t\to\infty]{P_\theta}\frac{1}{\rho_\theta}\int_0^{\infty}\varphi(l,h)\,n_\theta(dl).$$

Nous pouvons faire une partition de $[0, \infty[$ en trois intervalles, $[K(\delta), \infty[$, $[0, \eta(\delta)[$ et $[\eta(\delta), K(\delta)[$, tels que $\psi(h)$ tende vers zéro sur chacun de ces intervalles.

(19) et (20) du lemme A 9 déterminent K (δ);

(12) et (13) du lemme A 6 déterminent η (δ),

et par un raisonnement analogue à celui du théorème 1, pour le troisième intervalle puisque $\int l^2\, n_\theta(dl) < \infty$.

D'où

$$\overline{\lim}\, W_t(h) \leqq \frac{1}{\rho_\theta}\psi(h) \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to\infty} P\left[W_t(h) > \frac{1}{\rho_\theta}\psi(h)\right] = 0.$$

Ce qui achève la démonstration du problème d'estimation de θ à l'aide de l'observation de tous les passages en zéro de la diffusion.

Remarque. – De la croissance exponentielle de n_α on déduit que τ_t a une transformée de Laplace définie au voisinage de zéro.

Donc de $P[L_t > k] = P[\tau_k < t]$, on déduit que $L(t)$ a une transformée de Laplace bilatère et donc satisfait à des inégalités du type Chernoff. Nous avons déjà démontré que le modèle était L.A.N. au sens de Le Cam, les inégalités de grandes déviations permettent de montrer que le processus $h \to \tilde{Z}_t\left(\theta + \frac{h}{\sqrt{t}}\right) - \tilde{Z}_t(\theta)$ converge dans C_0 pour $t \to \infty$. En appliquant la méthode d'Ibraguimov-Has'minskii on obtient la normalité asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance en affaiblissant les hypothèses. On utilise seulement que la fonction $\theta \to n_\theta$ est de classe C^2 (au lieu de C^3) et Θ n'est plus nécessairement compact. Nous n'avons pas détaillé pour des raisons de brièveté.

IV. ESTIMATEUR $\hat{\theta}_t^\varepsilon$ DU MAXIMUM DE QUASI-VRAISEMBLANCE

Nous allons reprendre les notations du paragraphe II.2 et n'observer que la suite des $(G_p^\varepsilon, D_p^\varepsilon)$ jusqu'à l'instant D_t^ε.

IV.1. Étude du contraste $\hat{V}_t^{\varepsilon,\alpha}$: Cas 2

PROPOSITION 4. — *Soit*

$$\hat{V}_t^{\varepsilon,\alpha} = \int_0^{L^\varepsilon(t)} \int_\varepsilon^\infty [\mathrm{Log}\, f_\alpha(l)\, N(du, dl)]$$

$\frac{1}{t}[\hat{V}_t^{\varepsilon,\alpha} - \hat{V}_t^{\varepsilon,\theta}]$, *converge lorsque t tend vers l'infini, en* P_θ *probabilité vers* $\hat{K}^\varepsilon(\alpha, \theta)$ *égal à :*

$$\hat{K}^\varepsilon(\alpha, \theta) = \frac{1}{\rho_\theta^\varepsilon} \int_\varepsilon^\infty \left[\mathrm{Log}\frac{f_\alpha}{f_\theta}\right] dn_\theta.$$

Mais le maximum n'est, en général, pas atteint en $\alpha = \theta$, *ce qui ne permet pas de considérer* $\hat{V}_t^{\varepsilon,\alpha}$ *comme une quasi-vraisemblance. Par contre si* ε *est une fonction qui tend vers zéro*

$$\frac{1}{t}(\hat{V}_t^{\varepsilon,\alpha} - \hat{V}_t^{\varepsilon,\theta}) \xrightarrow[\substack{t\to\infty \\ \varepsilon\to 0}]{P_\theta} K(\alpha, \theta)$$

dont le maximum unique est en $\alpha = \theta$.

Nous supprimons ainsi le biais $\int_\varepsilon^\infty (dn_\theta - dn_\alpha)$ de $\frac{1}{t}\hat{V}_t^{\varepsilon,\alpha}$ mais seulement asymptotiquement pour $t \to \infty$ et $\varepsilon \to 0$. Pour ε fixé, une façon plus intéressante de supprimer le biais est de considérer la quasi-vraisemblance définie en (14).

IV.2. Étude de la quasi-vraisemblance $\tilde{Z}_t^{\varepsilon,\alpha}$: Cas 3

Soit ε fixé $\geqq 0$, posons d'après (14)

$$V_t^{\varepsilon,\alpha} = \int_0^{L^\varepsilon(t)} \int_\varepsilon^\infty \mathrm{Log}\, f_\alpha^\varepsilon(l)\, N(du, dl).$$

Remarquons que l'on a

$$V_t^{\varepsilon,\alpha} - V_t^{\varepsilon,\theta} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{P_\theta} \int_0^{L(t)} \int_\varepsilon^\infty [\mathrm{Log}\, f_\alpha(l) - \mathrm{Log}\, f_\theta(l)]\, N(du, dl) \qquad (21)$$
$$- N^\varepsilon(L^\varepsilon(t))\,[\mathrm{Log}\, h_\alpha(\varepsilon) - \mathrm{Log}\, h_\theta(\varepsilon)]$$

