ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ELLEN SAADA

Processus de zéro-rangé avec particule marquée

Annales de l'I. H. P., section B, tome 26, nº 1 (1990), p. 5-17

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1990__26_1_5_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 26, n° 1, 1990, p. 5-17. *Probabilités et Statistiques*

Processus de zero-range avec particule marquée

par

Ellen SAADA

C.N.R.S., U.A. n° 1378, Analyse et modèles stochastiques,
Université de Rouen, B.P. n° 118, 76134 Mont Saint-Aignan Cedex

RÉSUMÉ. — Nous étudions un processus de zero-range [pour lequel $g(k) \equiv 1$ si $k>0$] à l'équilibre, ayant pour loi initiale la mesure produit géométrique invariante $\mu_\rho (0 \leqq \rho \leqq 1)$. Nous prouvons que les μ_ρ sont invariantes extrémales dans le cas transient. Nous démontrons ensuite dans le cas symétrique une loi forte des grands nombres et un théorème central limite pour la position d'une particule « supplémentaire » (*i.e.* de seconde classe) ainsi que l'indépendance asymptotique d'un nombre fini de particules supplémentaires. Nous prouvons finalement, pour la position d'une particule marquée, une loi forte des grands nombres et dans le cas symétrique, un théorème central limite.

Mots clés : processus de zero-range, mesures invariantes extrémales, loi des grands nombres, théorème central limite, martingales.

ABSTRACT. — We study a zero-range process [for which $g(k) \equiv 1$ if $k>0$] in equilibrium, having as initial distribution the invariant geometric product measure $\mu_\rho (0 \leqq \rho \leqq 1)$. We prove that the μ_ρ are extremal invariant in the transient case. We then prove in the symmetric case a strong law of large numbers and a central limit theorem for the position of a "supplementary" (*i.e.* second class) particle, and also the asymptotic independance of a finite number of second class particles. Finally for the position of a tagged particle we prove a strong law of large numbers and, in the symmetric case, a central limit theorem.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques - 0246-0203
Vol. 26/90/01/5/13/\$ 3,30/© Gauthier-Villars

1. INTRODUCTION

Introduit par Spitzer [11], le processus de Zero-Range décrit l'évolution d'une infinité de particules indistinguables sur l'ensemble des sites $S = Z^d$. Chaque site x est muni d'une horloge exponentielle de paramètre 1, et toutes les horloges sont indépendantes. Étant donnée une probabilité de transition $(p(x,y))_{x,\,y\in S}$ invariante par translation sur S, chaque fois que l'horloge située en x sonne, un site y est choisi avec la probabilité $p(x,y)$, et l'une des particules de x (s'il y en a) est choisie (au hasard) et saute en y. Formellement, le processus de Zero-Range est un processus de Markov (η_t) sur $\mathbb{N}^S$; pour chaque site x, $\eta_t(x)$ est le nombre de particules en x à l'instant t. Lorsque ρ décrit [0, 1], les mesures produit géométriques μ_ρ de marginales $\mu_\rho(\eta(x)=k)=\rho^k(1-\rho)$ (pour $k\in\mathbb{N}$) sont invariantes pour ce processus (*voir* [10] et surtout [1] pour une étude détaillée).

Nous étudions dans deux cas la position d'une des particules du système, lorsque celui-ci a pour distribution initiale μ_ρ:

– Cette particule est une particule « marquée »: elle obéit aux mêmes règles que les autres particules du système, elle est en interaction avec elles.

– Cette particule est une particule « supplémentaire »: si l'horloge sonne au site où elle se trouve, elle ne saute que si elle est la seule particule présente sur ce site. Autrement dit, dans le langage de [2], les autres particules du système ont priorité sur elle (c'est une particule de « seconde classe »).

En effet, connaître le comportement asymptotique d'une particule marquée (ou supplémentaire) peut être une étape de l'étude hydrodynamique du processus (cette stratégie a été en particulier utilisée pour le processus d'exclusion simple [5], [6]).

Pour un processus de Zero-Range symétrique, nous établissons la loi forte des grands nombres et le théorème central limite (théorème 5) pour une particule supplémentaire. Nous prouvons également que plusieurs particules supplémentaires évoluent asymptotiquement indépendamment les unes des autres (théorème 6).

Pour la particule marquée, nous démontrons la loi forte des grands nombres, et, dans le cas symétrique, le théorème central limite (théorème 8). Rappelons que, pour un processus de Zero-Range symétrique en dimension 1, Spitzer avait calculé EX_t (où X_t est la position à l'instant t de la particule marquée) et signalé que Kesten avait une démonstration d'un théorème central limite si $\sum_{x\in S} x^2 p(0,x) < +\infty$ [11], mais celle-ci n'a jamais été publiée.

