ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

JEAN DUCHON
RAOUL ROBERT

Évolution d'une interface par capillarité et diffusion de volume. I. Existence locale en temps

Annales de l'I. H. P., section C, tome 1, nº 5 (1984), p. 361-378
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1984__1_5_361_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 1, n° 5, 1984, p. 361-378. *Analyse non linéaire*

Évolution d'une interface par capillarité et diffusion de volume
I. Existence locale en temps

par

Jean DUCHON et Raoul ROBERT
Laboratoire I. M. A. G., B. P. n° 68,
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France

RÉSUMÉ. — Existence locale en temps pour le problème suivant : une courbe se déplace à une vitesse égale à la dérivée normale d'une fonction harmonique, égale au bord à la courbure de la courbe (cas d'une donnée initiale graphe d'une fonction régulière).

ABSTRACT. — We prove existence locally in time for the following problem: a curve moves with velocity equal to the normal derivative of a harmonic function, whose boundary value is given by the curvature of the curve (here in the case of an initial curve graph of a smooth function).

INTRODUCTION

Nous considérons le problème d'évolution d'interface suivant : à l'instant t, Ω_t est un domaine du plan dont la frontière Γ_t se déplace à une vitesse (mesurée suivant la normale extérieure ν) égale à $-\frac{\partial K}{\partial \nu}$, dérivée normale d'une fonction harmonique dans Ω_t dont la valeur au bord est égale à la courbure K de Γ_t. Ceci est un modèle du phénomène de corrosion par capillarité et diffusion de volume (cf. [*2*] [*6*]).

Nous nous proposons dans cet article d'établir l'existence et l'unicité d'une solution Γ_t sur un intervalle de temps $0 \leq t \leq T$ pour toute donnée initiale graphe d'une fonction suffisamment régulière ($T > 0$ dépendant de Γ_0).

La technique de démonstration, qui consiste à faire apparaître la solution comme point fixe d'un opérateur contractant à partir d'une formulation intrinsèque de l'équation d'évolution, est reprise de [1]. La difficulté consiste ici à obtenir des estimations suffisantes pour l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \nu}$. Dans ce but, on est amené à estimer la norme, comme opérateurs sur L^2, de certains noyaux associés à l'interface Γ_t. Ceci peut se faire de deux façons ; soit en remarquant qu'on peut travailler avec assez de régularité sur Γ_t pour pouvoir calculer leur norme Hilbert-Schmidt, soit, plus brutalement, en estimant ces noyaux comme des noyaux singuliers définissant des opérateurs continus sur L^2 d'après de récents résultats de Y. Meyer [5].

§ 1. ÉCRITURE DE L'ÉQUATION ET NOTATIONS

Dans ce travail, nous ne considérerons que des courbes lipschitziennes que nous supposerons paramétrées par l'abscisse curviligne :

$$\Gamma = \{ z(s) : s \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{C},$$

avec

$$z'(s) = e^{i\varphi(s)}, \qquad | \varphi(s) | \leq \alpha < \pi/2 .$$

Noter qu'alors :

$$| z(s) - z(\sigma) | \leq | s - \sigma | \leq \frac{1}{\cos \alpha} | z(s) - z(\sigma) | .$$

Notons Ω l'ouvert situé au-dessus de Γ, $\tau = e^{i\varphi}$ le vecteur unitaire tangent, $\nu = - ie^{i\varphi}$ le vecteur normal sortant et $n = - \nu$.

Nous désignerons par $\frac{\partial f}{\partial \nu}(s)$ la trace dérivée normale (le problème de l'existence de cette trace pour f convenable sera examiné au § 4), au point $z(s)$ de Γ, de la solution U du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & \text{dans } \Omega , \\ U(z(s)) = f(s) . \end{cases}$$

Enfin pour Γ suffisamment régulière, on notera $K(s) = \varphi'(s)$ la courbure de Γ au point d'abscisse s, de sorte que :

$$\frac{d\tau}{ds} = Kn .$$

Décrivons maintenant l'évolution de l'interface.

Nous supposerons l'interface infinie Γ_t donnée par la représentation paramétrique régulière $\tilde{z}(t, \sigma)$, σ étant une abscisse curviligne sur Γ_t.

Nous allons montrer qu'on peut se ramener à prendre à chaque instant l'origine de l'abscisse curviligne sur une même trajectoire orthogonale aux Γ_t. Cela revient à chercher une fonction $h(t)$ telle qu'en effectuant le changement de variable admissible $(t, \sigma) \to (t, s)$, $s = \sigma - h(t)$, la nouvelle représentation paramétrique $z(t, s) = \tilde{z}(t, s + h(t))$ vérifie :

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t, 0) \cdot \frac{\partial z}{\partial s}(t, 0) = 0, \qquad \forall t \geq 0, \tag{1}$$

et donc :

$$\frac{dh}{dt}(t) = -\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t}(t, h(t)) \cdot \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \sigma}(t, h(t)).$$

Cette équation différentielle assure l'existence d'une solution locale unique $h(t)$ pour toute donnée initiale. Nous supposerons désormais Γ_t paramétrée par une telle représentation $z(t, s)$.

L'équation d'évolution de Γ_t s'écrit alors :

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t, s) \cdot v(t, s) = -\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial v}(t, s).$$

Calculons $\dfrac{\partial z}{\partial t} \cdot \tau$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial t} \cdot \tau\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} \cdot \tau + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \mathrm{K}n = \mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial v}$$

$\left(\text{car } \dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} \cdot \tau = \dfrac{\partial \tau}{\partial t} \cdot \tau = 0\right)$, ce qui, avec (1), donne :

$$\frac{\partial z}{\partial t} \cdot \tau = \int_0^s \mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial v}\, d\sigma$$

d'où $z(t, s)$ vérifie :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial v} v + \left(\int_0^s \mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial v}\, d\sigma\right)\tau, \\ &z(0, s) = z_0(s). \end{aligned}\right.$$

Dérivant cette équation par rapport à s $\left(\text{en remarquant que } \dfrac{\partial v}{\partial s} = \mathrm{K}\tau\right)$, on obtient :

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \left(-\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial v} - \mathrm{K}\int_0^s \mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial v}\, d\sigma\right)v,$$

or $\dfrac{\partial \tau}{\partial t} = - \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} v$, on obtient donc l'équation en φ :

$$\text{(E)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial s}\dfrac{\partial \mathrm{K}}{\partial v} = \mathrm{K}\displaystyle\int_0^s \mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial v}\,d\sigma, \qquad \mathrm{K} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \\ \varphi(0, s) = \varphi_0(s). \end{array} \right.$$

Les paragraphes suivants sont consacrés à l'étude de cette équation. Il nous arrivera fréquemment de désigner par D l'opérateur de dérivation par rapport à s.

