ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

GÉRARD BOURDAUD

# Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov et de Triebel

*Annales de l'I. H. P., section C*, tome 10, n° 4 (1993), p. 413-422

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1993__10_4_413_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*

Vol. 10, n° 4, 1993, p. 413-422. *Analyse non linéaire*

# Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov et de Triebel

par

**Gérard BOURDAUD**

Université Paris-VII, C.N.R.S.-U.A. n° 212, Tour 45-55,
2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

RÉSUMÉ. — Soit F une fonction qui opère, par composition à gauche, sur l'espace de Besov — ou de Triebel — $E^s_p(\mathbb{R}^n)$ $(s>0)$. On montre que F est localement lipschitzienne si $E^s_p(\mathbb{R}^n)$ s'injecte dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, globalement lipschitzienne sinon. Ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour $0<s<1$.

ABSTRACT. — Let F be a function which acts, via left composition, on the Besov—or Triebel—space $E^s_p(\mathbb{R}^n)$ $(s>0)$. We prove that F is locally Lipschitz, if $E^s_p(\mathbb{R}^n)$ is imbedded into $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, and globally Lipschitz if not; these conditions are necessary and sufficient when $0<s<1$.

## 1. INTRODUCTION

Dans deux articles récents — dont l'un en collaboration avec Dalila Kateb ([BK1], [B3]), on a caractérisé les fonctions qui opèrent, par composition à gauche, sur l'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et sur l'espace de Triebel-Lizorkin $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $s\in ]0, 1[$.

*Classification A.M.S. :* 46 E 35.

Nous nous proposons de revenir sur ces résultats, avec deux objectifs : (i) simplifier et unifier les démonstrations, (ii) montrer que les conditions de Lipschitz sont encore nécessaires pour $s \geqq 1$ ; ce résultat, nous l'avons déjà obtenu pour l'espace de Sobolev $W^{m,p}$ ($m$ entier, $m \geqq 2$), mais d'une manière fort laborieuse (*voir* notamment le paragraphe 6 de [B2]).

Précisons d'abord nos notations. On suppose $q \in [1, +\infty]$, $p \in [1, +\infty]$ ($p < +\infty$, dans le cas des espaces de Triebel) et, sauf précision contraire (*voir* le lemme 8), $s > 0$ ; on note $m$ le premier entier tel que $m > s$ ; C désignera une constante positive, ne dépendant que de $s$, $n$, $p$, $q$ et des fonctions auxiliaires $\varphi$ et $\omega$ ; la valeur de C peut changer d'une occurrence à l'autre. $\Delta_h$ est l'opérateur de différence finie :

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x).$$

Le nombre $q$ jouant un rôle secondaire, $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ désignera indifféremment l'espace de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ ou l'espace de Triebel $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ (*voir* [T1]) ; pour $s$ entier, $E_1^s(\mathbb{R}^n)$ et $E_\infty^s(\mathbb{R}^n)$ désigneront aussi, respectivement, les espaces de Sobolev $W^{s,1}(\mathbb{R}^n)$ et $W^{s,\infty}(\mathbb{R}^n)$ qui, rappelons-le, ne sont ni des espaces de Besov, ni des espaces de Triebel. Quand il n'y a pas de risque de confusion, on note $\|f\|$ la norme de $f$ dans $E_p^s$. L'introduction du nombre $\rho = (n/p) - s$ est justifiée par l'importante estimation

$$\|f(\cdot/\lambda)\| \leqq \lambda^\rho \|f\| \qquad (\forall \lambda \in ]0, 1]) ; \tag{1}$$

cette inégalité est vérifiée seulement pour $s > 0$ ; nous verrons ultérieurement ce qu'il advient quand $s = 0$ (lemme 8).

$E_p^s(\mathbb{R}^n)$ est qualifié de *sur-critique* s'il s'injecte dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, de *sous-critique* dans le cas contraire ; voici la liste *exhaustive* des espaces sur-critiques :

(i) $E_p^s(\mathbb{R}^n)$, pour $s > n/p$,

(ii) $B_{p,1}^{n/p}(\mathbb{R}^n)$, pour $p \in [1, +\infty]$ ([T1]),

(iii) $F_{1,q}^n(\mathbb{R}^n)$, pour $q \in [1, +\infty]$ ([J]),

(iv) $W^{n,1}(\mathbb{R}^n)$ ;

en fait tous ces espaces s'injectent dans $B_{\infty,1}^0(\mathbb{R}^n)$, lui-même sous-espace de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

