ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

EMMANUEL HEBEY
MICHEL VAUGON

Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev

Annales de l'I. H. P., section C, tome 13, nº 1 (1996), p. 57-93
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1996__13_1_57_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 13, n° 1, 1996, p. 57-93 *Analyse non linéaire*

Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev

par

Emmanuel HEBEY

9, rue Villehardouin, 75003 Paris, France et Université de Cergy-Pontoise, Dept. de Mathématiques, avenue du Parc, 8 le Campus, 95033 Cergy-Pontoise Cedex, France.

et

Michel VAUGON

58, rue de la Mare-Aubry, 02400 Château-Thierry, France et Université Paris 6, Dept. de Mathématiques, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.

RÉSUMÉ. – En 1976, Aubin énonçait la conjecture suivante : pour toute variété riemannienne compacte de dimension $N \geq 3$, la meilleure constante de l'inclusion de H_1 dans $L^{2N/(N-2)}$ est atteinte. On montre que la conjecture est vraie.

ABSTRACT. – In 1976, Aubin stated the following conjecture: for any compact riemannian manifold of dimension $N \geq 3$, the best constant corresponding to the imbedding of H_1 in $L^{2N/(N-2)}$ is attained. We prove that the conjecture is true.

1. INTRODUCTION ET RÉSULTATS

Soit (M, g) une variété riemannienne C^∞ compacte (sans bord) de dimension $N \geq 3$. Une fois pour toutes, on note

$$p = \frac{N+2}{N-2}$$

$$\omega_N = \text{volume de la sphère unité de } \mathbb{R}^{N+1}$$
$$S_N = \frac{4}{N(N-2)\,\omega_N^{2/N}}.$$

$H_1(M)$ désigne l'espace de Sobolev complété de $C^\infty(M)$ pour la norme :

$$\|u\|^2 = \int_M |\nabla_g u|^2\, dv(g) + \int_M u^2\, dv(g).$$

M étant compacte, $H_1(M)$ ne dépend pas de g.

On sait que $H_1(M)$ se plonge continûment dans $L^{p+1}(M)$. De plus (*voir* Aubin [2]) :

(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que pour tout $u \in H_1(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{p+1}\, dv(g)\right)^{2/(p+1)} \le (S_N+\varepsilon) \int_M |\nabla_g u|^2\, dv(g) + C_\varepsilon \int_M u^2\, dv(g).$$

(ii) Si pour tout $u \in H_1(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{p+1} dv(g)\right)^{2/(p+1)} \le A \int_M |\nabla_g u|^2 dv(g) + C \int_M u^2\, dv(g)$$

où A et C sont des constantes, alors $A \ge S_N$.

On démontre ici que la conjecture énoncée par Aubin dans [3] est vraie. Autrement dit :

THÉORÈME. – *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte de dimension* $N \ge 3$. *Il existe alors une constante* $C > 0$ *telle que pour tout* $u \in H_1(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{p+1}\, dv(g)\right)^{2/(p+1)} \le S_N \int_M |\nabla_g u|^2\, dv(g) + C \int_M u^2\, dv(g).$$

Ce résultat fut démontré dans [3] lorsque g est à courbure sectionnelle constante, puis dans [16] lorsque g est conformément plate. Par ailleurs, le résultat reste valable pour les variétés compactes à bord lorsque H_1 est remplacé par $H_{0,1}$ (le complété de $\mathcal{D}(M)$ pour la même norme). Pous plus de détails, on renvoie à l'appendice 1.

