ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

YU. A. KUTOYANTS
T. MOURID
D. BOSQ

Estimation paramétrique d'un processus de diffusion avec retards

Annales de l'I. H. P., section B, tome 28, nº 1 (1992), p. 95-106
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1992__28_1_95_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 28, n° 1, 1992, p. 95-106. · *Probabilités et Statistiques*

Estimation paramétrique d'un processus de diffusion avec retards

par

Yu. A. KUTOYANTS

Université d'Erevan, U.R.S.S.
et Laboratoire de Probabilités,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex05, France

et

T. MOURID et D. BOSQ

Laboratoire de Statistique Théorique et Appliqué,
Tour 45, 3[e] étage,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

RÉSUMÉ. — Ce travail est consacré à l'estimation paramétrique dans un processus à temps continu. On étudie un modèle naturel d'autorégression à temps continu. Ce processus est solution d'une équation différentielle stochastique avec une dérive dépendant du passé du processus. A partir des résultats obtenus par Ibragimov-Hasminski sur le comportement asymptotique du processus de vraisemblance, on étudie l'estimation d'une mesure discrète représentant les « retards » du processus, dans le cadre des petites diffusions en suivant la méthode de Kutoyants.

ABSTRACT. — We study the parametric estimation of an autoregressive process with continuous time. We use the asymptotic properties of the likelihood process, given by Ibragimov-Hasminski and give some results about convergence, asymptotic normality and minimax bound for the estimator extending Kutoyant's results.

Classification A.M.S. : 60 J 60, 62 A 10, 62 A 15.

1. INTRODUCTION NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Les processus autorégressifs d'ordre k à temps continu sont usuellement définis par la relation (*voir* par ex. [5]) :

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{dX_t^{(k)}}{dt^k}=a_1\dfrac{dX_t^{(k-1)}}{dt^{k-1}}+\ldots+a_k\dfrac{dX_t}{dt}+\varepsilon_t,\\ t\geqq 0\end{array}\right\}\qquad (1)$$

où la dérivation est en moyenne quadratique, $(a_1, \ldots, a_k)\in\mathbb{R}^k$ et $(\varepsilon_t, t\geqq 0)$ est un bruit blanc. L'ordre k est un entier et l'autorégression est faite sur l'ordre de dérivation pour t fixé. Nous proposons un modèle de « type diffusion » [4] qui nous semble convenir à l'autorégression à temps continu où l'observation X_t dépend du passé du processus et l'ordre k est un réel.

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P, (F_t)_{t\geqq 0})$ un espace probabilisé muni d'une filtration croissante.

Le modèle général est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\left.\begin{array}{c}dX_t^\varepsilon=\left(\displaystyle\int_0^k X^\varepsilon(t-s)\,d\mu(s)\right)dt+\varepsilon\,dW_t,\\ 0\leqq t\leqq T\\ X^\varepsilon(s)=X_0,\qquad -k\leqq s\leqq 0\end{array}\right\}\qquad (2)$$

avec $X_0(s)(-k\leqq s\leqq 0)$ une fonction donné, $(W_t, F_t)_{t\geqq 0}$ un processus de Wiener, μ une mesure à signe sur $]0, k]$ où k est un réel strictement positif. Dans la suite on prend $X_0\equiv x_0>0$.

On s'intéresse à l'estimation de la mesure μ dans le cas particulier où $\mu=\sum_{i=1}^{p} a_i\,\delta_{b_i}$, avec p un entier donné. On estime le paramètre

$$\theta=(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p)\in\Theta=]0, A[^p\times\prod_{i=1}^{p}]\alpha_{i-1}, \alpha_i[$$

où $A>0$ et $0<\alpha_0<\ldots<\alpha_p$, en utilisant les résultats obtenus par Ibragimov-Hasminski [2] sur le comportement asymptotique du processus de vraisemblance et sa convergence étroite sur un espace fonctionnel. Soit P_θ^ε la loi du processus $(X_t^\varepsilon, 0\leqq t\leqq T)$ sur $(\mathscr{C}_{[0, T]}, \mathscr{B})$, espace mesurable des fonctions continues sur $[0, T]$ muni de la topologie de la convergence uniforme, solution de l'équation :

$$dX_t^\varepsilon=\left(\sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-b_i}^\varepsilon\right)dt+\varepsilon\,dW_t,\qquad 0\leqq t\leqq T\qquad (2')$$

A la valeur $\varepsilon=0$, on associe l'équation déterministe :

$$(X_t^0)' = \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-b_i}^0, \qquad X_s^0 = x_0 \rangle 0 \quad \text{pour } -k \leqq s \leqq 0.$$

On considère le rapport de vraisemblance calculé pour l'observation $(X_t^\varepsilon,\ 0 \leqq t \leqq T)$:

$$Z_{\varepsilon,\theta}(u) = \frac{d\mathbb{P}^\varepsilon_{\theta+\varphi_\varepsilon(\theta)u}}{d\mathbb{P}^\varepsilon_\theta}(X^\varepsilon) \tag{3}$$

où $\theta \in \Theta$.

