ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

ELYES JOUINI

# Structure de l'ensemble des équilibres d'une économie productive

*Annales de l'I. H. P., section C*, tome 9, nº 3 (1992), p. 321-336

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1992__9_3_321_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*

Vol. 9, n° 3, 1992, p. 321-336. *Analyse non linéaire*

# Structure de l'ensemble des équilibres d'une économie productive

par

**Elyes JOUINI**

Laboratoire d'Économétrie de l'École Polytechnique,
1, rue Descartes, 75005 Paris,
CERMSEM, Université Paris-I, Panthéon-Sorbonne, France

RÉSUMÉ. — Dans ce papier nous généralisons au cas d'économies comportant plusieurs ensembles de production, éventuellement non convexes, les résultats concernant la structure de l'ensemble des équilibres, connus dans le cas des économies d'échange (*i. e.*, sans production). Nous montrons en particulier que cet ensemble est une variété et qu'il constitue un revêtement de l'espace des allocations initiales. Nous établissons, en outre, que l'ensemble des économies possédant un nombre infini d'équilibres est de mesure nulle, ainsi qu'une version asymptotique de ce dernier résultat.

ABSTRACT. — In this paper we consider the equilibria set of a production economy in which the production sector may exhibit nonconvexities. We establish results on the structure (manifold, covering...) of this set which generalizes similar results on exchange economies.

*Classification A.M.S. :* 90, 49, 58.

## 1. INTRODUCTION

Dans son livre Théorie de la valeur, Gérard Debreu présente la synthèse des travaux qui marquent les véritables débuts de l'étude mathématique de la notion d'équilibre économique. Si les travaux des années 1950 utilisaient essentiellement des outils de topologie générale et des théorèmes de points fixes tels que les théorèmes de Brouwer et Kakutani, le développement de l'économie mathématique a conduit, dans les trente dernières années, à l'utilisation d'un spectre d'outils de plus en plus large (1). En particulier, c'est dans un article de Gérard Debreu, publié en 1970, que pour la première fois la notion d'équilibre est étudiée d'un point de vue purement géométrique. Il faudra cependant attendre les travaux de Balasko ([2] à [6]), Smale [20] et Mas-Colell [18], pour trouver une étude complète de la structure globale de l'ensemble des équilibres dans le cas d'une économie d'échange (*i. e.*, sans production). Dans cet article nous généralisons au cas d'économies avec secteur productif et sans hypothèse de convexités particulières sur ce dernier, les résultats de Balasko ([5], [6]) concernant la structure de l'ensemble des équilibres de l'économie paramétrée par les ressources initiales des agents qui la composent.

Ainsi, après avoir présenté notre modèle et la définition de l'équilibre au paragraphe 2, nous établissons au paragraphe 3 que l'ensemble de ces équilibres est une variété de la même dimension que celle de l'espace des ressources initiales.

Au paragraphe 4, nous introduisons alors la notion de projection naturelle qui nous permet d'établir que la variété précédente constitue un revêtement, à un nombre fini de feuillets, de l'ensemble des ressources initiales. Nous y introduisons également la notion d'économie régulière, au voisinage desquelles nous montrons qu'il existe des sélections continues d'équilibres et pour lesquelles nous établissons un résultat de généricité. Si cette approche permet de montrer sous des hypothèses désormais classiques, l'existence d'un nombre impair d'équilibres (*voir* Jouini [16, 17]) et s'il est facile de voir, moyennant le caractère générique des économies régulières, que l'ensemble des économies possédant un nombre infini d'équilibres est de mesure nulle, il existe peu de résultats sur le nombre exact d'équilibres. Nous établissons quant à nous, à la fin de ce paragraphe un résultat, analogue à celui de Balasko [4], et permettant d'affirmer que la « taille » de l'ensemble des économies à plus de $n$ équilibres, est inversement proportionnelle à $n$.

---

(1) Pour une présentation détaillée du modèle d'Arrow-Debreu, de ses extensions, des principales techniques utilisées et des résultats les plus récents, nous renvoyons le lecteur à l'article publié par Bernard Cornet dans la présente revue, 1990.

Le paragraphe 5 est quant à lui, consacré à l'étude détaillée de l'une des principales hypothèses de notre modèle, l'hypothèse dite de transversalité. Nous y montrons en particulier que cette dernière est, en un certain sens, génériquement vérifiée et nous la commentons à la lueur de diverses hypothèses souvent faites dans ce type d'étude.

Nous terminerons cette introduction en introduisant quelques notations non nécessairement standards. Si $x=(x_h)$ et $y=(y_h)$ sont deux vecteurs de $R^l$ nous noterons $x.y=\sum_{h=1}^{l} x_h, y_h$, le produit scalaire de $R^l$. On écrira $x \geqq y$ (resp. $x \gg y$) pour signifier que $x_h \geqq y_h$ (resp. $x_h > y_h$) pour tout $h$, de même on écrira $x > y$ si $x \geqq y$ et $x \neq y$. Dans la suite, $R^l_+$ désignera l'ensemble des $x \geqq 0$, $R^l_{++}$, celui des $x \gg 0$ et $e$ désignera le vecteur de $R^l$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1. Enfin, si X est un sous-ensemble convexe, fermé, non vide, de $R^l$, $\text{proj}_X$ désignera l'application projection (au sens de la projection sur un convexe), de $R^l$ sur X, en particulier si X est un sous-espace vectoriel de $R^l$, il s'agira alors de la projection orthogonale sur X.