Enfin, la démonstration du théorème passant par plusieurs étapes, le plan de l'article est le suivant :

1. Introduction et résultats
2. Réduction du problème à la boule unité B

2. RÉDUCTION DU PROBLÈME À LA BOULE UNITÉ B

On note B la boule unité de $\mathbb{R}^N$. Soit g une métrique riemannienne C^∞ définie sur $\bar{B}$ (que l'on pourra voir comme la restriction à $\bar{B}$ d'une métrique riemannienne C^∞ définie sur $\mathbb{R}^N$). On note $H_{0,1}(B)$ l'espace de Sobolev complété de $\mathcal{D}(B)$, l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans B, pour la norme

$$\|u\|^2 = \int_B |\nabla_g u|^2 \, dv(g) + \int_B u^2 \, dv(g).$$

$\bar{B}$ étant compacte, là encore $H_{0,1}(B)$ ne dépend pas de la métrique g.

On dira que g vérifie la propriété (*) sur $\bar{B}$ s'il existe une boule ouverte B' centrée en 0, contenant $\bar{B}$, telle que g soit géodésiquement convexe sur B et sur B' (*i.e.* deux points quelconques de B, resp. B', sont joints par une unique géodésique contenue dans B, resp. B', et cette géodésique est minimisante).

On démontre ici la proposition suivante.

PROPOSITION 1. – *Soit B la boule unité de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. On suppose que pour toute métrique g définie sur $\bar{B}$ et vérifiant la propriété (*) sur $\bar{B}$, il existe une constante $C_g > 0$ telle que pour tout $u \in H_{0,1}(B)$,*

$$\left(\int_B |u|^{p+1} \, dv(g)\right)^{2/(p+1)} \leq S_N \int_B |\nabla_g u|^2 \, dv(g) + C_g \int_B u^2 \, dv(g).$$

La conjecture est alors vérifiée par toute variété riemannienne compacte de dimension N. Autrement dit, (M, g) désignant une variété riemannienne compacte quelconque de dimension N, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H_1(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{p+1} \, dv(g)\right)^{2/(p+1)} \leq S_N \int_M |\nabla_g u|^2 \, dv(g) + C \int_M u^2 \, dv(g).$$

Démonstration. – M étant compacte, il existe un atlas fini $(U_i, \Phi_i)_{i=1,\dots,k}$ de M, tel que pour tout i : $\Phi_i(U_i) = B$

$$(\Phi_i^{-1})^* g \text{ vérifie } (*) \text{ sur } \overline{B}.$$

Il s'agit là d'un résultat classique de géométrie riemannienne. Pour plus de détails, on renvoie à [17], tome 1, théorèmes 8.7 page 149 et 3.6 page 166.

Soit maintenant $(\eta_i)_{i=1,\dots,k}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i=1,\dots,k}$. Sans perdre en généralité, on pourra supposer que pour tout i :

$$\eta_i \text{ et } \sqrt{\eta_i} \in H_{0,1}(U_i) \cap C^0(\overline{U}_i)$$
$$|\nabla_g \sqrt{\eta_i}| \in C^0(\overline{U}_i).$$

Soit maintenant $u \in C^\infty(M)$. On pose $u_i = \sqrt{\eta_i}\, u$. On a alors :

$$\left(\int_M |u|^{p+1} dv(g)\right)^{2/(p+1)} \le \sum_{i=1}^k \left(\int_M |u_i|^{p+1} dv(g)\right)^{2/(p+1)}.$$

Par ailleurs, puisque $u_i \in H_{0,1}(U_i)$, les hypothèses de la proposition nous permettent d'écrire qu'il existe une constante $C_i > 0$ telle que

$$\left(\int_M |u_i|^{p+1} dv(g)\right)^{2/(p+1)} \le S_N \int_M |\nabla_g u_i|^2 dv(g) + C_i \int_M u_i^2 dv(g).$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
&\left(\int_M |u|^{p+1} dv(g)\right)^{2/(p+1)} \\
&\le \sum_{i=1}^k \left(S_N \int_M |\nabla_g u_i|^2 dv(g) + C_i \int_M u_i^2 dv(g)\right) \\
&\le S_N \sum_{i=1}^k \int_M \eta_i |\nabla_g u|^2 dv(g) + S_N \sum_{i=1}^k \int_M u(\nabla_g u \nabla_g \eta_i)\, dv(g) \\
&\quad + S_N \sum_{i=1}^k \int_M u^2 |\nabla_g \sqrt{\eta_i}|^2 dv(g) + \sum_{i=1}^k C_i \int_M \eta_i u^2 dv(g) \\
&\le S_N \int_M |\nabla_g u|^2 dv(g) + C \int_M u^2 dv(g)
\end{aligned}$$

où $C = S_N \operatorname{Sup}_M \left(\sum_{i=1}^k |\nabla_g \sqrt{\eta_i}|^2\right) + \operatorname{Sup}_i C_i$.

