ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

XAVIER GUYON

JOSÉ LEON

Convergence en loi des H-variations d'un processus gaussien stationnaire sur R

Annales de l'I. H. P., section B, tome 25, nº 3 (1989), p. 265-282

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1989__25_3_265_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 25, n° 3, 1989, p. 265-282. *Probabilités et Statistiques*

Convergence en loi des H-variations d'un processus gaussien stationnaire sur $\mathbb{R}$

par

Xavier GUYON

Université Paris-I, 12, place du Panthéon,
75005 Paris, France

et

José LEON

Universidad Central de Venezuela,
Escuela de Física y Matemáticas,
A.P. 21201, Caracas 1020 A, Venezuela

RÉSUMÉ. — Soient H une fonctionnelle réelle d'indice d'Hermite k et $X=\{X_t,\ t\in\mathbb{R}\}$ un processus gaussien stationnaire sur $\mathbb{R}$ de covariance $R(t)$ vérifiant : $1-R(t)=t^{\beta}L(t)$, où L est à variation lente en 0 et $0<\beta<2$. Si π_n est la partition régulière de pas $1/n$ de l'intervalle fixe [0, 1] et $V_{H,n}$ la H-variation de X le long de π_n, nous étudions la convergence faible de $V_{H,n}$ convenablement renormalisée, lorsque $n\to\infty$: si $k(2-\beta)>1$, la limite est gaussienne; si $k(2-\beta)<1$, la limite existe appartenant au k-ième chaos de Wiener.

Mots clés : Processus gaussien stationnaire, H-variation, convergence faible, chaos de Wiener.

ABSTRACT. — Let H be a real functional of Hermite index k, $X=\{X_t,\ t\in\mathbb{R}\}$ a stationary gaussian process with covariance R verifying:

Classification A.M.S. : Primaires : 60 F 05 et 60 G 15. Secondaire : 62 M 99.

$1-R(t)=t^{\beta}L(t)$ with L slowly varying at $t=0$ and $0<\beta<2$. If π_n is the regular partition of mesh $1/n$ of the fix interval [0, 1], we study weak convergence of the H-variation of X along π_n, well reduced, as $n \to \infty$: if $k(2-\beta)>1$ the limit is gaussian; if $k(2-\beta)<1$ the limit is in the k-th Wiener chaos.

Key words : Gaussian stationary process, H-variation, weak convergence, Wiener chaos.

I. INTRODUCTION

Soit $X=\{X_t,\ t\in\mathbb{R}\}$ un processus gaussien à temps réel, centré stationnaire, de covariance R. Soit π_n la partition régulière de [0, 1] :

$$\pi_n=\{0<x_1^n<x_2^n<\ldots<x_n^n=1\},\qquad x_j^n=\frac{j}{n},\quad j=1, n$$

et $\Delta^n X$ le processus à temps discret :

$$\Delta^n X=\left\{\Delta_j^n X=X\left(\frac{j}{n}\right)-X\left(\frac{j-1}{n}\right), j\in\mathbb{Z}\right\} \tag{1-1}$$

de covariance $r_n(\sigma_n^2=r_n(0))$, de corrélation s_n. Soit H une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Décomposant H sur la base des polynômes d'Hermite $\{H_l\}$, on définit *l'indice d'Hermite k de H* comme le premier indice l tel que la coordonnée de H sur H_l est non nulle.

La H-variation de X le long de π_n est définie par :

$$V_{H,n}=\sum_{j=1,n} H\left(\frac{\Delta_j^n X}{\sigma_n}\right). \tag{1-2}$$

Nous étudions ici la convergence en loi, lorsque $n\to\infty$, de la variation $V_{H,n}$ convenablement renormalisée. Suivant les cas, la loi limite sera non gaussienne (dans le k-ième chaos de Wiener) ou gaussienne : le résultat dépend d'une condition jointe sur X et H, X étant caractérisé par le comportement local en 0 de sa covariance. Plus précisément, décrivons les hypothèses sur X qui nous seront utiles :

$(\mathscr{H})$

(H−1) $1-\mathrm{R}(t)=t^{\beta}\,\mathrm{L}(t)$, $0<\beta<2$, L à variation lente [1] en 0 est continue sur $]0, \infty[$

(H−2) $\mathrm{R}''(t)$ existe si $t \neq 0$, $\mathrm{R}''(t)=t^{\beta-2}\,\mathrm{L}_1(t)$ où L_1 est à variation lente en 0, continue sur $]0, \infty[$; $|\mathrm{R}''(t)|$, $t>0$, est décroissante au voisinage de 0

(H−3) $\mathrm{L}_1(t)=\beta(1-\beta)\,\mathrm{L}(t)(1+o(1))$ au voisinage de 0

(H−4) Il existe b, $0<b<1$, tel que :

$$\mathrm{C}=\limsup_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\sup_{\substack{y\\ x\leqq y\leqq x^b}}\left|\frac{\mathrm{L}(y)}{\mathrm{L}(x)}\right|\right)<\infty.$$

On notera $(\mathscr{H})$ la conjonction des trois hypothèses H-1-2-3. Les résultats sont les suivants :

(i) si $k(2-\beta)<1$, X vérifiant $(\mathscr{H})$, la H-variation converge en loi vers un élément du k-ième chaos de Wiener. De plus, la H-variation est réductible à la $a_k\,\mathrm{H}_k$-variation où $a_k\,\mathrm{H}_k$ est le premier terme du développement de H sur les polynômes d'Hermite (théorèmes 1 et 2).

(ii) si $k(2-\beta)>1$ et si de plus X satisfait à la condition (H−4), il y a convergence gaussienne (théorème 3).

Nous traduisons ces résultats dans le cas particulier de la p-variation $(\mathrm{H}(x)=|x|^p)$. Dans le cas de la variation quadratique ($p=2$), nous donnons, dans le cas de la convergence non gaussienne (ici, $k=2$, $3/2<\beta<2$) une caractérisation de la loi limite via ses cumulants (remarque II-3-1).