Or d'après le lemme A 4,

$$[\operatorname{Log} h_\alpha(\varepsilon) - \operatorname{Log} h_\theta(\varepsilon)] = \frac{1}{2}[g_\theta(0) - g_\theta(0)]\,\varepsilon + o(\varepsilon)$$

et d'après (12) :

$$\frac{N^\varepsilon(L^\varepsilon(t))}{h_\theta(\varepsilon)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{P_\theta} L(t),$$

donc :

$$V_t^{\varepsilon,\,\alpha} - V_t^{\varepsilon,\,\theta} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{P_\theta} \int_0^{L(t)} \int_0^\infty [\operatorname{Log} f_\alpha(l) - \operatorname{Log} f_\theta(l)]\, N(du,\, dl) = V_t^\alpha - V_t^\theta.$$

Soit $\hat\theta_t^\varepsilon$ défini par $V^{\varepsilon,\,\hat\theta_t^\varepsilon} = \operatorname{Sup}[V_t^{\varepsilon,\,\alpha};\ \alpha \in \Theta]$:

Proposition 5. — *Sous les hypothèses* (K), *en posant* $n^\varepsilon(l) = \dfrac{n(l)}{h(\varepsilon)}$ *pour tout* $l \in [\varepsilon,\, \infty[$, *on a :*

(i) $\dfrac{1}{t}[V_t^{\varepsilon,\,\alpha} - V_t^{\varepsilon,\,\theta}]$ *converge en* P_θ *probabilité vers* $K^\varepsilon(\alpha,\, \theta)$ *défini par*

$$K^\varepsilon(\alpha,\, \theta) = \frac{h_\theta(\varepsilon)}{\rho_\theta^\varepsilon} \int_\varepsilon^\infty \operatorname{Log} \frac{f_\alpha^\varepsilon}{f_\alpha^\varepsilon}\, dn_\theta^\varepsilon. \tag{22}$$

(ii) $K^\varepsilon(\alpha,\, \theta)$ *a un maximum unique en* $\alpha = \theta$.

Démonstration :

$$\frac{1}{t}(V_t^{\varepsilon,\,\alpha} - V_t^{\varepsilon,\,\theta}) \xrightarrow[t \to \infty]{P_\theta} \left(\frac{1}{\rho_\theta^\varepsilon} \int_\varepsilon^\infty \operatorname{Log} \frac{f_\alpha}{f_\theta}\, dn_\theta\right) - \frac{h_\theta(\varepsilon)}{\rho_\theta^\varepsilon} \operatorname{Log} \frac{h_\alpha(\varepsilon)}{h_\theta(\varepsilon)} = \frac{1}{\rho_\theta^\varepsilon} \int_\varepsilon^\infty \operatorname{Log} \frac{f_\alpha^\varepsilon}{f_\theta^\varepsilon}\, dn_\theta$$

$K^\varepsilon(\alpha,\, \theta) = \dfrac{1}{\rho_\theta^\varepsilon} \displaystyle\int_\varepsilon^\infty \operatorname{Log} \frac{f_\alpha^\varepsilon}{f_\theta^\varepsilon}\, dn_\theta$ peut s'écrire sous la forme

$$-\rho_\theta^\varepsilon K^\varepsilon(\alpha,\, \theta) = \int_\varepsilon^\infty \left(\frac{f_\theta^\varepsilon}{f_\alpha^\varepsilon} \operatorname{Log} \frac{f_\theta^\varepsilon}{f_\alpha^\varepsilon} + 1 - \frac{f_\theta^\varepsilon}{f_\alpha^\varepsilon}\right) dn_\alpha$$

car

$$\int_\varepsilon^\infty \left(1 - \frac{f_\theta^\varepsilon}{f_\alpha^\varepsilon}\right) dn_\alpha = 0$$

$K^\varepsilon(\alpha,\, \theta)$ s'annule si et seulement si $f_\theta^\varepsilon = f_\alpha^\varepsilon$ (n_α p. s.) soit $\dfrac{n_\theta(l)}{n_\alpha(l)} = \dfrac{h_\theta(\varepsilon)}{h_\alpha(\varepsilon)}(n_\alpha)$ p. s. Or les fonctions n_α sont analytiques et non nulles, donc si $\frac{n_\theta}{n_\alpha}(l)$ est constante sur $[\varepsilon, \infty[$ elle l'est par prolongement analytique sur $[0, \infty[$. Or $\lim_{l \to 0} \frac{n_\theta(l)}{n_\alpha(l)} = 1$. Donc si $K^\varepsilon(\alpha, \theta) = 0$, $n_\theta = n_\alpha$ ce qui implique $h_\theta = h_\alpha$ d'où $p_\theta = p_\alpha$ et enfin $b_\theta = b_\alpha$ ce qui contredit (K 2).

IV.3. Consistance de l'estimateur $\hat{\theta}_t^\varepsilon$.

Reprenons le schéma de démonstration du théorème 1. Posons $W_t^\varepsilon(k)$

$$W_t^\varepsilon(k) = \frac{1}{t} \int_0^{L^\varepsilon(t)} \int_\varepsilon^\infty [\varphi_1(l, k) + \bar{\omega}(k)] N(du, dl)$$

avec

$$\varphi_1(l, k) = \operatorname{Sup}[\,|\operatorname{Log} f_\alpha(l) - \operatorname{Log} f_{\alpha'}(l)|;\, |\alpha - \alpha'| \leqq k]$$

et

$$\bar{\omega}(k) = \operatorname{Sup}[\,|\operatorname{Log} h_\alpha(\varepsilon) - \operatorname{Log} h_{\alpha'}(\varepsilon)|;\, |\alpha - \alpha'| \leqq k].$$

On a $\lim_{k \to 0} \bar{\omega}(k) = 0$ et on montre que :

$$\lim_{k \to 0} \int_\varepsilon^\infty \varphi_1(l, k)\, n_\theta(dl) = 0$$

Par un raisonnement identique à (18) et (19) nous avons le résultat de la consistance de $\hat{\theta}_t^\varepsilon$.

