ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

CLAUDE MARTIAS

Sur les supports des processus à valeurs dans des espaces nucléaires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 24, n° 3 (1988), p. 345-365
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1988__24_3_345_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 24, n° 3, 1988, p. 345-365. *Probabilités et Statistiques*

Sur les supports des processus à valeurs dans des espaces nucléaires

par

Claude MARTIAS

Université des Antilles et de La Guyane,
U.F.R. Sciences Exactes et Naturelles,
B.P. n° 592, 97167 Pointe-à-Pitre Cedex

RÉSUMÉ. — Un processus à valeurs dans le dual d'un espace nucléaire séparable qui admet faiblement des modifications càd-làg (resp. continues) a une modification fortement càd-làg (resp. continue) dont les trajectoires sont concentrées dans une réunion dénombrable d'espaces de Hilbert, sous une hypothèse souvent vérifiée en pratique si on suppose par exemple de plus que l'espace est de Fréchet ou est une limite inductive dénombrable d'espaces de Fréchet. Par localisation, on démontre alors la formule d'intégrations par parties et une formule d'Ito.

Mots clés : Semi-martingales à valeurs dans des espaces nucléaires, intégration stochastique, formule d'intégration par parties, formule d'Ito.

ABSTRACT. — For a process taking values in the topological dual of a separable nuclear space and having weakly càd-làg (resp. continuous) modifications, we construct a strongly càd-làg (resp. continuous) modification with sample paths concentrated in a countable union of Hilbert spaces, under an hypothesis always verified if the space is for example a Fréchet space or a countable inductive limit of Fréchet spaces. By localisation techniques, we prove then the integration by parts formula and a Ito formula.

Classification A.M.S. : 60 H 99.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques - 0294-1449
Vol. 24/88/03/345/21/$ 4,10/© Gauthier-Villars

INTRODUCTION

Le calcul stochastique dans les espaces nucléaires a été développé par A. S. Ustunel dans [14] en vue d'applications à l'analyse stochastique en général et plus particulièrement aux équations aux dérivés partielles stochastiques (*cf.* [17], [18], [19]). Dans l'étude de ces équations (leur hypoellipticité, l'unicité de leur solution, etc.) il est indispensable de connaître la structure des trajectoires des processus, les sous-espaces dans lesquels ces trajectoires sont concentrées, afin d'utiliser les techniques d'arrêt dans les cas où, par faute d'hypothèses d'intégrabilité, on ne peut faire appel aux techniques classiques consistant à réduire les problèmes au cadre hilbertien.

Dans la première partie de ce travail, nous étudions donc les supports des trajectoires des processus à valeurs dans les espaces nucléaires, en construisant d'abord une modification fortement càd-làg d'un processus qui prend ses valeurs dans le dual d'un espace nucléaire séparable et qui admet faiblement des modifications càd-làg. Cette construction généralise celle de I. Mitoma dans [10] qui a travaillé avec des processus à valeurs dans l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'$, cet espace ayant la particularité d'être le dual topologique d'un espace de Fréchet nucléaire.

Les résultats de la première partie nous permettent, d'une part, de généraliser la formule d'intégration par parties pour les semi-martingales qui est essentielle pour montrer l'existence et l'unicité des solutions des équations aux dérivées partielles stochastiques (*cf.* [17]), et d'autre part, de démontrer une formule d'Ito. Nous donnons alors deux applications de la formule d'intégration par parties, l'une concernant la formule d'Ito-Venttsel-Stratonovich généralisée utilisée dans le calcul de Malliavin (*cf.* [3], [13]) et l'autre la formule de Feynman-Kac stochastique introduite par A. S. Ustunel dans [19].

I. NOTATIONS ET RAPPELS

Soit F un espace vectoriel topologique réel localement convexe, nucléaire et séparable. On note F' son dual topologique et $\langle x, \varphi \rangle$, $x \in F'$, $\varphi \in F$, la forme bilinéaire canonique définie sur $F' \times F$. Si U est un voisinage de 0 dans F absolument convexe, $F(U)$ désigne le complété de l'espace quotient $F/p_U^{-1}(0)$ par rapport à p_U, où p_U est la jauge de U, et on note $k(U)$ l'application canonique définie sur F à valeurs dans $F(U)$. Pour deux voisinages de 0 U et V dans F, absolument convexes et tels que $U \subset V$, $k(V, U)$ désigne l'application définie sur $F(U)$ à valeurs dans $F(V)$ qui vérifie $k(V, U) \circ k(U) = k(V)$.

Si B est un sous-ensemble non vide de F′, absolument convexe et fortement borné, on note $F'[B]$ le sous-espace vectoriel de F′ engendré par B, muni de la norme définie par la jauge de B. Soit U un voisinage de 0 dans F absolument convexe, le dual fort de F(U) s'identifie avec $F'[U^0]$ où U^0 est le polaire de U (*cf.* [11]).

Soit $\mathcal{U}_h(F)$ l'ensemble des voisinages U de 0 dans F, absolument convexes, distincts de F et tels que F(U) soit un espace de Hilbert réel séparable. F étant nucléaire, $\mathcal{U}_h(F)$ n'est pas vide et forme une base de voisinages de 0 dans F. Pour toutes les propriétés des espaces nucléaires, on se référera à [5] ou à [11].

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet. On note R^0 l'espace des processus réels $x=(x_t,\ t\in[0, T])$, presque sûrement à trajectoires continues à droite et limitées à gauche (càd-làg), muni de la topologie définie par la distance suivante (en convenant de confondre dans R^0 deux processus indistinguables) :

$$d(x, y)=E\Big(\sup_{t\in[0,\,T]}|x_t-y_t|\,\big(1+\sup_{t\in[0,\,T]}|x_t-y_t|\big)^{-1}\Big),\quad x, y\in R^0$$

(R^0, d) est un espace vectoriel topologique métrisable complet, mais non localement convexe.

II. CONSTRUCTION D'UNE MODIFICATION FORTEMENT càd-làg D'UN PROCESSUS A VALEURS DANS LE DUAL D'UN ESPACE NUCLÉAIRE

Dans ce paragraphe nous démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME II.1. — *Soit* $X: [0, T]\times\Omega\to F'$ *une application faiblement mesurable (i.e. pour tout* $t\in[0, T]$ *et pour tout* $\varphi\in F$ $\langle X_t, \varphi\rangle$ *est une variable aléatoire réelle) telle que pour tout* $\varphi\in F$ *le processus réel* $\langle X, \varphi\rangle=(\langle X_t, \varphi\rangle;\ t\in[0, T])$ *possède une modification càd-làg notée* $\tilde{X}(\varphi)$. *Si l'application* $\varphi\to\tilde{X}(\varphi)$, *définie sur* F *à valeurs dans* R^0, *est continue, il existe alors une modification du processus* X *dont presque toutes les trajectoires sont càd-làg pour la topologie forte de* F′ *et sont contenues dans* $\bigcup_n F'[W_n^0]$, *où* $(W_n)_n$ *est une suite décroissante de voisinages de* 0 *appartenant à* $\mathcal{U}_h(F)$ *telle que, pour tout n,* $k(W_n, W_{n+1})$ *est une application nucléaire.*

Nous allons effectuer la démonstration en plusieurs étapes, de façon tout à fait analogue à celle de Mitoma dans [10].