Cette étude repose sur les travaux de M. Rosenblatt ([3], [6]), M. Taqqu ([5], [8]), R. L. Dobrushin et P. Major [7], P. Major [10], P. Breuer et P. Major [11] : ceux-ci portent sur l'étude de la convergence en loi de fonctionnelles (non linéaires) d'un processus gaussien à *temps discret*, fixé; la situation que nous étudions passe par l'examen d'une suite $\{\Delta^n \mathrm{X}\}$ de processus à temps discret « approchant » le processus dérivé $\dot{\mathrm{X}}$ [2] (de covariance $-\mathrm{R}''$) de X sur le compact [0, 1]; les hypothèses que nous faisons sur le comportement de la covariance R de X en $t=0$ sont, en un certain sens, duales de celles faites, dans les travaux ci-dessus cités, sur le comportement, à l'infini, de la covariance r du processus à temps discret étudié.

La convergence en moyenne quadratique de certaines H-variations est étudiée dans [12], traitant également le cas où X est un champ sur R^2. J. Ortega [13] généralise ces résultats en levant l'hypothèse de régularité de la partition π_n, donnant un critère de convergence presque sûre, et examinant de nouvelles variations spatiales.

II. NOTATIONS ET RÉSULTATS

II.1. H-variations

Soit Y une variable gaussienne, réduite, H une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\mathrm{E}(\mathrm{H}(\mathrm{Y}))=0, \qquad \mathrm{EH}(\mathrm{Y})^2=\|\mathrm{H}\|_2^2<\infty,$$

et sa décomposition sur la base des polynômes d'Hermite :

$$\mathrm{H}(x)=\sum_{l \geqq k} a_l \mathrm{H}_l(x), \qquad \|\mathrm{H}\|_2^2=\sum_{l \geqq k} a_l^2\, l!<\infty, \quad a_k \neq 0 \tag{2-1}$$

k (ici $k \geqq 2$) est l'indice d'Hermite de H.

1er *cas :* $k(2-\beta)<1$: *Réduction de la H-variation à la $a^k \mathrm{H}_k$-variation et convergence dans le k-ième chaos de Wiener*

Notons :

$$\mathrm{V}_{k,n}=\mathrm{V}_{\mathrm{H}_k,n}; \qquad s_{k,n}^2=\mathrm{E}(\mathrm{V}_{k,n}^2)$$

$$\mathrm{V}_{\mathrm{H},n}=\sum_{j=1,n} \mathrm{H}\left(\frac{\Delta_j^n \mathrm{X}}{\sigma_n}\right)=a_k \mathrm{V}_{k,n}+\mathrm{R}_{n,k} \tag{2-2}$$

THÉORÈME 1 (Réduction). — *Soit* X *un processus gaussien sur* $\mathbb{R}$, *stationnaire, vérifiant* ($\mathscr{H}$), H *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *satisfaisant* (2-1), *d'indice d'Hermite k vérifiant :*

$$k(2-\beta)<1. \tag{2-3}$$

Alors :

(*a*) $s_{n,k}^2=(-1)^k k!\, n^{2(1-k)} \sigma_n^{-2k} \int_{-1}^{1}(1-|x|)\, \mathrm{R}''(x)^k\, dx \,.\,(1+o(1))$

(*b*) $\mathrm{E}(\mathrm{V}_{\mathrm{H},n}-a_k \mathrm{V}_{k,n})^2=o(1)\, s_{k,n}^2$.

Soit P une mesure de probabilité, gaussienne, stationnaire, sur $\mathbb{R}$, de mesure spectrale réelle G, de mesure aléatoire $\mathrm{Z_G}$. Soit h: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable vérifiant :

$$h(x)=\overline{h(-x)}$$

$$\int_{\mathbb{R}^k} |h|^2\, \mathrm{G}(dx_1) \ldots \mathrm{G}(dx_k)<\infty.$$

Sous ces conditions, l'intégrale de Ito-Wiener de h

$$\mathrm{I}=\int_{\mathbb{R}^k} h(x_1, \ldots, x_k)\, \mathrm{Z_G}(dx_1) \ldots \mathrm{Z_G}(dx_k) \tag{2-4}$$

peut être définie (*cf.* [10]). Remarquons que $\mathrm{I} \in \mathbb{R}$.

Le théorème 1 nous conduit à étudier la limite en loi de la H-variation renormalisée

$$S_n = n^{k-1}\,\sigma_n^k\,V_{H,n},\ \sigma_n^2 = 2\left(1 - R\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 2\,n^{-\beta}\,L\left(\frac{1}{n}\right)(1+o(1)). \quad (2\text{-}5)$$

Si R'' est intégrable sur $\mathbb{R}$, on notera G_0 la mesure spectrale admettant la densité

$$g_0(x) = -\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,R''(t)\,dt. \quad (2\text{-}6)$$

Notons d'autre part K_0 la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$:

$$K_0(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp(ix)-1}{ix} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \textit{sinon} \end{cases} \quad (2\text{-}7)$$

THÉORÈME 2 (Convergence dans le k-ième chaos de Wiener). — *Supposons que* X, H *vérifient les hypothèses du théorème* 1, R'' *étant intégrable sur* $\mathbb{R}$, G_0, K_0 *définies par* (2-6), (2-7).

Alors :

(*a*) $I_k = \int_{\mathbb{R}^k} K_0(x_1 + \ldots + x_k)\,Z_{G_0}(dx_1)\ldots Z_{G_0}(dx_k)$ *existe*

(*b*) S_n *converge en loi vers* $a_k\,I_k$.