IV.4. Normalité asymptotique de $\hat{\theta}_t^\varepsilon$.

PROPOSITION 6. — *Sous les hypothèses* (K) et (K 5) $\hat{\theta}_t^\varepsilon$ *est asymptotiquement normal :*

$$\sqrt{t}\,(\hat{\theta}_t^\varepsilon - \theta) \xrightarrow[t \to \infty]{(P_\theta)} \mathcal{N}(0, [I^\varepsilon(\theta)]^{-1})$$

$$I^\varepsilon(\theta) = \frac{1}{\rho_\theta^\varepsilon} \left[\int_\varepsilon^\infty [D \operatorname{Log} f_\theta]^2\, dn_\theta - ([D \operatorname{Log} h_\theta]^2 . h_\theta)(\varepsilon) \right] \tag{23}$$

La démonstration est analogue à celle du paragraphe III.4 on montre que :

(i) $\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{DV}_t^\varepsilon(\theta) \xrightarrow[t\to\infty]{P_\theta} \mathrm{I}^\varepsilon(\theta)$ où

$$\mathrm{DV}_t^\varepsilon(\theta)=\int_0^{\mathrm{L}^\varepsilon(t)}\int_\varepsilon^\infty([\mathrm{D}\,\mathrm{Log}\,f_\theta](l)-[\mathrm{D}\,\mathrm{Log}\,h_\theta](\varepsilon))\,\mathrm{N}(du,\,dl).$$

On applique alors le résultat R 3 du paragraphe III.

D'autre part

$$\text{(ii)}\quad -\frac{1}{t}\mathrm{D}^{(2)}\mathrm{V}_t^\varepsilon(\theta)=-\frac{1}{t}\int_0^{\mathrm{L}^\varepsilon(t)}\int_\varepsilon^\infty([\mathrm{D}^{(2)}\,\mathrm{Log}\,f_\theta](l)-[\mathrm{D}^{(2)}\,\mathrm{Log}\,h_\theta](\varepsilon))\,\mathrm{N}(du,\,dl)$$

$$\xrightarrow[t\to\infty]{P_\theta}\frac{1}{\rho_\theta^\varepsilon}\left(\int_\varepsilon^\infty[\mathrm{D}\,\mathrm{Log}\,f_\theta]^2\,dn_\theta-[\mathrm{D}\,\mathrm{Log}\,h_\theta]^2(\varepsilon)\,.\,h_\theta(\varepsilon)\right)=\mathrm{I}^\varepsilon(\theta)$$

et

(iii) est analogue à (iii) du paragraphe IV.3.

IV.5. Comparaison des informations

Comparons les informations $\mathrm{I}(\theta)$ et $\mathrm{I}^\varepsilon(\theta)$. On peut en utilisant les lemmes A 5 et A 6 écrire $\mathrm{I}(\theta)$ sous la forme :

$$\mathrm{I}(\theta)=\mathrm{I}^\varepsilon(\theta)+\mathrm{C}\,[\mathrm{D}\,g_\theta]^2\,(0)\,\varepsilon^{3/2}+o\,(\varepsilon^{3/2}).$$

Exemple et remarques. — Considérons le cas du processus d'Ornstein Ulhenbeck solution de :

$$d\mathrm{X}_t=-\theta\,\mathrm{X}_t\,dt+\sigma\,d\mathrm{W}_t;\qquad \theta>0.$$

D'après V.A, on peut déduire de $p_\alpha(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2\alpha}{1-e^{-2\alpha t}}\right)^{1/2}$ la valeur de

$$\hat{h}_\alpha(\lambda)=\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi\alpha}}\beta\left(\frac{\lambda}{2\alpha}+\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right),\qquad h_\alpha(l)=\frac{1}{\sigma}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{2\alpha}{e^{2\alpha l}-1}\right)^{1/2}$$

et

$$n_\alpha(l)=\frac{e^{2\alpha l}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2\alpha}{e^{2\alpha l}-1}\right)^{3/2};$$

soit $\mathrm{I}^\mathrm{X}(\theta)$ l'information obtenue en observant toute la trajectoire. Il est alors intéressant de comparer l'efficacité asymptotique de l'E.M.V. $\hat{\theta}$ à celle que l'on obtiendrait en observant pendant le même temps toute la trajectoire.

$$I(\theta)=\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\frac{(8\,\mathrm{Log}\,2\text{-}4)\,\pi}{5\,\theta^{3/2}}=\frac{\sigma^2}{2\,\theta}\frac{(8\,\mathrm{Log}\,2\text{-}4)}{5}=\frac{\sigma^2}{2\,\theta}0{,}618$$

$$I^X(\theta)=\frac{\sigma^2}{2\,\theta}\quad [3].$$

Le rapport des informations $I(\theta)$ et $I^X(\theta)$ est égal à 0,618, ce qui donne une efficacité assez surprenante.

La deuxième remarque concerne Θ. Il est clair qu'en général, la compacité de Θ n'est pas utile lorsque l'on peut faire des calculs explicites (ou utiliser la remarque déjà faite). Par contre il est surtout intéressant d'étudier le cas $b(\beta_0)=0$ qui correspond ici au mouvement brownien récurrent nul $\beta_0=0$.