LEMME II.1. — *Soit* D *un sous-ensemble dénombrable dense de* [0, T] *contenant* T. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $U \in \mathscr{U}_h(F)$ *tel que* p_U *est une semi-norme hilbertienne et, pour tout* $\varphi \in F$, *on a*

$$E(\sup_{t \in D} |1 - \exp i \langle X_t, \varphi \rangle|) \leqq \varepsilon + 2 p_U^2(\varphi).$$

Démonstration. — Posons $M(\varphi) = d(\tilde{X}(\varphi), 0)$. $M(\varphi)$ est une application continue définie sur F à valeurs réelles. Pour tout $\varepsilon > 0$ soit $\beta_1 > 0$ tel que

$$|s| \leqq \beta_1 \Rightarrow |1 - \exp is| \leqq \frac{\varepsilon}{2},$$

et

$$\beta_2 = \inf\left(\beta_1, \frac{(1+\varepsilon)^{1/2} - 1}{2}\right).$$

Il existe alors $U \in \mathscr{U}_h(F)$ tel que $U \subset M^{-1}(]-\infty, \beta_2^2[)$, et on peut toujours choisir U de façon que p_U soit une semi-norme hilbertienne. Comme $\{\varphi \in F, p_U(\varphi) < 1\} \subset U$ on a $p_U(\varphi) < 1 \Rightarrow M(\varphi) < \beta_2^2$. En posant, pour tout $\varphi \in F$, $\tilde{\Omega}(\varphi) = \{\omega, \sup_{t \in D} |\langle X_t, \varphi \rangle| < \beta_2\}$ on a comme dans [10]

$$P(\Omega \setminus \tilde{\Omega}(\varphi)) = P(\sup_{t \in D} |\langle X_t, \varphi \rangle| \geqq \beta_2) \leqq \frac{1+\beta_2}{\beta_2} M(\varphi).$$

D'où

$$\begin{aligned} & E(\sup_{t \in D} |1 - \exp i \langle X_t, \varphi \rangle|) \\ & \quad \leqq E(1_{\tilde{\Omega}(\varphi)} \sup_{t \in D} |1 - \exp i \langle X_t, \varphi \rangle|) + 2 P(\Omega \setminus \tilde{\Omega}(\varphi)) \\ & \quad \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{\beta_2}(1+\beta_2) M(\varphi). \end{aligned}$$

En distinguant les deux cas $p_U(\varphi) < 1$ et $p_U(\varphi) \geqq 1$, on obtient l'inégalité annoncée. ■

Soit $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots\}$ une partie dénombrable dense de F. Pour tout $U \in \mathscr{U}_h(F)$ on pose $\bar{\varphi}_q^U = k(U)\varphi_{n_q}$, $q \geqq 1$, où la suite $(n_q)_q$ est définie de façon récurrente par

$$n_1 = \inf(j \geqq 1, p_U(\varphi_j) \neq 0)$$
$$n_q = \inf(j \geqq q, k(U)\varphi_j \notin S(\bar{\varphi}_1^U, \ldots, \bar{\varphi}_{q-1}^U)), \qquad q > 1,$$

$S(\bar{\varphi}_1^U, \ldots, \bar{\varphi}_{q-1}^U)$ désignant le sous-espace vectoriel engendré par $(\bar{\varphi}_1^U, \ldots, \bar{\varphi}_{q-1}^U)$ dans F(U). Dans cette récurrence, si on arrive à un entier q_0 tel que pour tout $j \geqq q_0$, $k(U)\varphi_j \in S(\bar{\varphi}_1^U, \ldots, \bar{\varphi}_{q_0-1}^U)$, on s'arrête à $q_0 - 1$, l'espace F(U) étant alors de dimension finie.

La famille $(\bar{\varphi}_q^{\mathrm{U}})_q$ ainsi construite est linéairement indépendante dans $\mathrm{F}(\mathrm{U})$ et on vérifie aisément

$$k(\mathrm{U})\,\varphi_n = \sum_{q=1}^{l(\mathrm{U},\,n)} \alpha_q^{\mathrm{U},\,n}\,\bar{\varphi}_q^{\mathrm{U}}, \qquad \alpha_q^{\mathrm{U},\,n} \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

On en déduit que la famille $(\bar{\varphi}_q^{\mathrm{U}})_q$ est totale dans $\mathrm{F}(\mathrm{U})$.

Formons alors $(\bar{e}_j^{\mathrm{U}})_j$ la base orthonormale de $\mathrm{F}(\mathrm{U})$ obtenue à partir de la famille $(\bar{\varphi}_j^{\mathrm{U}})_j$ par orthogonalisation de Gramm-Schmidt. On peut écrire :

$$\bar{e}_j^{\mathrm{U}} = k(\mathrm{U})\,e_j^{\mathrm{U}} \qquad \text{avec} \quad e_j^{\mathrm{U}} \in \mathrm{F},$$

et

$$\bar{\varphi}_q^{\mathrm{U}} = \sum_{j=1}^{q} \beta_j^{\mathrm{U},\,q}\,\bar{e}_j^{\mathrm{U}}, \qquad \beta_j^{\mathrm{U},\,q} \in \mathbb{R}.$$

(1) implique alors

$$k(\mathrm{U})\,\varphi_n = \sum_{j=1}^{m(\mathrm{U},\,n)} c_j^{\mathrm{U},\,n}\,k(\mathrm{U})\,e_j^{\mathrm{U}} \qquad \text{avec} \quad c_j^{\mathrm{U},\,n} \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, pour tout $\mathrm{U} \in \mathscr{U}_h(\mathrm{F})$, on a

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^{m(\mathrm{U},\,n)} c_j^{\mathrm{U},\,n}\,e_j^{\mathrm{U}} + \theta_n^{\mathrm{U}}, \qquad \text{avec} \quad p_{\mathrm{U}}(\theta_n^{\mathrm{U}}) = 0. \tag{2}$$

LEMME II.2. — *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour tout* $\mathrm{V} \in \mathscr{U}_h(\mathrm{F})$, *il existe* $\mathrm{W} \in \mathscr{U}_h(\mathrm{F})$, $\mathrm{W} \subset \mathrm{V}$ *tel que* p_{W} *est une semi-norme hilbertienne et* $\mathrm{P}(\omega;\ \mathrm{X}_t(\omega) \in \mathrm{F}'[\mathrm{W}^0]$ *pour tout* $t \in \mathrm{D}$ *et* $\sup_{t \in \mathrm{D}} p_{\mathrm{W}^0}(\mathrm{X}_t) < \infty) \geqq 1 - 6\varepsilon$.

Démonstration. — W^0 étant un élément de la tribu cylindrique de F', on vérifie aisément que l'ensemble suivant est mesurable : $\{\omega;\ \mathrm{X}_t(\omega) \in \mathrm{F}'[\mathrm{W}^0]$ pour tout $t \in \mathrm{D}$ et $\sup_{t \in \mathrm{D}} p_{\mathrm{W}^0}(\mathrm{X}_t) < \infty\}$. $\varepsilon > 0$ étant donné, choisissons $\mathrm{U} \in \mathscr{U}_h(\mathrm{F})$ par le lemme précédent. Pour tout $\mathrm{V} \in \mathscr{U}_h(\mathrm{F})$, on peut alors trouver $\mathrm{W} \subset \mathrm{U} \cap \mathrm{V}$, $\mathrm{W} \in \mathscr{U}_h(\mathrm{F})$, tel que p_{W} est une semi-norme hilbertienne et que l'application canonique $k(\mathrm{U},\mathrm{W}) : \mathrm{F}(\mathrm{W}) \to \mathrm{F}(\mathrm{U})$ est une application nucléaire, donc de Hilbert-Schmidt. $(\bar{e}_j^{\mathrm{W}})_j$ constituant une base orthonormale de $\mathrm{F}(\mathrm{W})$ on a $\sum_j \| k(\mathrm{U},\mathrm{W})\,\bar{e}_j^{\mathrm{W}} \|_{\mathrm{F}(\mathrm{U})}^2 < \infty$, soit $\sum_j p_{\mathrm{U}}^2(e_j^{\mathrm{W}}) < \infty$.

Pour tout $c > 0$, on montre comme dans [10]

$$\mathrm{P}\Big(\sup_{t \in \mathrm{D}} \sum_j |\langle \mathrm{X}_t,\, e_j^{\mathrm{W}} \rangle|^2 > c^2\Big)$$

$$\leqq \lim_n \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\,\mathrm{E}\Big(1 - \exp\Big(-\frac{1}{2c^2} \sup_{t \in \mathrm{D}} \sum_{j=1}^{n} |\langle \mathrm{X}_t,\, e_j^{\mathrm{W}} \rangle|^2\Big)\Big)$$

$$\leqq 3 \lim_n \mathrm{E}\left(\sup_{t\in\mathrm{D}}\left(1-\exp\left(-\frac{1}{2c^2}\sum_{j=1}^{n}|\langle \mathrm{X}_t, e_j^{\mathrm{W}}\rangle|^2\right)\right)\right)$$

$$\leqq 3 \lim_n \mathrm{E}\left(\sup_{t\in\mathrm{D}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1-\exp i\sum_{j=1}^{n} y_j\langle \mathrm{X}_t, e_j^{\mathrm{W}}\rangle\right)\right.$$

$$\left.\times\frac{c^n}{(\sqrt{2\pi})^n}\exp\left(-\frac{c^2}{2}\sum_{j=1}^{n}y_j^2\right)dy_1\ldots dy_n\right)$$

$$\leqq 3 \lim_n \int_{\mathbb{R}^n}\left(\varepsilon+2p_{\mathrm{U}}^2\left(\sum_{j=1}^{n}y_j e_j^{\mathrm{W}}\right)\right)\frac{c^n}{(\sqrt{2\pi})^n}$$

$$\times\exp\left(-\frac{c^2}{2}\sum_{j=1}^{n}y_j^2\right)dy_1\ldots dy_n$$

$$\leqq 3\lim_n\left(\varepsilon+\frac{2}{c^2}\sum_{j=1}^{n}p_{\mathrm{U}}^2(e_j^{\mathrm{W}})\right)=3\varepsilon+\frac{6}{c^2}\sum_j p_{\mathrm{U}}^2(e_j^{\mathrm{W}}).$$