Notre démarche (déjà employée dans [10] pour le processus d'exclusion simple) consiste à ramener la démonstration de théorèmes de convergence (loi des grands nombres et théorème central limite) à celle de théorèmes ergodiques (idée due à Papanicolaou et Varadhan [8]) et pour cela nous établissons (théorèmes 4 et 7) l'ergodicité du processus vu de la particule marquée (ou supplémentaire). Celle-ci découle de l'ergodicité du processus initial que nous étudions tout d'abord. En effet, lorsque $(p(x,y))_{x,y\in S}$ est récurrente, Andjel a montré que les mesures produit géométriques constituaient l'ensemble des probabilités invariantes extrémales [1]. Nous prouvons ici que les mesures μ_ρ sont invariantes extrémales dans le cas transient (théorème 2).

Nous introduisons dans la section 2 les divers processus utilisés, puis nous étudions l'extrémalité des mesures μ_ρ pour le processus de zero-range dans la section 3. Ceci nous permet d'établir, dans la section 4, l'extrémalité d'une mesure invariante − que nous connaissons explicitement − pour le processus vu de la particule supplémentaire dans le cas symétrique; nous en déduisons les théorèmes limites pour la particule supplémentaire, ainsi que l'indépendance asymptotique d'un nombre fini de particules supplémentaires. Dans la section 5, nous obtenons en parallèle les mêmes résultats pour une particule marquée.

L'étape suivante serait l'étude d'un processus de zero-range asymétrique avec particule supplémentaire: en effet, dans le cas asymétrique nous n'avons pas pu déterminer une mesure invariante pour le processus vu de la particule supplémentaire (une telle mesure ne peut être une mesure produit dans ce cas) et donc notre méthode ne peut s'appliquer. Signalons que Gartner et Presutti ont démontré la loi faible des grands nombres pour une particule supplémentaire en dimension 1 lorsque $p(0,1)=1$ ([6], proposition 3.2).

Il faudrait également établir le théorème central limite pour une particule marquée, dans le cas asymétrique.

2. LES PROCESSUS AUXILIAIRES UTILISÉS

Nous étudions la position X_t de la particule supplémentaire (resp. marquée) à l'aide du processus $(X_., \eta_.)$, où $(\eta_.)$ est le processus sous-jacent, ainsi que du processus vu de la particule supplémentaire (resp. marquée), $(\tau_{X_.}\eta_.)$ − l'opérateur de translation τ est défini sur S par $(\tau_x\eta)(z)=\eta(x+z)$ pour tous sites x et z − Comme la particule supplémentaire ne modifie pas l'évolution du processus $(\eta_.)$ contrairement à la particule marquée, nous supposerons que le nombre $\eta_t(X_t)$ ne comprend pas la particule supplémentaire mais comprend la particule marquée. Ainsi dans les deux cas le processus sous-jacent $(\eta_.)$ sera un processus de zero-range. L'existence des deux processus $(X_., \eta_.)$ et $(\tau_{X_.}\eta_.)$ ainsi que leur lien sont donnés par le théorème suivant.

Soit $(D(\mathbb{R}_+, \mathbb{N}^S), (\mathscr{F}_t)_{t \geqq 0})$ [resp. $(D(\mathbb{R}_+, S \times \mathbb{N}^S), (\mathscr{F}'_t)_{t \geqq 0})$] l'espace des fonctions continues à droite et limitées à gauche de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{N}^S$ (resp. de $\mathbb{R}_+$ dans $S \times \mathbb{N}^S$) muni de la topologie de Skorohod, avec $\mathscr{F}_t = \sigma((\eta_s), s \leqq t)$ [resp. $\mathscr{F}'_t = \sigma((X_s, \eta_s), s \leqq t)$]. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{N}^S$ dans $\mathbb{R}$ ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées. Rappelons que le processus de zero-range $(\eta_.)$ a pour générateur

$$\Omega f(\eta) = \sum_{x, y \in S} 1_{(\eta(x) > 0)} p(x, y) [f(\eta^{xy}) - f(\eta)]$$

où $f \in \mathscr{D}$ et

$$\eta^{xy}(z) = \begin{cases} \eta(z) & \text{si} \quad z \neq x, y \\ \eta(x) - 1 & \text{si} \quad z = x \\ \eta(y) + 1 & \text{si} \quad z = y \end{cases}$$

Nous notons $S(t)$ son semi-groupe (*voir* [1] pour la construction et les propriétés du processus de zero-range).