THÉORÈME. — *Soit* $H : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, *une fonction opérant, par composition à gauche, sur l'espace* $E_p^s$. *Alors* :

(i) H *est lipschitzienne, si* $E_p^s$ *est sous-critique* ;

(ii) H *est localement lipschitzienne, si* $E_p^s$ *est sur-critique.*

En combinant le théorème avec les caractérisations de $E_p^s$ au moyen de l'opérateur de différence finie (*voir* [T2]), on obtient le

COROLLAIRE. — *Soit* $s \in ]0, 1[$ ($s = 1$, *dans le cas où* $E_p^s$ *est l'espace de Sobolev* $W^{1,p}$) *et* $p < +\infty$ ; *alors une condition nécessaire et suffisante pour* *que* H *opère sur* $E_p^s$ *est*:

(i) H *lipschitzienne et* $H(0)=0$, *dans le cas sous-critique*;

(ii) H *localement lipschitzienne et* $H(0)=0$, *dans le cas sur-critique.*

Le corollaire s'étend évidemment au cas $p=+\infty$ : il suffit d'ignorer la condition H $(0)=0$. En fait, c'est une version plus forte du théorème que nous prouverons: à une exception près (le cas $s=1/p$, en dimension 1), dès que H envoie $E_p^s$ dans $B_{p,\infty}^s$, H est lipschitzienne (resp. localement lipschitzienne).

Le théorème n'est évidemment qu'un premier pas vers une description complète du calcul fonctionnel dans $E_p^s$, pour $s>1$, analogue à celle obtenue pour les espaces de Sobolev $W^{m,p}$ [B2]; on montre en effet aisément qu'il existe alors des fonctions lipschitziennes qui *n'opèrent pas* sur $E_p^s$. En outre ([R], [B4]) le calcul fonctionnel est trivial dans la « zone interdite » $1+(1/p)\leqq s<n/p$. Dans les bons cas, autrement dit pour $1\leqq s<1+(1/p)$ et pour $s\geqq n/p$, on dispose de conditions *suffisantes*, vérifiées notamment si $H\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ et $H(0)=0$, pour que la fonction H opère sur $E_p^s$ (*voir* [BM], [BK2], [MC]); malheureusement, aucune de ces conditions n'est nécessaire.

## 2. PREUVE DU THÉORÈME: LE CAS SOUS-CRITIQUE

Nous commencerons par vérifier que l'opérateur de composition est, en un sens faible, borné:

LEMME 1. — *Soit* $H:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, *une fonction s'annulant à l'origine telle que, pour tout* $f\in E_p^s$, *on ait* $H\circ f\in B_{p,\infty}^s$. *Alors il existe des nombres* $M>0$ *et* $\delta>0$ *tels que l'implication*

$$\|f\|\leqq\delta \quad\Rightarrow\quad \|H\circ f\|_{B_{p,\infty}^s}\leqq M, \tag{2}$$

*soit vérifiée par toute fonction portée par le cube unité* $Q=[-1/2,\ +1/2]^n$.

*Preuve.* — Nous allons montrer une propriété apparemment plus faible : l'existence d'un cube R et de nombres $\delta$ et M tels qu'on ait (2) pour toute fonction portée par R. L'invariance de nos espaces par dilatations et translations donnera aussitôt la propriété annoncée.

Supposons, au contraire, que, pour tout cube R et tous nombres M et $\delta$, on puisse trouver une fonction $f$, portée par R, telle que $\|f\|\leqq\delta$ et $\|H\circ f\|_{B_{p,\infty}^s}\geqq M$.

Donnons-nous une suite $R_j$ de cubes disjoints et des fonctions $\varphi_j\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ telles que $\varphi_j(x)=1$ sur $(1/2)R_j$ et $\varphi_j(x)=0$ hors de $R_j$. Désignons par $M_j$ la norme de l'opérateur $f\to f\varphi_j$, agissant sur $B_{p,\infty}^s$, et choisissons des fonctions $f_j$ telles que

$$\operatorname{Supp} f_j\subset(1/2)R_j,\qquad \|f_j\|\leqq 2^{-j},\qquad \|H\circ f_j\|_{B_{p,\infty}^s}\geqq jM_j.$$

Alors la fonction $f=\sum_{j\geqq 0} f_j$ appartient à $E_p^s$ et $(H\circ f)\varphi_j=H\circ f_j$ ; il vient alors

$$jM_j\leqq \|(H\circ f)\varphi_j\|_{B_{p,\infty}^s}\leqq M_j\|H\circ f\|_{B_{p,\infty}^s},$$

ce qui est absurde.