Il est aisé de voir que les lemmes analytiques concernant la consistance de $\hat{\theta}_t$ valent si l'on inclut β_0 dans Θ. En ce qui concerne l'efficacité asymptotique, si $\theta\neq\beta_0$ rien n'est modifié dans les raisonnements faits.

V. APPENDICE

A. Le processus $\tau(t)$ [7]

Les résultats suivants valent pour P^W et P^b.

$\hat{f}$ désignera la transformée de Laplace d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $(x, y)\to p_t(x, y)$ la densité de transition de la diffusion à l'instant t; posons $p(t)=p_t(0, 0)$. On a ([7], p. 214) :

$$E[e^{-\lambda\tau(t)}]=e^{-t\eta(\lambda)}=e^{-t\int_0^\infty(1-e^{-\lambda l})\,n(dl)}$$

alors

$$\eta(\lambda)=\frac{1}{\hat{p}(\lambda)}. \tag{3}$$

En effet, pour toute fonction f bornée on a :

$$\mathrm{E}\int_0^t f(\mathrm{X}_s)\,ds=\int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\,\mathrm{E}[\mathrm{L}(t,\ a)]\,da$$

or

$$\mathrm{E}\int_0^t f(\mathrm{X}_s)\,ds=\int_0^t ds\int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\,p_s(0,\ a)\,da$$

on a donc $\int_0^t p_s(0,\ a)\,ds=\mathrm{E}[\mathrm{L}(t,\ a)]$ par continuité en a du temps local.

D'autre part

$$\mathrm{E}\int_0^\infty e^{-\lambda\tau(t)}\,dt=\mathrm{E}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,d\mathrm{L}(t,\ 0)$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,d\mathrm{E}(\mathrm{L}(t,\ 0))$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,p_t(0,\ 0)\,dt=\hat{p}(\lambda)$$

d'où (3).

Notant

$$h(l)=\int_l^\infty n(du) \tag{4}$$

alors

$$\eta(\lambda)=\lambda\,\hat{h}(\lambda) \qquad \text{et} \qquad \hat{h}(\lambda)=\frac{1}{\lambda\hat{p}(\lambda)} \tag{4.1}$$

B. Lemmes analytiques

Nous allons étudier, sous les hypothèses (K) de III.1 et III.4 le comportement à l'origine et à l'infini des fonctions p_α, h_α, n_α. On supposera ici $\sigma=1$.

LEMME A 1. — *On a, uniformément en α, pour t tendant vers zéro :*

$$p_\alpha(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}-g_\alpha(0)\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{2\pi}}+O(t). \tag{1}$$

Démonstration. — Il résulte du lemme 1 de [3] que :

$$p_\alpha(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{E_B}[\mathrm{U}_\alpha(t)] \qquad \text{avec} \quad \mathrm{U}_\alpha(t)=\exp-\frac{t}{2}\int_0^1 g_\alpha(\sqrt{t}\,\mathrm{B}_u)\,du \tag{2}$$

où B est un pont brownien standard.

Soit :

$$\int_0^1 g_\alpha(\sqrt{t}\,B_u)\,du = g_\alpha(0) + R_1^\alpha(t);$$

alors :

$$U_\alpha(t) = 1 - \frac{t}{2} g_\alpha(0) - \frac{t}{2} R_1^\alpha(t) + R_2^\alpha(t).$$

Si $B^* = \mathrm{Sup}(|B_u|;\ u \in [0, 1])$, on a les inégalités suivantes :

$$|g_\alpha(\sqrt{t}\,B_u)| < K_1 (1 \vee B^{*2})$$

et

$$U_\alpha(t) \leqq e^{t/2 K_1 (1 \vee B^{*2})} \qquad \text{avec} \quad E[B^{*\beta} U_\alpha(t)] < \infty$$

pour t assez petit.

$$E[R_1^\alpha(t)] \leqq E[K(\sqrt{t}\,|B^*| \vee t B^{*2})] = O(\sqrt{t})$$

$$E[U_\alpha(t)] = 1 - \frac{t}{2} g_\alpha(0) + O(t^{3/2}) + E[R_2^\alpha(t)]$$

et comme $|e^x - 1 - x| \leqq x^2 (e^x \vee 1)$

$$R_2^\alpha(t) \leqq \frac{t^2}{4}\left[\int g_\alpha(\sqrt{t}\,B_u)\,du\right]^2 [U_\alpha(t) \vee 1]$$

et donc

$$E[R_2^\alpha(t)] \leqq \frac{t^2}{4} E[K_1 \vee B^{*2})]\, e^{t/2 K_1 (1 \vee B^{*2})}$$

$$= O(t^2).$$

LEMME A 2. — *Si $g'_\alpha \in \mathscr{M}_\beta$, alors p est dérivable et uniformément en α pour t tendant vers zéro :*

$$p'_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{8\pi t^3}} - \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} g_\alpha \frac{(0)}{\sqrt{t}} + O(1). \tag{3}$$

Démonstration. — La dérivabilité de $p_\alpha(t)$ est classique ([6], théorème 3, chap. 3). De l'hypothèse $g'_\alpha \in \mathcal{M}_\beta$ on déduit :

$$\left| \int_0^1 g'_\alpha(\sqrt{t}\,B_u)\,du \right| < K(1 \vee t^{\beta/2}\,B^{*\beta}) \tag{4}$$

$$\int_0^1 g'_\alpha(\sqrt{t}\,B_u)\,du = g'_\alpha(0) + R_3(t)$$

avec (5)

$$E[R_3(t)] = O(t^\gamma) \quad \text{et} \quad \gamma = \inf\left(\frac{1}{2}, \frac{\beta}{2}\right).$$

On a donc :

$$|U'_\alpha(t)| = \left| -\frac{t^{1/2}}{4}\int_0^1 g'_\alpha(\sqrt{t}\,B_u)\,B_u\,du - \frac{t}{2}\int g_\alpha(\sqrt{t}\,B_u)\,du \right| U_\alpha(t),$$

qui est majorée par une fonction intégrale indépendante de α.