$\varphi_\varepsilon(\theta)$ une matrice $2p \times 2p$ telle que $\theta + \varphi_\varepsilon(\theta) u \in \Theta$, $u \in \mathbb{R}^{2p}$.

Le processus $Z_{\varepsilon,\theta}(.)$ est défini pour

$$u \in \mathcal{U}_{\varepsilon,\theta} = \varphi_\varepsilon^{-1}(\theta), \qquad (\Theta - \theta) \subset \mathbb{R}^{2p}.$$

Par prolongement par continuité, le processus $Z_{\varepsilon,\theta}(u)$ est à trajectoires dans $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^{2p})$ espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^{2p}$ tendant vers 0 à l'infini et muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts [2].

L'estimateur $\hat{\theta}_\varepsilon$ de θ est défini par :

$$\frac{d\mathbb{P}^\varepsilon_{\hat\theta_\varepsilon}}{d\mathbb{P}^\varepsilon_{\theta_0}}(X^\varepsilon) = \sup_{\theta \in \Theta} \frac{d\mathbb{P}^\varepsilon_\theta}{d\mathbb{P}^\varepsilon_{\theta_0}}(X^\varepsilon) \tag{4}$$

où θ_0 est une valeur fixée du paramètre.

On note $W_{\varepsilon_1, 2}$ ([2], p. 19) la classe des fonctions de perte majorées à l'infini par les fonctions $\exp(\varepsilon_1 \|u\|^2)$, $\varepsilon_1 > 0$.

Les résultats sont établis dans le cadre des « petites diffusions » (*i.e.* $\varepsilon \to 0$). Dans la partie II, on montre la normalité asymptotique locale de la famille des lois $(\mathbb{P}^\varepsilon_\theta,\ \theta \in \Theta)$, et la tension de la suite des processus $(Z_{\varepsilon,\theta}(u),\ u \in \mathbb{R}^{2p})$ dans $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^{2p})$.

Dans la partie III, on en déduit une borne minimax pour le risque associé à $\hat{\theta}_\varepsilon$, la convergence de l'estimation et une loi limite.

II. NORMALITÉ ASYMPTOTIQUE LOCALE ET TENSION DE $(Z_{\varepsilon,\theta}(u))$

1. Existence

LEMME 2.1. — *Si* $\|\mu\|$ *est fini, alors l'équation* (2) *admet une solution unique* (*unicité trajectorielle*).

Preuve. — En écrivant l'équation (2) sous la forme :

$$dX_t^\varepsilon = S(t, X^\varepsilon, \theta)\, dt + \varepsilon\, dW_t,$$

avec

$$S(t, X^\varepsilon, \theta) = \int_0^k X^\varepsilon(t-s)\, d\mu(s),$$

on remarque que la fonctionnelle $S(t, ., \theta)$, définie sur l'espace des fonctions continues $\mathscr{C}_{[-k, T]}$, vérifie les conditions de Lipschitz ([4], chap. 4).

En effet, on a, pour tout $t>0$ et $x, y \in \mathscr{C}_{[-k, T]}$,

L_1 :

$$|S(t, x, \theta) - S(t, y, \theta)| \leqq \int_{t-k}^{t} |x(s) - y(s)| \,.\, |\mu_t(ds)|$$

L_2 :

$$|S(t, x, \theta)| \leqq \int_{t-k}^{t} |x(s)| \,.\, |\mu_t(ds)|,$$

où μ_t est la mesure translatée de μ sur $[t-k, t[$.

Sous L_1 et L_2 on obtient l'existence et l'unicité trajectorielle de l'équation (2).

2. Normalité asymptotique locale (LAN)

La famille des lois $(P_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$ possède la propriété LAN au point $\theta \in \Theta$ quand $\varepsilon \to 0$ ([1], [2]) s'il existe une matrice $\varphi_\varepsilon(\theta)$ $(2p \times 2p)$ telle que le rapport de vraisemblance $Z_{\varepsilon, \theta}(u)$ (3) admet la représentation suivante :

$$Z_{\varepsilon, \theta}(u) = \exp\left\{ \langle u, \Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon) \rangle - \frac{1}{2}|u|^2 + \psi_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon) \right\} \tag{5}$$

où, sous P_θ^ε : la v. a. $\Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon)$ est asymptotiquement un vecteur gaussien : $\mathcal{N}(0, I_d)$ dans $\mathbb{R}^{2p}$.