De cette inégalité on en déduit, en faisant c tendre vers $+\infty$

$$\mathrm{P}(\sup_{t\in\mathrm{D}}\sum_j|\langle \mathrm{X}_t, e_j^{\mathrm{W}}\rangle|^2=\infty)\leqq 3\varepsilon.$$

Par conséquent

$$\mathrm{P}(\sup_{t\in\mathrm{D}}\sum_j|\langle \mathrm{X}_t, e_j^{\mathrm{W}}\rangle|^2<\infty)\geqq 1-3\varepsilon. \tag{3}$$

D'autre part,

$$\mathrm{P}(\sup_{t\in\mathrm{D}}\sum_j|\langle \mathrm{X}_t, \theta_j^{\mathrm{W}}\rangle|^2>0)=\lim_m \mathrm{P}\left(\sup_{t\in\mathrm{D}}\sum_j|\langle \mathrm{X}_t, \theta_j^{\mathrm{W}}\rangle|^2>\frac{1}{m}\right).$$

En refaisant le même calcul que précédemment, changeant e_j^{W} par θ_j^{W}, on obtient

$$\mathrm{P}(\sup_{t\in\mathrm{D}}\sum_j|\langle \mathrm{X}_t, \theta_j^{\mathrm{W}}\rangle|^2>0)\leqq 3\lim_m\lim_n\left(\varepsilon+2m\sum_{j=1}^{n}p_{\mathrm{U}}^2(\theta_j^{\mathrm{W}})\right).$$

Mais $p_{\mathrm{W}}(\theta_j^{\mathrm{W}})=0$. Comme $\mathrm{W}\subset\mathrm{U}$, on a aussi $p_{\mathrm{U}}(\theta_j^{\mathrm{W}})=0$. Ainsi

$$\mathrm{P}(\sup_{t\in\mathrm{D}}\sum_j|\langle \mathrm{X}_t, \theta_j^{\mathrm{W}}\rangle|^2>0)\leqq 3\varepsilon.$$

D'où

$$\mathrm{P}(\sup_{t\in\mathrm{D}}\sum_j|\langle \mathrm{X}_t, \theta_j^{\mathrm{W}}\rangle|^2=0)\geqq 1-3\varepsilon. \tag{4}$$

Posons

$$\mathrm{A}=\{\omega;\ \sup_{t\in\mathrm{D}}\sum_j|\langle \mathrm{X}_t, e_j^{\mathrm{W}}\rangle|^2<\infty \text{ et } \sup_{t\in\mathrm{D}}\sum_j|\langle \mathrm{X}_t, \theta_j^{\mathrm{W}}\rangle|^2=0\}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})\geqq\mathrm{P}(\sup_{t\in\mathrm{D}}\sum_j|\langle \mathrm{X}_t, e_j^{\mathrm{W}}\rangle|^2<\infty)+\mathrm{P}(\sup_{t\in\mathrm{D}}\sum_j|\langle \mathrm{X}_t, \theta_j^{\mathrm{W}}\rangle|^2=0)-1$$

(3) et (4) impliquent

$$P(A) \geqq 1-3\varepsilon+1-3\varepsilon-1=1-6\varepsilon.$$

L'ensemble $\{\omega;\ X_t(\omega)\in F'[W^0]$ pour tout $t\in D$ et $\sup_{t\in D} p_{W^0}(X_t) < \infty\}$ contenant $\{\omega;\ \sup_{\varphi\in W}\sup_{t\in D}|\langle X_t, \varphi\rangle| < \infty\}$, il suffit alors de montrer l'inclusion $A\subset\{\omega;\ \sup_{\varphi\in W}\sup_{t\in D}|\langle X_t, \varphi\rangle| < \infty\}$ pour démontrer le lemme. ■

Démonstration du théorème II. 1. — Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite de nombres réels positifs décroissant vers 0. Par le lemme II. 2, on peut trouver une suite décroissante de voisinages de $0\,(V_n)_n$, $V_n\in\mathscr{U}_h(F)$, telle que $P(\Lambda_n)\geqq 1-\varepsilon_n$, où

$$\Lambda_n=\{\omega;\ X_t(\omega)\in F'[V_n^0] \text{ pour tout } t\in D \text{ et } \sup_{t\in D} p_{V_n^0}(X_t) < \infty\}.$$

La suite $(\Lambda_n)_n$ étant croissante on a $P(\bigcup_n \Lambda_n)=\lim_n P(\Lambda_n)=1$. Soit $\Omega_1=\Lambda_1$, $\Omega_2=\Lambda_2\setminus\Lambda_1,\ \ldots,\ \Omega_n=\Lambda_n\setminus\Lambda_{n-1},\ \ldots$ Les Ω_n sont disjoints deux à deux et $P(\bigcup_n \Omega_n)=P(\bigcup_n \Lambda_n)=1$. Par la nucléarité de F, pour tout n, il existe W_n, $W_n\in\mathscr{U}_h(F)$, $W_n\subset V_n$ tel que $\sum_j p_{V_n}^2(e_j^{W_n}) < \infty$, et on peut construire la suite $(W_n)_n$ de façon qu'elle soit décroissante et telle que l'application canonique $k(W_n, W_{n+1})$ soit nucléaire.

D étant dénombrable, on a presque sûrement

$$\tilde{X}(e_j^{W_n})_t=\langle X_t, e_j^{W_n}\rangle \quad \text{pour tout } t\in D.$$

Si $\omega\in\Omega_n$, $X_t(\omega)\in F'[V_n^0]$ pour tout $t\in D$. On a alors presque sûrement sur Ω_n

$$|\tilde{X}(e_j^{W_n})_t|^2 \leqq p_{V_n^0}^2(X_t)\,p_{V_n}^2(e_j^{W_n}) \quad \text{pour tout } t\in D.$$

D'où, pour presque tout $\omega\in\Omega_n$

$$\sum_j \sup_{t\in[0,\,T]} |\tilde{X}(e_j^{W_n})_t|^2=\sum_j \sup_{t\in D}|\tilde{X}(e_j^{W_n})_t|^2 \leqq \sup_{t\in D} p_{V_n^0}^2(X_t)\sum_j p_{V_n}^2(e_j^{W_n}) < \infty.$$

Notons $(b_j^{W_n})_j$ la base orthonormale dans $F'[W_n^0]$ duale de $(e_j^{W_n})_j$. On peut alors définir pour presque tout $\omega\in\Omega_n$

$$Z_t^n=\sum_j \tilde{X}(e_j^{W_n})_t\, b_j^{W_n}, \qquad t\in[0, T].$$

Par convergence uniforme de la série, pour presque tout $\omega\in\Omega_n$ $(Z_t^n,\ t\in[0, T])$ est fortement càd-làg dans $F'[W_n^0]$.

En posant

$$Z_\cdot(\omega)=\begin{cases} Z_\cdot^n(\omega) & \text{si } \omega\in\Omega_n \\ 0 & \text{si } \omega\notin\bigcup_n \Omega_n \end{cases}$$

on vérifie sans difficultés que Z, défini pour presque tout ω, est une modification de X qui satisfait aux conditions annoncées. ■

Remarque II.1. — Posons $\Phi = \bigcup_n F'[W_n^0]$ et munissons Φ de la topologie inductive par rapport à la suite d'espaces $(F'[W_n^0])_n$. Cette topologie est plus fine que la topologie induite par la topologie forte de F′ et confère à Φ une structure de DF-espace nucléaire complet (*cf.* [11]). La modification construite du processus X a presque toutes ses trajectoires càd-làg dans Φ pour cette topologie.