## 2. LE MODÈLE ET LA DÉFINITION DE L'ÉQUILIBRE

Soit une économie $\mathscr{E}$ comportant $l$ bien indexés par $h$, $m$ consommateurs indexés par $i$ et $n$ producteurs indexés par $j$, nous noterons $\omega=(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ ou simplement $\omega=(\omega_i)$, le vecteur de $R^{lm}$, des dotations initiales des consommateurs, et nous nous proposons d'étudier l'ensemble des équilibres de l'économie $\mathscr{E}$ paramétrée par $\omega$. La technologie du $j$-ième producteur ($j=1, \ldots, n$) sera représentée par un sous-ensemble $Y_j$ de $R^l$. Soit $S=\left\{p \in R^l_+ : \sum_{h=1}^{n} p_h=1\right\}$ l'ensemble des prix normalisés et $S_{++}=S \cap R^l_{++}$, le comportement du $i$-ième consommateur ($i=1, \ldots, m$) sera décrit par la donnée d'une fonction de demande $D_i : S_{++} \times R_{++} \to R^l$, qui à un vecteur de prix $p \in S_{++}$ et un revenu strictement positif $w$, associe la liste $D_i(p, \omega)$ des plans de consommations choisis par le consommateur. Le revenu de ce consommateur sera défini par une fonction $r_i : \prod_{j=1}^{n} Y_j \times R^l \to R$, de la façon suivante : pour un vecteur de prix $p \in R^l$ et des plans de productions $(y_j) \in \prod_{j=1}^{n} Y_j$, le revenu du $i$-ième consommateur est égal à $p.\omega_i + r_i((y_j), p)$.

Nous faisons à présent les hypothèses standards suivantes :

HYPOTHÈSE (R). — *Pour tout i, la fonction $r_i$ est continue, homogène de degré* 1 *par rapport à p, et pour tout* $((y_j, p) \in \prod_{j=1}^{n} Y_j \times R^l$, *on a*

$$\sum_{i=1}^{m} r_i((y_j), p) = p \cdot \sum_{i=1}^{m} y_j \quad {}^{(2)}.$$

HYPOTHÈSE (D). — *Pour tout i,*

(i) $D_i$ *est une fonction* $C^k$, $(k \geqq 1)$, *homogène de degré* 0 *par rapport à* $(p, w)$ *et à valeurs positives ou nulles.*

(ii) $D_i$ *vérifie la loi de Walras* (i.e., $p.D_i(p, w) = w$ *pour tout* $(p, w)$ *dans* $S_{++} \times R_{++}$.)

(iii) *Si* $(p^q, w^q)$ *est une suite dans* $S_{++} \times R_{++}$ *convergeant vers* $(p, w)$, *telle que* $w > 0$ *et* $p \notin S_{++}$, *alors* $\| D_i(p^q, w^q) \| \to \infty$.

HYPOTHÈSE (P). — *Pour tout j,*

(i) $Y_j$ *est fermé, non vide,*

(ii) $Y_j - R^l_+ \subset Y_j$ *(libre disposition),*

(iii) *pour tout z dans* $R^l$, $\{(y_j) \in \prod_{j=1}^{n} Y_j : \sum_{i=1}^{m} y_j \geqq z\}$ *est borné*[(3)].

On remarquera qu'aucune hypothèse de convexité n'est faite sur les ensembles de production.

Donnons-nous à présent pour chaque producteur une fonction $\varphi_j : \partial Y_j \to S$. Une telle fonction sera appelée règle de tarification du $j$-ième producteur.

Rappelons que d'après Bonnisseau-Cornet [7] l'hypothèse (P) implique que pour tout $j$, la restriction de la projection orthogonale sur $e^{\perp}$ à $\partial Y_j$ est un homéomorphisme. Ainsi, $\partial Y_j$ peut donc être muni, moyennant cet homéomorphisme d'une structure de variété $C^{\infty}$. Soit alors l'hypothèse suivante portant sur les règles de tarification.

---

($^2$) La structure abstraite de revenus que nous avons définie, prend en compte, le cas classique d'une économie de propriété privée pour laquelle $r_i((y_j), p) = \sum_{j=1}^{n} \theta_{i,j} p \cdot y_j$, avec $\theta_{i,j} \geqq 0$ pour tout $i, j$ et $\sum_{i=1}^{m} \theta_{i,j} = 1$ pour tout $j$.

($^3$) L'hypothèse (P) (iii) est bien plus faible que l'hypothèse $A(Y) \cap -A(Y) = \{0\}$ souvent rencontrée dans la littérature, et portant sur $A(Y)$, le cône asymptotique de l'ensemble de production total $Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ (*cf.* Hurwicz et Reiter [14]).

HYPOTHÈSE (RT). — *Pour tout j, $\varphi_j$ est de classe $C^k$ pour la structure de $\partial Y_j$.*

DÉFINITION 1.1. — *Un équilibre de production de l'économie $(Y_j, \varphi_j)$ est un élément $((y_j), p)$ de $R^{ln} \times R^l$ tel que pour tout j,*

(i) $y_j \in \partial Y_j$,

(ii) $p = \varphi_j(y_j)$.

DÉFINITION 1.2. — *Un équilibre de l'économie $\mathscr{E} = ((D_i, r_i, \omega_i)(Y_j, \varphi_j))$ est un élément $((x_i), (y_j), p)$ de $R^{lm} \times R^{ln} \times S$ tel que,*

(i) *pour tout i,* $x_i = D_i(p, p.\omega_i + r_i((y_j), p))$,

(ii) $((y_j), p)$ *est un équilibre de production,*

(iii) $\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=1}^{m} \omega_i$.

Dans tout ce qui suit nous noterons EP l'ensemble des équilibres de production de l'économie $(Y_j, \varphi_j)$ et EG$(\omega)$ l'ensemble des équilibres de production soutenant un équilibre de l'économie $\mathscr{E} = ((D_i, r_i, \omega_i), (Y_j, \varphi_j))$, c'est-à-dire,

$$\mathrm{EG}(\omega) = \{((y_j), p) \in \mathrm{EP} : \exists (x_i) \in R^{lm}, ((x_i), (y_j), p) \text{ équilibre de } \mathscr{E}\}.$$

Nous noterons enfin,

$$\mathrm{EG} = \bigcup_{\omega \in R^{lm}} [\mathrm{EG}(\omega) \times \{\omega\}],$$

le graphe de la correspondance $\omega \to \mathrm{EG}(\omega)$.