§ 2. UN RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ LOCAL EN TEMPS

Précisons quelques notations : on note $|f|_p$ la norme d'une fonction f dans L^p, $1 \leq p \leq \infty$; $\mathrm{H}^2 = \mathrm{H}^2(\mathbb{R})$ désigne l'espace de Sobolev habituel qu'on munira de la norme $\|\varphi\| = \max\limits_{j=0,1,2} |\varphi^{(j)}|_2$. Nous noterons également $\|\psi\| = \operatorname*{ess-sup}\limits_{0 \leq t \leq \mathrm{T}} \|\psi(t)\|$ la norme dans $\mathrm{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathrm{H}^2)$.

$\hat{f}(\xi) = \displaystyle\int e^{-2\pi i \xi x} f(x)dx$ désigne la transformée de Fourier d'une fonction f et $f * g$ le produit de convolution de f et g lorsqu'il est défini.

Le but de cet article est de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Pour* φ_0 *appartenant à l'espace* H^2, *avec* $|\varphi_0|_\infty < \pi/2$, *il existe* $\mathrm{T} > 0$ *et* φ *continue de* $[0, \mathrm{T}]$ *dans* H^2 *solution de* (E). *De plus, il existe une boule de* $\mathrm{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathrm{H}^2)$ *dans laquelle la solution est unique.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons transformer l'équation (E) en introduisant l'opérateur Λ qui donne explicitement $\dfrac{\partial}{\partial v}$ lorsque Γ est une droite :

$$(\Lambda f)\hat{}(\xi) = 2\pi |\xi| \hat{f}(\xi).$$

Nous écrirons (E) sous la forme :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Lambda^3 \varphi = \mathrm{K}\int_0^s \mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial v}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial v} - \Lambda\right)\mathrm{K}.$$

La solution de l'équation linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \Lambda^3 \varphi = \mathrm{F} \\ \varphi(0, s) = \varphi_0(s) \end{array} \right.$$

s'écrit explicitement $\varphi(t) = N_t * \varphi_0 + \int_0^t N_{t-\theta} * F(\theta)d\theta$, où $\hat{N}_t(\xi) = e^{-t|2\pi\xi|^3}$. Ainsi le problème (E) s'écrit :

$$\varphi(t) = N_t * \varphi_0 + \int_0^t N_{t-\theta} * F(\varphi(\theta))d\theta\,,$$

où on a posé, pour $\varphi \in H^2$:

$$F(\varphi) = K\int_0^s K\frac{\partial K}{\partial v}d\sigma + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial v} - \Lambda\right)K\,.$$

Ou encore, en définissant $\mathcal{J}\psi$ pour $\psi \in L^\infty(0, T\,; H^2)$ par

$$\mathcal{J}\psi(t) = \int_0^t N_{t-\theta} * F(N_\theta * \varphi_0 + \psi(\theta))d\theta\,,$$

(E) devient :

(E1) $$\mathcal{J}\psi = \psi\,.$$

Nous allons commencer par montrer que pour T et $r > 0$ assez petits, l'opérateur non linéaire $\mathcal{J}$ envoie la boule fermée de rayon r de $L^\infty(0, T\,; H^2)$ dans elle-même.

On a pour $j = 0, 1, 2$:

$$D^j\mathcal{J}\psi(t) = \int_0^t D^jN_{t-\theta} * F(N_\theta * \varphi_0 + \psi(\theta))d\theta\,,$$

d'où :

$$|D^j\mathcal{J}\psi(t)|_2 \leq \int_0^t |D^jN_{t-\theta}|_1\, |F|_2 d\theta\,.$$

Or,

$$|D^jN_{t-\theta}|_1 = (t-\theta)^{-j/3}a_j\,, \qquad a_j = |D^jN_1|_1\,,$$

d'où :

$$|D^j\mathcal{J}\psi(t)|_2 \leq \frac{a_j}{1-j/3}\,t^{1-j/3}\ \underset{0\leq\theta\leq T}{\text{ess}-\sup}\,|F(N_\theta * \varphi_0 + \psi(\theta))|_2\,.$$

Nous montrerons plus loin que pour $\varphi \in H^2$ vérifiant $\|\varphi\| \leq R$ et $|\varphi|_\infty \leq \alpha < \pi/2$, on a l'estimation :

(I) $$|F(\varphi)|_2 \leq C(R, \alpha)\,.$$

Or, si $\varphi(t) = N_t * \varphi_0 + \psi(t)$, on a $\|\varphi(t)\| \leq a_0\|\varphi_0\| + r$ et comme $N_t * \varphi_0 \to \varphi_0$ dans L^∞ quand $t \to 0$ et $|\psi(t)|_\infty \leq \|\psi(t)\| \leq r$, pour T et r assez petits, on aura $|\varphi(t)|_\infty \leq \alpha < \pi/2$ d'où :

$$\underset{0\leq\theta\leq T}{\text{ess}-\sup}\,|F(\varphi(\theta))|_2 \leq C(a_0\|\varphi_0\| + r, \alpha)\,.$$

On en déduit :

$$|D^j\mathcal{J}\psi(t)|_2 \leq \frac{a_j}{1-j/3}\,t^{1-j/3}C(a_0\|\varphi_0\| + r, \alpha)\,,$$

il s'ensuit que pour T et r assez petits, on a :

$$|\mathrm{D}^j \mathscr{J}\psi(t)|_2 \leq r \qquad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq \mathrm{T}\,.$$

Autrement dit, $\mathscr{J}$ envoie la boule de rayon r de $\mathrm{L}^\infty(0, \mathrm{T}\,;\, \mathrm{H}^2)$ dans elle-même.