Le générateur du processus $(\tau_{X_.} \eta_.)$ est défini par

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} f(\eta) &= \Omega f(\eta) + 1_{(\eta(0) = 0)} \sum_{y \in S} p(0, y) [f(\tau_y \eta) - f(\eta)] \\ &= \Omega f(\eta) + \Omega_0 f(\eta) \end{aligned}$$

où $f \in \mathscr{D}$, dans le cas de la particule supplémentaire et par

$$\begin{aligned} \tilde{L} f(\eta) = & \sum_{\substack{x, y \in S \\ x \neq 0}} 1_{(\eta(x) > 0)} p(x, y) [f(\eta^{xy}) - f(\eta)] \\ & + 1_{(\eta(0) > 0)} \frac{\eta(0) - 1}{\eta(0)} \sum_{y \in S} p(0, y) [f(\eta^{0y}) - f(\eta)] \\ & + 1_{(\eta(0) > 0)} \frac{1}{\eta(0)} \sum_{y \in S} p(0, y) [f(\tau_y \eta^{0y}) - f(\eta)] \end{aligned}$$

où $f \in \mathscr{D}$, dans le cas de la particule marquée.

Nous notons Ω_1 (resp. L_1) le générateur du processus $(X_., \eta_.)$ dans le premier (resp. second) cas.

THÉORÈME 1. — *Pour tout couple* (X, η) *de* $S \times \mathbb{N}^S$, *il existe une unique solution* $P^{(X, \eta)}$ *sur* $(D(\mathbb{R}_+, S \times \mathbb{N}^S), (\mathscr{F}'_t)_{t \geqq 0})$ *au problème des martingales associé à* Ω_1 (*resp. à* L_1) *avec état initial* (X, η). *Pour toute configuration* η *de* $\mathbb{N}^S$, *il existe une unique solution* P^η *sur* $(D(\mathbb{R}_+, \mathbb{N}^S), (\mathscr{F}_t)_{t \geqq 0})$ *au problème des martingales associé à* $\tilde{\Omega}$ (*resp.* $\tilde{L}$) *avec état initial* η. *De plus, la probabilité* $P^{\tau_X \eta}$ *est l'image de* $P^{(X, \eta)}$ *par l'application* φ *de* $D(\mathbb{R}_+, S \times \mathbb{N}^S)$ *dans* $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{N}^S)$ *définie par* $\varphi((X_., \eta_.)) = (\tau_{X_.} \eta_.)$.

L'existence des solutions se démontre comme dans [7] chap. I.4., et l'unicité comme dans [4].

3. ERGODICITÉ DU PROCESSUS DE ZERO-RANGE

THÉORÈME 2. — *Si la chaîne de Markov associée à la probabilité de transition* $(p(x,y))_{x,y\in S}$ *est transiente, les mesures* μ_ρ *sont invariantes extrémales pour le processus de zero-range.*

Nous montrons en fait que la loi $\mathbb{P}_{\mu_\rho}$ du processus de zero-range de distribution initiale μ_ρ est mélangeante pour le shift sur les trajectoires: elle sera donc temporellement ergodique, d'où l'extrémité de μ_ρ (*voir* [9]).

Pour cela nous avons besoin du lemme suivant:

LEMME 3. — *Le processus de zero-range* $(\xi'_.)$ *comprenant* $K=k_1+\ldots+k_n$ *particules supplémentaires, de loi initiale* $\tilde{\mu}_\rho$ *obtenues en superposant à* μ_ρ k_i *particules au site* $x_i (1\leq i\leq n)$, *et le processus de zero-range* $(\xi_.)$ *de loi initiale* $\mu'_\rho=\mu_\rho(./\xi(x_i)\geq k_i, 1\leq i\leq n)$ *ont même loi.*

Ce lemme explique l'introduction de particules supplémentaires: par la forme de μ_ρ, elles apparaissent naturellement dans les calculs.

Démonstration. — Il est clair que $\mu'_\rho=\tilde{\mu}_\rho$. Nous pouvons donc écrire pour tout $z\in S$

$$\xi_0(z)=\eta_0(z)+\zeta_0(z) \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} \zeta_0(x_i)=k_i & \text{pour } 1\leq i\leq n \\ \zeta_0(z)=0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $(\eta_., \xi_.)$ le processus de zero-range couplé d'état initial (η_0, ξ_0): chacune de ses composantes est un processus de zero-range, mais de telle sorte que si au site x (et à l'instant t) sont présentes à la fois au moins une particule de η_t et une de ξ_t, elles sautent ensemble (c'est le couplage de base: pour plus de détails voir [1] ou [7]). Comme le processus de zero-range est attractif, pour tous $t\geq 0$ et $z\in S$, $\eta_t(z)\leq\xi_t(z)$. Si nous définissons le processus $(\zeta_.)$ par $\xi_t(z)=\eta_t(z)+\zeta_t(z)$, la règle du couplage rend les particules du processus $(\eta_.)$ prioritaires (au sens de [2]) sur celles de $(\zeta_.)$, qui se comportent donc comme des particules supplémentaires: autrement dit, les processus $(\xi_.)$ et $(\xi'_.)$ ont même loi. ■