En particulier $(p'_\alpha(t) - p'_{\alpha'}(t)) = C\dfrac{g_\alpha(0) - g_{\alpha'}(0)}{\sqrt{t}} + O(1)$.

LEMME A 3. — *Sous* (K) *l'application* $\alpha \to p_\alpha(t)$ *est continue, si de plus* $D^{(i)} g_\alpha$ *existe et* $D^{(i)} g_\alpha \in \mathcal{M}_\beta$ *uniformément en* α, *alors on a*

$$D^{(i)} p_\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} D^{(i)} g_\alpha(0)\sqrt{t} + o(\sqrt{t}), \qquad i = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Démonstration. — Elle est identique à celle du lemme A 2, la dérivabilité en α résulte de ce que $\sup_\alpha DU_\alpha(t)$ est majorée par une fonction intégrable.

Comportement à l'origine de la fonction $h_\alpha(l)$

On a vu que $\hat{h}_\alpha(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda \hat{p}_\alpha(\lambda)} \xrightarrow{\lambda \to 0} \dfrac{1}{\rho_\alpha}$ et $\alpha \to \hat{p}_\alpha(\lambda)$ est continue d'après le lemme A 1, donc $\alpha \to \hat{h}_\alpha(\lambda)$ est continue pour tout $\lambda > 0$.

LEMME A 4. — *On a sous les hypothèses* (K) *et uniformément en* α

$$h_\alpha(\varepsilon) - h_W(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g_\alpha(0)\sqrt{\varepsilon} + o(\sqrt{\varepsilon}) \tag{7}$$

avec $h_W(\varepsilon) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi\varepsilon}}$.

Démonstration. — Il résulte du lemme abélien classique et du lemme 1 que $\sqrt{\lambda}\,\hat{p}_\alpha(\lambda)\to\frac{1}{\sqrt{2}}$ et donc $\sqrt{\lambda}\,\hat{h}_\alpha(\lambda)\to\sqrt{2}$ uniformément en α. On a donc d'après le théorème taubérien généralisé

$$h_\alpha(\varepsilon)=\sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \tag{8}$$

$$\hat{h}_\alpha(\lambda)-\hat{h}_{\mathrm{W}}(\lambda)=\frac{\lambda.(\hat{p}_{\mathrm{W}}-\hat{p}_\alpha)(\lambda)}{\lambda\hat{p}_\alpha(\lambda).\lambda\hat{p}_{\mathrm{W}}(\lambda)} \tag{9}$$

si le produit de convolution $-(p'_\alpha-p'_{\mathrm{W}})*h_\alpha*h_{\mathrm{W}}$ existe, et qu'il donne une fonction tempérée, alors il a même transformée de Laplace que $h_\alpha-h_{\mathrm{W}}$, et donc

$$h_\alpha-h_{\mathrm{W}}=-(p'_\alpha-p'_{\mathrm{W}})*h_\alpha*h_{\mathrm{W}}. \tag{10}$$

Nous verrons plus loin que $p'_\alpha(t)\to 0$ lorsque t tend vers l'infini. Les lemmes A 2 et A 7 montrent que (10) est bien définie et tempérée.

Écrivons donc formellement :

$$h_\alpha=h_{\mathrm{W}}+\sum_{n=1}^{\infty}h_{\mathrm{W}}*[h_{\mathrm{W}}*(p'_{\mathrm{W}}-p'_\alpha)]^{*n}$$

$$=h_{\mathrm{W}}*\sum_{n=0}^{\infty}[h_{\mathrm{W}}*(p'_{\mathrm{W}}-p'_\alpha)]^{*n}=h_{\mathrm{W}}*\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{S}^{*n}.$$

Pour tout η fixé, il existe t_0 tel que pour $0\leqq t<t_0$

$$\sqrt{t}\,(p'_\alpha-p'_{\mathrm{W}})(t)\in\left[\frac{1-\eta}{\sqrt{2\pi}}g_\alpha(0),\ \frac{1+\eta}{\sqrt{2\pi}}g_\alpha(0)\right]=\mathrm{I}$$

or $h_{\mathrm{W}}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}$ donc $\mathrm{S}(t)\in\mathrm{I}$ et par récurrence

$$\mathrm{S}^{*n}(t)\in](1-\eta)^n g_\alpha^n(0)\,t^{n-1};\ (1+\eta)^n g_\alpha^n(0)\,t^{n-1}[.$$

Donc si $t<t_0\wedge\frac{1}{2(1+\eta)\mathrm{M}}$ avec $\mathrm{M}=\operatorname{Sup}_\alpha|g_\alpha(0)|$ on a

$$h_\alpha=h_{\mathrm{W}}+h_{\mathrm{W}}^{*2}*(p'_\alpha-p'_{\mathrm{W}})+\mathrm{R}_\alpha(t)$$

avec

$$\mathrm{R}_\alpha(t)\leqq\frac{(1+\eta)^2\mathrm{M}^2 t}{1-(1+\eta)\inf|g_\alpha(0)|\,t}$$

$$=O(t).$$

D'où le résultat d'après le lemme A 2 car

$$(h_W^{*2} * (p'_\alpha - p'_W))(t) = \frac{g_\alpha(0)\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi}} + O(t) \quad \text{uniformément en } \alpha$$