Montrons de même que pour T assez petit $\mathscr{J}$ est contractant sur cette boule. On a :

$$\begin{aligned} &|\mathrm{D}^j \mathscr{J}\psi_1(t) - \mathrm{D}^j \mathscr{J}\psi_2(t)|_2 \\ &\quad \leq \frac{a_j}{1 - j/3}\, t^{1-j/3} \operatorname*{ess-sup}_{0 \leq \theta \leq \mathrm{T}} |\mathrm{F}(\mathrm{N}_\theta * \varphi_0 + \psi_1(\theta)) - \mathrm{F}(\mathrm{N}_\theta * \varphi_0 + \psi_2(\theta))|_2\,. \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant une deuxième estimation essentielle qui sera démontrée plus loin :

$$\text{(II)} \qquad |\mathrm{F}(\varphi_1) - \mathrm{F}(\varphi_2)|_2 \leq \mathrm{C}_1(\mathrm{R}, \alpha)\, \|\varphi_1 - \varphi_2\|\,,$$

pour $\varphi_i \in \mathrm{H}^2$, $\|\varphi_i\| \leq \mathrm{R}$, $|\varphi_i|_\infty \leq \alpha < \pi/2$, $i = 1, 2$.
D'où il vient :

$$|\mathrm{D}^j \mathscr{J}\psi_1(t) - \mathrm{D}^j \mathscr{J}\psi_2(t)|_2 \leq \frac{a_j}{1 - j/3}\, t^{1-j/3} \mathrm{C}_1(a_0 \|\varphi_0\| + r, \alpha)\, \|\psi_1 - \psi_2\|\,,$$

il s'ensuit que pour T assez petit, $\mathscr{J}$ est contractant sur la boule de rayon r de $\mathrm{L}^\infty(0, \mathrm{T}\,;\, \mathrm{H}^2)$.

En conséquence, $\mathscr{J}$ possède un point fixe dans cette boule :

$$\psi \in \mathrm{L}^\infty(0, \mathrm{T}\,;\, \mathrm{H}^2), \qquad \|\psi\| \leq r, \qquad \mathscr{J}\psi = \psi\,.$$

D'où en revenant à $\varphi(t) = \mathrm{N}_t * \varphi_0 + \psi(t)$, il vient :

$$\varphi(t) = \mathrm{N}_t * \varphi_0 + \int_0^t \mathrm{N}_{t-\theta} * \mathrm{F}(\varphi(\theta))d\theta\,,$$

et comme $\mathrm{F}(\varphi(\theta)) \in \mathrm{L}^\infty(0, \mathrm{T}\,;\, \mathrm{L}^2)$, φ est continue de $[0, \mathrm{T}]$ dans H^2 et est solution (au sens des distributions) de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \Lambda^3 \varphi = \mathrm{F}(\varphi)\,, \\ \varphi(0, s) = \varphi_0(s)\,, \end{cases}$$

donc de (E). L'unicité est immédiate par contraction. ■

On voit que la démonstration repose sur les estimations (I) et (II) qui sont l'objet des paragraphes suivants; résumons-en les grandes lignes.

Posons :

$$\mathrm{A}(\varphi) = \mathrm{K} \int_0^s \mathrm{K} \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial v}\, d\sigma$$

et

$$\mathrm{B}(\varphi) = \mathrm{D}\left(\frac{\partial}{\partial v} - \Lambda\right)\mathrm{K}\,, \qquad \text{de sorte que} \quad \mathrm{F} = \mathrm{A} + \mathrm{B}\,.$$

La majoration de $|A(\varphi)|_2$ est simple, on écrit :

$$|A(\varphi)|_2 \leq |K|_2^2 \left|\frac{\partial K}{\partial v}\right|_2$$

et on utilise l'inégalité de Payne-Weinberger

$$\left|\frac{\partial K}{\partial v}\right|_2 \leq \mathrm{Co}(\alpha)\,|DK|_2,$$

d'où

$$|A(\varphi)|_2 \leq \mathrm{Co}(\alpha)\,\|\varphi\|^3.$$

Les autres estimations, celles de $|A(\varphi_1) - A(\varphi_2)|_2$, de $|B(\varphi)|_2$ et de $|B(\varphi_1) - B(\varphi_2)|_2$, résulteront de la formule

$$\frac{\partial}{\partial v} - \Lambda = (Y - HX)\left(\frac{1}{2}H + X\right)^{-1} D,$$

où X et Y sont les parties réelle et imaginaire de l'opérateur Z défini par le noyau

$$Z(s, \sigma) = \frac{1}{2\pi}\frac{z(\sigma) - z(s) - (\sigma - s)z'(s)}{(\sigma - s)(z(\sigma) - z(s))}$$

suivant $Zu(s) = \int Z(s, \sigma)u(\sigma)d\sigma$.

H est la transformation de Hilbert :

$$Hu(s) = \text{v. p.}\ \frac{1}{\pi}\int \frac{u(\sigma)}{s - \sigma}\,d\sigma.$$

Nous montrerons l'inégalité $\left\|\left(\frac{1}{2}H + X\right)^{-1}\right\|_{op} \leq 2\,\mathrm{Co}(\alpha)$ ($\|\cdot\|_{op}$ désigne la norme d'opérateur sur L^2).
Enfin, des majorations de $\|Z\|_{op}$ et $\|DZ\|_{op}$ en fonction de R et α, et de $\|Z_1 - Z_2\|_{op}$ et $\|DZ_1 - DZ_2\|_{op}$ en fonction de R, α et $\|\varphi_1 - \varphi_2\|$, nous permettent d'établir (I) et (II).