Démonstration du théorème 2. — Pour deux éléments f et g de la partie génératrice

$$\mathscr{H}=\{1_{\{\eta(y_1)\leq l_1,\ldots,\eta(y_n)\leq l_n\}}, y_i\in S, l_i\in\mathbb{N} \text{ pour } 1\leq i\leq n; n\in\mathbb{N}\}$$

de $\mathbb{L}^2(\mu_\rho)$, nous prouvons que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_{\mu_\rho}[f(\eta_0)g(\eta_t)]=\mathbb{E}_{\mu_\rho}[f(\eta_0)]\,\mathbb{E}_{\mu_\rho}[g(\eta_0)].$$

autrement dit $\mathbb{P}_{\mu_\rho}$ sera mélangeante.

Si

$$f(\eta)=1_{\{\eta(x_1)\geq k_1,\ldots,\eta(x_n)\geq k_n\}} \qquad \text{et} \qquad g(\eta)=1_{\{\eta(y_1)\geq l_1,\ldots,\eta(y_m)\geq l_m\}}$$

nous avons pour tout $t \geqq 0$, $\mathbb{E}_{\mu_\rho}[g(\eta_t)] = \mathbb{E}_{\mu_\rho}[g(\eta_0)]$ car μ_ρ est invariante, et

$$\frac{\mathbb{E}_{\mu_\rho}[f(\eta_0)\, g(\eta_t)]}{\mathbb{E}_{\mu_\rho}[f(\eta_0)]} = \mathbb{P}_{\mu_\rho}[\eta_t(y_1) \geqq l_1, \ldots, \eta_t(y_m) \geqq l_m /$$

$$\eta_0(x_1) \geqq k_1, \ldots, \eta_0(x_n) \geqq k_n]$$

$$= \mathbb{E}_{\tilde{\mu}_\rho}[g(\xi_t)] = \bar{\mathbb{E}}[g(\eta_t + \zeta_t)]$$

où, les notations étant celles du lemme 3, $\bar{\mathbb{E}}$ est l'espérance par rapport au processus couplé.

Nous ordonnons maintenant les particules supplémentaires à l'instant initial, et nous imposons que chacune d'elles soit prioritaire sur les suivantes au cours de l'évolution. Ainsi, les vitesses individuelles des particules supplémentaires sont modifiées, mais pas leur vitesse globale. Pour $1 \leqq i \leqq K$ et $1 \leqq j \leqq m$, la i-ième particule supplémentaire effectue un nombre de séjours presque sûrement fini au site y_j [puisque $(p(x, y))_{x, y \in S}$ est transiente] où elle passe un temps τ_{i, y_j} lui aussi presque sûrement fini : en effet les instants de saut $(T_n)_{n \geqq 0}$ d'une particule supplémentaire sont p. s. finis $\Big($car si $U_n = \int_0^{T_n} 1_{\{\eta_s(X_s) = 0\}}\, ds$ – où $(X_., \eta_.)$ est un processus de zero-range avec particule supplémentaire – $\nu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{U_n}$ est un processus de Poisson d'intensité 1 sur $\mathbb{R}_+$. Ce résultat se démontre comme [3] II$\Big)$. Finalement, soit $T = \sup_{\substack{1 \leqq i \leqq K \\ 1 \leqq j \leqq m}} \tau_{i, y_j}$ l'instant presque sûrement fini à partir duquel les particules supplémentaires ne passent plus aux sites y_j.

$$|\bar{\mathbb{E}}[g(\eta_t + \zeta_t) - g(\eta_t)]| = |\bar{\mathbb{E}}[(g(\eta_t + \zeta_t) - g(\eta_t))\, 1_{\{T > t\}}]|$$

$$\leqq 2\, \bar{\mathbb{P}}[T > t]$$

qui tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, d'où le résultat. ■

4. COMPORTEMENT DE LA PARTICULE SUPPLÉMENTAIRE

L'étude des mesures géométriques nous permet de prouver la

PROPOSITION 4. – *Lorsque* $(p(x, y))_{x\, y \in S}$ *est symétrique, la mesure produit* $\lambda_\rho(d\eta) = (1 - \rho)(\eta(0) + 1)\, \mu_\rho(d\eta)$ *est invariante extrémale pour le processus vu de la particule supplémentaire* $(\tau_{X_.}\, \eta_.)$.

Démonstration. — (*a*) Nous vérifions tout d'abord que $\int \tilde{\Omega} f \, d\lambda_\rho = 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}$, d'où l'invariance des λ_ρ ([7], prop. I.6.10).