Remarque II.2. — On peut remplacer dans l'énoncé du théorème II.1 les termes « càd-làg » par « continu », la démonstration étant tout à fait similaire.

Le théorème II.1 est une généralisation du résultat de Mitoma dans [10] comme l'indique le corollaire suivant :

COROLLAIRE II.1. — *Supposons de plus que la structure topologique de* F *est de Fréchet ou une limite inductive dénombrable d'espaces de Fréchet. Si* $X : [0, T] \times \Omega \to F'$ *est une application faiblement mesurable telle que, pour tout* $\varphi \in F$, *le processus réel* $\langle X, \varphi \rangle$ *possède une modification càd-làg (resp. continue), elle possède alors une modification fortement càd-làg (resp. continue) à valeurs dans* F′, *concentrée dans* $\bigcup_n F'[W_n^0]$, *où* $(W_n)_n$ *est une suite décroissante de voisinages de* 0 *appartenant à* $\mathscr{U}_h(F)$ *telle que, pour tout* n, $k(W_n, W_{n+1})$ *est une application nucléaire.*

Démonstration. — Pour tout $\varphi \in F$, notons $\tilde{X}(\varphi)$ la version càd-làg (resp. continue) de $\langle X, \varphi \rangle$. Pour appliquer le théorème II.1, il nous faut vérifier la continuité de l'application linéaire $\varphi \to \tilde{X}(\varphi)$ définie sur F et à valeurs dans R^0.

Si F est un espace de Fréchet, la continuité de cette application résulte du théorème du graphe fermé.

Si F est une limite inductive dénombrable d'espaces de Fréchet F_n par rapport à des applications linéaires g_n définies sur F_n à valeurs dans F, l'application $\varphi \to \tilde{X}(\varphi)$ est continue si et seulement si, pour tout n, l'application $f \to \tilde{X}(g_n(f))$ définie sur F_n à valeurs dans R^0 est continue (*cf.* [1]). La continuité de cette dernière se démontre aisément par le théorème du graphe fermé. ■

Le théorème II.1 et les résultats d'Ito-Nawata dans [6] impliquent aussi le corollaire suivant :

COROLLAIRE II.2. — *Soit* $\tilde{X} : F \to R^0$ *une application linéaire continue. Il existe un processus* X *à valeurs dans* F′ *dont presque toutes les trajectoires sont fortement càd-làg et tel que, pour tout* $\varphi \in F$, $\tilde{X}(\varphi)$ *et* $\langle X, \varphi \rangle$ *sont indistinguables.*

III. FORMULE D'INTÉGRATION PAR PARTIES

Dans ce paragraphe et ceux qui suivent, F est un espace localement convexe nucléaire, complet, réflexif, séparable, dont le dual fort, noté F'_β, est nucléaire. On conserve les notations faites au paragraphe I. On munit l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ d'une filtration $(\mathscr{F}_t)_{t \in [0, T]}$ qui satisfait aux conditions habituelles de continuité à droite et de complétion (*cf.* [4], [7]).

Si H est un espace de Hilbert réel séparable, une semi-martingale X à valeurs dans H est un processus admettant une décomposition $X = M + A$, où M est une martingale locale à valeurs dans H fortement càd-làg et A est un processus dont presque toutes les trajectoires sont fortement càd-làg et à variation finie dans H.

On rappelle la définition des semi-martingales à valeurs dans les espaces nucléaires, introduite par A. S. Ustunel dans [14].

DÉFINITION III.1. — *Une application* $X : [0, T] \times \Omega \to F'_\beta$ *faiblement adaptée (i. e. pour tout* $\varphi \in F$, $\langle X, \varphi \rangle$ *est un processus réel adapté) est une semi-martingale si pour tout* $U \in \mathscr{U}_h(F'_\beta)$ $k(U) \circ X$ *a une modification qui est une semi-martingale hilbertienne à valeurs dans* $F'(U)$.

En remplaçant dans la définition précédente F'_β par F et inversement, on définit ainsi les semi-martingales à valeurs dans F.

La définition III.1 peut, *a priori*, ne pas paraître naturelle. Le théorème qui suit, démontré dans [15] et [16], nous montre que cette définition est en fait équivalente à la définition faible.

THÉORÈME III.1. — *Une application* $X : [0, T] \times \Omega \to F'_\beta$ *faiblement adaptée est une semi-martingale si et seulement si, pour tout* φ *dans* F, $\langle X, \varphi \rangle$ *a une modification qui est une semi-martingale réelle.*

Soit $Y = (Y_t, t \in [0, T])$ et $X = (X_t, t \in [0, T])$ deux semi-martingales à valeurs respectivement dans F et F'_β. Pour tout $\varphi \in F$, notons $\tilde{X}(\varphi)$ une modification de $\langle X, \varphi \rangle$ qui est une semi-martingale réelle et supposons que l'application $\varphi \to \tilde{X}(\varphi)$, définie sur F et à valeurs dans R^0, est continue. On note encore $\tilde{X}$ la modification de X construite au théorème II.1 dont presque toutes les trajectoires sont càd-làg dans $\Phi = \bigcup_n F'[W_n^0]$, Φ étant muni de la topologie inductive par rapport à la suite croissante d'espaces $(F'[W_n^0])_n$ (remarque II.1). Nous démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME III.2. — $(\langle X_t, Y_t \rangle, t \in [0, T[)$ *a une modification qui est une semi-martingale réelle et on a pour tout* $t \in [0, T[$, *presque sûrement*

$$\langle X_t, Y_t \rangle = \int_0^t \langle X_{s^-}, dY_s \rangle + \int_0^t \langle dX_s, Y_{s^-} \rangle + [\![X, Y]\!]_t$$

où $\int_0^{\cdot} \langle X_{s^-}, dY_s \rangle$, $\int_0^{\cdot} \langle dX_s, Y_{s^-} \rangle$ *sont des semi-martingales réelles sur* $[0, T[$ *vérifiant au sens de la convergence en probabilité*

$$\int_0^t \langle X_{s^-}, dY_s \rangle = \lim_q \sum_{j=0}^{2^q-1} \langle X_{tj/2^q}, Y_{t(j+1)/2^q} - Y_{tj/2^q} \rangle$$

$$\int_0^t \langle dX_s, Y_{s^-} \rangle = \lim_q \sum_{j=0}^{2^q-1} \langle X_{t(j+1)/2^q} - X_{tj/2^q}, Y_{tj/2^q} \rangle$$

et $[\![X, Y]\!]$ *est un processus réel càd-làg, à variation finie sur* $[0, T[$, *vérifiant au sens de la convergence en probabilité*

$$[\![X, Y]\!]_t = \langle X_0, Y_0 \rangle + \lim_q \sum_{j=0}^{2^q-1} \langle X_{t(j+1)/2^q} - X_{tj/2^q}, Y_{t(j+1)/2^q} - Y_{tj/2^q} \rangle.$$

Démonstration du théorème III.2. — Soit $S_n = \inf\{t \in [0, T], \tilde{X}_t \notin n W_n^0\}$ avec la convention $\inf \varnothing = T$. (S_n) est une suite croissante de temps d'arrêt de limite presque sûre égale à T.

Posons $Z_t^n = \tilde{X}_t 1_{\{t < S_n\}}$, $t \in [0, T[$. $Z^n \in n W_n^0 \subset F'[W_n^0]$. En désignant la dualité entre $F'[W_n^0]$ et $F(W_n)$ par $(.,.)$, on a pour tout $\varphi \in F$

$$(Z^n, k(W_n)\varphi) = \langle Z^n, \varphi \rangle = \langle \tilde{X}, \varphi \rangle 1_{[\![0, S_n[\![}.$$

On en déduit que $(Z^n, k(W_n)\varphi)$ est une semi-martingale réelle pour tout $\varphi \in F$. Par conséquent Z^n est une semi-martingale faible à valeurs dans l'espace de Hilbert $F'[W_n^0]$. Mais $k(W_n, W_{n+1})$ étant une application nucléaire, les injections canoniques $F'[W_n^0] \to F'[W_{n+1}^0]$ sont aussi nucléaires donc composées de deux applications de Hilbert-Schmidt. Z^n devient alors une vraie semi-martingale hilbertienne à valeurs dans $F'[W_{n+1}^0]$ (*cf.* [15], [16]).