§ 3. ÉTUDE DE Z

On note $V^{\frac{1}{2}} = V^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions u localement intégrables telles que $\frac{u(\sigma) - u(s)}{\sigma - s} \in L^2(ds \otimes d\sigma)$. On vérifie facilement (cf. [*3*]) que $V^{\frac{1}{2}}$ est l'espace des distributions tempérées u telles que $\widehat{u'}$ est localement intégrable et $\int |2\pi\xi|^{-1} |\widehat{u'}|^2 d\xi < +\infty$. On définit alors $\Lambda^{\frac{1}{2}}u$ par $(\Lambda^{\frac{1}{2}}u)\hat{} = -i \operatorname{sgn} \xi |2\pi\xi|^{-\frac{1}{2}}\widehat{u'}$, et on a :

$$\left| \frac{u(\sigma) - u(s)}{\sigma - s} \right|_2 = \sqrt{2\pi} \, | \Lambda^{\frac{1}{2}}u |_2 .$$

Posons :

$$q(s, \sigma) = \frac{z(\sigma) - z(s)}{\sigma - s},$$

alors

$$Z(s, \sigma) = \frac{1}{2\pi q} \frac{\partial q}{\partial s}.$$

Commençons par calculer les normes des dérivées $\dfrac{\partial^k q}{\partial s^k}$ dans l'espace $L^2(ds \otimes d\sigma)$.

LEMME 1. — *Soit u une fonction telle que $u^{(k)} \in V^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Alors, on a :*

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial s^k} \frac{u(\sigma) - u(s)}{\sigma - s} \right|_2 = \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \left| \frac{u^{(k)}(\sigma) - u^{(k)}(s)}{\sigma - s} \right|_2 = \sqrt{\frac{2\pi}{2k+1}} \, | \Lambda^{\frac{1}{2}}u^{(k)} |_2 .$$

Démonstration. — On a :

$$\frac{\partial^k}{\partial s^k} \frac{u(\sigma) - u(s)}{\sigma - s} = \frac{k!}{(\sigma - s)^{k+1}} \left[u(\sigma) - u(s) - \ldots - \frac{1}{k!}(\sigma - s)^k u^{(k)}(s) \right].$$

On pose $\sigma = s + h$ et on calcule la transformée de Fourier de cette expression pour h fixé ; ce qui donne :

$$\frac{k!}{h^{k+1}} \left[e^{2\pi i h\xi} - 1 - \ldots - \frac{1}{k!}(2\pi i h\xi)^k \right] \hat{u}(\xi).$$

Et en appliquant le théorème de Plancherel :

$$\begin{aligned} &\iint \left| \frac{\partial^k}{\partial s^k} \frac{u(\sigma) - u(s)}{\sigma - s} \right|^2 ds d\sigma \\ &\quad = \iint \left| \frac{k!}{h^{k+1}} \left[e^{2\pi i h\xi} - 1 - \ldots - \frac{1}{k!}(2\pi i h\xi)^k \right] \hat{u}(\xi) \right|^2 dh d\xi \\ &\quad = \int | (2\pi i\xi)^{k+1} \hat{u}(\xi) |^2 \, |2\pi\xi|^{-1} d\xi \int \left| k! \frac{e^{ix} - 1 - \ldots - \frac{1}{k!}(ix)^k}{x^{k+1}} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

On calcule facilement :

$$\int \left| \frac{e^{ix} - 1}{x} \right|^2 dx = 2\pi .$$

Par récurrence sur k, l'intégrale

$$\int \left| k! \frac{e^{ix} - 1 - \ldots - \frac{1}{k!}(ix)^k}{x^{k+1}} \right|^2 dx$$

s'y ramène, on trouve qu'elle vaut $\frac{2\pi}{2k+1}$, d'où l'égalité du lemme. ■

Du lemme 1, on déduit facilement :

LEMME 2. — *Soit Γ une courbe lipschitzienne* (avec les notations du § 1), *alors si $\varphi \in V^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$, le noyau $Z(s, \sigma)$ est de carré intégrable et donc définit un opérateur compact sur* L^2.

Démonstration. — On a :

$$Z(s, \sigma) = \frac{1}{2\pi q} \frac{\partial q}{\partial s},$$

d'où

$$| Z(s, \sigma) |_2 \leq \frac{1}{2\pi} \left| \frac{1}{q} \right|_\infty \left| \frac{\partial q}{\partial s} \right|_2 \leq \frac{1}{2\pi\sqrt{3} \cos \alpha} \left| \frac{z'(\sigma) - z'(s)}{\sigma - s} \right|_2,$$

d'après le lemme 1. D'autre part,

$$| z'(\sigma) - z'(s) | = | e^{i\varphi(\sigma)} - e^{i\varphi(s)} | \leq | \varphi(\sigma) - \varphi(s) |,$$

d'où

$$| Z(s, \sigma) |_2 \leq \frac{1}{2\pi\sqrt{3} \cos \alpha} \left| \frac{\varphi(\sigma) - \varphi(s)}{\sigma - s} \right|_2.$$ ■

§ 4. POTENTIEL DE SIMPLE COUCHE, EXPRESSION DE $\frac{\partial}{\partial \nu}$ ET MAJORATION DE $\left\| \left(\frac{1}{2} H + X \right)^{-1} \right\|_{op}$

On définit le potentiel de simple couche de densité $g(s)$ sur Γ, pour $g \in L^2(\mathbb{R})$, par :

$$\mathscr{S}g(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int \text{Log} \left| \frac{\zeta - z(\sigma)}{\zeta_0 - z(\sigma)} \right| g(\sigma) d\sigma$$

où ζ_0 est choisi arbitrairement. C'est une fonction continue sur $\mathbb{C}$, harmonique sur le complémentaire de Γ. On note :

$$Sg(s) = \mathscr{S}g(z(s)).$$

On sait (cf. [4]) que la dérivée normale $\frac{\partial}{\partial \nu}\mathcal{S}g$, obtenue par passage à la limite dans Ω, existe presque partout et vaut :

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\mathcal{S}g = -\frac{1}{2}g + \mathrm{Y}g,$$

où Y est donné par le noyau $\mathrm{Y}(s, \sigma) = \mathrm{Im}\, \mathrm{Z}(s, \sigma)$. De même, dans l'ouvert complémentaire de $\overline{\Omega}$, dont la normale sortante est $n = -\nu$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{S}g = -\frac{1}{2}g - \mathrm{Y}g.$$

Par ailleurs, un rapide calcul montre que :

$$\mathrm{DS}g = \frac{1}{2}\mathrm{H}g + \mathrm{X}g$$

où X est l'opérateur donné par le noyau

$$\mathrm{X}(s, \sigma) = \mathrm{Re}\, \mathrm{Z}(s, \sigma).$$

On montre alors :

LEMME 3. — *Soit* Γ *une courbe lipschitzienne avec* $\varphi \in \mathrm{V}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$, *alors l'opérateur* $\frac{1}{2}\mathrm{H} + \mathrm{X}$ *est un isomorphisme sur* L^2.