I_d est la matrice identité et $P_\theta\text{-}\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \psi_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon) = 0$.

$\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^{2p}$.

Le lemme suivant établit le caractère LAN pour la famille de $(P_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$ solution de (2').

LEMME 2.2. — *La famille* $(P_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$ *des lois de* $(X_t^\varepsilon, 0 \leqq t \leqq T)$ *solution de* (2') *est LAN en tout point* $\theta \in K$ *compact de* Θ. *De plus*

$$\Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \varphi_\varepsilon(\theta) \int_0^T q(\theta, t, X^0)\, dW_t$$

où : $\Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon)$ *est une v. a. gaussienne centrée :* $\mathcal{N}(0, I_d)$ *dans* $\mathbb{R}^{2p}$,

$$q(\theta, t, X^0 = \left(X^0_{t-b_1}, X^0_{t-b_2}, \ldots, X^0_{t-b_p}, \right.$$
$$\left. -a_1 \sum_{i=1}^{p} a_i X^0_{t-b_i-b_1}, \ldots, -a_p \sum_{i=1}^{p} a_i X^0_{t-b_i-b_p}\right)$$

X^0 *est la solution de* (2′) *correspondant à* $\varepsilon = 0$.

$\varphi_\varepsilon(\theta)$ *est la matrice* $\varepsilon I^{-1/2}(\theta)$ *avec* $I(\theta)$ *la matrice* $(2p \times 2p)$ *symétrique défini positive :*

$$I_{i,j}(\theta) = \int_0^T (X^0_{t-b_i})(X^0_{t-b_j})\,dt, \qquad i, j = 1, \ldots, p.$$

$$I_{i,p+j}(\theta) = -a_j \int_0^T X^0_{t-b_i}\left(\sum_{l=1}^{p} a_e X^0_{t-b_e-b_j}\right)dt, \qquad i, j = 1, \ldots, p.$$

$$I_{p+i,p+j}(\theta) = a_i a_j \int_0^T \left(\sum_{l=1}^{p} a_l X^0_{t-b_i-b_l}\right)\left(\sum_{l=1}^{p} a_l X^0_{t-b_j-b_l}\right)dt, \quad i, j = 1, \ldots, p.$$

Preuve. – Le rapport de vraisemblance $Z_{\varepsilon,\theta}(u)$ s'écrit dans le cas où X^ε vérifie (2′) ([4], chap. 7) :

$$Z_{\varepsilon,\theta}(u) = \frac{dP^\varepsilon_{\theta+\varepsilon u}}{dP^\varepsilon_\theta}(X^\varepsilon)$$
$$= \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T S(t, X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - S(t, X^\varepsilon, \theta)\,dW(t)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T (S(t, X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - S(t, X^\varepsilon, \theta)^2\,dt\right\} \tag{6}$$

où

$$S(t, X^\varepsilon, \theta) = \sum_{i=1}^{p} a_i X^\varepsilon_{t-b_i}$$

et

$$S(t, X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) = \sum_{i=1}^{p} (a_i + \varepsilon u_i) X^\varepsilon_{t-b_i-\varepsilon u_{p+i}}.$$

On écrit le terme intégrale stochastique sous la forme :

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T (S(t, X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - S(t, X^\varepsilon, \theta))\,dW(t)$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T [S(t, X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u) - S(t, X^\varepsilon, \theta) - \langle u, \varepsilon q(\theta, t, X^0)\rangle]\,dW(t)$$
$$+ \int_0^T \langle u, q)\theta, t, X^0)\rangle\,dW(t)$$
$$(soit) = J_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon) + \langle u, \Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon)\rangle.$$

et

$$\frac{1}{\varepsilon}[S(t, X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u)-S(t, X^\varepsilon, \theta)]$$

$$=\sum_1^n u_i X^\varepsilon_{t-b_i-\varepsilon u_{p+i}}+\sum_i a_i \frac{1}{\varepsilon}\int\left[\sum_{j=1}^p a_j X^\varepsilon_{v-b_j}\right]dv$$

$$+\sum_{j=1}^p a_i [W(t-b_i)-W(t-b_i-\varepsilon u_{p+i})]$$

On utilise essentiellement la continuité de la solution X^0, un lemme de Gronwall et l'inégalité de Schwarz, pour montrer que la v. a. $J_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon)$ tend vers 0 en probabilité pour $\varepsilon \to 0$, et que la v. a. $\Delta_\varepsilon(\theta, X^\varepsilon)$ est gaussienne centrée de matrice de covariance $I(\theta)$ (*voir* [3[1]]). Pour le second terme de (6), on considère l'expression :

$$K_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T (S(t, X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u)-S(t, X^\varepsilon, \theta))^2 dt-\langle u, I(\theta)u\rangle$$