Notons Y^{n+1} une modification de $k(W_{n+1}) \circ Y$ qui est une semi-martingale à valeurs dans $F(W_{n+1})$. En appliquant la formule d'intégration par parties pour les semi-martingales hilbertiennes Z^n et Y^{n+1} (*cf.* [7]), puis en exprimant les différentes intégrations stochastiques et le processus croissant obtenus comme limites au sens de la convergence en probabilité de sommes finies, à l'aide des partitions dyadiques de $[0, t]$, on obtient le résultat annoncé. ■

Remarque. — Si, comme dans le corollaire II.1, la structure topologique de F est de plus de Fréchet ou encore une limite inductive dénombrable d'espaces de Fréchet, l'hypothèse de continuité de l'application $\varphi \to \tilde{X}(\varphi)$ est toujours vérifiée. Dans ce cas, la formule d'intégration par parties du théorème III.2 est vraie pour toutes les semi-martingales.

IV. FORMULE D'ITO

Effectuons tout d'abord quelques notations.

Soient H, K des espaces vectoriels topologiques réels localement convexes. On note $L(H, K)$ l'espace des applications linéaires continues définies sur H et à valeurs dans K, muni de la topologie de la convergence bornée. $H \otimes K$ désignera le produit tensoriel de H et de K. Lorsque l'on munit $H \otimes K$ de la topologie projective, $H \tilde{\otimes} K$ sera son complété.

Si H et K sont des espaces de Hilbert, on note $H \hat{\otimes}_2 K$ le produit tensoriel hilbertien de H et de K.

Soit $X=(X_t)_{t \in [0, T]}$ une semi-martingale à valeurs dans F'_β dont presque toutes les trajectoires sont fortement càd-làg. On suppose que l'application $\varphi \to \langle X, \varphi \rangle$, définie sur F à valeurs dans R^0, est continue. Sur cette hypothèse nous pouvons faire la même remarque que pour la formule d'intégration par parties : elle est toujours vérifiée si la structure topologique de F est de plus de Fréchet ou encore une limite inductive dénombrable d'espaces de Fréchet, en utilisant le théorème du graphe fermé.

Soit g une application définie sur F'_β à valeurs réelles, différentiable deux fois sur F'_β (au sens de Fréchet) (*cf.* [20]). La différentielle première en un point x, notée $g'(x)$, est un élément de $L(F'_\beta, \mathbb{R})=F$. La différentielle seconde, notée $g''(x)$ est, elle, un élément de $L(F'_\beta, F)$, mais cet espace s'identifie à $F \tilde{\otimes} F$ (*cf.* [11]).

THÉORÈME IV.1. — *Supposons que l'application $x \to g''(x)$, définie sur F'_β et à valeurs dans $F \tilde{\otimes} F = L(F'_\beta, F)$, est continue. Alors pour tout $t \in [0, T[$, on a presque sûrement*

$$g(X_t)=g(X_0)+\int_0^t g'(X_s-)\,dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t g''(X_s-)\,d[X]_s$$
$$+\sum_{s \leqq t}\Big(g(X_s)-g(X_s-)-\langle \Delta X_s, g'(X_s-)\rangle$$
$$-\frac{1}{2}\langle g''(X_s-)(\Delta X_s), \Delta X_s\rangle\Big)$$

où $[X]$ *est un processus à valeurs dans le dual de l'espace nucléaire* $F \tilde{\otimes} F$, *fortement càd-làg, tel que, pour tout* $h \in F \tilde{\otimes} F$, $([X]_t(h), t \in [0, T[)$ *est à variation finie et, pour tout* $\varphi, \psi \in F$, *on a au sens de la convergence en probabilité*

$$[X]_t(\varphi \otimes \psi)=\lim_q \sum_{j=0}^{2^q-1} \langle X_{t(j+1)/2^q}-X_{tj/2^q}, \varphi\rangle \langle X_{t(j+1)/2^q}-X_{tj/2^q}, \psi\rangle$$

$\int_0^\cdot g'(X_{s^-})\,dX_s$ *et* $\int_0^\cdot g''(X_{s^-})\,d[X]_s$ *sont des semi-martingales réelles sur* $[0, T[$ *vérifiant au sens de la convergence en probabilité*

$$\int_0^t g'(X_{s^-})\,dX_s = \lim_q \sum_{j=0}^{2^q-1} \langle X_{t(j+1)/2^q} - Xtj/2^q,\ g'(X_{tj/2^q}) \rangle$$

$$\int_0^t g''(X_{s^-})\,d[X]_s = \lim_q \sum_{j=0}^{2^q-1} ([X]_{t(j+1)/2^q} - [X]_{tj/2^q})\,(g''(X_{tj/2^q})).$$

De plus $\int_0^\cdot g''(X_{s^-})\,d[X]_s$ *est à variation finie sur* $[0, T[$.

Démonstration. — Suivant la construction faite au paragraphe II, il existe une suite décroissante $(W_n)_n$ de voisinages de 0 appartenant à $\mathscr{U}_h(F)$ telle que, pour tout n, $k(W_n, W_{n+1})$ est une application nucléaire et que presque toutes les trajectoires de X sont à valeurs dans $\Phi = \bigcup_n F'[W_n^0]$ et sont càd-làg dans Φ, Φ étant muni de la topologie inductive par rapport à la suite d'espaces $(F'[W_n^0])_n$. Posons alors $S_n = \inf\{t \in [0, T],\ X_t \notin n W_n^0\}$, avec la convention $\inf \varnothing = T$.

Soit $Z_t^n = X_t 1_{\{t < S_n\}}$, $t \in [0, T[$.

Comme dans la démonstration de la formule d'intégration par parties, Z^n est une semi-martingale hilbertienne à valeurs dans $F'[W_{n+1}^0]$. Pour tout $t \in [0, T[$, on a presque sûrement

$$g(X_t) = \sum_n 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}}\, g(Z_t^n) = \sum_n 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}}\, g \circ i_n(Z_t^n) \tag{5}$$

en notant i_n l'injection canonique $F'[W_{n+1}^0] \to F'_\beta$.

Appliquons la formule d'Ito de [7] à l'application $g \circ i_n$ et à la semi-martingale hilbertienne Z^n. Vérifions tout d'abord que nous sommes bien dans les conditions d'application de cette formule. Par les règles de différentiabilité de composition d'applications (*cf.* [20]), $g \circ i_n$ est deux fois Fréchet-différentiable sur $F'[W_{n+1}^0]$ et on a pour tout $x \in F'[W_{n+1}^0]$

$$(g \circ i_n)'(x) = k(W_{n+1})(g'(x)),$$

$F(W_{n+1})$ s'identifiant au dual fort de $F'[W_{n+1}^0]$,

$$(g \circ i_n)''(x) = k(W_{n+1}) \circ g''(x) \circ i_n,$$

considérant $g''(x)$ comme un élément de $L(F'_\beta, F)$.

La forme linéaire que définit $(g \circ i_n)''(x)$ sur $F'[W_{n+1}^0] \otimes F'[W_{n+1}^0]$ est continue pour la topologie de Hilbert-Schmidt. En effet, soit $k(W_{n+1}) \otimes k(W_{n+1})$ l'application linéaire continue définie sur $F \tilde{\otimes} F$ à valeurs dans $F(W_{n+1}) \tilde{\otimes} F(W_{n+1})$ qui vérifie pour tout φ, ψ de F

$$k(W_{n+1}) \otimes k(W_{n+1})(\varphi \otimes \psi) = k(W_{n+1})\,\varphi \otimes k(W_{n+1})\,\psi.$$

Notons J_n l'injection continue

$$F(W_{n+1}) \tilde{\otimes} F(W_{n+1}) \to F(W_{n+1}) \hat{\otimes}_2 F(W_{n+1})$$
$$= L(F'[W^0_{n+1}] \hat{\otimes}_2 F'[W^0_{n+1}], \mathbb{R}).$$