La mesure μ_ρ est invariante pour le processus de zero-range, donc $\int \Omega f \, d\mu_\rho = 0$. Le générateur Ω a pour adjoint Ω^* dans $\mathbb{L}^2(\mu_\rho)$:

$$\Omega^* f(\eta) = \sum_{x,\, y \in S} p(x, y) \, 1_{(\eta(y) > 0)} [f(\eta^{yx}) - f(\eta)].$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\rho} & \int \tilde{\Omega} f(\eta) \, \lambda_\rho(d\eta) \\
&= \int f(\eta) \, \Omega^* \eta(0) \, \mu_\rho(d\eta) + \int (\eta(0) + 1) \, \Omega_0 f(\eta) \, \mu_\rho(d\eta) \\
&= - \int f(\eta) \, 1_{(\eta(0) > 0)} \, \mu_\rho(d\eta) + \sum_{y \in S} p(0, y) \int 1_{\{\eta(y) > 0\}} f(\eta) \, \mu_\rho(d\eta) \\
&\quad + \sum_{y \in S} p(0, y) \int 1_{\{\eta(0) = 0\}} f(\tau_y \eta) \, \mu_\rho(d\eta) - \int f(\eta) \, 1_{\{\eta(0) = 0\}} \, \mu_\rho(d\eta) \\
&= - \int f(\eta) \, \mu_\rho(d\eta) + \sum_{y \in S} p(0, y) \left[\int 1_{\{\eta(-y) > 0\}} f(\eta) \, \mu_\rho(d\eta) \right. \\
&\qquad \left. + \int 1_{\{\eta(-y) = 0\}} f(\eta) \, \mu_\rho(d\eta) \right]
\end{aligned}$$

car μ_ρ est invariante par translation et $(p(x, y))_{x,\, y \in S}$ symétrique.

$$= - \int f(\eta) \, \mu_\rho(d\eta) + \int f(\eta) \, \mu_\rho(d\eta) = 0.$$

(*b*) Nous prouvons que λ_ρ est extrémale par l'absurde. Soit A un ensemble de configurations invariant sous le semi-groupe $\tilde{S}(t)$ du processus $(\tau_{X_\cdot} \eta_\cdot)$ et tel que $0 < \lambda_\rho(A) < 1$, d'où $0 < \mu_\rho(A) < 1$. Alors pour tout $t \geqq 0$,

$$\tilde{S}(t) \, 1_A(\eta) = 1_A(\eta) \quad \lambda_\rho - \text{p. s.}$$

c'est-à-dire

$$P^{(0,\, \eta)} [\tau_{X_t} \eta_t \in A] = 1_A(\eta) \quad \mu_\rho - \text{p. s.}$$

et de même

$$P^{(0,\, \eta)} [\tau_{X_t} \eta_t \in A^c] = 1_{A^c}(\eta) \quad \mu_\rho - \text{p. s.}$$

Si T_1 est le premier instant de saut de la particule supplémentaire, et V_1 une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1 indépendante de

$(X_., \eta_.)$,

$$P^{(0,\eta)}[\tau_{X_t}\eta_t \in A] \geqq P^{(0,\eta)}[T_1 > t; \eta_t \in A]$$
$$\geqq P^{(0,\eta)}[V_1 > t; \eta_t \in A] = e^{-t} S(t) 1_A(\eta)$$

parce que $(\eta.)$ est un processus de zero-range.
Par conséquent

$$\mu_\rho - \text{p. s.} \begin{cases} S(t) 1_A(\eta) \leqq 1_A(\eta) \\ S(t) 1_{A^c}(\eta) \leqq 1_{A^c}(\eta) \end{cases}$$

et comme $(1_A + 1_{A^c})(\eta) = 1$, ce sont des égalités donc A et A^c sont fermés pour l'évolution du processus de zero-range. L'ergodicité de $\mathbb{P}_{\mu_\rho}$ ([1] et théorème 2) implique que $\mu_\rho(A)$ vaut 0 ou 1, d'où une contradiction. La mesure λ_ρ est invariante extrémale. ■

Nous pouvons maintenant déterminer le comportement asymptotique de la particule supplémentaire:

THÉORÈME 5. — *Soit* $(\eta.)$ *un processus de zero-range de distribution initiale* μ_ρ, *avec une particule supplémentaire placée en* 0 *à* $t=0$. *Si* $(p(x,y))_{x,y\in S}$ *est invariante par translation, symétrique, irréductible et si* X_t *est la position à l'instant* t *de la particule supplémentaire,* X_t/t *converge* (*coordonnée par coordonnée*) $\mathbb{P}_{\mu_\rho}$*-presque sûrement vers* 0 *quand* t *tend vers* $+\infty$.

Si de plus $\sum_{x\in S} \|x\|^2 p(0,x) < +\infty$, $X_t/\sqrt{t}$ *converge en loi vers* $\mathcal{N}_d(0,(1-\rho)^2\Gamma)$ *où* Γ *est la matrice* $\left(\sum_{z\in S}(e_i.z)(e_j.z)p(0,z)\right)_{1\leqq i,j\leqq d}$, $((e_i)_{1\leqq i\leqq d}$ *étant la base canonique de* $\mathbb{Z}^d$).