On retrouve donc l'inégalité qu'il fallait obtenir. La proposition est démontrée. ■

3. LES ÉQUATIONS ASSOCIÉES À LA CONJECTURE

En vertu de ce qui vient d'être dit, le problème devient : montrer que pour toute métrique riemannienne g définie sur $\bar{B}$ et vérifiant la propriété (*) sur $\bar{B}$, il existe une constante $C_g > 0$ telle que pour tout $u \in H_{0,1}(B)$,

$$\left(\int_B |u|^{p+1}\, dv(g)\right)^{2/(p+1)} \leq S_N \int_B |\nabla_g u|^2\, dv(g) + C_g \int_B u^2\, dv(g).$$

Soit alors g une métrique riemannienne définie sur $\bar{B}$ et vérifiant la propriété (*) sur $\bar{B}$. Pour tout réel $\alpha > 0$ on définit la fonctionnelle $I_\alpha(u)$, $u \in H_{0,1}(B)$, $u \not\equiv 0$, en posant

$$I_\alpha(u) = \frac{\displaystyle\int_B |\nabla_g u|^2\, dv(g) + \alpha \int_B u^2\, dv(g)}{\left(\displaystyle\int_B |u|^{p+1}\, dv(g)\right)^{2/(p+1)}}.$$

Démontrer l'existence de la constante C_g revient alors à montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ pour lequel $\mathrm{Inf}_u\, I_\alpha(u) \geq \dfrac{1}{S_N}$ (l'inf étant pris sur les $u \in H_{0,1}(B)$, $u \not\equiv 0$).

Par suite, si l'on suppose que C_g n'existe pas, on obtient que pour tout $\alpha > 0$, $\mathrm{Inf}_u\, I_\alpha(u) < \dfrac{1}{S_N}$. En utilisant des techniques variationnelles standard on démontre alors le résultat suivant.

PROPOSITION 2. – *Si pour tout $\alpha > 0$, $\mathrm{Inf}_u\, I_\alpha(u) < \dfrac{1}{S_N}$, alors pour tout $\alpha > 0$, il existe $\Phi_\alpha \in C^2(\bar{B}) \cap H_{0,1}(B)$, $\Phi_\alpha > 0$ sur B, et il existe $\lambda_\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{S_N}\right[$, tels que :*

$$\Delta_g \Phi_\alpha + \alpha \Phi_\alpha = \lambda_\alpha \Phi_\alpha^p \quad sur\ B$$
$$\int_B \Phi_\alpha^{p+1}\, dv(g) = 1$$

où $\Delta_g u = -g^{ij}(\partial_{ij} u - \Gamma_{ij}^k \partial_k u)$.

Démonstration. – L'inclusion de $H_{0,1}(B)$ dans $L^{q+1}(B)$ étant compacte pour tout $q < p$, on démontre sans difficulté l'existence de $\Phi_q \in$

$C^2(\bar{B}) \cap H_{0,1}(B)$, $\Phi_q > 0$ sur B, et l'existence de $\lambda_q > 0$ tels que

$$\Delta_g \Phi_q + \alpha\Phi_q = \lambda_q \Phi_q^q \quad \text{sur } B$$
$$\int_B \Phi_q^{q+1}\, dv(g) = 1$$
$$\lim_{q\to p} \lambda_q = \operatorname{Inf}_u I_\alpha(u).$$