2^e^ *cas :* $k(2-\beta) > 1$. *Convergence gaussienne*

Pour $j \geqq 1$, définissons la suite $\{\rho(j)\}$ par :

$$\rho(j) = \frac{1}{2}((j-1)^\beta - 2j^\beta + (j+1)^\beta) \quad (2\text{-}8)$$

$\{\rho(j),\, j \geqq 0\}$ est la covariance du processus des accroissements $\{B(k) - B(k-1),\, k \in \mathbb{Z}\}$ du mouvement brownien fonctionnaire B d'indice β (*cf.* [9]).

Alors dès que l'indice d'Hermite k, de H, vérifie :

$$k(2-\beta) > 1 \quad (2\text{-}9)$$

la série $\sum_{j \geqq 1} \rho(j)^l$ converge dès que $l \geqq k$.

Notons alors :

$$\sigma_l^2 = 1 + 2\sum_{j \geqq 1} \rho(j)^l, \qquad l \geqq k. \quad (2\text{-}10)$$

Étant donnée la forme de $\{\rho(j)\}$ et (2-1), on a :

$$\sigma^2 = \sum_{l \geqq k} l!\,a_l^2\,\sigma_l^2 < \infty. \quad (2\text{-}11)$$

On a alors le résultat :

THÉORÈME 3 (convergence gaussienne). — *Supposons que* X *vérifie* ($\mathscr{H}$) *et* (H4), H *vérifiant* (2-1) *d'indice d'Herminte k vérifiant :*

$$k(2-\beta) > 1$$

Alors :

$$n^{-1/2}\, V_{H,n} \xrightarrow{\text{Loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où σ^2 *est donné par* (2-11).

Par exemple, la condition (H4) est satisfaite pour $L(t) = a(-\operatorname{Log} t)^{\alpha}(1+o(1))$ avec $C \leqq 1$ si $\alpha > 0$ et $C \leqq b^{\alpha}$ si $\alpha < 0$.

II.2. *p*-Variations

Spécifions la forme de H :

$$H(x) = |x|^p - b_p, \qquad p \neq 0, \quad p > -\frac{1}{2} \tag{2-12}$$

$$b_p = E(|Y|^p), \quad \text{Y normale réduite.}$$

Il est facile de voir que le rang d'Hermite de H est toujours $k=2$, avec pour premier coefficient a_2 sur H_2 :

$$a_2 = \frac{p}{2} b_p.$$

On a :

$$V_{H,n} = \sum_{j=1,n} \left(\left| \frac{\Delta_j^n X}{\sigma_n} \right|^p - b_p \right).$$

Notons la p-variation pondérée de module de X par :

$$VP_{p,n} = \frac{1}{n\,\sigma_n^p} \sum_{j=1,n} |\Delta_j^n X|^p \tag{2-13}$$

$$E\,VP_{p,n} = b_p, \qquad V_{H,n} = n(VP_{p,n} - b_p)$$

On a comme conséquence immédiate des théorèmes 1, 2, 3 :

COROLLAIRE. — *Si* H, b_p *sont définies par* (2-12), *si* $VP_{p,n}$ *représente la p-variation pondérée* (2-13) *de* X, *si* X *vérifie* ($\mathscr{H}$), *on a :*

(*a*) $0 < \beta < \frac{3}{2}$: $\sqrt{n}\,(VP_{p,n} - b_p) \xrightarrow{\text{Loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

où σ^2 *est défini par* (2-11).

(*b*) $\frac{3}{2} < \beta < 1 : n^{2-\beta} L\left(\frac{1}{n}\right)(VP_{p,n} - b) \overset{\text{Loi}}{\to} \frac{p}{4} b_p I_2$

où I_2, *dans le* 2^e *chaos de Wiener, est défini par le théorème* 2.

II-3. Quelques remarques

II-3.1. *Description de la variation quadratique limite par ses cumulants*

Comme observé en II-2, la p-variation est réductible à la variation quadratique dans le cas de convergence non gaussienne. Notons :

$$VQ_n = \sum_{j=1,\,n} (\Delta_j^n X)^2 \tag{2-14}$$

et W_n la variable VQ_n réduite, J la limite en loi de W_n pour $\frac{3}{2} < \beta < 2$ et, pour $k \geqq 2$:

$$c_k = \int_{[0,\,1]^k} R''(|x_1 - x_2|)\, R''(|x_2 - x_3|) \ldots R''(|x_k - x_1|)\, dx_1 \ldots dx_k. \tag{2-15}$$

Alors J est caractérisée par ses cumulants K_k, $k \geqq 2$:

$$K_k = (-1)^k (k-1)!\, \frac{c_k}{(c_2)^{k/2}}. \tag{2-16}$$

Un calcul de ces cumulants directement à partir de la forme de J dans le 2^e chaos de Wiener n'est pas aisé. Nous indiquons plus loin le schéma d'obtention de cette caractérisation s'apparentant à la méthode développée en [3] et [6] par Rosenblatt pour le temps discret.

II-3.2. La condition (H3) peut être affaiblie : par exemple, examinant la variation quadratique sous la condition $\frac{3}{2} < \beta < 2$, il suffit de supposer R concave (ou convexe) sur [0, 1]. En effet, si $t^\alpha |L_1(t)|^\gamma$ n'est pas intégrable en 0, on a :

$$\int_\varepsilon^1 t^\alpha |L_1(t)|^\gamma\, dt = -(\alpha+1)^{-1} \varepsilon^{\alpha+1} L_1(\varepsilon)(1 + o(1)).$$

On obtient cet ordre en remarquant que, pour la fonction à variation régulière à l'infini

$$V(x) = \left| L_1\left(\frac{1}{x}\right)\right|^\gamma x^{-\alpha}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{V(x)}{\int_{x_0}^{x} V(u)\,du} = 1-\alpha$$

(*cf.* théorème 1.2.1 de [14]).