On a, pour $u=(u_1, \ldots, u_{2p})$:

$$\langle u, I(\theta)u\rangle=\sum_{i=1}^p u_i^2\int_0^T (X^0_{t-b_i})^2\,dt$$

$$+\sum_{i=1}^p u_{p+i}a_i^2\int_0^T\left(\sum_{l=1}^p a_l X^0_{t-b_l-b_i}\right)^2 dt$$

$$+2\left(\sum_{i, j=1\ldots p} u_i u_{p+j}\left(-a_j\int_0^T X^0_{t-b_i}\left(\sum_{l=1}^p a_l X^0_{t-b_l-b_j}\right)dt\right)\right.$$

$$+\sum_{\substack{i, j=1\ldots p\\ i<j}} u_{p+i}u_{p+j}\int_0^T\left(\sum_{l=1}^p a_l X^0_{t-b_i-b_l}\right)\left(\sum_{l=1}^p X^0_{t-b_j-b_l}\right)dt$$

$$+\sum_{\substack{i, j=1\ldots p\\ i\neq k}} u_i u_j\int_0^T (X^0_{t-b_i}X^0_{t-b_j})\,dt,$$

et

$$\int_0^T (S(t, X^\varepsilon, \theta+\varepsilon u)-S(t, X^\varepsilon, \theta))^2\,dt$$

$$=\int_0^T [\sum((a_i+\varepsilon u_i)X^\varepsilon_{t-b_i-\varepsilon u_{p+i}}-a_i X^\varepsilon_{t-b_i})^2$$

$$+2\sum_{i<j}((a_i+\varepsilon u_i)X^\varepsilon_{t-b_i-\varepsilon u_{p+i}}-a_i X^\varepsilon_{t-b_i})$$

$$\times((a_j+\varepsilon u_j)X^\varepsilon_{t-b_j-\varepsilon u_{p+j}}-a_j X^\varepsilon_{t-b_j})]\,dt$$

On montre alors avec des arguments similaires, que la v. a. $K_\varepsilon(\theta, u, X^\varepsilon)$ tend vers 0 en probabilité quand ε tend vers 0.

En regroupant les résultats précédents on déduit alors que :

$$Z_{\varepsilon,\theta}(u)=\exp\left\{\langle u,\Delta_\varepsilon(\theta,X^\varepsilon)\rangle+J_\varepsilon(\theta,u,X^\varepsilon)-\frac{1}{2}\langle u,I(\theta)u\rangle-\frac{1}{2}K_\varepsilon(\theta,u,X^\varepsilon)\right\}$$

d'où le résultat moyennant le changement de variable $u=I(\theta)^{-1/2}v$.

3.

Les lemmes suivants montrent la tension de la suite du processus de vraisemblance $(Z_{\varepsilon,\theta}(u),\ u\in\mathbb{R}^{2p})$ dans l'espace fonctionnel $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^{2p})$.

LEMME 2.3. — *Pour tout* $m>8p$, $R>0$, et K *compact de* Θ, *on a :*

$$\sup_{\theta\in K}\ \sup_{\substack{u_1,u_2\in\mathscr{U}_{\varepsilon,\theta}\\ \|u_1\|<R,\ \|u_2\|<R}}\|u_2-u_1\|^{-m/4}E_\theta|Z_{\varepsilon,\theta}^{1/m}(u_2)-Z_{\varepsilon,\theta}^{1/m}(u_1)|^m<C(1+R^a)$$

où la constante C *dépend de* K *et* $a=\dfrac{3m}{4}$.