Tous les paramètres de l'économie étant fixés excepté le vecteur des dotations initiales $\omega$, l'économie $\mathscr{E} = ((D_i, r_i, \omega_i), (Y_j, \varphi_j))$ sera simplement appelée, l'économie définie par $\omega$ ou l'économie $\omega$.

## 3. LA STRUCTURE DE VARIÉTÉ

Pour établir des résultats intéressants quant à la structure de l'ensemble des équilibres nous allons faire appel à une hypothèse technique, dite hypothèse de « transversalité ». Cette hypothèse sera largement commentée au paragraphe 5 où nous verrons, d'une part, qu'elle est toujours vérifiée sous certaines hypothèses classiques et, d'autre part, qu'elle est vérifiée génériquement dans tous les autres cas.

HYPOTHÈSE (TR). — *Pour tout* $((y_j), p) \in \mathrm{EP}$, *la matrice*,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d\varphi_1(y_1)}{dy_1} & 0 & \dots & 0 & -\mathrm{I}_{l-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dfrac{d\varphi_n(y_n)}{dy_n} & -\mathrm{I}_{l-1} \end{pmatrix}$$

*est de rang* $n(l-1)$.

Sous cette hypothèse nous pouvons alors établir le résultat suivant.

PROPOSITION 3.1. — *Sous les hypothèses* (R), (D), (P) *et* (Tr), EG *est une sous-variété* $\mathrm{C}^k$ *de* $\prod_{j=1}^{n} \partial \mathrm{Y}_j \times \mathrm{R}^{lm}$ *qui, si elle est non vide, est de dimension* $ml$.

*Démonstration.* — Soit l'application, $\mathscr{H}$ définie sur $\prod_{j=1}^{n} \partial \mathrm{Y}_j \times \mathrm{S}$ par $\mathscr{H}((y_j), p) = (\varphi_1(y_1) - p, \dots, \varphi_n(y_n) - p)$. L'application $\mathscr{H}$ est à valeur dans $(e^{\perp})^n$ et il est clair que $\mathrm{EP} = \mathscr{H}^{-1}(0)$. Soit, par ailleurs,

$$\mathrm{W} = \left\{((y_j), p), (\omega_i)) \in \prod_{j=1}^{n} \partial \mathrm{Y}_j \times \mathrm{S}_{++} \times \mathrm{R}^{lm} : \forall i,\ r_i((y_i), p) + p \cdot \omega_i > 0\right\},$$

et soit,

$$\begin{aligned} \theta : \quad & \mathrm{W} \to (e^{\perp})^n \times \mathrm{R}^{l-1} \\ & ((y_j), p, (\omega_i)) \to (\mathscr{H}((y_j), p), \overline{\mathscr{F}}((y_j), p, (\omega_i))), \end{aligned}$$

où

$$\mathscr{F}((y_j), p, (\omega_i)) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{D}_i(p, p \cdot \omega_i + r_i((y_j), p)) - \sum_{i=1}^{m} \omega_i - \sum_{j=1}^{n} y_j,$$

et où pour $z = (z_1, \dots, z_l)$, $\bar{z}$ désigne le vecteur de $\mathrm{R}^{l-1}$ de coordonnées, $(z_1 - z_l, \dots, z_{l-1} - z_l)$.

Il est clair alors que l'ensemble W, ainsi défini, est ouvert non vide de $\prod_{j=1}^{n} \partial \mathrm{Y}_j \times \mathrm{S}_{++} \times \mathrm{R}^{lm}$, que $\theta$ est une fonction $\mathrm{C}^1$ et que, enfin, $\mathrm{EG} = \theta^{-1}(0)$. Or si M est la matrice représentative de la différentielle de $\theta$ en un point

$((y_j), p, (\omega_i))$, on peut clairement extraire de M la matrice suivante,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d\varphi_1(y_1)}{dy_1} & 0 & \dots & 0 & -\mathrm{I}_{l-1} & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dfrac{d\varphi_n(y_n)}{dy_n} & -\mathrm{I}_{l-1} & 0 \\ * & \dots & \dots & \dots & * & \dfrac{\partial \mathscr{F}}{\partial \omega_1} \end{pmatrix}$$

Pour montrer que EG est une sous-variété, il suffit alors de montrer que cette dernière matrice est toujours de rang maximal. Ce qui, grâce à (Tr) revient à montrer que $\dfrac{\partial \mathscr{F}}{\partial \omega_1}$ est de rang $l-1$.

Or,

$$= \begin{pmatrix} p_1 \dfrac{\partial \mathrm{D}_{1,1}}{\partial \omega} - 1 & p_2 \dfrac{\partial \mathrm{D}_{1,1}}{\partial \omega} & \dots & p_{l-1} \dfrac{\partial \mathrm{D}_{1,1}}{\partial \omega} & p_l \dfrac{\partial \mathrm{D}_{1,1}}{\partial \omega} \\ p_1 \dfrac{\partial \mathrm{D}_{1,2}}{\partial \omega} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & p_{l-1} \dfrac{\partial \mathrm{D}_{1,l-2}}{\partial \omega} & \vdots \\ p_1 \dfrac{\partial \mathrm{D}_{1,l-1}}{\partial \omega} & \dots & p_{l-2} \dfrac{\partial \mathrm{D}_{1,l-1}}{\partial \omega} & p_{l-1} \dfrac{\partial \mathrm{D}_{1,l-1}}{\partial \omega} - 1 & p_l \dfrac{\partial \mathrm{D}_{1,l-1}}{\partial \omega} \end{pmatrix}$$

Comme dans W les prix sont strictement positifs, on peut retrancher de la $h$-ième colonne ($h=1, \dots, l-1$), $\dfrac{p_h}{p_l}$ fois la dernière colonne. On obtient alors la matrice,

$$\begin{pmatrix} & * \\ -\mathrm{I}_{l-1} & \vdots \\ & * \end{pmatrix}$$

Cette dernière est alors bien de rang $(l-1)$, et EG est bien une sous-variété, un calcul simple nous donne alors, lorsqu'elle est non vide, sa dimension égale à $ml$. ■

Il est clair que dans la suite, seules les situations où cette dernière variété est non vide vont retenir notre attention. Nous introduisons donc ci-après, deux hypothèses, désormais classiques dans ce type de modèles, et qui vont nous permettre de garantir la non vacuité de EG.