Démonstration. — On déduit du lemme 2 que X est un opérateur de Hilbert-Schmidt, donc compact. D'après l'alternative de Fredholm, il nous suffit de montrer que $\frac{1}{2}\mathrm{H} + \mathrm{X}$ est injectif. Soit donc $g \in \mathrm{L}^2$ telle que $\left(\frac{1}{2}\mathrm{H} + \mathrm{X}\right)g = 0$, c'est-à-dire $\frac{d}{ds}\mathcal{S}g(z(s)) = 0$: $\mathcal{S}g(\zeta)$ est constante sur Γ, harmonique sur Ω, et la fonction maximale $(\nabla\mathcal{S}g)_*(z(s)) \in \mathrm{L}^2(ds)$ (cf. [4]). Il s'ensuit que $\mathcal{S}g(\zeta)$ est constante sur Ω, d'où $\frac{\partial}{\partial \nu}\mathcal{S}g = 0$; de même $\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{S}g = 0$ et donc $g = 0$. ■

Rappelons la définition de la fonction maximale $(\nabla \mathrm{U})_*$. Pour U fonction harmonique sur Ω, on pose pour $\zeta_0 \in \Gamma$:

$$(\nabla \mathrm{U})_*(\zeta_0) = \sup_{\zeta \in \mathrm{C}(\zeta_0)} |\nabla \mathrm{U}(\zeta)|,$$

où $\mathrm{C}(\zeta_0) = \zeta_0 + \mathrm{C}$ et C désigne le cône

$$\mathrm{C} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \mathrm{M}\,|x| \},$$

M désignant un réel > 0 fixé tel que $\mathrm{M} > \mathrm{tg}\, \alpha$.

Du lemme 3, on déduit immédiatement le résultat suivant :

LEMME 4. — *Soit* Γ *une courbe lipschitzienne avec* $\varphi \in V^{\frac{1}{2}}$. *Soit* $f(s)$ *une fonction donnée telle que* $Df \in L^2$. *Alors le problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & \textit{dans } \Omega, \\ U(z(s)) = f(s) \end{cases}$$

a une solution unique U *telle que* $(\nabla U)_* \in L^2(ds)$.

Démonstration. — La solution est donnée, à une constante additive près, par

$$U = \mathscr{S}\left(\frac{1}{2}H + X\right)^{-1} Df. \qquad \blacksquare$$

On a ensuite, avec les hypothèses du lemme 4,

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial U}{\partial v} = \left(-\frac{1}{2} + Y\right)\left(\frac{1}{2}H + X\right)^{-1} Df.$$

D'autre part,

$$Df = \left(\frac{1}{2}H + X\right)\left(\frac{1}{2}H + X\right)^{-1} Df, \qquad \Lambda = HD \quad \text{et} \quad H^2 = -1,$$

d'où $\Lambda f = \left(-\frac{1}{2} + HX\right)\left(\frac{1}{2}H + X\right)^{-1} Df$ et finalement, on obtient l'expression de $\frac{\partial}{\partial v}$:

$$\frac{\partial}{\partial v} - \Lambda = (Y - HX)\left(\frac{1}{2}H + X\right)^{-1} D.$$

LEMME 5. — *Si* Γ *est une courbe lipschitzienne avec* $\varphi \in V^{\frac{1}{2}}$, *on a*

$$\left\| \left(\frac{1}{2}H + X\right)^{-1} \right\|_{op} \leq 2\,\mathrm{Co}(\alpha)$$

et

$$\left\| Y\left(\frac{1}{2}H + X\right)^{-1} \right\|_{op} \leq \mathrm{Co}(\alpha)$$

où

$$\mathrm{Co}(\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha + \sqrt{\mathrm{tg}^2\,\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}},$$

on rappelle que φ *vérifie* $|\varphi|_\infty \leq \alpha < \pi/2$.

Démonstration. — Soit $h \in L^2$, posons $g = \left(\frac{1}{2}H + X\right)^{-1} h$ et $U = \mathcal{S}g$. On a alors :

$$\frac{\partial U}{\partial v} = -\frac{1}{2}g + Yg,$$
$$\frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{1}{2}g - Yg.$$

D'où $-g = \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial U}{\partial n}$ et $2Yg = \frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial U}{\partial n}$.

D'après l'inégalité de Payne-Weinberger (cf. [*4*]), on a :

$$\left|\frac{\partial U}{\partial v}\right|_2 \leq \mathrm{Co}(\alpha)\,|\,DSg\,|_2 \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|_2 \leq \mathrm{Co}(\alpha)\,|\,DSg\,|_2\,.$$

D'où $|g|_2 \leq 2\,\mathrm{Co}(\alpha)\,|h|_2$ et $|Yg|_2 \leq \mathrm{Co}(\alpha)\,|h|_2$. ■

Remarquons que la condition $\varphi \in V^{\frac{1}{2}}$, qui n'est pas nécessaire pour obtenir les résultats de ce paragraphe (ceci peut se faire par les techniques de [*4*] sous la seule hypothèse que Γ est une courbe lipschitzienne), simplifie la justification de ces propriétés grâce à la compacité de X et suffit à notre propos.

Nous considérerons maintenant deux fonctions φ_1 et φ_2 convenables : $\varphi_i \in H^2$, $|\varphi_i|_\infty \leq \alpha < \pi/2$; et nous noterons z_i, K_i, q_i, Z_i, X_i, Y_i et $\frac{\partial}{\partial v_i}$ les fonctions, noyaux et opérateurs z, K, q, Z, X, Y et $\frac{\partial}{\partial v}$ correspondants. Nous noterons R_j le maximum des normes L^2 de $\varphi_1^{(j)}$ et $\varphi_2^{(j)}$, $j = 0, 1, 2$; $\rho_j = |\varphi_1^{(j)} - \varphi_2^{(j)}|_2$, et $R = \max_j R_j$. En norme H^2, on a $\|\varphi_1\| \leq R$, $\|\varphi_2\| \leq R$ et $\|\varphi_1 - \varphi_2\| = \max_j \rho_j$.