II-3.3. L'examen du cas frontière : $k(2-\beta)=1$ peut conduire aux deux types de convergence suivant l'intégrabilité ou non de $(R'')^k$ en 0. Par exemple, sous les conditions $(\mathscr{H})$ et $(H-4)$ et dans le cas de la variation quadratique, on a :

$(R'')^2$ intégrable en 0, $\beta=\frac{3}{2}$: convergence non gaussienne décrite dans le théorème 4 $\left(\text{vitesse inchangée par rapport à } \beta > \frac{3}{2}\right)$.

$(R'')^2$ non intégrable en 0, $\beta=\frac{3}{2}$: convergence gaussienne mais la vitesse est en $n^{1/2} L^{-1/2}\left(\frac{1}{n}\right)$.

III. DÉMONSTRATIONS DES RÉSULTATS

On se place donc sous les conditions $(\mathscr{H})$ pour X et (2-1) pour H.

III-1. Démonstration du théorème 1 : (réduction si $k(2-\beta) < 1$)

Ce résultat est l'analogue, à temps continu, de celui établi par M. Taqqu ([5], [7]) pour un processus X à temps discret. Si (Y, Z) est un couple gaussien, à marginales réduites, et corrélé à ρ, rappelons que l'on a [4] :

$$E(H_l(Y)\,H_j(Z)) = \delta_{l,j}\, l!\, \rho^l. \tag{3-1}$$

Notant :

$$c_{n,l} = \sum_{|j| \leq n-1} (n-|j|)\, r_n(j)^l \tag{3-2}$$

on obtient, sur la base de (3-1) :

$$E(V_{k,n}^2) = k!\, \sigma_n^{-2k}\, c_{n,k}$$
$$E(R_{k,n}^2) = \sum_{l \geq k+1} l!\, a_l^2\, \sigma_n^{-2l}\, c_{n,l}$$
$$E(V_{k,n} \,.\, R_{k,n}) = 0.$$

Quand il n'y aura pas ambiguité, on notera :

$$x_j = \frac{j}{n}, \qquad h = n^{-1}.$$

On a, d'après $(\mathscr{H})$:

$$\begin{aligned} r_n(0) &= \sigma_n^2 = 2\, h^{\beta}\, \mathrm{L}(h) \\ r_n(j) &= -\mathrm{R}(x_{j-1}) + 2\,\mathrm{R}(x_j) - \mathrm{R}(x_{j+1}), \qquad j \geqq 1 \\ &= -h^2\, \mathrm{R}''(x_j + \theta_j^n h), \qquad \text{avec} \quad |\theta_j^n| < 1. \end{aligned} \tag{3-4}$$

Puisque $k > 1$, (2-3) implique $\beta > 1$ et donc la positivité de $(-\mathrm{R}'')$ au voisinage de $t=0$. Soit $0 < \delta < 1$ t. q. sur $]0, \delta[$, R'' soit positive décroissante.

$$\mathrm{R}''(x_{j+1}) \leqq \mathrm{R}''(x_j + \theta_j^n h) \leqq \mathrm{R}''(x_{j-1}), \qquad j = 2, [n\delta].$$

Soit $k_0 + 1$ le premier entier s t. q. : $s(2-\beta) \geqq 1$.

Examinons la situation : $k \leqq l \leqq k_0$

$(-\mathrm{R}'')^l$ est alors intégrable et on a l'encadrement :

$$\int_{4h}^{\delta} (1-x)(-\mathrm{R}''(x))^l\, dx \leqq -\sum_{j=2}^{[n\delta]} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \frac{1}{n} (-\mathrm{R}''(x_j + \theta_j^n))^l \leqq \int_h^{\delta} (1-x)(-\mathrm{R}''(x))^l\, dx \tag{3-5}$$

Sur $\left[\frac{\delta}{2}, 1\right]$, la continuité de R'' et les conditions uniformes : $|\theta_j^n| \leqq 1$, permettent d'approcher l'intégrale de $(1-x)(-\mathrm{R}''(x))^l$ sur $[\delta, 1]$ par la somme de Riemann (de $[n\delta]+1$ à n) définie comme en (3-5). On en déduit :

(i) en k_0 :

$$c_{n,k} = (-1)^k\, h^{2k-2} \left(\int_{-1}^{1} (1 - |x|)\, \mathrm{R}''(x)^k\, dx + o(1) \right). \tag{3-6}$$

Cette égalité jointe au fait que $\sigma_n^2 = r_n(0) = 2\, h^{\beta}\, \mathrm{L}(h)$ permet de conclure la partie (a) du théorème 1.

(ii) $k_0 + 1 \leqq l \leqq k$, $c_{n,l} = O(h^{2l-2})$; et donc

$$\sigma_n^{-2l}\, c_{n,l} = O(h^{l(2-\beta)-2}\, \mathrm{L}(h)^{-l}) = o(n^{2(1-k)}\, \sigma_n^{-2k}). \tag{3-7}$$

Si $l \geqq k_0 + 1$, $(-\mathrm{R}'')^l$ n'est plus intégrable et la partie dominante de la somme $\sum_{j=2,\, n} \frac{1}{n} (-\mathrm{R}''(x_j + \theta_j^n h))^l$ est donnée par la somme en $j = 2$, $[n\delta]$. Utilisant alors la partie majoration de l'encadrement (3-5), on obtient, pour n assez grand :

$$|c_{n,l}| \leqq 10\, n \left(r_n(0)^l + h^{2l-1} \int_h^1 |\mathrm{R}''(x)|^l\, dx \right) \leqq c h^{\beta l - 1}\, |\mathrm{L}(h)|^l$$

et donc :

$$\sigma_n^{-2l} c_{n,l} = O(h^{-1}) = o(n^{2(1-k)} \sigma_n^{-2k}) \tag{3-8}$$

(3-1), (3-7), (3-8) conduisent alors à *b*). ■

III-2. Démonstration du théorème 2 : (convergence non gaussienne de la H-variation vers un élément du k-ième chaos de Wiener)

Le résultat du théorème 2 est, en partie, l'analogue, à temps continu, de celui donné par R. L. Dobrushin et P. Major [7] pour un processus fixe à temps discret. La situation diffère ici du fait que $\Delta^n X$ est un processus à temps discret dont la structure évolue avec n. Dans la démarche proposée en [7] les lemmes 2 et 3 restent inchangés, par contre le lemme 1 et la propositon 1 doivent être repris. La mesure spectrale G_0 par rapport à laquelle sera définie l'intégrale de Ito-Wiener [10] ne possède pas, ici, de propriété d'Auto-similarité. G_0 sera décrite en terme de R''.