LEMME 2. — *Dans le cas sous-critique, il existe une suite* $(\theta_\nu)_{\nu\geqq 1}$ *de fonctions* $C^\infty$ *sur* $\mathbb{R}^n$, *portées par* Q, *telles que* $\theta_\nu(x)=1$ *sur le cube* $2^{-\nu}Q$ *et* $\lim_{\nu\to\infty}\|\theta_\nu\|=0$.

*Preuve.* — Donnons-nous une fonction $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(x)=1$ sur Q et $\varphi(x)=0$ hors de 2Q.

Le cas $s<n/p$ est très simple: on pose $\theta_\nu(x)=\varphi(2^\nu x)$; l'estimation $\|\theta_\nu\|\leqq 2^{-\nu\rho}\|\varphi\|$ permet de conclure.

Supposons maintenant $s=n/p$ et posons

$$\theta_\nu(x)=\nu^{-1}\sum_{1\leqq j\leqq \nu}\varphi(2^j x);$$

on a aussitôt $\theta_\nu(x)=0$ hors de Q et $\theta_\nu(x)=1$ sur $2^{-\nu}Q$.

Pour estimer les normes des $\theta_\nu$, on fait appel à la théorie « moléculaire » des espaces de Besov et de Triebel, telle qu'elle est développée par Frazier et Jawerth. Si $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, il existe une constante $C=C(f, s, p, q, n)>0$ telle que, pour tout $k\in Z^n$ et tout $j\geqq 0$, la fonction $x\to C\,2^{j\rho}f(2^j x-k)$ soit une molécule de $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ (dans le cas $s>0$, qui seul nous intéresse ici, il n'est pas nécessaire de supposer que $f$ a des moments nuls); les théorèmes 3.1 de [FJ1] et 5.3 de [FJ2] s'écrivent alors

$$\Big\|\sum_{j\geqq 0}\sum_{k\in Z^n}\alpha_{j,k}2^{j\rho}f(2^j(.)-k)\Big\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}\leqq C\Big(\sum_{j\geqq 0}\Big(\sum_{k\in Z^n}|\alpha_{j,k}|^p\Big)^{q/p}\Big)^{1/q},$$

$$\Big\|\sum_{j\geqq 0}\sum_{k\in Z^n}\alpha_{j,k}2^{j\rho}f(2^j(.)-k)\Big\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leqq C\Big\|\Big(\sum_{j\geqq 0}\sum_{k\in Z^n}(|\alpha_{j,k}|2^{jn/p}\chi(2^j(.)-k))^q\Big)^{1/q}\Big\|_p,$$

où $\chi$ désigne la fonction caractéristique de Q. En revenant aux $\theta_\nu$, on en déduit aussitôt

$$\|\theta_\nu\|_{B_{p,q}^{n/p}}\leqq C\,\nu^{(1/q)-1}.$$

De même

$$\|\theta_\nu\|_{F_{p,1}^{n/p}}\leqq C\,\nu^{-1}\Big\|\sum_{1\leqq j\leqq \nu}2^{jn/p}\chi_j\Big\|_p,$$

où $\chi_j$ désigne la fonction caractéristique du cube $2^{-j}Q$; pour estimer la norme $L^p$ qui apparaît au second membre, on pose

$$S_k=(2^{-k}Q)\diagdown(2^{-k-1}Q)\qquad(k=1,\ldots,\nu-1),$$
$$S_\nu=2^{-\nu}Q;$$

la fonction $\sum_{1 \leqq j \leqq \nu} 2^{jn/p} \chi_j$ valant constamment $\sum_{1 \leqq j \leqq k} 2^{jn/p}$ sur $S_k$, on obtient

$$\begin{aligned} \|\theta_\nu\|_{F^{n/p}_{p,1}} &\leqq C \nu^{-1} \Big( \sum_{1 \leqq k \leqq \nu} |S_k| 2^{kn} \Big)^{1/p} \\ &\leqq C' \nu^{(1/p)-1} \qquad \text{(C.Q.F.D.)}. \end{aligned}$$