Preuve. — On pose $\theta_i=\theta+\varepsilon u_i$, $u_i=(u_{ji})_j\in\mathbb{R}^{2p}$, $i=1,2$ et

$$\Delta X_\varepsilon(t)=S(t,X^\varepsilon,\theta_1)-S(t,X^\varepsilon,\theta_2).$$

Le rapport de vraisemblance pour deux valeurs θ_1 et θ_2 du paramètre s'écrit, pour l'observation X^ε :

$$\frac{dP_{\theta_1}^\varepsilon}{dP_{\theta_2}^\varepsilon}(X^\varepsilon)=\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\Delta X_\varepsilon(t)\,dW(t)-\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^T\Delta^2X_\varepsilon(t)\,dt\right\}$$

Posons :

$$V(t)=\exp\left\{\frac{1}{m\varepsilon}\int_0^t\Delta X_\varepsilon(t)\,dW(t)-\frac{1}{2m\varepsilon^2}\int_0^t\Delta^2X_\varepsilon(t)\,dt\right\}$$

De la définition (3) de $Z_{\varepsilon,\theta}(u)$ on déduit que :

$$V(T)=\exp\left(\frac{Z_{\varepsilon,\theta}(u_1)}{Z_{\varepsilon,\theta}(u_2)}\right)^{1/m}=\left(\frac{dP_{\theta_1}^\varepsilon}{dP_{\theta_2}^\varepsilon}(X^\varepsilon)\right)^{1/m}P_{\theta_2}^\varepsilon\quad\text{p. s.}$$

On écrit alors $V(t)=\exp y(t)$, où $(y(t),\ 0\leqq t\leqq T)$ est le processus vérifiant :

$$\begin{cases}y_0=0\\ y_t=-\dfrac{1}{2m\varepsilon^2}\displaystyle\int_0^t(\Delta X_\varepsilon(t))^2\,dt+\dfrac{1}{m\varepsilon}\int_0^t\Delta X_\varepsilon(t)\,dW(t).\end{cases}$$

La formule de Ito donne alors :

$$dV(t) = V(t)\left(-\frac{1}{2m\varepsilon^2}(\Delta X_\varepsilon(t))^2\right)dt$$
$$+\frac{1}{2}V(t).\left(\frac{1}{(m\varepsilon)^2}\Delta^2 X_\varepsilon(t)\right)dt + V(t).\frac{1}{m\varepsilon}\Delta X_\varepsilon(t)\,dW(t)$$
$$= \frac{1-m}{2(m\varepsilon)^2}.(\Delta X_\varepsilon(t))^2 V(t)\,dt + \frac{1}{m\varepsilon}\Delta X_\varepsilon(t)\,V(t)\,dW(t)$$

Comme $V(0)=1$, il en résulte :

$$V(T) = 1 + \frac{1-m}{2(m\varepsilon)^2}\int_0^T \Delta^2 X_\varepsilon(t)\,V(t)\,dt + \frac{1}{m\varepsilon}\int_0^T \Delta X_\varepsilon(t)\,V(t)\,dW(t).$$

D'autre part :

$$E_\theta\,|Z_{\varepsilon,\theta}^{1/m}(u_2) - Z_{\varepsilon,\theta}^{1/m}(u_1)|^m$$
$$= E_\theta\left|Z_{\varepsilon,\theta}^{1/m}(u_2)\left(1 - \frac{Z_{\varepsilon,\theta}^{1/m}(u_1)}{Z_{\varepsilon,\theta}^{1/m}(u_2)}\right)\right|^m$$
$$= E_\theta\left|\left(\frac{dP_{\theta_2}^\varepsilon}{dP_{\theta_1}^\varepsilon}\right)^{1/m}(1 - V(T))\right|^m = E_{\theta_2}\,|1 - V(T)|^m.$$

En appliquant l'inégalité $(a+b)^m \leqq 2^{m-1}(a^m + b^m)$ et l'inégalité de Holder pour $p=m$ et $q=\dfrac{m}{m-1}$, on obtient :

$$E_\theta\,|Z_{\varepsilon,\theta}^{1/m}(u_2) - Z_{\varepsilon,\theta}^{1/m}(u_1)|^m$$
$$\leqq \frac{C_1}{\varepsilon^{2m}}\int_0^T E_{\theta_2}((\Delta X_\varepsilon(t))^{2m} V^m(t))\,dt + \frac{C_2}{\varepsilon^m}\int_0^T E_{\theta_1}(\Delta X_\varepsilon(t))^m\,dt$$
$$\leqq \frac{C_1}{\varepsilon^{2m}}\int_0^T E_{\theta_1}((\Delta X_\varepsilon(t))^{2m}\,dt + \frac{C_2}{\varepsilon^m}\int_0^T E_{\theta_1}(\Delta X_\varepsilon(t))^m\,dt$$

où C_1 et C_2 sont des constantes positives.