LEMME A 5. — *Sous les hypothèses du lemme* A 3 *on a uniformément en* α

$$\mathrm{D}h_\alpha(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{D}g_\alpha(0)\sqrt{l} + o(\sqrt{l}).$$

Démonstration. — Sous les hypothèses du lemme A 3, l'application $\alpha \to p_\alpha(t)$ est dérivable, et $\mathrm{D}p_\alpha$ est tempérée. [Nous verrons au lemme A 7 que $\mathrm{D}p_\alpha(t) \to \mathrm{D}\rho_\alpha$ lorsque t tend vers l'infini.] Il en résulte que pour tout λ, l'application $\alpha \to \hat{p}_\alpha(\lambda)$ est dérivable et donc l'application $\alpha \to \hat{h}_\alpha(\lambda)$ l'est également.

On en déduit que $\mathrm{D}\hat{h}_\alpha$ existe et est égale à $-\frac{\lambda\,\mathrm{D}\hat{p}_\alpha(\lambda)}{[\lambda\hat{p}_\alpha(\lambda)]^2}$, supposons que l'on ait montré que $\lambda\,\mathrm{D}\hat{p}_\alpha = \mathrm{D}\hat{p}'_\alpha$ alors $\mathrm{D}(\hat{h}_\alpha)(\lambda)$ est la transformée de Laplace du produit de convolution $\mathrm{D}p'_\alpha * h_\alpha * h_\alpha$ qui existe d'après le lemme A 4.

On déduit alors le lemme A 5 en montrant que $(\mathrm{D}p)' = \mathrm{D}p'$ et que cette fonction est tempérée.

Ceci résulte de la forme de $p'_\alpha(t)$

$$\begin{aligned} p'_\alpha(t) = &-\frac{1}{\sqrt{8\pi t^3}} \mathrm{E_B}[\mathrm{U}_\alpha(t)] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{E_B}\left[\mathrm{U}_\alpha(t)\left(-\frac{t}{2}\int g_\alpha \sqrt{t}\,\mathrm{B}_u\,du\right) - \frac{\sqrt{t}}{4}\int g'_\alpha(\sqrt{t}\,\mathrm{B}_u\,du)\right] \end{aligned}$$

et de l'application d'un raisonnement analogue au lemme A 3 on déduit $\mathrm{D}p'$. Et de même on a $\mathrm{D}^{(i)} h_\alpha(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{D}^{(i)} g_\alpha(0)\sqrt{t} + o(\sqrt{t})$. □

Comportement de $n_\alpha(l)$ à l'origine

Le passage de $h_\alpha(l)$ à sa dérivée $n_\alpha(l)$ ne peut *a priori* se faire directement car $n_\alpha(l)$ n'est pas intégrable et donc les méthodes de convolutions ne sont plus valables. Nous déduirons du comportement à l'origine de h_α le comportement de n_α en utilisant la représentation de n_α comme fonction totalement positive. On a ([7], p. 217)

$$\frac{dn_\alpha}{dl}=n_\alpha(l)=\int_{s(\alpha)} e^{-\lambda l}\,d\nu_\alpha(\lambda) \tag{11}$$

avec $s(\alpha)>0$ et ν_α mesure positive.

LEMME A 6. — *Sous les hypothèses du lemme* A 3, *on a au voisinage de zéro et uniformément en* α :

$$n_\alpha(l)-n_W(l)=-\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\,\frac{g_\alpha(0)}{\sqrt{l}}+o(l^{-1/2}) \tag{12}$$

$$D^{(i)}n_\alpha(l)=-\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\,\frac{D^{(i)}g_\alpha(l)}{\sqrt{l}}+o(l^{-1/2}),\qquad i=1,\,2,\,3. \tag{13}$$

On en déduit que

$$f_\alpha(l)=1-\frac{g_\alpha(0)}{2}\,l+o(l). \tag{14}$$

Démonstration. — Si $\varphi_\alpha(l)$ est la transformée de Laplace d'une mesure $\Phi_\alpha(\lambda)$ (non nécessairement positive), définie pour $l>0$ et vérifiant : $\lim_{l\to 0} l^\beta\varphi_\alpha(l)=C$, avec $\frac{1}{2}\leqq\beta\leqq\frac{3}{2}$ (la convergence étant uniforme en $\alpha\in\Theta$), on a alors :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^\beta\varphi_\alpha(a\varepsilon)=C\,a^{-\beta}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int e^{-\lambda a}\,d\Phi_\alpha\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-\beta}.$$

La mesure $\Phi_\alpha\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-\beta}$ converge vers la mesure de transformée de Laplace $C\,a^{-\beta}$ soit $\frac{\Gamma(1-\beta)}{\lambda^{1-\beta}}\,d\lambda$. On en déduit que $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\beta+1}\varphi'_\alpha(\varepsilon)=-C\beta$ uniformément en α, d'après le théorème abélien. Appliquant ce résultat successivement à $h_\alpha(l)=\int_{s(\alpha)} e^{-l\lambda}\frac{d\nu_\alpha(\lambda)}{\lambda}$ où $\Phi_\alpha(\lambda)=\frac{d\nu_\alpha(\lambda)}{\lambda}$ et à $h_\alpha(l)-h_W(l)$, on obtient (12), à partir de (7), on en déduit $|n_\alpha-n_W|(l)=O(l^{-1/2})$ au voisinage de zéro. Comme n_α, $n_W\in L^1[1,\infty[$ et que $h_\alpha(\varepsilon)-h_W(\varepsilon)=O(\varepsilon^{1/2})$, *on a :*

$$\int dn_\alpha-dn_W=0. \tag{15}$$

La positivité de ν_θ et Φ_θ n'ayant pas été utilisée, le même raisonnement vaut pour $D^{(i)} h_W$ et $D^{(i)} n_\alpha$, $h_\alpha - h_W$ et $n_\alpha - n_W$.