Voici une autre application immédiate des théorèmes de Frazier et Jawerth:

LEMME 3. — *Pour toute fonction* $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, *il existe une constante* $C>0$ *telle que*

$$\Big\| \sum_{k \in Z^n} \alpha_k g((.)-k) \Big\| \leqq C \Big( \sum_{k \in Z^n} |\alpha_k|^p \Big)^{1/p}.$$

Soit H une fonction satisfaisant l'hypothèse du lemme 1 ; on suppose l'espace $E^s_p$ sous-critique et on se propose de mettre en évidence des constantes $\sigma>0$ et $K>0$ telles que $|a-b| \leqq \sigma$ entraîne

$$|H(a)-H(b)| \leqq K |a-b|,$$

quels que soient $a$ et $b$.

Posons $\tau=(2m+1)^{-1}$, $g(x)=\varphi((2m+1)x)$, où $\varphi$ est la fonction plateau introduite dans la preuve du lemme 2, puis

$$f(x)=(b-a) \sum_{|k_j| \leqq \mu} g(r^{-1}x-k) + a\,\theta_\nu(x);$$

la somme $\sum_{|k_j| \leqq \mu} \ldots$ est étendue aux $k \in Z^n$ tels que $|k_j| \leqq \mu$ pour tout $j=1, \ldots, n$; les entiers positifs $\nu$ et $\mu$, ainsi que le nombre $r \in ]0, 1]$, seront précisés dans un instant. C'est une version rudimentaire de la fonction $f$ ($g$ et $\theta_\nu$ étaient alors des fonctions caractéristiques d'intervalles) qui a permis à S. Igari de décrire le calcul fonctionnel dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ $(0<s<1/2)$ [I].

Le lemme 2 nous autorise à choisir $\nu$ tel que $|a| \, \|\theta_\nu\| \leqq \delta/2$ ; le lemme 3 et l'inégalité (1) conduisent à l'estimation

$$\Big\| \sum_{|k_j| \leqq \mu} g(r^{-1}(.)-k) \Big\| \leqq C r^\rho \mu^{n/p},$$

de sorte que $\mu$ et $r$ devront satisfaire les relations:

$$\delta(3|a-b|)^{-1} \leqq C r^\rho \mu^{n/p} \leqq \delta(2|a-b|)^{-1}, \tag{3}$$

$$r\mu \leqq 2^{-\nu-2}. \tag{4}$$

La relation (3) entraînera $\|f\| \leqq \delta$, alors que (4) nous donnera

$$f(x)=b \quad \text{sur } r(\tau Q+k), \qquad f(x)=a \quad \text{sur } r(Q+k) \diagdown r(2\tau Q+k), \tag{5}$$

pour tout $k$ tel que $|k_j| \leqq \mu$ $(j=1, \ldots, n)$.

Voici comment réaliser ces deux inégalités. Pour $\rho>0$, il suffit de poser

$$r=\{\delta(2C|a-b|)^{-1}\mu^{-n/p}\}^{1/\rho},$$

alors $r\mu$ est de l'ordre de grandeur de $\mu^{1-(n/p\rho)}$; l'hypothèse $s>0$ entraîne

$$1-(n/p\rho)<0$$

et le choix d'un grand entier $\mu$ permet d'obtenir (4).

Supposons maintenant $\rho=0$; si $\delta(3|a-b|)^{-1}$ est assez grand (ce qui s'écrit $|a-b|\leqq\sigma$!), il est possible de trouver un entier $\mu\geqq 1$ tel qu'on ait (3); on choisit alors $r$ assez petit pour avoir (4).

Nous allons achever la démonstration en exploitant convenablement l'inégalité $\|H\circ f\|_{B^s_{p,\infty}}\leqq M$.