En considérant $g''(x)$ comme un élément de $F \tilde{\otimes} F$,

$$J_n \circ (k(W_{n+1}) \otimes k(W_{n+1}))(g''(x))$$

correspond à la forme linéaire définie par $(g \circ i_n)''(x)$ sur $F'[W^0_{n+1}] \otimes F'[W^0_{n+1}]$. De plus l'application

$$x \to J_n \circ (k(W_{n+1}) \otimes k(W_{n+1}))(g''(x))$$

définie sur $F'[W^0_{n+1}]$ à valeurs dans $F(W_{n+1}) \hat{\otimes}_2 F(W_{n+1})$ est uniformément continue sur les parties bornées de $F'[W^0_{n+1}]$, étant donné qu'un sous-ensemble borné de $F'[W^0_{n+1}]$ est précompact dans F'_β et que l'on a supposé la continuité de g''. Les conditions d'application de la formule de [7] à la semi-martingale hilbertienne Z^n et à la fonction $g \circ i_n$ sont donc vérifiées. On obtient alors pour tout t, presque sûrement

$$\begin{aligned} g(Z^n_t) = g(Z^n_0) + \int_0^t k(W_{n+1})(g'(Z^n_s-))\,dZ^n_s \\ + \frac{1}{2}\int_0^t J_n \circ (k(W_{n+1}) \otimes k(W_{n+1}))(g''(Z^n_s-))\,d[Z^n]_s \\ + \sum_{s \leqq t} g(Z^n_s) - g(Z^n_s-) - \langle \Delta Z^n_s, g'(Z^n_s-) \rangle - \frac{1}{2}\langle g''(Z^n_s-)(\Delta Z^n_s), \Delta Z^n_s \rangle. \quad (6) \end{aligned}$$

$[Z^n]$ est un processus à valeurs dans

$$F'[W^0_{n+1}] \hat{\otimes}_2 F'[W^0_{n+1}] = L(F(W_{n+1}) \hat{\otimes}_2 F(W_{n+1}), \mathbb{R}),$$

càd-làg, à variation finie, vérifiant au sens de la convergence en probabilité

$$(7) \qquad [Z^n]_t = \lim_q \sum_{t_j \in \pi_q} (Z^n_{t_{j+1}} - Z^n_{t_j})^{\otimes 2}$$

où π_q désigne la partition dyadique d'ordre q de $[0, t]$.

Pour tout $t \in [0, T[$, on a les égalités presque sûres (8) et (9) suivantes :

$$\sum_n 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} g(Z_0^n) = \sum_n 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} g(X_0) = g(X_0) \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\sum_n 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} \sum_{s \leqq t} & g(Z_s^n) - g(Z_s^n-) \\ & - \langle \Delta Z_s^n, g'(Z_s^n-) \rangle - \frac{1}{2} \langle g''(Z_s^n-)(\Delta Z_s^n), \Delta Z_s^n \rangle \\ & = \sum_n 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} \sum_{s \leqq t} g(X_s) - g(X_s-) \\ & - \langle \Delta X_s, g'(X_s-) \rangle - \frac{1}{2} \langle g''(X_s-)(\Delta X_s), \Delta X_s \rangle \\ = \sum_{s \leqq t} g(X_s) - g(X_s-) & - \langle \Delta X_s, g'(X_s-) \rangle - \frac{1}{2} \langle g''(X_s-)(\Delta X_s), \Delta X_s \rangle \end{aligned} \tag{9}$$

(5), (6), (8) et (9) impliquent alors, pour tout $t \in [0, T[$, presque sûrement

$$\begin{aligned} g(X_t) = g(X_0) + \sum_n 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} & \int_0^t k(W_{n+1})(g'(Z_s^n-))\, dZ_s^n \\ + \frac{1}{2} \sum_n 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} & \int_0^t J_n \circ (k(W_{n+1}) \otimes k(W_{n+1}))(g''(Z_s^n-))\, d[Z^n]_s \\ + \sum_{s \leqq t} g(X_s) - g(X_s-) & - \langle \Delta X_s, g'(X_s-) \rangle - \frac{1}{2} \langle g''(X_s-)(\Delta X_s), \Delta X_s \rangle. \end{aligned}$$

$\int_0^t k(W_{n+1})(g'(Z_s^n-))\, dZ_s^n$ vérifie au sens de la convergence en probabilité (*cf.* [14])

$$\int_0^t k(W_{n+1})(g'(Z_s^n-))\, dZ_s^n = \lim_q \sum_{t_j \in \pi_q} (k(W_{n+1})(g'(Z_{t_j}^n)), Z_{t_{j+1}}^n - Z_{t_j}^n)$$

où π_q désigne la partition dyadique d'ordre q de $[0, t]$ et $(.\,,\,.)$ la dualité entre $F(W_{n+1})$ et $F'[W_{n+1}^0]$.

On peut encore écrire

$$\int_0^t k(W_{n+1})(g'(Z_s^n-))\, dZ_s^n = \lim_q \sum_{t_j \in \pi_q} \langle Z_{t_{j+1}}^n - Z_{t_j}^n, g'(Z_{t_j}^n) \rangle.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} & \int_0^t k(W_{n+1})(g'(Z_s^n-))\, dZ_s^n \\ & = \lim_q 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} \sum_{t_j \in \pi_q} \langle Z_{t_{j+1}}^n - Z_{t_j}^n, g'(Z_{t_j}^n) \rangle \\ & \qquad = \lim_q 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} \sum_{t_j \in \pi_q} \langle X_{t_{j+1}} - X_{t_j}, g'(X_{t_j}) \rangle. \end{aligned}$$

$$\sum_n 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} \int_0^t k(W_{n+1})(g'(Z_s^n-))\, dZ_s^n$$
$$= \lim_q \sum_n 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} \sum_{t_j \in \pi_q} \langle X_{t_{j+1}} - X_{t_j}, g'(X_{t_j}) \rangle$$
$$= \lim_q \sum_{t_j \in \pi_q} \langle X_{t_{j+1}} - X_{t_j}, g'(X_{t_j}) \rangle.$$

Ainsi la limite en probabilité de la suite $\left(\sum_{t_j \in \pi_q} \langle X_{t_{j+1}} - X_{t_j}, g'(X_{t_j}) \rangle \right)_q$ existe.

On la note $\int_0^t g'(X_s-)\, dX_s$.

Le processus $\int_0^{\cdot} g'(X_s-)\, dX_s$ admet une modification qui est une semi-martingale réelle sur [0, T[car

$$\sum_n 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} \int_0^t k(W_{n+1})(g'(Z_s^n-))\, dZ_s^n$$

est une semi-martingale sur [0, T[(*cf.* [4]). C'est cette modification que l'on désigne en fait par $\int_0^{\cdot} g'(X_s-)\, dX_s$.

Posons pour tout $t \in [0, T[$

$$[X]_t = \sum_n 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} [Z^n]_t \circ J_n \circ (k(W_{n+1}) \otimes k(W_{n+1})). \tag{10}$$

$[X]_t$ est à valeurs dans le dual de $F \tilde{\otimes} F$. Par les propriétés de $[Z^n]$, $[X]$ est fortement càd-làg et pour tout $h \in F \tilde{\otimes} F$ $[X](h) = ([X]_t(h), t \in [0, T[)$ est à variation finie. De plus, (7) implique, pour tout φ, ψ de F, la convergence en probabilité suivante

$$[Z^n]_t (k(W_{n+1}) \varphi \otimes k(W_{n+1}) \psi)$$
$$= \lim_q \sum_{t_j \in \pi_q} \langle Z_{t_{j+1}}^n - Z_{t_j}^n, \varphi \rangle \langle Z_{t_{j+1}}^n - Z_{t_j}^n, \psi \rangle. \tag{11}$$

D'où

$$1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} [Z^n]_t (k(W_{n+1}) \varphi \otimes k(W_{n+1}) \psi)$$
$$= \lim_q 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} \sum_{t_j \in \pi_q} \langle Z_{t_{j+1}}^n - Z_{t_j}^n, \varphi \rangle \langle Z_{t_{j+1}}^n - Z_{t_j}^n, \psi \rangle$$
$$= \lim_q 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} \sum_{t_j \in \pi_q} \langle X_{t_{j+1}} - X_{t_j}, \varphi \rangle \langle X_{t_{j+1}} - X_{t_j}, \psi \rangle$$

$$\sum_n 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} [Z^n]_t (k(W_{n+1}) \varphi \otimes k(W_{n+1}) \psi)$$

$$= \lim_q \sum_n 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} \sum_{t_j \in \pi_q} \langle X_{t_{j+1}} - X_{t_j}, \varphi \rangle \langle X_{t_{j+1}} - X_{t_j}, \psi \rangle$$

$$= \lim_q \sum_{t_j \in \pi_q} \langle X_{t_{j+1}} - X_{t_j}, \varphi \rangle \langle X_{t_{j+1}} - X_{t_j}, \psi \rangle.$$

Soit encore

$$[X]_t (\varphi \otimes \psi) = \lim_q \sum_{t_j \in \pi_q} \langle X_{t_{j+1}} - X_{t_j}, \varphi \rangle \langle X_{t_{j+1}} - X_{t_j}, \psi \rangle. \tag{12}$$

Cette égalité nous montre que le processus [X] défini par (10) est indépendant des voisinages $(W_n)_n$ choisis.