§ 5. MAJORATIONS DE $|z_1^{(k)} - z_2^{(k)}|_2$, $|z_1^{(k)} - z_2^{(k)}|_\infty$ ET $|q_1 - q_2|_\infty$

Nous commençons par majorer $z_1' - z_2'$ et ses dérivées en normes L^2 et L^∞.

On a

$$z_1' - z_2' = e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2}$$

donc $|z_1' - z_2'| \leq |\varphi_1 - \varphi_2|$.

De même

$$z_1'' - z_2'' = i\varphi_1'(e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2}) + i(\varphi_1' - \varphi_2')e^{i\varphi_2},$$

donc $|z_1'' - z_2''| \leq |\varphi_1'|\,|\varphi_1 - \varphi_2| + |\varphi_1' - \varphi_2'|$.

Enfin,

$$z_1''' - z_2''' = i\varphi_1''(e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2}) + i\varphi_1'(z_1'' - z_2'') + i(\varphi_1'' - \varphi_2'')e^{i\varphi_2} - (\varphi_1' - \varphi_2')\varphi_2' e^{i\varphi_2},$$

d'où

$$|z_1''' - z_2'''| \leq |\varphi_1''||\varphi_1 - \varphi_2| + |\varphi_1'|^2|\varphi_1 - \varphi_2| + |\varphi_1'||\varphi_1' - \varphi_2'| + |\varphi_1'' - \varphi_2''| + |\varphi_1' - \varphi_2'||\varphi_2'|.$$

Prenant les normes L^2 et L^∞ et utilisant l'inégalité :

$$|u|_\infty \leq |u|_2^{\frac{1}{2}}|u'|_2^{\frac{1}{2}},$$

on obtient :

$$|z_1' - z_2'|_2 \leq \rho_0 \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$
$$|z_1' - z_2'|_\infty \leq \sqrt{\rho_0\rho_1} \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$
$$|z_1'' - z_2''|_2 \leq \sqrt{R_1R_2}\rho_0 + \rho_1 \leq (R + 1)\|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$
$$|z_1'' - z_2''|_\infty \leq \sqrt{R_1R_2\rho_0\rho_1} + \sqrt{\rho_1\rho_2} \leq (R + 1)\|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$
$$|z_1''' - z_2'''|_2 \leq R_2\sqrt{\rho_0\rho_1} + R_1R_2\rho_0 + \sqrt{R_1R_2}\rho_1 + \rho_2 + \sqrt{R_1R_2}\rho_1 \leq (R^2 + 3R + 1)\|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Remarquant que :

$$q(s, \sigma) = \int_0^1 z'(s + \lambda(\sigma - s))d\lambda,$$

on a aussi

$$|q_1 - q_2|_\infty \leq |\varphi_1 - \varphi_2|_\infty \leq \sqrt{\rho_0\rho_1} \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

§ 6. MAJORATION DE $\|Z_1 - Z_2\|_{op}$

On a :

$$Z_1 - Z_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial s} - \frac{1}{q_2}\frac{\partial q_2}{\partial s}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{q_2 - q_1}{q_1q_2}\frac{\partial q_1}{\partial s} + \frac{1}{q_2}\frac{\partial}{\partial s}(q_1 - q_2)\right).$$

Remarquons que $\left|\frac{1}{q_i}\right|_\infty \leq \frac{1}{\cos\alpha}$. Prenant la norme dans $L^2(ds \otimes d\sigma)$ et appliquant le lemme 1, on obtient :

$$|Z_1 - Z_2|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{6\pi\cos^2\alpha}}|q_1 - q_2|_\infty|\Lambda^{\frac{1}{2}}z_1'|_2 + \frac{1}{\sqrt{6\pi}\cos\alpha}|\Lambda^{\frac{1}{2}}(z_1' - z_2')|_2.$$

En remarquant que $|\Lambda^{\frac{1}{2}} z_1'|_2 \leq |\Lambda^{\frac{1}{2}} \varphi_1|_2$ et que pour $u \in H^1$, on a :

$$|\Lambda^{\frac{1}{2}} u|_2 \leq |u|_2^{\frac{1}{2}} |u'|_2^{\frac{1}{2}},$$

on obtient finalement :

PROPOSITION 1. — $\| Z_1 - Z_2 \|_{op} \leq c_1(R, \alpha) \| \varphi_1 - \varphi_2 \|$.

§ 7. MAJORATION DE $\left| \dfrac{\partial f}{\partial v_1} - \dfrac{\partial f}{\partial v_2} \right|_2$

Reprenons la formule :

$$\frac{\partial}{\partial v} - \Lambda = (Y - HX)\left(\frac{1}{2}H + X\right)^{-1} D,$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial v_1} - \frac{\partial}{\partial v_2} = (Y_1 - HX_1)\left(\frac{1}{2}H + X_1\right)^{-1} D - (Y_2 - HX_2)\left(\frac{1}{2}H + X_2\right)^{-1} D$$
$$= [Y_1 - Y_2 - H(X_1 - X_2)]\left(\frac{1}{2}H + X_1\right)^{-1} D + (Y_2 - HX_2)\left[\left(\frac{1}{2}H + X_1\right)^{-1} - \left(\frac{1}{2}H + X_2\right)^{-1}\right] D.$$

En écrivant

$$\left(\frac{1}{2}H + X_1\right)^{-1} - \left(\frac{1}{2}H + X_2\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}H + X_1\right)^{-1} (X_2 - X_1)\left(\frac{1}{2}H + X_2\right)^{-1}$$

et en appliquant le lemme 5, on a :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v_1} - \frac{\partial f}{\partial v_2} \right|_2 \leq 4\,\mathrm{Co}(\alpha) \| Z_1 - Z_2 \|_{op} |Df|_2 + 8\,\mathrm{Co}(\alpha)^2 \| Z_2 \|_{op} \| Z_1 - Z_2 \|_{op} |Df|_2,$$

c'est-à-dire :

PROPOSITION 2. — $\left| \dfrac{\partial f}{\partial v_1} - \dfrac{\partial f}{\partial v_2} \right|_2 \leq c_2(R, \alpha) \| \varphi_1 - \varphi_2 \| \, |Df|_2$ *pour toute fonction* $f(s)$ *telle que* $Df \in L^2$.