Comportement à l'infini des fonctions n, h, f

On sait d'après [7], [14] qu'il existe une mesure positive π_α telle que

$$p_\alpha(t) = \int e^{-\lambda t} d\pi_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\rho_\alpha} + \int_{s_\alpha}^{\infty} e^{-\lambda t} d\pi_\alpha(\lambda)$$

où $s_\alpha > 0$ donc $p_\alpha(t) \xrightarrow[t \to \infty]{\infty} \frac{1}{\rho_\alpha}$.

D'après les lemmes A 2, A 3, A 4 $p'_\alpha(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0$; $D^{(i)} p_\alpha(t) \xrightarrow{t \to \infty} D^{(i)} \frac{1}{\rho_\alpha}$ et donc $D^{(i)} p_\alpha$ sont des fonctions tempérées; on déduit que $\alpha \to \hat{h}_\alpha(.)$ est continue donc pour tout l, $\alpha \to h_\alpha(l)$ est continue et par suite $\alpha \to \Phi_\alpha$ est faiblement continue (théorème de Lévy généralisé, [5], t. 2, p. 410) donc aussi $\alpha \to \nu_\alpha$ et enfin $\alpha \to n_\alpha(l)$. Comme Θ est compact et que la diffusion nulle n'est pas dans le modèle $\overline{\lim_\alpha} s_\alpha = \lambda^* < \infty$. On en déduit que si

$$n_\alpha(l) \leqq 1, \qquad |\log n_\alpha(l)| \leqq |\log a| + 2\lambda^* l. \tag{16}$$

Soit $l_1(\alpha)$ tel que $n_\alpha(l_1(\alpha)) = 1$, par compacité si $\sup_\alpha l_1(\alpha) = \infty$, il existerait β avec $\overline{\lim_{l \to \infty}} n_\beta(l) \geqq 1$, or $n_\beta(l) \to 0$. Donc :

LEMME A 7. — *Il existe* K *tel que pour* $l > K$ *et pour tout* $\alpha \in \Theta$, *on ait* (16) *et*

$$\int_0^\infty |\log f_\alpha(l)|^k n_\theta(dl) < \infty, \qquad k > 0.$$

La dernière inégalité résulte de (16) *et de* (14).

La continuité faible de $\alpha \to \nu_\alpha$ implique que $\alpha \to s_\alpha$ est semi-continue et $\overline{\lim_{\alpha \to \theta}} s_\alpha \leqq s_\theta$. L'application $\alpha \to h_\alpha(l)$ est dérivable en α (lemme A 5) et on en déduit la dérivabilité faible de $\alpha \to \nu_\alpha$. Comme $\nu_\theta[s_\theta - \delta, s_\theta[= 0$ on a nécessairement $\lim_{\alpha \to \theta} \frac{\nu_\alpha[s_\theta - \delta, s_\theta[}{\alpha - \theta} = 0$, et comme θ est intérieur à Θ ceci implique $D\nu_\theta([0, s_\theta[) = 0$.

On a l'inégalité élémentaire :

$$n_\alpha(l) \geqq \nu_\alpha(s_\alpha, s_{\alpha+\delta}) e^{-(s_\alpha+\delta) l}. \tag{17}$$

Pour obtenir une majoration à l'infini de n_α et Dn_α on utilise d'abord le théorème taubérien déjà utilisé au lemme A 4. Par exemple : du développement uniforme en α de

$$Dn_\alpha(l) = c\frac{Dg_\alpha(0)}{\sqrt{l}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\right) \qquad \text{pour} \quad l \to 0,$$

on déduit

$$\lim_{\lambda \to \infty} c\, Dg_\alpha(0)\, \nu_\alpha(\lambda)\, \lambda^{-1/2} = 1.$$

Donc il existe K_1 indépendant de α, tel que :

$$\begin{aligned}\int_{K_1}^{\infty} e^{-\lambda l} D\nu_\alpha(\lambda)\, d\lambda &\leqq 2C' \,|Dg_\alpha(0)|\, \sqrt{l}\, e^{-K_1/2l} \\ &\leqq C'' e^{-s_\alpha l} \qquad \text{si} \quad K_1 > 2s_\alpha.\end{aligned}$$

Par ailleurs $\int_{s_\alpha}^{K_1} e^{-\lambda l} D\nu_\alpha(\lambda)\, d\lambda < |D\nu_\alpha|[s_\alpha, K_1[\, e^{-s_\alpha l}$. Comme la famille $(|D\nu_\alpha|;\ \alpha \in \Theta)$ est faiblement compacte, on en déduit qu'il existe A avec

$$Dn_\alpha(l) \leqq A_l e^{-s_\alpha l} \qquad \text{et de même} \quad n_\alpha(l) \leqq C e^{-s_\alpha l}. \tag{18}$$

ceci implique :

$$I(\alpha, \theta) = \int_0^{\infty} (D \operatorname{Log} f_\alpha)^2\, dn_\theta < \infty. \tag{18.1}$$

LEMME A 8. — *L'application $\alpha \to s_\alpha$ est continue si les conditions suivantes sont réalisées : il existe V_θ et M tels que pour $\alpha \in V_\theta$*