Démonstration. — La loi des grands nombres se démontre comme le théorème 1 de [10]. On écrit $X_t = \sum_{z\in S} z N_t^z$ où N_t^z est le nombre de sauts d'amplitude z de la particule supplémentaire avant t et on utilise les $\mathcal{F}_t$-martingales orthogonales $M_t^z = N_t^z - p(0,z)\int_0^t 1_{\{\eta_s(X_s)=0\}}\,ds$.

Pour le théorème central limite, nous montrons que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{E}_{\mu_\rho}[\exp i(u,X_t)/\sqrt{t}]$ converge vers

$$\exp\left[-\frac{(1-\rho)^2}{2}\sum_{z\in S}(u.z)^2 p(0,z)\right]$$

lorsque t tend vers $+\infty$.

L'application de la formule exponentielle [12] à la martingale M_t^z implique que les

$$R_t^z = \exp\left[i\frac{u.z}{\sqrt{t}}N_t^z - \int_0^t (e^{iu.z/\sqrt{t}}-1)\,p(0,z)\,1_{\{\eta_s(X_s)=0\}}\,ds\right]$$

sont des martingales locales. Leur produit R_t l'est également, car elles sont sans saut commun.

$$R_t=\exp\left[i\frac{u.X_t}{\sqrt{t}}-\sum_{z\in S}(e^{iu.z/\sqrt{t}}-1)p(0,z)\int_0^t 1_{\{\eta_s(X_s)=0\}}ds\right]$$

Comme $\sum_{x\in S}\|x\|^2 p(0,x)=\sigma^2<+\infty$, nous avons

$$\sum_{z\in S}(e^{iu.z/\sqrt{t}}-1)p(0,z)=-\frac{1}{2t}\left[\sum_{z\in S}(u.z)^2p(0,z)\right]\times\left[1+\delta\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\right]$$

avec $\begin{cases}\lim\limits_{v\to 0}\delta(v)=0\\ |\delta(v)|\leqq 3\sigma^2.\end{cases}$

Alors $|R_t|\leqq\exp\frac{1}{2}\left[\sum_{z\in S}(u.z)^2p(0,z)\right](1+3\sigma^2)=A$ et donc (R_t) est une martingale. En particulier $\mathbb{E}_{\mu_\rho}(R_t)=1$, d'où

$$\mathbb{E}_{\mu_\rho}\left[\exp i\frac{u.X_t}{\sqrt{t}}-\exp\left[-\frac{(1-\rho)^2}{2}\sum_{z\in S}(u.z)^2p(0,z)\right]\right]$$
$$=\mathbb{E}_{\mu_\rho}\left[R_t\exp\frac{1}{2t}\sum_{z\in S}(u.z)^2p(0,z)\left(1+\delta\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\right)\int_0^t 1_{\{\eta_s(X_s)=0\}}ds\right.$$
$$\left.-R_t\exp\left(-\frac{(1-\rho)^2}{2}\sum_{z\in S}(u.z)^2p(0,z)\right)\right]=\mathbb{E}_{\mu_\rho}(a)$$

et

$$|a|\leqq A\left|\exp\frac{1}{2t}\left(\sum_{z\in S}(u.z)^2p(0,z)\right)\left(1+\delta\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\right)\int_0^t 1_{\{\eta_s(X_s)=0\}}ds\right.$$
$$\left.-\exp\left(-\frac{(1-\rho)^2}{2}\sum_{z\in S}(u.z)^2p(0,z)\right)\right|$$

qui tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, car comme λ_ρ est extrémale et équivalente à μ_ρ, $\left(1+\delta\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\right)\frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{\eta_s(X_s)=0\}}ds$ converge μ_ρ-presque sûrement vers $(1-\rho)^2$ par application du théorème ergodique.

Puisque $|a|\leqq 2$, le théorème de convergence dominée implique le résultat. ■

Nous étudions de même le mouvement de plusieurs particules supplémentaires. Le théorème suivant traite le cas de deux particules, mais il se généralise immédiatement au cas d'un nombre fini de particules supplémentaires.

THÉORÈME 6. — *Soit* $(\eta_.)$ *un processus de zero-range de distribution initiale* μ_ρ *auquel nous rajoutons deux particules supplémentaires. Leurs positions à l'instant t sont* X_t *et* Y_t*, avec* $X_0 = Y_0 = 0$. *Quand* $(p(x,y))_{x,y \in S}$ *est invariante par translation, irréductible, symétrique, et vérifie* $\sum_{x \in S} \|x\|^2 p(0,x) < +\infty$, *les deux particules supplémentaires se comportent asymptotiquement de façon indépendante. Plus précisément, lorsque t tend vers* $+\infty$, $\begin{pmatrix} X_t/\sqrt{t} \\ Y_t/\sqrt{t} \end{pmatrix}$ *converge en loi vers* $\mathcal{N}_d(0,(1-\rho)^2\Gamma')$ *où* Γ' *est la matrice de dimension* $2d$ $\begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix}$.