Puisque la condition : $k(2-\beta) < 1$ est réalisée, le théorème 1 permet de réduire la H-variation à la $a_k H_k$ variation. Notons alors :

$$Y_n = n^{k-1} \sigma_n^k \sum_{j=1,n} H_k\left(\frac{\Delta_j^n X}{\sigma_n}\right)$$

$G^{(n)}$ la mesure spectrale (sur $]-\pi, \pi]$) de $\Delta^n X$

$G_n^{(n)}$ la mesure spectrale sur $\mathbb{R}$, portée par $]-n\pi, n\pi]$, (3-9)

définie par : $G_n^{(n)}(A) = n^2 G^{(n)}\left(\frac{A}{n} \cap]-\pi, \pi]\right)$ si $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Utilisant la formule de Ito (*cf.* [10], p. 30) pour $H_k\left(\frac{\Delta_j^n X}{\sigma_n}\right)$, un calcul direct conduit à :

$$Y_n = \int_{\mathbb{R}^k} K_n(x_1, \ldots, x_k)\, Z_{G_n^{(n)}}(dx_1) \ldots Z_{G_n^{(n)}}(dx_k)$$

avec (3-10)

$$K_n(x_1, \ldots, x_k) = \frac{1-\exp i(x_1+\ldots+x_k)}{n(1-\exp(i/n)(x_1+\ldots+x_k))}.$$

Soit φ_n la modification de la transformée de Fourier de la mesure :

$$|K_n|^2 G_n^{(n)}(dx_1) \ldots G_n^{(n)}(dx_k)$$

$$\varphi_n(t_1, \ldots, t_k) = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\exp\frac{i}{n}(j_1 x_1 + \ldots + j_k x_k)\right) |K_n|^2 G_n^{(n)}(dx_1) \ldots G_n^{(n)}(dx_k) \tag{3-11}$$

où : $j_l = [nt_l]$, $l = 1, k$.

Un calcul direct montre que :

$$\varphi_n(t_1, \ldots, t_k) = n^{2(k-1)} \sum_{|p| \leqq n=1} (n-|p|) \prod_{l=1}^{k} r_n(p+j_l).$$

LEMME 1. — *Soit $g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :*

$$g(t_1, \ldots, t_k) = (-1)^k \int_{-1}^{1} (1-|x|) \mathrm{R}''(x+t_1) \ldots \mathrm{R}''(x+t_k)\, dx.$$

Alors si : $k(2-\beta) < 1$, g est bien définie, continue partout et :

$$\lim_n \varphi_n = g$$

uniformément sur tout compact.

PROPOSITION 1. — *Si R'' est dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{G}_n^{(n)}$ tend localement faiblement vers la mesure G_0, localement finie, définie par la densité spectrale :*

$$g_0(x) = -\int_{\mathbb{R}} \exp(itx) \,.\, \mathrm{R}''(t)\, dt$$

(si μ_n, μ_0 sont localement finies, on dit que μ_n tend localement faiblement vers μ_0 si pour tout fonction f continue à support compact, $\int f d\mu_n \to \int f d\mu_0$).

Le théorème 2 résulte alors, dans les mêmes termes que ceux de [7], de la représentation (3.10) de Y_n, des trois lemmes et de la proposition 1.

Démonstration du lemme 1. — Soit $f: [-1, 1]^k \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t_1, \ldots, t_k; x) = \begin{cases} (-1)^k (1-|x|) \prod_{l=1,k} \mathrm{R}''(x+t_l) & \text{si } x \neq t_l, \quad l=1, k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3-12}$$

Notons :

$$\|\mathrm{R}''\|_{k,\mathrm{M}}^k = \int_{-(\mathrm{M}+1)}^{(\mathrm{M}+1)} |\mathrm{R}''(x)|^k\, dx < \infty, \qquad \text{pour} \quad \mathrm{M} > 0 \text{ fixé.}$$

A $t_1, \ldots, t_k$ fixés, l'inégalité de Holder en x donne :

$$\int_{-1}^{1} |f|\, dx \leqq \|\mathrm{R}''\|_{k,2}^k < \infty$$

g est donc bien définie. D'autre part, pour $0 < \varepsilon < 1$, l fixé, on a :

$$\int_{\substack{|x+t_l| \leqq \varepsilon \\ x \in [-1, 1]}} |f(t_1, \ldots, t_k; x)| \, dx \leqq \left[\prod_{s=1, k} \int_{\substack{|x+t_l| \leqq \varepsilon \\ x \in [-1, 1]}} |\mathrm{R}''(x+t_s)|^k \, dx \right]^{1/k}$$

$$\leqq \| \mathrm{R}'' \|_{k, \mathrm{M}}^{\frac{k-1}{k}} \cdot \left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\mathrm{R}''(x)|^k \, dx \right]^{1/k} \qquad (3\text{-}13)$$

dès que : $|t_1|, \ldots, |t_k| \leqq \mathrm{M}$. g est donc continue partout.