HYPOTHÈSE (SA (ω)). — *Pour tout couple* $((y_j), p) \in \mathrm{EP}$, *tel que* $\sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=1}^{m} \omega_1 \geqq 0$, *on a* $p \,.\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=1}^{m} \omega_i\right) > 0$.

HYPOTHÈSE (RR (ω)). — *Pour tout élément* $((y_j, p)$ *de* EP *tel que* $p \in \mathrm{S}_{++}$ *et* $p \,.\left(\sum_{j=1}^{n} + \sum_{i=1}^{m} \omega_i\right) > 0$, *on a, pour tout* $i$, $p \,.\, \omega_i + r_i((y_j), p) > 0$.

L'hypothèse (SA (ω)), appelée hypothèse de survivance, a été introduite dans la littérature par Jean-Marc Bonnisseau et Bernard Cornet, elle signifie que tout équilibre de production admissible est « viable », au sens où il assure à l'économie ω, un revenu global strictement positif. Pour certaines familles de règles de tarifications (tarification à pertes bornées, tarification marginale...), Bonnisseau et Cornet ([7], [8]) [*voir* également Jouini ([16], [17])] ont montré que s'il existe $\omega_0$ tel que pour tout $\omega \geqq \omega_0$, (SA (ω)) est vérifiée et sous l'hypothèse (RR $(\omega_0)$), alors $\mathrm{EG}(\omega_0) \neq \varnothing$, ce qui implique en particulier, que EG est alors, non vide.

Nous terminons ce paragraphe en établissant le résultat suivant, à propos de la nature topologique de l'ensemble des ω vérifiant les deux hypothèses précédentes. Soit donc,

$$\mathscr{U} = \{\omega \in \mathrm{R}^{lm}_{++} : \mathrm{SA}(\omega) \text{ et } \mathrm{RR}(\omega) \text{ sont vérifées}\},$$

on a,

LEMME 1. — *$\mathscr{U}$ est un ouvert de* $\mathrm{R}^{lm}$.

*Démonstration.* — Soit $\mathscr{W} = \{\omega \in \mathrm{R}^{lm}_{++} : \mathrm{SA}(\omega) \text{ est vérifiée}\}$ et $\mathscr{W}' = \{\omega \in \mathrm{R}^{lm}_{++} : \mathrm{RR}(\omega) \text{ est vérifiée}\}$. Il est clair que $\mathscr{U} = \mathscr{W} \cap \mathscr{W}'$ et que nous pouvons nous contenter de montrer que $\mathscr{W}$ est un ouvert, la démonstration étant tout à fait analogue pour $\mathscr{W}'$.

Soit $(\omega^q)$ une suite dans $\mathrm{R}^{lm}$ convergeant vers $\omega \in \mathscr{W}$, et supposons, par l'absurde, que pout tout $q$ entier, $\omega^q \notin \mathscr{W}$. Cela signifie donc que, pour tout $q$, il existe $((y_j^q), p^q) \in \mathrm{EP}$, tel que $\sum_{j=1}^{n} y_j^q + \sum_{i=1}^{m} \omega_i^q \geqq 0$ et $p^q \,.\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^q + \sum_{i=1}^{m} \omega_i^q\right) \leqq 0$. La suite $(\omega_i^q)$ étant convergente est donc bornée supérieurement par un certain $z$ dans $\mathrm{R}^{lm}$, et on a alors pour tout $q$ entier, $\sum_{j=1}^{n} y_i^q + \sum_{i=1}^{m} z_i \geqq 0$, l'hypothèse (P) (iii) nous permet alors d'affirmer que la suite $(y_j^q)$ prend ses valeurs dans un compact et peut donc être supposée convergente. La suite $(p^q)$ prenant, quant à elle, ses valeurs dans S, peut donc également être supposée convergente. Les $\varphi_j$ étant continues, la limite $((y_j), p)$ de la suite $((y_j^q), p^q)$ est alors dans EP et l'on a de plus,

$\sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=1}^{m} \omega_i \geqq 0$ et $p.\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=1}^{m} \omega_i\right) \leqq 0$, ce qui contredit le fait que $\omega \in \mathscr{W}$. ■

## 4. LA PROJECTION NATURELLE ET LE NOMBRE D'ÉQUILIBRE

Nous pouvons à présent introduire l'outil essentiel pour l'étude du nombre d'équilibres attachés à une économie donnée. Il s'agit de la projection canonique $\pi$, de EG sur l'espace $R^{lm}$ des dotations initiales, qu'à la suite de Balasko [6] nous appellerons projection naturelle. Formellement on définit $\pi$ comme suit,

$$\pi: \quad EG \to R^{lm}$$
$$((y_j), p, (\omega_i)) \to (\omega_i).$$

Lorsque EG est une variété, c'est-à-dire sous les hypothèses de la proposition 3.1, il est possible de parler de valeurs régulières pour l'application $\pi$. Ces dernières sont alors particulièrement intéressantes, puisque à leur voisinage l'application $\pi$ est localement inversible et ses inverses décrivent alors l'évolution de l'équilibre sous l'action de petites perturbations des ressources initiales. Nous introduisons alors l'ensemble,

$$\mathscr{R} = \{\omega \in \mathscr{U} : \omega \text{ est une valeur régulière pour } \pi\},$$

et nous établissons dans les deux propositions suivantes que cet ensemble est « grand » tant au sens de la mesure qu'au sens de la topologie.