De la définition,

$$\Delta X_\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{p}\left[(a_i + \varepsilon u_{i,1})X_{t-b_i-\varepsilon u_{p+i,1}}^\varepsilon - (a_i + \varepsilon u_{i,2})X_{t-b_i-\varepsilon u_{p+i,2}}^\varepsilon\right],$$

de l'inégalité de Holder, des propriétés du mouvement brownien, il découle :

$$E_{\theta_1}(\Delta X_\varepsilon(t))^{2m} \leqq K_1\,\varepsilon^{2m}\,\|u_2 - u_1\|^m + K_2\,\varepsilon^{3m}\,\|u_2 - u_1\|^{m/2}$$

et

$$E_{\theta_1}(\Delta X_\varepsilon(t))^m \leqq M_1\,\varepsilon^m\,\|u_2 - u_1\|^{m/2} + M_2\,\varepsilon^{2m}\,\|u_2 - u_1\|^{m/4}$$

Le lemme se déduit des majorations précédentes.

LEMME 2.4. — *Pour tout* $\varepsilon>0$ *et* $u\in\mathcal{U}_{\theta,\varepsilon}$, *on a, pour tout compact* K *de* Θ :

$$\sup_{\theta\in K} P_\theta^\varepsilon (Z_{\varepsilon,\theta}(u)\geqq e^{-\gamma\|u\|^2})\leqq C e^{-\gamma\|u\|^2}$$

où γ *et* C *sont des constantes positives.*

Preuve. — En suivant [3²], soit $0<a<\frac{1}{2}$ et $u=(u_1, \ldots, u_{2p})\in\mathbb{R}^{2p}$ avec $u_i>0$. En appliquant l'inégalité de Schwartz, on a pour $b>0$:

$$\begin{aligned}
P_\theta^\varepsilon (Z_{\varepsilon,\theta}(u)\geqq e^{-\gamma\|u\|^2}) &\leqq e^{a\gamma\|u\|^2} E_\theta (Z_{\varepsilon,\theta}(u))^a \\
&\leqq e^{a\gamma\|u\|^2} E_\theta\left\{\exp\left(\frac{a}{\varepsilon}\int_0^T \Delta X_\varepsilon(t)\,dW(t)-\frac{a}{2\varepsilon^2}\int_0^T (\Delta X_\varepsilon(t))^2\,dt\right)\right\} \\
&\leqq e^{a\gamma\|u\|^2} E_\theta\left\{\exp\left(\frac{a}{\varepsilon}\int_0^T \Delta X_\varepsilon(t)\,dW(t)\right.\right. \\
&\qquad\left.\left.-\frac{b}{2\varepsilon^2}\int_0^T (\Delta X_\varepsilon(t))^2\,dt+\frac{b-a}{2\varepsilon^2}\int_0^T (\Delta X_\varepsilon(t))^2\,dt\right)\right\} \\
&\qquad\times\left(E_\theta \exp\left(\frac{b-a}{\varepsilon^2}.\int_0^T (\Delta X_\varepsilon(t))^2\,dt\right)\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

D'autre part on a ([4], p. 216) :

$$E_\theta \exp\left(\int_0^T \frac{2a}{\varepsilon}\Delta X_\varepsilon(t)\,dW(t)-\frac{1}{2}\int_0^T\left(\frac{2a\,\Delta X_\varepsilon(t)}{\varepsilon}\right)^2 dt\right)=1.$$

En choisissant $b=2a^2$ et en notant

$$\Delta X_0(t)=S(t, X^0, \theta+\varepsilon u)-S(t, X^0, \theta)$$

où X^0 est la solution de (2′) pour $\varepsilon=0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
E_\theta\left(\exp.\frac{b-a}{\varepsilon^2}\int_0^T (\Delta X_\varepsilon(t))^2\,dt\right)
&\leqq E_\theta \exp\left[\left(-\frac{a(1-2a)}{\varepsilon^2}\int_0^T (\Delta X_0(t))^2\,dy\right)\right. \\
&\qquad\left.\times\exp.\left(\frac{2a(1-a)}{\varepsilon^2}\int_0^T |\Delta X_0(t)|.|\Delta X_\varepsilon(t)-\Delta X_0(t)|\,dt\right)\right]
\end{aligned}$$

En prenant $X_0^0=x_0>0$, on montre que la solution $(X_t^0, t\geqq 0)$ est croissante et que $X_t^0\geqq x_0$ pour tout t positif. On en déduit alors que :

$$|\Delta X_0(t)|\geqq x_0\,\varepsilon.\beta\|u\|, \qquad \text{où} \quad \beta>0.$$

Ce qui entraîne :

$$\exp\left(-\frac{a(1-2a}{\varepsilon^2}\int_0^T \Delta^2 X_0(t)\,dt\right)\leqq \exp.(-K_a\|u\|^2),$$

où $K_a>0$.