Démonstration. — Comme dans le théorème 2, nous ordonnons les particules supplémentaires: à l'instant t, la première est en X_t et la seconde en Y_t. Alors

$$X_t = \sum_{z \in S} z N_{1,t}^z, \qquad Y_t = \sum_{z \in S} z N_{2,t}^z$$

et nous avons les martingales

$$M_{1,t}^z = N_{1,t}^z - p(0,z) \int_0^t 1_{\{\eta_s(X_s)=0\}} ds$$

$$M_{2,t}^z = N_{2,t}^z - p(0,z) \int_0^t 1_{\{\eta_s(Y_s)=0;\, X_s \neq Y_s\}} ds$$

Nous savons que $\frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{\eta_s(X_s)=0\}} ds$ converge μ_ρ – p. s. vers $(1-\rho)^2$ (théorème 5). De même, $\frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{\eta_s(Y_s)=0;\, X_s \neq Y_s\}} ds$ converge μ_ρ – p. s. vers $(1-\rho)^2$. En effet, le processus $(\xi_.)$ défini par $\xi_t(z) = \eta_t(z) + 1_{\{z\}}(X_t)$ $(z \in S, t \geqq 0)$ est un processus de zero-range de distribution initiale $\mu'_\rho = \mu_\rho(\,.\,/\xi(0) \geqq 1)$. Si nous lui ajoutons une particule supplémentaire de position Z_t (avec $Z_0 = 0$), alors

$$\frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{\eta_s(Y_s)=0;\, X_s \neq Y_s\}} ds = \frac{1}{t}\int_0^t 1_{\{\xi_s(Z_s)=0\}} ds$$

qui converge μ'_ρ – p. s. (et μ_ρ – p. s. puisque μ'_ρ est absolument continue par rapport à μ_ρ) vers $(1-\rho)^2$.

Pour prouver l'indépendance asymptotique de X_t et Y_t, nous procédons comme dans le théorème 5: nous cherchons la limite de $\mathbb{E}_{\mu_\rho}\left[\exp i \frac{\theta}{\sqrt{t}} \cdot \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix}\right]$, où $\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$ est quelconque dans $\mathbb{R}^{2d}$ ($\theta_1 \in \mathbb{R}^d$ et

$\theta_2 \in \mathbb{R}^d$). Nous avons deux martingales orthogonales

$$\begin{aligned} R_{1,t} &= \exp\left[i\frac{\theta_1 . X_t}{\sqrt{t}} - \sum_{z \in S} (e^{i\theta_1 . z/\sqrt{t}} - 1)\, p(0,z) \int_0^t 1_{\{\eta_s(X_s)=0\}}\, ds \right] \\ &= \exp\left(i\frac{\theta_1 . X_t}{\sqrt{t}} + A_{1,t} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R_{2,t} &= \exp\left[i\frac{\theta_2 . Y_t}{\sqrt{t}} - \sum_{z \in S} (e^{i\theta_2 . z/\sqrt{t}} - 1)\, p(0,z) \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^t 1_{\{\eta_s(Y_s)=0;\, X_s \neq Y_s\}}\, ds \right] \\ &= \exp\left(i\frac{\theta_2 . Y_t}{\sqrt{t}} + A_{2,t} \right). \end{aligned}$$

Si nous notons $a_1 = \exp\left[-\frac{(1-\rho)^2}{2} \sum_{z \in S} (\theta_1 . z)^2 p(0,z) \right]$,

$$a_2 = \exp\left[-\frac{(1-\rho)^2}{2} \sum_{z \in S} (\theta_2 . z)^2 p(0,z) \right],$$

alors

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{\mu_\rho}\left[\exp i\frac{\theta}{\sqrt{t}} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} - a_1 a_2 \right] \\ &\qquad = \mathbb{E}_{\mu_\rho}[R_{1,t} R_{2,t} (\exp A_{1,t} - a_1)(\exp A_{2,t} - a_2) \\ &\qquad\qquad + a_1 (\exp A_{2,t} - a_2) + a_2 (\exp A_{1,t} - A_1)] \end{aligned}$$

tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, d'où le résultat. ■

5. COMPORTEMENT DE LA PARTICULE MARQUÉE

La méthode et les démonstrations utilisées sont analogues au cas précédent, aussi nous nous contentons d'énoncer les résultats.