PROPOSITION 4.1. — *Sous les hypothèses* (D), (P), (RT) *et* (Tr), *l'ensemble* $\mathscr{R}$ *est de complémentaire de mesure nulle dans* $\mathscr{U}$.

*Démonstration.* — D'après la proposition 3.1, EG est une variété de dimension $lm$ et d'après le lemme 1, l'ensemble $\mathscr{U}$ est un ouvert de $R^{lm}$, le théorème de Sard nous permet alors de conclure. ■

Dans la suite nous reprenons les hypothèses de la proposition 3.1 et nous supposerons que pour tout $j$, $\partial Y_j$ est une variété $C^1$, en tant que sous-variété de $R^l$. L'application $\operatorname{proj}_{e^\perp}|_{\partial Y_j}$, c'est-à-dire, la restriction de $\partial Y_j$ de la projection orthogonale sur $e^\perp$, est alors $C^1$ et la structure de variété abstraite de $\partial Y_j$ s'identifie à sa structure de sous-variété de $R^l$. Comme nous avons montré (proposition 3.1) que EG est une sous-variété $C^1$ de la variété abstraite $\prod_{j=1}^{n} \partial Y_j \times S \times R^{lm}$, EG est alors une sous-variété $C^1$ de $R^{ln} \times S \times R^{lm}$. Nous énonçons à présent un lemme technique qui va ensuite nous permettre d'énoncer l'« analogue » topologique de la proposition 4.1.

LEMME 2. — *La restriction de $\pi$ à $\pi^{-1}(\mathscr{U})$ est une application propre.*

*Démonstration.* — Nous savons, d'après le lemme 1, que pour tout $\omega^*$ dans $\mathscr{U}$ il existe un voisinage, que l'on peut choisir compact, $K_\omega$ de $\omega^*$ dans $\mathscr{U}$. Soit $((y_j^q), p^q, (\omega_i^q))$ une suite dans $\pi^{-1}(K_\omega)$ et soit $K_Y = \left\{ (y_j) \in \prod_{j=1}^{n} \partial Y_j : \exists (\omega_i) \in K_\omega, \sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=1}^{m} \omega_i \geqq 0 \right\}$, $K_Y$ est compact et pour tout $q$ on a, $((y_j^q), p^q, (\omega_i^q)) \in K_Y \times S \times K_\omega$, cette suite peut donc être supposée converger vers $((y_j), p, (\omega_i))$ dans $K_Y \times S \times K_\omega$. On aura alors, $((y_j), p) \in EP$ et $\sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=1}^{m} \omega_i \geqq 0$. Si l'on pose de plus, $x_i^q = D_i(p^q, p^q . \omega_i^q + r_i((y_j^q), p^q))$ on a $\sum_{i=1}^{m} x_i^q = \sum_{j=1}^{u} y_j^q + \sum_{i=1}^{m} \omega_i^q$, cette dernière somme est alors bornée, comme par ailleurs, pour tout $q$, $x_i^q \geqq 0$, la suite $(x_i^q)$ est alors également bornée et peut donc être supposée converger vers $(x_i)$ dans $R^{ln}$. Mais puisque $(\omega) \in K_\omega$, les hypothèses (SA $(\omega)$) et (RR $(\omega)$) sont vérifiées et l'on a donc pour tout $i$, $p . \omega_i + r_i((y_j), p) > 0$ ce qui, grâce à ce qui précède et à l'hypothèse (D) (iii), implique $p \in S_{++}$. Le prix étant strictement positif ainsi que tous les revenus individuels et les fonctions $D_i$ étant continues sur $S_{++} \times R_{++}$, on en déduit que $((x_i), (y_j), p)$ est un équilibre de l'économie $\omega$ et que $((y_j), p, (\omega_i)) \in \pi^{-1}(K_\omega)$. Ainsi toute suite dans $\pi^{-1}(K_\omega)$ admet une valeur d'adhérence et tout $\omega^*$ dans $\mathscr{U}$ admet un voisinage compact $K_\omega$ d'image réciproque, par $\pi$, compacte. Soit à présent K un compact de $\mathscr{U}$, on a clairement, $K = \bigcup_{\omega \in K} \operatorname{int} K_\omega$ et peut donc être recouvert par un nombre fini d'entre eux, soit $K = \bigcup_{k=1, \ldots, q} \operatorname{int} K_{\omega_k}$. Par conséquent, $\pi^{-1}(K) \subset \bigcup_{k=1, \ldots, q} \pi^{-1}(K_{\omega_k}$. Ce dernier ensemble est alors un compact contenant le fermé $\pi^{-1}(K)$, ce qui implique donc que $\pi^{-1}(K)$ est également compact et que $\pi$ restreint à $\pi^{-1}(\mathscr{U})$ est bien propre. ■

PROPOSITION 4.2. — *$\mathscr{R}$ est un ouvert dense de $\mathscr{U}$.*

*Démonstration.* — $\mathscr{R}$ est dense dans $\mathscr{U}$ car de mesure pleine dans ce dernier. Comme par ailleurs $\mathscr{R}$ est le complémentaire de l'image par $\pi$ de l'ensemble des points critiques de $\pi$ dans $\pi^{-1}(\mathscr{U})$, que ce dernier ensemble est fermé parce que $\pi$ est $C^1$ et que son image est fermée parce que la restriction de $\pi$ à $\pi^{-1}(\mathscr{U})$ est propre (lemme 2), $\mathscr{R}$ est bien un ouvert de $\mathscr{U}$. ■

Grâce aux résultats précédents nous pouvons à présent étudier de manière plus précise la structure de l'ensemble des équilibres au-dessus de l'ensemble $\mathscr{R}$.