D'autre part, pour tout entier n et pour tout $t \in [0, T[$ on a presque sûrement

$$1_{\{t < S_n\}} [Z^n]_t \circ J_n \circ (k(W_{n+1}) \otimes k(W_{n+1})) = 1_{\{t < S_n\}} [X]_t. \tag{13}$$

En effet, à l'aide de (11) et (12) on vérifie aisément que l'on a pour tout φ, ψ de F, presque sûrement

$$1_{\{t < S_n\}} [Z^n]_t \circ J_n \circ (k(W_{n+1}) \otimes k(W_{n+1})) (\varphi \otimes \psi) = 1_{\{t < S_n\}} [X]_t (\varphi \otimes \psi).$$

Grâce à la séparabilité de F, on en déduit (13).

Pour tout $t \in [0, T[$,

$$\int_0^t J_n \circ (k(W_{n+1}) \otimes k(W_{n+1})) (g''(Z_s^n-)) \, d[Z^n]_s$$

est limite en probabilité de

$$\sum_{t_j \in \pi_q} (J_n \circ (k(W_{n+1}) \otimes k(W_{n+1})) (g''(Z_{t_j}^n)), [Z^n]_{t_{j+1}} - [Z^n]_{t_j}),$$

quand $q \to +\infty$, où $(., .)$ désigne la dualité entre $F(W_{n+1}) \hat{\otimes}_2 F(W_{n+1})$ et $F'[W_{n+1}^0] \hat{\otimes}_2 F'[W_{n+1}^0]$ et π_q la partition dyadique de $[0, t]$ d'ordre q.

$$1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} \int_0^t J_n \circ (k(W_{n+1}) \otimes k(W_{n+1})) (g''(Z_s^n-)) \, d[Z^n]_s$$

est alors limite en probabilité de

$$1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} \sum_{t_j \in \pi_q} (J_n \circ (k(W_{n+1}) \otimes k(W_{n+1})) (g''(Z_{t_j}^n)), [Z^n]_{t_{j+1}} - [Z^n]_{t_j})$$

$$= 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} \sum_{t_j \in \pi_q} (J_n \circ (k(W_{n+1}) \otimes k(W_{n+1})) (g''(X_{t_j})), [Z^n]_{t_{j+1}} - [Z^n]_{t_j})$$

$$\overset{\text{p. s.}}{=} 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} \sum_{t_j \in \pi_q} ([X]_{t_{j+1}} - [X]_{t_j}) (g''(X_{t_j}))$$

par l'égalité (13).

$$\sum_n 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} \int_0^t J_n \circ (k(W_{n+1}) \otimes k(W_{n+1}))(g''(Z_s^n-))\, d[Z^n]_s$$

est limite en probabilité de

$$\sum_n 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} \sum_{t_j \in \pi_q} ([X]_{t_{j+1}} - [X]_{t_j})(g''(X_{t_j})) = \sum_{t_j \in \pi_q} ([X]_{t_{j+1}} - [X]_{t_j})(g''(X_{t_j})).$$

La limite au sens de la convergence en probabilité de la suite $\left(\sum_{t_j \in \pi_q} ([X]_{t_{j+1}} - [X]_{t_j})(g''(X_{t_j}))\right)_q$ existe donc. On la note $\int_0^t g''(X_s-)\, d[X]_s$.

$$\sum_n 1_{\{S_{n-1} \leqq t < S_n\}} \int_0^t J_n \circ (k(W_{n+1}) \otimes k(W_{n+1}))(g''(Z_s^n-))\, d[Z^n]_s$$

est une modification càd-làg, à variation finie sur [0, T[du processus $\int_0^{\cdot} g''(X_s-)\, d[X]_s$. C'est cette modification que l'on désigne en fait par $\int_0^{\cdot} g''(X_s-)\, d[X]_s$. ■

V. APPLICATIONS

Nous donnons dans ce paragraphe deux applications de la formule d'intégration par parties, l'une concernant la formule d'Ito-Venttsel-Stratonovich généralisée utilisée dans le calcul de Malliavin (*cf.* [3], [13]) et l'autre la formule de Feynman-Kac stochastique (*cf.* [19]).

V.1. Formule d'Ito-Venttsel-Stratonovich

Pour ne pas compliquer les notations nous traiterons le cas unidimensionnel.

Considérons l'équation différentielle stochastique suivante

$$X_t = x + \int_0^t A(X_s-)\, dZ_s, \qquad t \in [0, T], \tag{14}$$

où $x \in \mathbb{R}$, Z est une semi-martingale réelle quasi continue à gauche et A est une fonction réelle indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, bornée et à dérivées bornées.

On sait qu'il existe une version de la solution de (14), notée $X(x)_t$, qui vérifie pour presque tout ω (*cf.* [8], [9]) :

(a) Pour tout t, $X(.)_t$ est C^∞.

(b) Pour tout x, $D^q X(x)_.$ est càd-làg, D^q désignant la dérivée d'ordre q par rapport à x.

(c) $\sup_{|x| \leqq n} \sup_{t \leqq T} |D^q X(x)_t| < \infty$ pour tout entier q et n.

Soit $\mathscr{E}$ l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, muni de la topologie de convergence uniforme sur les compacts dans toutes les dérivées (*cf.* [12]). $\mathscr{E}$ est un espace de Fréchet nucléaire (*cf.* [11]). Son dual topologique $\mathscr{E}'$ est l'espace des distributions à support compact (*cf.* [11], [12]).

PROPOSITION V.1. — *Il existe une semi-martingale* $\hat{X}$ *à valeurs dans* $\mathscr{E}$ *telle que, pour tout* x, $\hat{X}(x)$ *et* $X(x)$ *sont indistinguables.*

Pour la démonstration de cette proposition, on se reférera aux travaux d'Ustunel (*cf.* [18]).

$\hat{X} = (\hat{X}_t)_{t \in [0, T]}$ est une semi-martingale à valeurs dans l'espace de Fréchet nucléaire $\mathscr{E}$. Il existe alors $U \in \mathscr{U}_h(\mathscr{E}'_\beta)$ et une semi-martingale hilbertienne $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t \in [0, T]}$ à valeurs dans $\mathscr{E}[U^0]$ tels que $i(U^0)(\tilde{X})$ soit une modification de $\hat{X}$, $i(U^0)$ désignant l'injection canonique $\mathscr{E}[U^0] \to \mathscr{E}$ (*cf.* [18]). $\hat{X}$ admet ainsi une modification fortement càd-làg, concentrée dans $\mathscr{E}[U^0]$.

On conservera désormais une seule notation, X, pour désigner la semi-martingale à valeurs dans $\mathscr{E}$, concentrée dans $\mathscr{E}[U^0]$, qui vérifie pour tout x :

$$X_t(x) = x + \int_0^t A(X_{s^-}(x))\, dZ_s.$$

THÉORÈME V.1. — *Soit* $(y_t,\ t \in [0, T])$ *une semi-martingale réelle. Pour tout* $t \in [0, T[$, *on a presque sûrement*

$$\begin{aligned} X_t(y_t) = y_0 + \int_0^t A(X_{s^-}(y_{s^-}))\, dZ_s + \int_0^t DX_{s^-}(y_{s^-})\, dy_s \\ + \frac{1}{2}\int_0^t D^2 X_{s^-}(y_{s^-})\, d\langle y^c, y^c\rangle_s \\ + \int_0^t DA(X_{s^-}(y_{s^-}))\, DX_{s^-}(y_{s^-})\, d\langle Z^c, y^c\rangle_s \\ + \sum_{s \leqq t} (X_s(y_s) - X_s(y_{s^-}) - DX_{s^-}(y_{s^-})\,\Delta y_s). \end{aligned}$$

où y^c, Z^c *désignent les parties continues des semi-martingales réelles* y, Z.