D'autre part par un lemme de Gronwal, on a :

$$X_t^0 \leqq x_0 \, B \, e^{AT}, \qquad 0 \leqq t \leqq T$$

où A, B sont des constantes positives.

Par conséquent :

$$|\Delta X_t^0| \leqq \varepsilon x_0 e^{AT} A_2 \|u\| \qquad (0 \leqq t \leqq T),$$

où $A_2 > 0$.

$$|\Delta X_\varepsilon(t) - \Delta X_0(t)| \leqq K'_a \varepsilon e^{AT} \sup_{0 \leqq t \leqq T} |W(t)|,$$

$$K'_a > 0.$$

En appliquant la majoration suivante [3[1]] :

$$E \exp (l \sup_{0 \leqq t \leqq T} |W(t)|) \leqq 2 (1 + T l^2) \exp \left(\frac{1}{2} T l^2 \right)$$

On obtient

$$E_\theta \exp \left(\frac{2a(1-a)}{\varepsilon^2} \int_0^T |\Delta X_0(t)| . |\Delta X_\varepsilon(t) - \Delta X_0(t)| \, dt \right)$$
$$\leqq 2 (1 + TL_a \|u\|^2) . \exp \left(\frac{1}{2} TL_a^2 \|u\|^2 \right)$$

où L_a est une constante positive.

On a alors :

$$P (Z_{\varepsilon, \theta}(u) \geqq e^{-\gamma \|u\|^2}) \leqq C . \exp . \left(a \gamma \|u\|^2 - \|u\|^2 \left(K_a - \frac{3}{2} TL_a^2 \right) \right)$$

En choisissant a tel que $K_a - \frac{3}{2} TL_a^2 = \frac{1}{4} K_a$ et γ vérifiant $\frac{1}{4} K_a - a\gamma > \gamma$, on en déduit que

$$P (Z_{\varepsilon, \theta}(u) \geqq e^{-\gamma \|u\|^2}) \leqq C . \exp (-\gamma \|u\|^2).$$

d'où le lemme.

III. BORNE MINIMAX. PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES

On déduit de la normalité asymptotique locale de la famille $(P_\theta^\varepsilon, \theta \in \Theta)$, comme dans [2], p. 162, une inégalité de Hajek :

THÉORÈME 3.1. — *Pour tout estimateur* $\hat{\theta}_\varepsilon^*$ *du paramètre* θ, *on a la minoration suivante :*

$$\lim_{\delta \to 0} \varliminf_{\varepsilon \to 0} \sup_{|\theta - \theta_0| < \delta} E_\theta^\varepsilon (w (\varphi_\varepsilon^{-1} (\theta_0) (\hat{\theta}_\varepsilon^* - \theta))) \geqq E \, w(\xi) \qquad (*)$$

pour tout $w \in W_{\varepsilon_1, 2}$ (voir I) *et où :* ξ *est une v. a. de loi normale :* $\mathcal{N}(0, I_d)$ *dans* $\mathbb{R}^{2p}$ *et* $\varphi_\varepsilon(\theta_0)$ *est la matrice de normalisation du lemme* 2.2.

– Les estimateurs qui réalisent l'égalité dans (∗), pour tout θ_0, sont dits asymptotiquement efficaces.

THÉORÈME 3.2. – *L'estimateur du maximum de vraisemblance* $\hat{\theta}_\varepsilon$ *est tel que, uniformément pour tout* $\theta \in K$ *compact de* Θ :

1. *Sous* P_θ^ε : $P_\theta^\varepsilon\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \hat{\theta}_\varepsilon = \theta$

$$\varphi_\varepsilon^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta) \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi, \qquad \mathscr{L}(\xi) \sim \mathscr{N}(O, \mathrm{Id}) \text{ dans } \mathbb{R}^{2p}$$

2. *Tous les moments d'ordre* $p>0$ *de la v. a.* $\varphi_\varepsilon^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta)$ *converge vers les moments du même ordre de la v. a.* ξ *quand* ε *tend vers* 0.