Rappelons que la norme $B^s_{p,\infty}$ est équivalente à $\|f\|_p+N_1(f)$, où

$$N_1(f)=\sup_{h\neq 0}|h|^{-s}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|(\Delta_h)^m f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Posons alors $Q^+=[0, 1/2]^n$; les relations (5) entraînent

$$(\Delta_{r\tau e_1})^m(H\circ f)(x)=H(b)-H(a)$$

sur le cube $r(\tau Q^+ +k))$, pour tout $k$ tel que $|k_j|\leqq\mu\,(j=1, \ldots, n)$; on en déduit

$$r^{sp}\tau^{sp}M^p\geqq\sum_{|k_j|\leqq\mu}\int_{r(\tau Q^+ +k)}|(\Delta_{r\tau e_1})^m(H\circ f)(x)|^p\,dx$$
$$=|H(a)-H(b)|^p(2\mu+1)^n\operatorname{vol}(r\tau Q^+);$$

autrement dit, grâce à l'encadrement (3),

$$|H(a)-H(b)|\leqq CM\,r^{-\rho}\mu^{-n/p}\leqq C'M\delta^{-1}|a-b|.$$

## 3. PREUVE DU THÉORÈME : LE CAS SUR-CRITIQUE

Suivant la démarche de S. Igari [I], on introduit une version locale de l'opérateur de composition :

$$(S_a f)(x)=\varphi(x)(H(a+f(x))-H(a)).$$

On a encore

$$(S_a f)(x)=\varphi(x)(H(\varphi(x/2)(a+f(x)))-H(a\varphi(x/2)));$$

autrement dit

$$S_a f=\varphi\{H\circ(a\varphi(./2)+\varphi(./2)f)-(H\circ a\varphi(./2))\}.$$

Si H opère sur $E^s_p$, il en est de même pour l'opérateur non-linéaire $S_a$.

LEMME 4. — *Soit* $H: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, *une fonction opérant, par composition à gauche, sur* $E_p^s$. *Alors, quel que soit* $a \in \mathbf{C}$, *il existe des nombres* $\delta > 0$, $M > 0$ *et un cube* $Q' \subset Q$ *tels que*

$$\| f \| \leqq \delta \quad \Rightarrow \quad \| S_a f \| \leqq M,$$

*pour toute fonction f, portée par* $Q'$. *La même conclusion est vraie, mutatis mutandis, si* H *opère de* $E_p^s$ *dans* $B_{p,\infty}^s$.

Nous omettrons la preuve du lemme 4, essentiellement identique à celle du lemme 1.

LEMME 5. — *Soient* $\varepsilon > 0$, *assez petit,* $r > 0$ *et* $\xi \in \mathbb{R}^n$. *Si f est une fonction, appartenant à* $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$, *telle que*

$$f(x) = a \quad \textit{sur} \quad \xi + r\mathrm{Q}, \qquad f(x) = b \quad \textit{sur} \quad (\xi + 2r\mathrm{Q}) \setminus (\xi + r(1+\varepsilon)\mathrm{Q}), \tag{6}$$

*alors la norme de f dans* $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$ *est minorée par* $C\,|b-a|\,r^\rho\,\varepsilon^{(1/p)-s}$.

*Preuve.* — Nous supposerons $\varepsilon \leqq 1/2m$. Dans le cas $\xi = 0$ et $r = 1$, on intègre $|(\Delta_{\varepsilon e_1})^m f(x)|^p$ sur le pavé $P_\varepsilon$ défini par

$$(1-\varepsilon)/2 \leqq x_1 \leqq 1/2, \qquad |x_j| \leqq 1/2 \quad (j = 2, \ldots, n);$$

il vient

$$N_1(f) \geqq \varepsilon^{-s}\,|a-b|\,(\mathrm{vol}\,P_\varepsilon)^{1/p} = 2^{-1/p}\,|a-b|\,\varepsilon^{(1/p)-s}.$$

Pour obtenir le cas général, on pose $f(x) = f_0(r^{-1}(x-\xi))$, ce qui donne

$$(\Delta_h)^m f(x) = (\Delta_{h/r})^m f_0(r^{-1}(x-\xi)),$$

et donc $N_1(f) = r^\rho N_1(f_0)$.

Le lemme 5 est destiné à servir notamment dans le cas $s = n/p$, de sorte que, curieusement, il ne nous sera d'aucun secours en dimension 1 ; un autre énoncé lui est alors substitué :

LEMME 6. — *Soit* $\varepsilon > 0$, *assez petit,* $r > 0$ *et* $\xi \in \mathbb{R}$. *Si f est une fonction appartenant à* $B_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R})$ [resp. $F_{1,\infty}^1(\mathbb{R})$], *vérifiant* (6), *alors la norme de f est minorée par* $C\,|a-b|\,|\mathrm{Log}\,\varepsilon|$.