(i) $g_\alpha(x) \to \infty$ *pour* $x \to \infty$;

(ii) $\operatorname*{Inf}_{\alpha \in V_\theta} \inf_x \frac{Dg_\alpha}{g_\alpha}(x) > -M;\ 0 < M < \infty.$

LEMME A 9. — *Si $\alpha \to s_\alpha$ est continue, alors on a :*

(i) $\int_K^{\infty} [D \operatorname{Log} f_\alpha]^2\, dn_\theta \to 0$ *uniformément en* $\alpha \in V_\theta$. (19)

(ii) *Les applications* $\alpha \to D^{(2)} f_\alpha$ *et* $\alpha \to \int D^{(2)} f_\alpha\, dn_\theta$ *sont continues.*

$$\text{(iii)} \quad \int_0^{\infty} (Dn_\alpha)(l)\, dl = \int_0^{\infty} [D^{(2)} n_\alpha](l)\, dl = 0. \tag{20}$$

Montrons d'abord le lemme A 9. Pour δ fixé, on choisit V_θ tel que $|s_\theta - s_\alpha| < \delta$, $\alpha \in V_\theta$. On peut donc remplacer (17) par :

$$n_\alpha(l) \geqq \frac{1}{2} \nu_\theta(s_\theta, s_\theta + \delta) e^{-(s_\theta - 2\delta) l}$$

alors $(\mathrm{D} \operatorname{Log} f_\alpha)^2 (n_\theta)(l) \leqq \mathrm{B} \nu_\theta^{-2}(s_\theta, s_\theta + \delta) e^{-(s_\theta - 4\delta) l}$ d'où (19) résulte du théorème de convergence dominée. D'après le théorème de Lebesgue et (15) nous obtenons (20).

Démontrons le lemme A 8. La condition $g_\alpha(x) \to \infty$ implique que la mesure ν_α est discrète ([16], p. 239, théorème 19.10) en utilisant la définition de ν_α ([7], p. 217).

Dans le cas d'un spectre discret, on peut appliquer le théorème de perturbation à condition que la perturbation r soit telle que $r > -\mathrm{M} g_\theta$. Ici $r_\alpha(x) = \mathrm{D}g(\theta + h_x^\alpha(\theta - \alpha), x)$ où h_x^α est donnée par la formule de Taylor au premier ordre sur $\alpha \to g_\alpha$ et où le paramètre de perturbation est $\varepsilon = \theta - \alpha$. Il est facile de modifier la démonstration du théorème cité de sorte que r dépende de ε, sous la condition $\inf_{\alpha \in V_\theta} r_\alpha(x) > -\mathrm{M} g_\theta(x)$. Cette condition est impliquée par $\inf_{\alpha \in V_\theta} (\mathrm{D}g(\alpha))(x) > -\mathrm{M} g_\theta(x)$. Le théorème de perturbation implique que $\sup_{\alpha \in V_\theta} |s_\alpha - s_\theta| = O(|\theta - \alpha|)$ et donc on déduit le lemme.

RÉFÉRENCES

[1] J.-M. BISMUT, The Calculus of Boundary Process, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, t. **17**, 1984, p. 507-622.

[2] D. DACUNHA-CASTELLE et M. DUFLO, *Probabilité et statistiques*, 2. *Problème à temps mobile*, Masson, 1983.

[3] D. DACUNHA-CASTELLE et FLORENS-ZMIROU, Estimation of the Coefficients of a Diffusion from Discrete Observations, *Stochastics*, 1986, vol. **19**.

[4] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. **2**, Wiley, 1965.

[5] D. FLORENS-ZMIROU, Approximate Discrete-Time Schemes for Statistics of Diffusion Processes, *Statistics*, 1987 (à paraître).

[6] I. I. GIHMAN et A. V. SKOROKHOD, *Stochastic Differential Equations*, Springer Verlag, 1972.

[7] K. ITO et H. P. MACKEAN, *Diffusion Processes and Their Sample Paths*, Springer Verlag, 1974.

[8] J. JACOD, Calcul stochastique et problème de martingales, *Lecture notes in Math.*, n° **714**, Springer Verlag, 1979.

[9] T. JEULIN et M. YOR, Autour d'un théorème de Ray, *Astérisque*, n° **52-53**, 1978.

[10] U. KÜCHLER, *On Sojourn Time, Excursion and Spectral Measures Connected with Quasi Diffusions*, Preprint, n° **76**, Humboldt-Universität Berlin, 1984.
[11] Y. KUTOYANTS, *Parameter Estimation for Stochastic Processes*, R. E. G. Helderman, 1984.
[12] V. LANSKA, Minimum Contrast Estimation in Diffusion Processes, *J. Appl. Prob.*, vol. **16**, 1979, p. 65-75.
[13] G. LINDGREN, Spectral Moment Estimation by Means of Level Crossings, *Biometrika*, vol. **61.3**, 1974, p. 401.
[14] P. MANDL, *Analytical Treatment of One Dimensional Markov Processes*, Springer Verlag, 1968.
[15] J. MEMIN et A. N. SHIRYAYEV, Distance of Hellinger-Kakutani des lois correspondantes à deux processus à accroissements indépendants, *Zeit. Fur. Nahr*, vol. **70**, 1985, p. 67-89.
[16] E. C. TITCHMARSH, *Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations*, Oxford, 1946.
[17] A. TOUATI, *Thèse*, Univ. Paris-Nord, 1988 (à paraître).

(*Manuscrit reçu le* 6 *mai* 1986)
(*corrigé le* 23 *mai* 1987.)