PROPOSITION 4.3. — *Le triplet $(\pi^{-1}(\mathscr{R}), \mathscr{R}, \pi)$ est un revêtement à un nombre fini de feuillets de l'ensemble $\mathscr{R}$.*

*Démonstration.* — Il s'agit en fait de montrer que pour tout $\omega \in \mathscr{R}$ tel que $\pi^{-1}(\omega) \neq \emptyset$, il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de $\omega$ dans $\mathscr{R}$ tel que $\pi^{-1}(\mathscr{V})$ est réunion finie d'une suite $V_q$ d'ouverts de $\pi^{-1}(\mathscr{R})$ deux à deux disjoints, la restriction $\pi_q : V_q \to \mathscr{V}$ de $\pi$ à chaque $V_q$ étant un difféomorphisme de $V_q$ sur $\mathscr{V}$.

Or si $\omega \in \mathscr{R}$ et $\pi^{-1}(\omega) \neq 0$, $\pi^{-1}(\omega)$ est compact d'après le lemme précédent. Mais $\omega$ étant de plus une valeur régulière de $\pi$, $\pi^{-1}(\omega)$ n'a que des points isolés. L'ensemble $\pi^{-1}(\omega)$ est alors fini, soit $s$ son cardinal.

Pour $z_q \in \pi^{-1}(\omega)$, l'application linéaire tangente à $\pi$ en $z_q$ est régulière, il existe alors un voisinage $V'_q$ de $z_q$ et un voisinage $\mathscr{V}_q$ de $\omega$ tels que $\pi|_{V'_q} : V'_q \to \mathscr{V}_q$ est un difféomorphisme. Il est clair alors que $\pi^{-1}(\omega) \cap V'_q$ est réduit à $z_q$.

En choisissant les $V'_q$ assez petits, on peut les supposer deux à deux distincts. Soit alors

$$\mathscr{V} = (\mathscr{V}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{V}_s)/\pi(\mathrm{EG}/(V'_1 \cup \ldots \cup V'_s)).$$

Ainsi défini $\mathscr{V}$ est un ouvert de $\mathscr{U}$ et on vérifie aisément que $\omega \in \mathscr{V}$. Posons alors, pour $(q=1, \ldots, s)$, $V_q = V'_q \cap \pi^{-1}(\mathscr{V})$. La restriction de $\pi$ à $V_q$ est alors, puisque $V_q \subset V'_q$, un difféomorphisme de $V_q$ sur son image. Les $V_q$ sont de plus, clairement deux à deux disjoints et l'on vérifie que $\pi^{-1}(\mathscr{V}) = \bigcup_{q=1,\ldots,s} V_q$. ■

Une conséquence immédiate de ce dernier résultat est alors l'existence au voisinage des éléments de $\mathscr{R}$ de sélections continues d'équilibres. En effet,

PROPOSITION 4.4. — *Soit $\omega^* \in \mathscr{R}$, il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de $\omega^*$ et un nombre fini $s$ de fonctions de classe $C^k$, $f_q : \mathscr{V} \to \mathrm{EG}$ tels que l'ensemble des $(f_q(\omega))$ soit égale à* $\mathrm{EG}(\omega)$. *Autrement dit,*

$$\pi^{-1}(\omega) = \bigcup_{1 \leq q \leq s} \{(f_q(\omega), \omega)\},$$

*pour tout $\omega \in \mathscr{V}$.*

*Démonstration.* — Il suffit de composer les applications réciproques $\pi_q^{-1}$, des applications $\pi_q$ précédentes, avec la projection canonique de $R^{ln} \times S_{++} \times R^{lm}$ sur $R^{ln} \times S_{++}$. ■

Ainsi, il apparaît qu'au voisinage d'une économie régulière, l'économie peut toujours évoluer en adaptant sa production et les prix de telle sorte que cette évolution se fasse sans transitions brusques. Ce dernier résultat est une généralisation du résultat de Debreu [10] dans le cadre d'une économie d'échange et de Smale [20] dans le cas d'une économie comportant un seul producteur maximisant son profit. On remarquera en effet qu'en l'absence de production, ou si les producteurs sont munis de fonctions d'offre, la projection canonique de EP sur S est une bijection, la sélection peut alors directement s'effectuer sur les prix et non sur les équilibres de production.

Une conséquence des deux propositions précédentes est alors que,

PROPOSITION 4.5. — *Le nombre d'équilibres d'une économie régulière* $\omega$ *est constant sur chaque composante connexe de* $\mathcal{R}$.

*Démonstration.* — La proposition précédente nous dit que ce nombre est localement constant au voisinage d'une économie régulière. Il est alors clairement constant sur chaque composante connexe de $\mathcal{R}$. ■

Il est intéressant de noter que si le nombre d'équilibres est localement constant et si sous certaines conditions il est égal à 1, nous n'avons pour autant aucune majoration de ce nombre. Tout au plus sait-on qu'il est fini pour les économies régulières et par conséquent que l'ensemble des économies à un nombre infini d'équilibres est de mesure nulle. La proposition suivante va nous donner une version asymptotique de ce dernier résultat, puisque nous y établissons que la « taille » de l'ensemble des économies admettant plus de $n$ équilibres décroît en $\frac{1}{n}$.

Formellement, soit K un compact de $\mathcal{U}$, soit $\Omega_n(\mathrm{K})$ l'ensemble des économies de K qui ont au moins $n$ équilibres et soit $\mu(\Omega_n(\mathrm{K}))$ la mesure, au sens de Lebesgue, de $\Omega_n(\mathrm{K})$.

THÉORÈME 4.6. — *Il existe une constante* $c(\mathrm{K})$ *telle que pour tout entier* $n \geqq 1$,

$$\mu(\Omega_n(\mathrm{K})) \leqq \frac{c(\mathrm{K})}{n}.$$

Ce dernier résultat est l'analogue dans le cadre des économies avec production, du théorème démontré dans le cas d'une économie d'échange par Balasko [4].