§ 8. ESTIMATION DE $|A(\varphi_1) - A(\varphi_2)|_2$

On a :

$$A(\varphi_1) - A(\varphi_2) = K_1 \int_0^s K_1 \frac{\partial K_1}{\partial v_1} d\sigma - K_2 \int_0^s K_2 \frac{\partial K_2}{\partial v_2} d\sigma,$$

d'où

$$|A(\varphi_1)-A(\varphi_2)|_2 \leq |K_1-K_2|_2|K_1|_2\left|\frac{\partial K_1}{\partial v_1}\right|_2 + |K_2|_2|K_1-K_2|_2\left|\frac{\partial K_1}{\partial v_1}\right|_2$$
$$+ |K_2|_2^2\left|\frac{\partial}{\partial v_1}(K_1-K_2)\right|_2 + |K_2|_2^2\left|\left(\frac{\partial}{\partial v_1}-\frac{\partial}{\partial v_2}\right)K_2\right|_2.$$

Appliquant la proposition 2 et l'inégalité de Payne-Weinberger, nous obtenons :

PROPOSITION 3. — $|A(\varphi_1) - A(\varphi_2)|_2 \leq c_3(R, \alpha)\|\varphi_1 - \varphi_2\|$.

§ 9. ÉTUDE DE DZ

L'opérateur DZ est défini, pour une courbe Γ convenable, par le noyau

$$\frac{\partial Z}{\partial s}(s, \sigma) = \frac{1}{2\pi q}\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} - \frac{1}{2\pi q^2}\left(\frac{\partial q}{\partial s}\right)^2.$$

Commençons par étudier le premier terme, on a :

LEMME 6. — *Soit Γ une courbe lipschitzienne avec $\varphi \in V^{\frac{1}{2}}$ et $\varphi' \in V^{\frac{1}{2}} \cap L^\infty$, alors le noyau*

$$\frac{1}{2q}\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} = \frac{\sigma - s}{z(\sigma) - z(s)} \cdot \frac{z(\sigma) - z(s) - (\sigma - s)z'(s) - \frac{1}{2}(\sigma - s)^2 z''(s)}{(\sigma - s)^3}$$

est de carré intégrable.

Démonstration. — En effet :

$$\left|\frac{1}{2q}\frac{\partial^2 q}{\partial s^2}\right|_2 \leq \frac{1}{2\cos\alpha}\left|\frac{\partial^2 q}{\partial s^2}\right|_2,$$

et le lemme 1 donne

$$\left|\frac{\partial^2 q}{\partial s^2}\right|_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{z''(\sigma) - z''(s)}{\sigma - s}\right|_2,$$

comme

$$|z''(\sigma) - z''(s)| = |\varphi'(\sigma)e^{i\varphi(\sigma)} - \varphi'(s)e^{i\varphi(s)}|$$
$$\leq |\varphi'(\sigma) - \varphi'(s)| + |\varphi'(s)||\varphi(\sigma) - \varphi(s)|,$$

il vient

$$|\Lambda^{\frac{1}{2}}z''|_2 \leq |\Lambda^{\frac{1}{2}}\varphi'|_2 + |\varphi'|_\infty|\Lambda^{\frac{1}{2}}\varphi|_2,$$

d'où le résultat. ■

Remarque. — Un récent théorème de Y. Meyer [5] relatif aux noyaux singuliers de la forme

$$\frac{1}{y-x}\,F(W_1, \ldots, W_m)$$

où

$$W_k(x, y) = \left(f_k(y) - \sum_{j=0}^{j(k)} \frac{(y-x)^j}{j!}\, f_k^{(j)}(x) \right) \Big/ (y-x)^{j(k)+1},$$

F est C^∞ et les fonctions $f_k^{(j(k))}$ sont lipschitziennes, s'applique à notre noyau $\frac{1}{q}\frac{\partial^2 q}{\partial s^2}$, qui définit donc un opérateur borné sur L^2, en fait, dès que Γ est une courbe corde-arc (c'est-à-dire vérifie l'inégalité $|\sigma - s| \leq \gamma\,|z(\sigma) - z(s)|$ pour une constante $\gamma > 0$) avec $z'' \in L^\infty$ (c'est-à-dire $\varphi' \in L^\infty$).

En ce qui concerne le second terme $\frac{1}{2\pi q^2}\left(\frac{\partial q}{\partial s}\right)^2$, nous le majorerons en norme L^2 par $\frac{1}{2\pi \cos^2 \alpha}\left|\frac{\partial q}{\partial s}\right|_\infty \left|\frac{\partial q}{\partial s}\right|_2$, en remarquant que $\left|\frac{\partial q}{\partial s}\right|_\infty \leq \frac{1}{2}|\varphi'|_\infty$.

Ainsi, sous les hypothèses du lemme 6, le noyau $\frac{\partial Z}{\partial s}$ est de carré intégrable et donc l'opérateur DZ est un opérateur compact sur L^2.

§ 10. MAJORATION DE $\| DZ_1 - DZ_2 \|_{op}$

On a :

$$2\pi\left(\frac{\partial Z_1}{\partial s} - \frac{\partial Z_2}{\partial s}\right) = \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right)\frac{\partial^2 q_1}{\partial s^2} + \frac{1}{q_2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}(q_1 - q_2)$$
$$- \left(\frac{1}{q_1^2} - \frac{1}{q_2^2}\right)\left(\frac{\partial q_1}{\partial s}\right)^2 - \frac{1}{q_2^2}\left[\left(\frac{\partial q_1}{\partial s}\right)^2 - \left(\frac{\partial q_2}{\partial s}\right)^2\right],$$

d'où

$$2\pi\left|\frac{\partial Z_1}{\partial s} - \frac{\partial Z_2}{\partial s}\right|_2 \leq \left|\frac{q_2 - q_1}{q_1 q_2}\right|_\infty \left|\frac{\partial^2 q_1}{\partial s^2}\right|_2 + \left|\frac{1}{q_2}\right|_\infty \left|\frac{\partial^2}{\partial s^2}(q_1 - q_2)\right|_2$$
$$+ |q_1 - q_2|_\infty \left|\frac{q_1 + q_2}{q_1^2 q_2^2}\right|_\infty \left|\frac{\partial q_1}{\partial s}\right|_\infty \left|\frac{\partial q_1}{\partial s}\right|_2$$
$$+ \left|\frac{1}{q_2^2}\right|_\infty \left(\left|\frac{\partial q_1}{\partial s}\right|_\infty + \left|\frac{\partial q_2}{\partial s}\right|_\infty\right) \left|\frac{\partial}{\partial s}(q_1 - q_2)\right|_2 .$$