Soit la fonction $f_n : [-1, 1]^k \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ainsi définie

$$f_n(t_1, \ldots, t_k; x) = \left(1 - \frac{[nx]}{n}\right) \prod_{l=1, k} n^2 r_n([nx]+j_l) \qquad (3\text{-}14)$$

$$j_l = [nt_l], \qquad l = 1, k.$$

Un calcul direct donne :

$$\int_{-1}^{1} f_n(t_1, \ldots, t_k; x) \, dx = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_k).$$

Choisissons : $0 < \varepsilon < 1/2$, $0 < \mathrm{M} < \infty$ et définissons :

$$\mathrm{E}(\varepsilon, \mathrm{M}) = \{ x \in [-1, 1] \text{ t. q. pour } l = 1, k, \ |x + t_l| \geqq \varepsilon, \ |t_l| \leqq \mathrm{M} \}.$$

L'égalité (3-4) montre alors que $f_n \to f$ uniformément sur $\mathrm{E}(\varepsilon, \mathrm{M})$. D'autre part, f étant intégrable en x, on a, pour tout $l = 1, k$:

$$\int_{\substack{|x+t_l| \leqq \varepsilon \\ x \in [-1, 1]}} |f(t_1, \ldots, t_k; x)| \, dx \to 0 \qquad \text{si} \quad \varepsilon \to 0. \qquad (3\text{-}15)$$

On va obtenir un même contrôle relatif à f_n, uniformément en $t_1, t_2, \ldots, t_l$. Sur $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$, on a la première estimation :

$$\int_{|x+t_l| \leqq \varepsilon} |f_n| \, dx \leqq \frac{1}{n} \sum_{|p+j_l| \leqq 2[\varepsilon n]} \prod_{s=1, k} n^2 |r_n(p+j_s)|$$

$$\leqq \mathrm{C}(n, \mathrm{M}, k) \, \delta_n^k \text{ (Holder)},$$

où

$$\mathrm{C}(n, \mathrm{M}, k) = \left[\frac{1}{n} \sum_{|p| \leqq [n(\mathrm{M}+1)]} n^{2k} |r_n(p)|^k \right]^{(k-1)/k}$$

$$\delta_n^k = \frac{1}{n} \sum_{|p| \leqq 2[\varepsilon n]} n^{2k} |r_n(p)|^k.$$

Majorant $|r_n(p)|$ par $r_n(0)$ si $p \leqq 2$, par $2h^2 \left| \mathrm{R}''\left(\frac{p-1}{n}\right)\right|$ si $3 \leqq |p| \leqq [n(\mathrm{M}+1)]$ et n assez grand, on obtient :

$$\mathrm{C}(n, \mathrm{M}, k) \leqq \|\mathrm{R}''\|_{k, \mathrm{M}}^{k-1}$$

$$\delta_n^k = O\left(h^{k(2-\beta)+1}\, \mathrm{L}(h)^k + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\mathrm{R}''(x)|^k\, dx\right) = O(\varepsilon^{k(\beta-2)+1}\, |\mathrm{L}(\varepsilon)|^k)$$

et donc, uniformément en $t_1, t_2, \ldots, t_k$ sur $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]^k$,

$$\int_{\substack{|x+t_l| \leqq \varepsilon \\ x \in [-1, 1]}} |f_n(t_1, \ldots, t_k; x)|\, dx < \mathrm{C}(\varepsilon) \tag{3-16}$$

où $\mathrm{C}(\varepsilon) \to 0$ si $\varepsilon \to 0$.

La deuxième partie du lemme 1 est alors une conséquence de (3-15), (3-16), de la convergence uniforme de f_n vers f sur $\mathrm{E}(\varepsilon, \mathrm{M})$ et de la majoration uniforme sur $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]^k$:

$$|\varphi_n - g|(t_1, \ldots, t_k) \leqq \int_{\mathrm{E}(\varepsilon, \mathrm{M})} |f_n - f|\, dx + \sum_{l=1, k} \int_{\substack{|x+t_l| \leqq \varepsilon \\ x \in [-1, 1]}} (|f_n| + |f|)\, dx. \quad \blacksquare$$

Démonstration de la proposition 1. — L'intégrabilité de R'' sur $\mathbb{R}$ implique : $\sum_{j \geqq 0} n\, |r_n(j)| < \infty$. La mesure spectrale $\mathrm{G}^{(n)}$ de $\Delta^n \mathrm{X}$ admet donc une densité $g^{(n)}$. Soit alors f une fonction réelle continue à support compact et

$$\mathrm{I}_n(f) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \mathrm{G}_n^{(n)}(dy).$$

Faisant le changement de variable $y = nz$, on obtient :

$$\mathrm{I}_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(nz)\, n^2 g^{(n)}(z)\, dz$$

où :

$$g^{(n)}(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} r_n(j) \exp(ijz) \text{ (dans } l^1(\mathbb{Z}))$$

notant :

$$g_n^{(n)}(y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} n r_n(j) \exp\left(i \frac{j}{n} y\right),$$

le remplacement de $g^{(n)}$ par son développement dans $\mathrm{I}_n(f)$ donne :

$$\mathrm{I}_n(f)=\int_{\mathbb{R}} f(y)\, g_n^{(n)}(y)\, dy.$$

Soit alors :

$$g_0(y)=-\int_{\mathbb{R}} \exp(ity)\,\mathrm{R}''(t)\,dt$$

$(-\mathrm{R}'')$, qui est intégrable, est la covariance du processus généralisé $\dot{\mathrm{X}}_t$, dérivée de X ([2], p. 263), et donc g_0 est la densité spectrale d'un processus généralisé. Cette propriété peut s'obtenir également de façon directe : soit $a={}^t(a_1, \ldots, a_m)\in\mathbb{R}^m$, $t_1, t_2, \ldots, t_m$ m-points distincts de $\mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{B}&=-\sum_{i,\,j=1,\,m} a_i a_j \mathrm{R}''(t_i-t_j)\\ &=\lim_n \sum_{i,\,j=1,\,m} a_i a_j h^2 r_n([n(t_i-t_j)])\geqq 0.\end{aligned}$$

Il reste à voir que :

$$\mathrm{I}_n(f)\underset{n}{\rightarrow}\int_{\mathbb{R}} f(y)\, g_0(y)\, dy.$$

Soit $\varepsilon>0$. Cette convergence résulte directement des trois propriétés suivantes, qui s'obtiennent en utilisant (3-4) :

(i) $$\sum_{|j|\geqq[n\varepsilon]} nr_n(j)\exp\left(i\frac{j}{n}y\right)\underset{n}{\rightarrow}-\int_{\varepsilon}^{\infty}\exp(ity)\,\mathrm{R}''(t)\,dt$$

uniformément en y sur tout compact ($\varepsilon>0$ fixé).