*Preuve.* — Comme dans celle du lemme 5, on se ramène aussitôt à $\xi = 0$ et $r = 1$. La norme $B_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R})$ est équivalente à $\| f \|_p + N_2(f)$, où

$$N_2(f) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |(\Delta_h)^2 f(x)|^p\,dx \right)^{1/p} |h|^{-1-(1/p)}\,dh.$$

Supposons $\varepsilon \leqq h \leqq 1/4$ et intégrons $|(\Delta_h)^2 f(x)|^p$ sur l'intervalle $[((1+\varepsilon)/2) - h,\ 1/2]$ ; on obtient

$$\begin{aligned} N_2(f) &\geqq |a-b| \int_\varepsilon^{1/4} (h - (\varepsilon/2))^{1/p}\,h^{-1-(1/p)}\,dh \\ &\geqq |a-b|\,2^{-1/p} \int_\varepsilon^{1/4} h^{-1}\,dh \\ &\geqq C\,|a-b|\,|\mathrm{Log}\,\varepsilon|. \end{aligned}$$

La norme $F^1_{1,\infty}(\mathbb{R})$ est équivalente à $\|f\|_1 + N_3(f)$, où

$$N_3(f) = \| \sup_{t>0} t^{-1} \int_{[-1,+1]} |(\Delta_{th})^2 f(.)| \, dh \|_1$$

(*voir* [T2], théorème 2.3.6).

On suppose $\varepsilon \leqq 1/16$ et $3/8 \leqq x \leqq 1/2$; pour tout $h \in [1/2, 1]$ et tout $t \in [1+\varepsilon-2x, (1-x)/2]$, on a $(\Delta_{th})^2 f(x) = b-a$, d'où

$$\sup_{t>0} t^{-1} \int_{[-1,+1]} |(\Delta_{th})^2 f(x)| \, dh \geqq (1/2)|b-a|(1+\varepsilon-2x)^{-1};$$

en intégrant sur l'intervalle [3/8, 1/2], on obtient

$$N_3(f) \geqq (1/2)|b-a| \operatorname{Log}(1+(4\varepsilon)^{-1}).$$

Nous allons établir maintenant les réciproques des lemmes 5 et 6; autrement dit, nous construirons des fonctions plateaux dont les normes sont estimées par $\varepsilon^{(1/p)-s}$ (resp. $|\operatorname{Log} \varepsilon|$) quand $\varepsilon$ tend vers 0.

LEMME 7. — *Il existe une famille de fonctions* $\psi_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ $(0<\varepsilon\leqq 1/2)$ *telles que* $\psi_\varepsilon(x)=1$ *sur* Q, $\psi_\varepsilon(x)=0$ *hors de* $(1+\varepsilon)Q$ *et*

(i) *pour* $s>1/p$, *la norme de* $\psi_\varepsilon$ *dans* $E^s_p$ *est majorée par* $C\varepsilon^{(1/p)-s}$;

(ii) *les normes de* $\psi_\varepsilon$ *dans* $B^{1/p}_{p,1}(\mathbb{R})$ *et* $F^1_{1,q}(\mathbb{R})$ *sont majorées par* $C|\operatorname{Log}\varepsilon|$.

*Preuve.* — Nous construirons $\psi_\varepsilon$ en dimension 1; en dimension supérieure, il suffira de poser $\psi_{\varepsilon,n}(x) = \psi_\varepsilon(x_1)\ldots\psi_\varepsilon(x_n)$. On part d'une fonction $\omega \in \mathscr{D}(\mathbb{R})^+$, portée par [0, 1], telle que $\int \omega(x)\,dx = 1$ et on pose

$$\omega_\varepsilon(x) = 2\varepsilon^{-1}\{\omega(-\varepsilon^{-1}(2x+1)) - \omega(\varepsilon^{-1}(2x-1))\};$$

la fonction $\psi_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{x} \omega_\varepsilon(t)\,dt$ est alors portée par $|x| \leqq (1+\varepsilon)/2$ et vaut 1 pour $|x| \leqq 1/2$.

Puisque la norme $L^p$ de $\psi_\varepsilon$ est majorée par $3^{1/p}$, il nous suffira d'estimer la norme de $\omega_\varepsilon$ dans l'espace $E^{s-1}_p$. La double inclusion

$$B^{s-(1/p)}_{1,1} \subset B^{s-1}_{p,1} \subset E^{s-1}_p$$

nous conduit à calculer la norme de $\omega_\varepsilon$ dans l'espace de Besov minimal $B^{s-(1/p)}_{1,1}$. Pour $s>1/p$, l'inégalité (1) s'applique et donne l'estimation annoncée.