Mais $\left|\dfrac{1}{q_i}\right|_\infty \leq \dfrac{1}{\cos\alpha}$, $|q_1 - q_2|_\infty \leq |\varphi_1 - \varphi_2|_\infty \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|$ et

$$\left|\frac{\partial q_i}{\partial s}\right|_\infty \leq \frac{1}{2}|\varphi_i'|_\infty \leq \frac{1}{2}\mathrm{R}.$$

De même, on a vu que :

$$\left|\frac{\partial q_i}{\partial s}\right|_2 = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}|\Lambda^{\frac{1}{2}}z_i'|_2 \leq \sqrt{\frac{2\pi}{3}}|\Lambda^{\frac{1}{2}}\varphi_i|_2 \leq \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\mathrm{R}$$

et

$$\left|\frac{\partial^2 q_i}{\partial s^2}\right|_2 = \sqrt{\frac{2\pi}{5}}|\Lambda^{\frac{1}{2}}z_i''|_2 \leq \sqrt{\frac{2\pi}{5}}(|\Lambda^{\frac{1}{2}}\varphi_i'|_2 + |\varphi_i'|_\infty|\Lambda^{\frac{1}{2}}\varphi_i|_2) \leq \sqrt{\frac{2\pi}{5}}(\mathrm{R}+\mathrm{R}^2).$$

Le lemme 1 donne également :

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}(q_1 - q_2)\right|_2 = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}|\Lambda^{\frac{1}{2}}(z_1' - z_2')|_2 \leq \sqrt{\frac{2\pi}{3}}|z_1' - z_2'|_2^{\frac{1}{2}}|z_1'' - z_2''|_2^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial s^2}(q_1 - q_2)\right|_2 = \sqrt{\frac{2\pi}{5}}|\Lambda^{\frac{1}{2}}(z_1'' - z_2'')|_2 \leq \sqrt{\frac{2\pi}{5}}|z_1'' - z_2''|_2^{\frac{1}{2}}|z_1''' - z_2'''|_2^{\frac{1}{2}}.$$

Il ne nous reste plus qu'à appliquer les inégalités du § 5 pour obtenir :

PROPOSITION 4. — $\|\mathrm{DZ}_1 - \mathrm{DZ}_2\|_{\mathrm{op}} \leq c_4(\mathrm{R}, \alpha)\|\varphi_1 - \varphi_2\|$.

§ 11. ESTIMATION DE $|\mathrm{B}(\varphi_1) - \mathrm{B}(\varphi_2)|_2$

On a

$$\mathrm{B}(\varphi) = \mathrm{D}\left(\frac{\partial}{\partial \nu} - \Lambda\right)\mathrm{D}\varphi$$

et

$$\mathrm{B}(\varphi_1) - \mathrm{B}(\varphi_2) = (\mathrm{DY}_1 - \mathrm{HDX}_1)\left(\frac{1}{2}\mathrm{H} + \mathrm{X}_1\right)^{-1}\mathrm{D}^2\varphi_1 - (\mathrm{DY}_2 - \mathrm{HDX}_2)\left(\frac{1}{2}\mathrm{H} + \mathrm{X}_2\right)^{-1}\mathrm{D}^2\varphi_2\,;$$

on procède comme au § 7, en utilisant l'estimation de $\|\mathrm{DZ}_1 - \mathrm{DZ}_2\|_{\mathrm{op}}$ et celle de $\|\mathrm{DZ}_1\|_{\mathrm{op}}$ ou $\|\mathrm{DZ}_2\|_{\mathrm{op}}$ qui s'en déduit en faisant $\varphi_2 = 0$ ou $\varphi_1 = 0$. Ce qui donne :

PROPOSITION 5. — $|\mathrm{B}(\varphi_1) - \mathrm{B}(\varphi_2)|_2 \leq c_5(\mathrm{R}, \alpha)\|\varphi_1 - \varphi_2\|$, *et* $|\mathrm{B}(\varphi)|_2 \leq c_6(\mathrm{R}, \alpha)$.

Les propositions 3 et 5 donnent les inégalités :

(I) $$|\mathrm{F}(\varphi)|_2 \leq \mathrm{C}(\mathrm{R}, \alpha)$$

et

$$\text{(II)} \qquad | F(\varphi_1) - F(\varphi_2) |_2 \leq C_1(R, \alpha) \| \varphi_1 - \varphi_2 \| ,$$

qui complètent la preuve du théorème.

REMERCIEMENTS

Nous remercions Michelle Schatzman et Yves Meyer pour l'amical et stimulant intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

RÉFÉRENCES

[1] P. BARAS, J. DUCHON et R. ROBERT, Évolution d'une interface par diffusion de surface. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **295**, série I, 1982, p. 611-614.

[2] L. COUDURIER, N. EUSTATHOPOULOS, J. C. GJOUD, P. DESRE, Corrosion intergranulaire du cuivre par le plomb liquide sous l'effet des forces capillaires. *Journal de chimie physique*, t. **3**, 1977, p. 289-294.

[3] J. DUCHON, R. ROBERT et P. WITOMSKI, Problème de Dirichlet dans l'image bilipschitzienne d'un demi-espace. *Numer. Math.*, t. **36**, 1981, p. 129-149.

[4] Y. MEYER, *Théorie du potentiel dans les domaines lipschitziens d'après G. C. Verchota.* Séminaire GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ, 1982-1983, n° 5.

[5] Y. MEYER, Communication personnelle.

[6] W. W. MULLINS, Grain boundary grooving by volume diffusion. *Transactions of the metallurgical society of AIME*, t. **218**, 1960, p. 354-361.

(Manuscrit reçu le 13 mai 1984)