(ii) $$\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\exp(ity)\,\mathrm{R}''(t)\,dt\right|\rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \varepsilon\rightarrow 0$$

(iii) $$\sum_{j\leqq[n\varepsilon]} nr_n(j)\exp i\frac{j}{n}y\rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \varepsilon\rightarrow 0$$

uniformément en y, sur tout compact. ■

III.3. Démonstration du théorème 3 (convergence gaussienne)

Par rapport aux théorèmes 1 et 2, on supposera que X vérifie l'hypothèse supplémentaire (H-4) et :

$$k(2-\beta)>1. \tag{3-17}$$

Pour un processus à temps discret, la convergence gaussienne d'une fonctionnelle (non linéaire) d'un processus gaussien est démontrée par

P. Breuer et P. Major [11]. La normalité limite de $V_{H,n}$ s'obtient en identifiant les moments de $V_{H,n}$. Le processus $\{X_j, j=1, n\}$ considéré dans [11] doit être remplacé, au pas n, par $\left\{\tilde{X}_j^{(n)}=\dfrac{\Delta_j^n X}{\sigma_n}, j=1, n\right\}$. La démonstration de [11] reste inchangée quant à sa partie combinatoire (formule du diagramme). L'existence de la limite de la suite $(n^{-1}\operatorname{Var}(V_{H,n}))$ et la non contribution, dans la formule du diagramme, des graphes irréguliers résulteront des lemmes 2 et 3 ci-dessous; la démonstration du théorème 3 découlera alors de ces deux propriétés.

Soit $\rho_n(j)$, $j \geqq 1$, la corrélation du processus $\Delta^n X$. D'après (3-4) et $\mathscr{H}$, on a :

$$\begin{aligned} \rho_n(1) &= -1+2^{\beta-1}\frac{L_1(2h)}{L(h)} \\ \rho_n(j) &= -\frac{1}{2}(j+\theta_j^n h)^{\beta-2}\frac{L_1(jh+\theta_j^n h)}{L(h)}, \qquad j \geqq 2 \end{aligned} \tag{3-18}$$

LEMME 2. — *Supposons que* X *vérifie* $\mathscr{H}$, (H-4) et $k(2-\beta)>1$. *Soit* $\varepsilon>0$ *t. q. :* $k\varepsilon<k(2-\beta)-1$, *et soit :*

$$r(j)=(j-1)^{\beta+\varepsilon-2}, \qquad j\geqq 2, \quad r(0)=r(1)=1.$$

Il existe alors $K(\varepsilon)$, $N_0(\varepsilon)$ *finis t. q. :*
Si $n\geqq N_0(\varepsilon)$, $j=1, 2, \ldots, n$, *on a :*

$$|\rho_n(j)|\leqq K(\varepsilon)\,r(j).$$

LEMME 3. — (*a*) *Sous la condition* ($\mathscr{H}$) *pour* X, $\rho_n(j)\underset{n}{\to}\rho(j)$, $j\geqq 1$ *où* $\rho(j)$, $j\geqq 1$ *sont définis par* (2-8).

(*b*) *Si de plus,* X *vérifie* (H-4) *et si* $k(2-\beta)>1$ *et* $l\geqq k$, *alors :*

$$\lim_n \sum_{|j|\leqq n-1}\left(1-\frac{|j|}{n}\right)\rho_n(j)^l=\sigma_l^2<\infty$$

où σ_l^2 *est définie par* (2-10).

Démonstration du Lemme 2. — Soit b donnée par (H-4) et $a=1-b$, $0<a<1$

$2\leqq j\leqq [n^a]$: on a, d'après (H-4), pour n assez grand

$$|\rho_n(j)|\leqq C(j-1)^{\beta-2}$$

$[n^a] \leqq j \leqq n$: soit $\varepsilon > 0$ choisi comme indiqué dans le lemme 2. On a :

$$|\rho_n(j+1)| \leqq \frac{1}{2} j^{\beta+\varepsilon-2} j^{-\varepsilon} \frac{|L_1((j+1)h+\theta_{j+1}^n h)|}{|L(h)|} \tag{3-19}$$

$$\leqq j^{\beta+\varepsilon-2} h^{a\varepsilon} \frac{|L_1((j+1)h+\theta_{j+1}^n h)|}{|L(h)|}$$

puisque : $j^{-\varepsilon} \leqq 2 h^{a\varepsilon}$.

Soit δ: $0 < \delta < a\varepsilon$ et $K = K(\delta)$ t. q. sur $]0, 1]$:

$$|L_1(x)| \leqq K(\delta) x^{-\delta}$$

$$|\rho_n(j+1)| \leqq K(\delta) j^{\beta+\varepsilon-2-\delta} h^{a\varepsilon-\delta} |L(h)|^{-1} \leqq K(\delta) j^{\beta+\varepsilon-2}$$

pour n assez grand. ■

Démonstration du lemme 3. — (*a*) D'après (3-4) et (H1), j étant fixé, on a :

$$\rho_n(j) = \frac{-R((j-1)h)+2R(jh)-R((j+1)h)}{2h^\beta L(h)}, \qquad \left(h=\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{(j-1)^\beta L((j-1)h)-2j^\beta L(jh)+(j+1)^\beta L((j+1)h)}{2L(h)}$$

L étant à variation lente, on a :

$$\rho_n(j) = \frac{1}{2}[(j-1)^\beta - 2j^\beta + (j+1)^\beta] + o(1)$$

$$= \rho(j) + o(1), \text{ d'où } (a).$$

(*b*) Il suffit de vérifier que :

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_n(j)^l \to L(l) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho(j)^l.$$

L'existence de $L(l)$ étant assurée par (3-17).