Pour $s=1/p$, il s'agit d'estimer la norme de $\omega_\varepsilon$ dans l'espace $B^0_{1,1}$:

LEMME 8. — *Dans l'espace de Besov* $B^0_{1,1}(\mathbb{R}^n)$, *on a*

$$\|f(./\lambda)\| \leqq C\lambda^n |\operatorname{Log}\lambda| \, \|f\|,$$

*quel que soit* $\lambda \in ]0, 1/2]$.

*Preuve.* — Soit $f=\sum_{j\geqq 0} \mathrm{L}_j(f)$, une décomposition de Littlewood-Paley (*voir*, par exemple, [B1], chapitre VI). Par définition, la norme de $f$ dans $\mathrm{B}^0_{1,1}$ n'est autre que $\sum_{j\geqq 0} \|\mathrm{L}_j f\|_1$.

Soit $k$ un entier positif tel que $2^k \simeq \lambda^{-1}$. La fonction $\mathrm{L}_j f(./\lambda)$ ayant son spectre dans une couronne $|\xi| \simeq 2^{j+k}$ (pour $j \geqq 1$), on a classiquement

$$\Big\|\sum_{j\geqq 1} \mathrm{L}_j f(./\lambda)\Big\| \leqq \mathrm{C} \sum_{j\geqq 1} \|\mathrm{L}_j f(./\lambda)\|_1 \leqq \mathrm{C}\lambda^n \|f\|.$$

Par ailleurs, le spectre de $\mathrm{L}_0 f(./\lambda)$ est inclus dans une boule $|\xi| \leqq \mathrm{C}\,2^k$ et les opérateurs $\mathrm{L}_j$ sont uniformément bornés sur $\mathrm{L}^1$; on en déduit, pour un certain entier $c$,

$$\begin{aligned}\|\mathrm{L}_0 f(./\lambda)\| &\leqq \mathrm{C} \sum_{0\leqq j\leqq k+c} \|\mathrm{L}_j\{\mathrm{L}_0 f(./\lambda)\}\|_1\\ &\leqq \mathrm{C}' \sum_{0\leqq j\leqq k+c} \|f(./\lambda)\|_1\\ &\leqq \mathrm{C}''\lambda^n |\mathrm{Log}\,\lambda|\,\|f\|.\end{aligned}$$

Cela termine la preuve du lemme 8 et, par conséquent, celle du lemme 7.

Supposons que H opère sur l'espace sur-critique $\mathrm{E}^s_p$ (En fait, si on excepte les cas de $\mathrm{B}^{1/p}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{F}^1_{1,q}(\mathbb{R})$, il nous suffit de supposer que H envoie $\mathrm{E}^s_p$ dans $\mathrm{B}^s_{p,\infty}$).

Le nombre $a\in\mathbf{C}$ étant désormais fixé, on va mettre en évidence des nombres positifs $\sigma$, $\sigma'$ et K tels que $|b|\leqq\sigma$, $|b'|\leqq\sigma$ et $|b-b'|\leqq\sigma'$ entraînent $|\mathrm{H}(a+b)-\mathrm{H}(a+b')|\leqq \mathrm{K}|b-b'|$; cela signifiera que H est lipschitzienne sur le disque $|z-a|\leqq\sigma$.

Appliquons le lemme 4 et désignons par $\xi$ et $l$ le centre et le demi-côté de Q'. On pose

$$f(x)=(b'-b)\,\psi_\varepsilon(r^{-1}(x-\xi))+b\,\varphi(l^{-1}(x-\xi));$$

le lemme 7 et l'inégalité (1) conduisent à l'estimation

$$\|\psi_\varepsilon(r^{-1}((.)-\xi))\| \leqq \mathrm{C}\chi(\varepsilon)\,r^p \qquad (0<\varepsilon\leqq 1/2),$$

où $\chi(\varepsilon)=\varepsilon^{(1/p)-s}$, si $s>1/p$, et $\chi(\varepsilon)=|\mathrm{Log}\,\varepsilon|$ dans le cas d'égalité.