PROPOSITION 7. — *La mesure* $\lambda'_\rho(d\eta) = \frac{1-\rho}{\rho} \eta(0) \mu_\rho(d\eta)$ *est invariante pour le processus* $(\tau_{X.}\eta.)$ *vu de la particule marquée. Si de plus* $(p(x,y))_{x,y \in S}$ *est irréductible,* λ'_ρ *est invariante extrémale.*

La démonstration de l'extrémalité est moins directe que pour la particule supplémentaire car le processus privé de la particule marquée n'est plus un processus de zero-range, mais elle suit celle faite dans [10] pour le processus d'exclusion simple avec particule marquée.

THÉORÈME 8. — *Soit* $(\eta_.)$ *un processus de zero-range de distribution initiale* $\mu'_\rho = \mu_\rho(./\eta(0) \geqq 1)$, *où nous marquons une des particules situées en* 0 *à* $t=0$. *Si* $(p(x,y))_{x,\, y \in S}$ *est invariante par translation, irréductible et vérifie* $\sum \|x\| p(0,x) < \infty$, *alors* X_t/t *converge* $P_{\mu_\rho}-p.\,s.$ *vers* $(1-\rho) \sum_{x \in S} x p(0,x)$ *quand t tend vers* $+\infty$ *(coordonnée par coordonnée).*

Si de plus $(p(x,y))_{x,\, y \in S}$ *est symétrique et vérifie* $\sum_{x \in S} \|x\|^2 p(0,x) < \infty$, $X_t/\sqrt{t}$ *converge en loi vers* $\mathcal{N}_d(0, (1-\rho)\Gamma)$, *où* Γ *est la matrice* $\left(\sum_{z \in S} (e_i.z)(e_j.z)\, p(0,z)\right)_{1 \leqq i,\, j \leqq d}$.

La démonstration de la loi des grands nombres suit celle de [10] et la martingale utilisée y est

$$e_i . X_t - \sum_{z \in S} (e_i . z)\, p(0,z) \int_0^t 1_{\{\eta_s(X_s) > 0\}} \times \frac{1}{\eta_s(X_s)} ds \qquad (1 \leqq i \leqq d).$$

REMERCIEMENTS

Ce travail est tiré de ma *thèse de* 3e *cycle*, dirigée par C. Kipnis qui m'a prodigué sans compter son aide et ses encouragements. Je le remercie, ainsi que E. Andjel, de m'avoir suggéré cet intéressant problème. Je remercie également C. Cocozza qui m'a initiée à l'étude des problèmes de martingales, et J. Jacod qui m'a révélé les finesses des théorèmes centraux limites.

RÉFÉRENCES

[1] E. D. ANDJEL, Invariant measures for the zero-range process, *Ann. Probab.*, vol. **10**, 1982, p. 525-547.

[2] E. D. ANDJEL et C. KIPNIS, Derivation of the hydrodynamical equation for the zero-range interaction process. *Ann. Probab.*, vol. **12,** 1984, p. 325-334.

[3] C. COCOZZA et C. KIPNIS, Processus de vie et de mort sur $\mathbb{R}$ avec interaction selon les particules les plus proches, *Zeit. Wahrsch. Verw. Geb.*, vol. **51**, 1980, p. 123-132.

[4] C. COCOZZA et M. ROUSSIGNOL, Unicité d'un processus de naissance et mort sur la droite réelle, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B*, vol. **15**, 1979, p. 93-105.

[5] A. DE MASI, C. KIPNIS, E. PRESUTTI et E. SAADA, Microscopic structure at the shock in the asymmetric simple exclusion, *Stochastics*, vol. **27**, 1989, p. 151-165.

[6] J. GARTNER et E. PRESUTTI, *Shock fluctuations in a particle system*, Preprint, 1989.

[7] T. M. LIGGETT, *Interacting particle systems*, Springer, Berlin, 1985.

[8] G. PAPANICOLAOU et S. R. S. VARADHAN, *Diffusions with random coefficients. Essays in honor of C.R. Rao*, North-Holland, 1982.

[9] M. ROSENBLATT, Transition probability operators, Proc. Fifth Berkeley Symp, *Math. Statist. Prob.*, vol. **2**, 1967, p. 473-483.

[10] E. SAADA, A limit theorem for the position of a tagged particle in a simple exclusion process, *Ann. Probab.*, vol. **15**, 1987, p. 375-381.

[11] F. SPITZER, Interaction of Markov processes, *Adv. Math.*, vol. **5**, 1970, p. 247-290.

[12] M. YOR, Sur les intégrales stochastiques optionnelles et une suite remarquable de formules exponentielles, *Séminaire de Proba.* X, L.N. n° 511, 1976, p. 481-500, Springer.

(*Manuscrit reçu le* 20 *février* 1989.)