Or on a, d'après le lemme 2 :

$$|\rho_n(j)|^l \leqq K r(j)^l$$

avec $(r(j)^l)$ sommable. La convergence recherchée résulte du théorème de la convergence dominée et de (*a*).

III.4. Sur la remarque II.3.1 : calcul des cumulants de la loi limite de la variation quadratique réduite

Soit $C_n = \mathrm{Cov}\{\Delta_j^n X, j=1, n\}$ de valeurs propres $\{\lambda_{i,n}, i=1, n\}$; $V_{2,n} = VQ_n - EVQ_n$ est de variance $s_n^2 = \sum_{i=1,n} \lambda_{i,n}^2$ et de loi

$\sum_{i=1,n} \lambda_{i,n}(\chi^2_{i,1}-1)$ (*cf.* [3], [6]) où les χ^2 sont indépendants. Un calcul direct de la fonction cumulant de $V_{2,n}$ réduite donne :

$$\psi_n(t)=\sum_{k\geqq 2} 2^{k-1}\frac{(it)^k}{k}\mathrm{I}_{n,k},$$

avec

$$\mathrm{I}_{n,k}=s_n^{-k}\,\mathrm{Trace}\,(\mathrm{C}_n)^k=s_n^{-k}\sum_{j=1}^{n}\lambda^k_{j,n}.$$

L'identification de la loi limite s'obtiendra à partir de l'étude de :

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_{n,k}&=h^{-k}\,\mathrm{Trace}\,(\mathrm{C}_n)^k\\&=h^{-k}\sum_{j_1,\ldots,j_k=1,n} r_n(|j_1-j_2|)\ldots r_n(|j_k-j_1|)\end{aligned}$$

Pour ce faire, il faut d'une part démontrer l'existence des c_k, d'autre part vérifier que $\lim_n \mathrm{J}_{n,k}=(-1)^k c_k$. Le premier point est une conséquence de l'intégrabilité en 0 de $(\mathrm{R}'')^2$. Quant au deuxième il s'obtient en remarquant que l'on peut représenter :

$$\mathrm{J}_{n,k}=\int_{[0,1]^k} f_n\,dx_1\ldots dx_k$$

avec

$$\begin{gathered}f_n=\prod_{l=1,k} g_n(x_l-x_{l+1})\quad(\text{posant } x_{k+1}=x_1)\\ g_n(x-y)=r_n(|j-s|)\,h^{-2}\\ \text{si}\quad x\in\,](j-1)\,h, jh],\quad y\in\,](s-1)\,h, sh]\end{gathered}$$

où f_n converge uniformément, en dehors de l'origine, vers la fonction f, définissant c_k, f et f_n étant convenablement contrôlés autour de l'origine.

RÉFÉRENCES

[1] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Application*, Tome II, J. Wiley, 1966.

[2] M. Guel'fand et N. Ya. Vilenkin, *Generalized Functions*, vol. **4**: *Applications of Harmonic Analysis*, Acad. Press, 1964.

[3] M. Rosenblatt, Independence and Dependence, *Proc. 4th Berkeley Symposium on Math. Stat. and Proba.*, 1961, p. 431-443.

[4] B. Simon, *The* $P(\Phi)_2$ *Euclidian Quantum Field Theory*, Princeton Univ. Press, 1974.

[5] M. Taqqu, Weak Convergence to Fractional Brownian Motion and to the Rosenblatt Process, *Z. W. verb. Geb.*, vol. **31**, 1975, 287-303.

[6] M. Rosenblatt, Some Limit Theorems for Partial Sums of Quadratic Forms in Stationary Gaussian Variables, *Z. W. veb. Geb.*, vol. **49**, 1979, p. 125-132.

[7] R. L. DOBRUSHIN et P. MAJOR, Non Central Limit Theorems for Non-Linear Functional of Gaussian Fields, *Z.W. verb. Geb.*, vol. **50**, 1979, p. 27-52.
[8] M. TAQQU, Convergence of Integrated Processes of Arbitrary Hermite Rank, *Z.W. verb. Geb.*, vol. **50**, 1979, p. 53-83.
[9] M. TAQQU, Law of the Iterated Logarithm for Sums of Non-Linear Functions of Gaussian Variables that Exhibit a Long Range Dependence, *Z.W. verb. Geb.*, vol. **40**, 1977, p. 203-238.
[10] P. MAJOR, Multiple Wiener-Ito Integrals, *L.N.M.*, n° 849, Springer-Verlag, 1981.
[11] P. BREUER et P. MAJOR, Central Limit Theorems for Non-Linear Functionals of Gaussian Fields, *J. Multi. Anal.*, vol. **13**, 1981, p. 425-441.
[12] X. GUYON, Variations des Champs Gaussiens stationnaires, Application à l'identification, *Proba. Th. Rel. Fields*, vol. **75**, 1987, p. 179-193.
[13] J. ORTEGA, *On the Variation of Gaussian Processes and Fields*, Preprint U.C.V., Caracas, 1988.
[14] L. DE HAAN, *On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes*, Mathematical Centre Tracts n° 032, Math. Centre, Amsterdam, 1970.

(*Manuscrit reçu le* 29 *avril* 1988;
corrigé le 6 *décembre* 1988.)