On commence par astreindre $b$ à la condition

$$|b|\,l^p\,\|\varphi\|\leqq\delta/2,$$

qui détermine la constante $\sigma$; puis on se propose de réaliser

$$\mathrm{C}\,|b'-b|\,r^p\chi(\varepsilon)=\delta/2, \tag{7}$$
$$2r\leqq l. \tag{8}$$

L'égalité (7) entraînera $\|f\|\leqq\delta$, alors que (8) nous donnera

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=b' \quad \text{sur } \xi+r\mathrm{Q},\\ f(x)&=b \quad \text{sur } (\xi+2r\mathrm{Q})\diagdown(\xi+r(1+\varepsilon)\mathrm{Q})\end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Pour $\rho<0$, on fixe $\varepsilon=1/2m$ et on définit $r$ par l'égalité (7); la condition (8) détermine alors la constante $\sigma'$. Pour $\rho=0$, on pose $r=l/2$ et on définit $\varepsilon$, assez petit, par l'égalité (7) (ce qui impose, là aussi, $|b-b'|\leqq\sigma'$). Les relations (9) conduisent à

$$S_a f(x)=H(a+b') \quad \text{sur } \xi+rQ,$$
$$S_a f(x)=H(a+b) \quad \text{sur } (\xi+2rQ)\diagdown(\xi+r(1+\varepsilon)Q).$$

Il reste à appliquer les lemmes 5 et 6 et, à nouveau, l'égalité (7); il vient

$$M\geqq\|S_a f\|\geqq C\,|H(a+b')-H(a+b)|\,\chi(\varepsilon)\,r^{\rho}$$
$$=\delta C'\,|H(a+b')-H(a+b)|\,|b-b'|^{-1} \qquad \text{(C.Q.F.D.)}.$$

REMERCIEMENTS

Les observations du referee nous ont permis d'améliorer sensiblement la présentation de l'article. Qu'il trouve ici l'expression de notre gratitude.

## RÉFÉRENCES

[B1] G. BOURDAUD, *Analyse fonctionelle dans l'espace Euclidien*, Publ. Math. Paris-VII, vol. **23**, 1987.

[B2] G. BOURDAUD, Le calcul fonctionnel dans les espaces de Sobolev, *Invent. Math.*, vol. **104**, 1991, p. 435-446.

[B3] G. BOURDAUD, Le calcul fonctionnel dans l'espace de Besov critique, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. **116**, 1992, pp. 983-986.

[B4] G. BOURDAUD, La trivialité du calcul fonctionnel dans $H^{3/2}(\mathbb{R}^4)$, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **314**, série I, 1992, pp. 187-190.

[BK1] G. BOURDAUD, et D. KATEB, Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. **112**, 1991, p. 1067-1076.

[BK2] G. BOURDAUD, et M. E. D. KATEB, Calcul fonctionnel dans l'espace de Sobolev fractionnaire, *Math. Zeit.*, vol. **210**, 1992, pp. 607-613.

[BM] G. BOURDAUD, et Y. MEYER, Fonctions qui opèrent sur les espaces de Sobolev, *J. Funct. Anal.*, vol. **97**, 1991, p. 351-360.

[FJ1] M. FRAZIER et B. JAWERTH, Decomposition of Besov Spaces, *Indiana Univ. Math. J.*, vol. **84**, 1985, p. 777-799.

[FJ2] M. FRAZIER et B. JAWERTH, A Discrete Transform and Applications to Distribution Spaces, *J. Funct. Anal.*, vol. **93**, 1990, p. 34-170.

[I] S. IGARI, Sur les fonctions qui opèrent sur l'espace $\hat{A}^2$, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, vol. **15**, 1965, p. 525-536.

[J] B. JAWERTH, Some Observations on Besov and Lizorkin-Triebel Spaces, *Math. Scand.*, vol. **40**, 1977, p. 94-104.

[MC] Y. MEYER et R. R. COIFMAN, *Ondelettes et Opérateurs*, Tome III (Opérateurs multilinéaires), Hermann, Paris, 1991.

[R] T. RUNST, Mapping Properties of Non-Linear Operators in Spaces of Triebel-Lizorkin and Besov Type, *Analysis Mathematica*, vol. **12**, 1986, p. 313-346.

[T1] H. TRIEBEL, *Theory of Function Spaces*, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, 1983.

[T2] H. TRIEBEL, Local Approximation Spaces, *Z. Anal. Anwendungen*, vol. **8**, 1989, p. 261-288.

(*Manuscrit reçu le* 4 *juillet* 1991;
*révisé le* 6 *janvier* 1992.)