*Démonstration.* — Considérons l'ensemble

$$\mathrm{EG}_u = \{((y_j), p, (\omega_i)) \in \mathrm{EG} : \omega \in \mathcal{U}\},$$

muni de la structure riemannienne définie sur EG par la restriction des produits scalaires de $\mathrm{R}^{ln} \times \mathrm{S}_{++} \times \mathrm{R}^{lm}$ aux espaces tangents à EG, et soit $\lambda$ la notion d'aire ainsi définie sur EG.

L'aire ainsi définie sur EG vérifie alors que, l'aire d'un ensemble est toujours supérieure ou égale à la mesure de son projeté sur $\mathcal{U}$. C'est-à-dire que pour $\mathrm{H} \subset \mathrm{EG}_u$, on a $\mu(\pi(\mathrm{H})) \leqq \lambda(\mathrm{H})$.

Comme K est un compact de $\mathcal{U}$ et que $\pi$ est propre sur $\mathcal{U}$, $\pi^{-1}(\mathrm{K})$ est compact et donc mesurable. Posons $c(\mathrm{K}) = \lambda(\pi^{-1}(\mathrm{K}))$.

Par ailleurs puisque l'ensemble des économies singulières est de mesure nulle on a,

$$\mu(\Omega_n(\mathrm{K})) = \mu(\Omega_n(\mathrm{K}) \cap \mathcal{R}).$$

Comme de plus $\mathscr{R}$ est un ouvert de $\mathbf{R}^{lm}$ il est réunion dénombrable de cubes ouverts deux à deux disjoints et d'un ensemble de mesure nulle (Rudin, [19], p. 52).

Chacun des cubes précédents, connexe, est contenu dans une seule composante connexe de $\mathscr{R}$ et chaque $\omega$ dans ce cube possède un nombre constant d'équilibres.

Soit $(U_j)$ la suite des cubes pour lesquels chaque $\omega \in U_j$ possède au moins $n$ équilibres. L'ensemble $\pi^{-1}(U_j)$ possède alors pour tout $j$ au moins $n$ feuillets (proposition 4.3). Chacun de ces feuillets ayant une $\lambda$-mesure au moins égale à $\mu(U_j)$. En particulier on a,

$$n\,\mu(\Omega_n(K)\cap U_j) \leqq \lambda(\pi^{-1}(\Omega_n(K)\cap U_j)),$$

puis,

$$n\sum_j \mu(\Omega_n(K)\cap U_j) \leqq \sum_j \lambda(\pi^{-1}(\Omega_n(K)\cap U_j)),$$

or,

$$\mu(\Omega_n(K)) = \sum_j \mu(\Omega_n(K)\cap U_j),$$

et

$$\sum_j \lambda(\pi^{-1}(\Omega_n(K)\cap U_j)) \leqq \lambda(\pi^{-1}(K)) = c(K),$$

d'où

$$\mu(\Omega_n(K)) \leqq \frac{c(K)}{n}. \quad \blacksquare$$

## 5. L'HYPOTHÈSE DE TRANSVERSALITÉ

Dans ce paragraphe nous allons voir ce que devient l'hypothèse (Tr) dans un certain nombre de situations usuelles. Avec les notations de la démonstration de la proposition 3.1, il est clair que l'hypothèse (Tr) équivaut à dire que 0 est une valeur régulière de $\mathscr{H}$.

Par ailleurs, vu la forme de la matrice représentative de la différentielle de $\mathscr{H}$, nous pouvons remarquer immédiatement que si $((y_j), p) \in \mathrm{EP}$ et si pour tout $j$, sauf au plus l'un d'entre eux , $\varphi_j$ est un difféomorphisme local en $y_j$, alors l'hypothèse de transversalité est vérifiée en $((y_j), p)$. Toutefois imposer comme nous le faisons que cette propriété est vraie en tout point de EP ne signifie pas que les $\varphi_j$ sont globalement des difféomorphismes, ni même localement en tout point de EP. L'hypothèse

(Tr) limite en fait les possibilités de points critiques communs à « trop » de fonctions $\varphi_j$.

Nous pouvons enfin remarquer que dans le cas d'un seul ensemble de production (hypothèse faite par Mas-Colell [18] ainsi que Geanakoplos et Shaffer [13]) l'hypothèse (Tr) est automatiquement vérifiée.

Par ailleurs, l'étude d'une économie où tous les ensembles de production sont convexes étant mathématiquement équivalente à l'étude d'une économie comportant un seul producteur, la remarque précédente nous permet donc de supposer que l'hypothèse (Tr) est, dans ce cas également, toujours vérifiée.

Dans le cas général l'hypothèse (Tr) peut ne pas être vérifiée, cependant le résultat suivant va nous permettre de voir que moyennant une petite perturbation des règles de tarification notre hypothèse peut à nouveau être supposée vérifiée ce qui nous permet d'affirmer que cette hypothèse est, en un certain sens, générique.

PROPOSITION 5.1. — *Sous l'hypothèse* (RT) *et pour* $\varepsilon > 0$ *fixé, il existe des applications* $\bar{\varphi}_j : \partial Y_j \to S$ *vérifiant les hypothèses* (RT) *et* (Tr) *et telles que pour tout* $y_j \in \partial Y_j$, $\| \varphi_j(y_j) - \bar{\varphi}_j(y_j) \| \leqq \varepsilon$.