Démonstration. — δ_{y_t} est une semi-martingale à valeurs dans $\mathscr{E}'$ où δ_a désigne la mesure de Dirac en un point a de $\mathbb{R}$. Appliquons la formule d'intégration par parties (théorème III.2) à la semi-martingale X_t à valeurs dans $\mathscr{E}$ et à la semi-martingale δ_{y_t} à valeurs dans $\mathscr{E}'$. On a pour tout t de $[0, T[$, presque sûrement

$$\langle \delta_{y_t}, X_t(.) \rangle = X_t(y_t) = \int_0^t \langle \delta_{y_s-}, dX_s \rangle + \int_0^t \langle d\delta_{y_s}, X_s- \rangle + [\![\delta_y, X]\!]_t. \quad (15)$$

On calcule alors les trois termes du membre de droite de (15) et on obtient :

$$\int_0^t \langle \delta_{y_s-}, dX_s \rangle = \int_0^t A(X_s-(y_s-))\, dZ_s.$$

$$\int_0^t \langle d\delta y_s, X_s- \rangle = \int_0^t DX_s-(y_s-)\, dy_s + \frac{1}{2}\int_0^t D^2 X_s-(y_s-)\, d\langle y^c, y^c \rangle_s$$
$$+ \sum_{s \leqq t} (X_s-(y_s) - X_s-(y_s-) - DX_s-(y_s-)\,\Delta y_s).$$

$$[\![\delta_y, X]\!]_t = y_0 + \int_0^t DA(X_s-(y_s-))\, DX_s-(y_s-)\, d\langle z^c, y^c \rangle_s$$
$$+ \sum_{s \leqq t} (X_s(y_s) - X_s(y_s-) + X_s-(y_s-) - X_s-(y_s)). \quad \blacksquare$$

V.2. Formule de Feynman-Kac stochastique

$\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace des fonctions numériques indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}^d$ et à support compact, muni de sa topologie habituelle utilisée en théorie des distributions (*cf.* [12]).

Soient φ un élément de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, W un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^d$ et V une fonction numérique indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^d$. En dehors d'un ensemble négligeable, l'application

$$x \to \varphi(x + W_t(\omega)) \exp\left(-\int_0^t V(x + W_s(\omega))\, ds\right)$$

appartient à $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Par conséquent pour toute distribution g appartenant à $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$,

$$\left\langle g, \varphi(. + W_t(\omega)) \exp\left(-\int_0^t V(. + W_s(\omega))\, ds\right)\right\rangle$$

est bien défini. Posons

$$Z_t(x) = \exp\left(-\int_0^t V(x + W_s)\, ds\right).$$

Pour tout x fixé dans $\mathbb{R}^d$, on a d'après la formule d'Ito :

$$\varphi(x+W_t)\,Z_t(x) \overset{\text{p. s.}}{=} \varphi(x) + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t Z_s(x)\,\partial_j \varphi(x+W_s)\,dW_s^j$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t Z_s(x)\,\Delta\varphi(x+W_s)\,ds - \int_0^t \varphi(x+W_s)\,Z_s(x)\,V(x+W_s)\,ds. \quad (16)$$

Tous les processus figurant sous les intégrales du membre de droite de (16) peuvent être considérés comme des processus à valeurs dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, prévisibles et localement bornés. Ces intégrales peuvent alors être modifiées comme des intégrales à valeurs dans un $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)\,[U^0]$ où U appartient à $\mathscr{U}_h(\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))$ (*cf.* [14]). On en déduit, pour tout élément g de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$, l'égalité presque sûre suivante :

$$\langle g, \varphi(\,.\,+W_t)\,Z_t(\,.\,)\rangle = \langle g, \varphi\rangle + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \langle g, Z_s(\,.\,)\,\partial_j\varphi(\,.\,+W_s)\rangle\,dW_s^j$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \langle g, Z_s(\,.\,)\,\Delta\varphi(\,.\,+W_s)\rangle\,ds$$

$$-\int_0^t \langle g, \varphi(\,.\,+W_s)\,Z_s(\,.\,)\,V(\,.\,+W_s)\rangle\,ds. \quad (17)$$

Or

$$\langle g, \varphi(\,.\,+W_t)\,Z_t(\,.\,)\rangle = \langle (Z_t g) * \delta_{W_t}, \varphi\rangle.$$

Posons $\tilde{X}_t = (Z_t g) * \delta_{W_t}$. Pour tout élément φ de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, $\langle \tilde{X}_t, \varphi\rangle$ a donc une modification qui est une semi-martingale réelle continue. $(\tilde{X}_t)$ est ainsi une semi-martingale continue à valeurs dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$. Elle possède, d'après l'étude faite au paragraphe II, une modification (X_t) dont presque toutes les trajectoires sont fortement continues dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$. Par (17), X vérifie l'équation à dérivée partielle stochastique suivante :

$$(18) \qquad dX_t(\varphi) = -\sum_{j=1}^{d} \partial_j X_t(\varphi)\,dW_t^j + \frac{1}{2}\Delta X_t(\varphi)\,dt - (VX_t)(\varphi)\,dt$$

$X_0(\varphi) = \langle g, \varphi\rangle$, pour tout φ appartenant à $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.

Nous avons alors la proposition suivante, comme dans [19] :

Proposition V.2. — *(X_t) est l'unique semi-martingale à trajectoires fortement continues dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ solution de l'équation* (18).

RÉFÉRENCES

[1] N. Adasch, B. Ernst et D. Keim, Topological Vector Spaces, the Theory Without Convexity Conditions, *Lect. Notes in Math.*, n° **639**, Berlin-Heidelberg- New York, Springer, 1978.

[2] A. Badrikian, Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires et les mesures cylindriques, *Lect. Notes in Math.*, n° **139**, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1970.
[3] J. M. Bismut, An Introduction to the Stochastic Calculus of Variations, *Lect. Notes Control Inf. Sciences*, n° **43**, 1981, p. 33-72.
[4] C. Dellacherie et P. A. Meyer, *Probabilités et Potentiel*, chap. V-VIII, Paris, Hermann, 1980.
[5] A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *Mem. Amer. Math. Soc.*, n° **16**, 1955.
[6] K. Ito et M. Nawata, Regularization of Linear Random Functionals, *Lecture Notes in Math.*, n° **1021**, p. 257-267.
[7] M. Metivier et J. Pellaumail, *Stochastic Integration*, New York, Academic Press, 1980.
[8] M. Metivier, Pathwise Differentiability with Respect to a Parameter of Solutions of Stochastic Differential Equations, *Séminaire de Probabilités XVI*, *Lect. Notes in Math.*, n° **920**, p. 490-502, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1982.
[9] P. A. Meyer, Flot d'une équation différentielle stochastique (d'après Malliavin, Bismut, Kunita), *Séminaire de Probabilités*, **XV**, *Lect. Notes in Math.*, n° **850**, p. 103-117, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1981.
[10] I. Mitoma, On the Sample Continuity of $\mathscr{S}'$-processes, *J. Math. Soc. Japan*, vol. **35**, n° 4, 1983, p. 629-636.
[11] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces. Graduate Texts in Math.*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1971.
[12] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Paris, Hermann, 1973.
[13] A. S. Sznitman, Martingales dépendant d'un paramètre : une formule d'Ito, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, vol. **60**, 1982, p. 41-70.
[14] A. S. Ustunel, Stochastic Integration on Nuclear Spaces and its Applications, *Ann. Inst. H. Poincaré*, Section B, vol. **XVIII**, n° 2, 1982, p. 165-200.
[15] A. S. Ustunel, A Characterization of Semi-Martingales on Nuclear Spaces, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, vol. **60**, 1982, p. 21-39.
[16] A. S. Ustunel, Erratum to « A Characterization of Semi-Martingales on Nuclear Spaces » after Laurent Schwartz, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* (à paraître).
[17] A. S. Ustunel, Some Applications of Stochastic Integration in Infinite Dimension, *Stochastics*, vol. **7**, n° 4, 1982, p. 255-288.
[18] A. S. Ustunel, Analytic Semi-Martingales and Their Boundary Values, *Journal of Functional Analysis*, vol. **51**, n° 2, 1983, p. 142-158.
[19] A. S. Ustunel, Formule de Feynman-Kac stochastique, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **292**, série I, 1981, p. 595-597.
[20] S. Yamamuro, Differential Calculus in Topological Linear Spaces, *Lect. Notes in Math.*, **374**, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1974.

(*Manuscrit reçu le* 6 *mai* 1986)
(*révisé le* 1^{er} *octobre* 1987.)