3. *L'estimation* $\hat{\theta}_\varepsilon$ *est asymptotiquement efficace.*

Preuve. – En suivant [2], p. 105, on note μ^ε la loi du processus $(Z_{\varepsilon,\theta}(u), u \in \mathbb{R}^{2p})$ sur $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^{2p})$, on déduit du lemme 2.2 la convergence des lois finidimensionnelles de $Z_{\varepsilon,\theta}$, et du lemme 2.3 et 2.4 découle la convergence faible, sous P_θ^ε, dans $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^{2p})$, de la suite μ^ε vers μ^0 loi du processus :

$$Z(u) = \exp\left\{\langle u, \xi\rangle - \frac{1}{2}\|u\|^2\right\} \qquad \text{où} \quad \mathscr{L}(\xi) \sim \mathscr{N}(0, \mathrm{Id}).$$

D'autre part de la définition de $\hat{\theta}_\varepsilon$, et de la continuité de la fonctionnelle définie sur $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^{2p})$ par : $h \to \sup_{u<x} h(u) - \sup_{u \geq x} h(u)$, on a pour $x \in \mathbb{R}^{2p}$:

$$\begin{aligned}
P_\theta^\varepsilon(\varphi_\varepsilon^{-1}(\theta)(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta) < x) \\
&= P_\theta^\varepsilon\left(\sup_{u<x} \frac{dP_\theta^\varepsilon + \varphi_\varepsilon(\theta)u}{dP_\theta^\varepsilon} > \sup_{u \geq x} \frac{dP_\theta^\varepsilon + \varphi_\varepsilon(\theta)u}{dP_\theta^\varepsilon}\right) \\
&= P_\theta^\varepsilon(\sup_{u<x} Z_{\varepsilon,\theta}(u) \geqq \sup_{u \geq x} Z_{\varepsilon,\theta}(u)) \\
&\to P(\sup_{u<x} Z(u) \geqq \sup_{u \geq x} z(u)) \\
&= P\left(\sup_{u<x} \exp\left\{\langle u, \xi\rangle - \frac{1}{2}\|u\|^2\right\} \geqq \sup_{u \geq x} \exp\left\{\langle u, \xi\rangle - \frac{1}{2}\|u\|^2\right\}\right) \\
&= P(\xi < x)
\end{aligned}$$

puisque $Z(u)$ atteint presque sûrement son maximum au point $\hat{u}(\theta) = \xi$, d'où le théorème.

Les autres assertions du théorème découlent du théorème 1.1 [2], p. 174.

– *Estimateurs bayesiens.* – Si le paramètre θ est une v. a. dans $\mathbb{R}^{2p}$ de densité *a priori* $\Pi(\theta)$ sur Θ, on note $\tilde{\theta}_\varepsilon(X^\varepsilon)$ l'estimateur de Bayes correspondant à la densité $\Pi(\theta)$ et à la fonction de perte $W(\theta, y) = W(\theta - y)$, où $W(u) = |u|^a$, pour $a > 1$.

L'estimateur $\tilde{\theta}_\varepsilon(X^\varepsilon)$ est défini par l'équation :

$$\int_\Theta W(\theta, \tilde{\theta}_\varepsilon) p(\theta \mid X^\varepsilon) d\theta = \operatorname*{Inf}_{y \in \Theta} \int_\Theta W(\theta, y) p(\theta (X^\varepsilon) d\theta$$

où $p(\theta \mid X^\varepsilon)$ est la densité *a posteriori* de θ.

On a alors en utilisant les lemmes 2.2, 2.3, 2.4 et le théorème 2.1 [2], p. 179 :

THÉORÈME 3.3. — *Si la densité* a priori $\Pi(\theta)$ *est continue et strictement positive, l'estimateur de Bayes* $\tilde{\theta}_\varepsilon$ *possède les propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance du théorème* 3.2.

RÉFÉRENCES

[1] J. HAJEK, Local Asymptotic Minimax and Admissibility in Estimation, *Proceedings of the sixth Berkeley Symposium on Math. Statist. and Proba.*, Univ. Calif. Press, Berkeley, vol. **1**, 1972, p. 175-194.

[2] I. A. IBRAGIMOV et R. Z. HASMINSKI, *Statistical Estimation: Asymptotic Theory*, Springer, New York, 1981.

[3[1]] Yu. A. KUTOYANTS, *Parameter Estimation for Stochastic Process*, Berlin, Heldermann, 1984.

[3[2]] Yu. A. KUTOYANTS, An Example of Estimating a Parameter of a Nondifferentiable Drift, *Theory Proba. Appl.*, vol. **33**, n° 1, 1988, p. 175-179.

[4] R. S. LIPTZER et A. N. SHIRYAEV, *Statistics of Random Processes*, vol. **I**, Springer, New York, 1977.

[5] M. B. PRIESTLEY, *Spectral Analysis and Times Series*, vol. **1**, Academic Press, 1981.

[6] D. G. KORENEVSKY, *Stability of Dynamical Systems Under Random Perturbation of Parameters, Algebric Criteries*, Kiev, Naukova Dumka., 1989 (en russe).

(*Manuscrit reçu le* 7 *janvier* 1991 ;
corrigé le 13 *mai* 1991.)