*Démonstration.* — Le résultat précédent est une application simple du théorème de Sard, puisque moyennant une petite perturbation, 0 peut toujours être supposé valeur régulière pour $\mathscr{H}$. ■

Supposons à présent que pour tout $j$ le bord $\partial Y_j$ de l'ensemble $Y_j$ est lisse, formellement

$$Y_j = \{ y_j \in R^l : g_j(y_j) \leqq 0 \},$$

où $g_j$ est une fonction $C^2$ définie sur $R^l$ et à valeurs réelles telle que le gradient de $g_j$ ne s'annule pas sur le bord de $Y_j$, et supposons que chaque producteur suit la règle de tarification marginale, c'est-à-dire que,

$$\varphi_j(y_j) = \frac{\nabla g_j(y_j)}{\nabla g_j(y_j) . e}.$$

Notons que l'hypothèse ci-dessus est équivalente, sous l'hypothèse (P), au fait que $\partial Y_j$ est une sous-variété $C^2$ de $R^l$.

Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant,

PROPOSITION 5.2. — *Si pour tous les ensembles de production sauf au plus l'un d'entre eux, la courbure gaussienne du bord est partout non nulle, alors l'hypothèse* (Tr) *est vérifiée pour la tarification marginale.*

Pour plus de détails sur la courbure gaussienne on pourra se référer à Hicks [15].

*Démonstration.* — Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que la courbure gaussienne de $\partial Y_j$ est nulle en $y_j$ si et seulement si le déterminant de $\frac{d\varphi_j(y_j)}{dy_j}$ est nul (*voir* Debreu [11]).

La proposition 5.2 devient alors une conséquence des remarques précédentes. ■

Le lecteur intéressé par l'aspect économique pourra vérifier que dans le cas, classique en économie, d'ensembles de production définis par des fonctions de type CES à rendements croissants ou non munis de la règle de tarification marginale ou dans le cas d'ensemble de production différentiellement strictement convexes (*i.e.*, vérifiant les conditions suffisantes du second ordre de stricte convexité) munis de la règle de maximisation du profit, les hypothèses de la proportion 5.2 sont vérifiées et par conséquent l'hypothèse (Tr) l'est également. On peut même supposer, comme dans la proposition 5.2, que l'un des ensembles, au plus, ne vérifie pas l'une de ces deux conditions.

Nous insistons cependant encore une fois sur le fait que l'hypothèse (Tr) est beaucoup plus faible. L'exemple suivant nous permet de voir une situation simple où (Tr) est vérifiée et où deux des ensembles de production ne sont ni convexes ni à courbure partout non nulle. Pour cela considérons une économie constituée de trois ensembles de production dans $R^2$ définis comme ci-dessus par des fonctions $g_1$, $g_2$ *et* $g_3$ avec,

$$g_1(u, v) = g_2(u, v) = v + u^3 \qquad \text{et} \qquad g_3(u, v) = v + e^u - 1,$$

munis de la règle de tarification marginale.

Les courbures gaussiennes de $\partial Y_1$ et $\partial Y_2$ sont toujours non nulles sauf pour $y_1 = y_2 = 0$, mais ce point ne correspond pas à un équilibre de production possible puisque $\varphi_3(\partial Y_3)$ ne contient pas le vecteur (0, 1). L'hypothèse (Tr) est donc bien vérifiée.

## RÉFÉRENCES


[1] K. J. ARROW et G. DEBREU, Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, *Econometrica*, vol. **22**, 1954, p. 265-290.

[2] Y. BALASKO, The Graph of the Walras Correspondence, *Econometrica*, vol. **43**, 1975, p. 907-912.

[3] Y. BALASKO, Economic Equilibrium and Catastrophe theory: an Introduction, *Econometrica*, vol. **46**, 1978, p. 557-569.

[4] Y. BALASKO, Economies with a Finite but Large Number of Equilibria, *J. Math. Economics*, vol. **6**, 1979, p. 145-147.

[5] Y. BALASKO, A Geometric Approach to the Equilibrium Analysis, *J. Math. Economics*, vol. **6**, 1978, p. 217-228.

[6] Y. BALASKO, *Foundations of the Theory of General Equilibrium*, New York, Academic Press, 1987.

[7] J. M. BONNISSEAU et B. CORNET, Existence of Equilibria when Firms Follow Bounded Losses Pricing Rules, *J. Math. Economics*, vol. **17**, 1988, p. 119-147.

[8] J. M. BONNISSEAU et B. CORNET, Existence of Marginal Cost Pricing Equilibria in Economies with Several Nonconvex Firms, *Econometrica*, vol. **58**, 1990, p. 661-682.

[9] G. DEBREU, *Theory of Value*, New York, John Wiley, 1959.

[10] G. DEBREU, Economies with a Finite Set of Equilibria, *Econometrica*, vol. **38**, 1970, p. 387-392.

[11] G. DEBREU, Smooth Preferences, *Econometrica*, vol. **40**, 1972, p. 603-615.

[12] E. DIERKER, *Regular Economies* in *Handbook of Mathematical Economics*, vol. **2**, K. J. ARROW et M. D. INTRILIGATOR éd., New York, North Holland.

[13] J. GEANOKOPLOS et W. SHAFER, *Solving Systems of Simultaneous Equations in Economics*, Working Paper, 1987.

[14] L. HURWICZ et S. REITER, The Boundedness of the Feasible Set Without Convexity Assumption, *International Economic Review*, vol. **14**, 1973, p. 580-586.

[15] N. J. HICKS, *Notes on Differential Geometry*, London, Van Nortrand, 1965.

[16] E. JOUINI, Ensembles de production non-convexes: existence et unicité de l'équilibre, *Thèse de Doctorat*, Université Paris-I, 1988.

[17] E. JOUINI, *An Index Theorem for Nonconvex Production Economies*, préprint, numéro 326, du Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique, 1990.

[18] A. MAS COLELL, *The Theory of General Economic Equilibrium: A Differential Approach*, Cambridge, Cambridge University Press, 1985.

[19] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, New York, McGraw Hill.

[20] S. SMALE, Global analysis and economics 4: Finiteness and Stability of Equilibria with General Consumption Set and Production, *J. Math. Economics*, vol. **1**, 1974, p. 119-127.

(*Manuscrit reçu le* 12 *septembre* 1990.)