Les techniques utilisées pour démontrer un tel résultat sont maintenant classiques. (Φ_q) étant bornée dans $H_{0,1}(B)$, on pourra en plus supposer que $\lim_{q\to p} \Phi_q = \Phi_\alpha$ faiblement dans $H_{0,1}(B)$, fortement dans $L^2(B)$ et presque partout. Comme $\lim_{q\to p} \lambda_q = \operatorname{Inf}_u I_\alpha(u) < \dfrac{1}{S_N}$, les mêmes arguments que ceux utilisés dans la démonstration du théorème 1 de [4] nous permettent alors de montrer que $\Phi_\alpha \not\equiv 0$.

Φ_α devient ainsi une solution faible, positive et non identiquement nulle, de l'équation

$$\Delta_g u + \alpha u = (\operatorname{Inf}_u I_\alpha(u))\, u^p.$$

Par théorie classique de régularité, on obtient maintenant $\Phi_\alpha \in C^2(\bar{B})$, et avec le principe du maximum, on obtient $\Phi_\alpha > 0$ sur B.

Il reste donc à montrer que $\int_B \Phi_\alpha^{p+1}\, dv(g) = 1$. L'inclusion de $H_{0,1}(B)$ dans $L^p(B)$ étant compacte, sans perdre en généralité, on pourra supposer que $\lim_{q\to p} \Phi_q = \Phi_\alpha$ dans $L^p(B)$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\int_B \Phi_\alpha^{p+1}\, dv(g) &= \lim_{q\to p} \int_B \Phi_q^p\, \Phi_\alpha\, dv(g) \\
&\leq \lim_{q\to p} \left(\int_B \Phi_q^{q+1}\, dv(g)\right)^{p/(q+1)} \\
&\quad \times \left(\int_B \Phi_\alpha^{(q+1)/(q+1-p)}\, dv(g)\right)^{(q+1-p)/(q+1)} \\
&\leq \left(\int_B \Phi_\alpha^{p+1}\, dv(g)\right)^{1/(p+1)} \quad \text{puisque} \int_B \Phi_q^{q+1}\, dv(g) = 1.
\end{aligned}$$

Par suite, $\int_B \Phi_\alpha^{p+1}\, dv(g) \leq 1$.

Indépendamment,

$$\int_B |\nabla_g \Phi_\alpha|^2 \, dv\,(g) + \alpha \int_B \Phi_\alpha^2 \, dv\,(g) = (\mathrm{Inf}_u\, I_\alpha\,(u)) \int_B \Phi_\alpha^{p+1} \, dv\,(g).$$

On obtient ainsi :

$$\mathrm{Inf}_u\, I_\alpha\,(u) \leq \frac{\displaystyle\int_B |\nabla_g \Phi_\alpha|^2 \, dv\,(g) + \alpha \int_B \Phi_\alpha^2 \, dv\,(g)}{\left(\displaystyle\int_B \Phi_\alpha^{p+1} \, dv\,(g)\right)^{2/(p+1)}}$$

$$\leq (\mathrm{Inf}_u\, I_\alpha\,(u)) \left(\int_B \Phi_\alpha^{p+1} \, dv\,(g)\right)^{2/N} \leq \mathrm{Inf}_u\, I_\alpha\,(u)\,.$$

et, comme conséquence directe de ces inégalités, $\int_B \Phi_\alpha^{p+1} \, dv\,(g) = 1$. La proposition est donc bien démontrée. ■

Ainsi, démontrer la conjecture revient à montrer que la situation décrite par la proposition 2 ne peut pas se produire.

4. THÉORIE CLASSIQUE DES POINTS DE CONCENTRATION

La démonstration de la conjecture se fait par l'absurde. On suppose donc que pour tout $\alpha > 0$, il existe $\Phi_\alpha \in C^2\,(\bar{B}) \cap H_{0,1}\,(B)$, $\Phi_\alpha > 0$ sur B, et il existe $\lambda_\alpha \in \left]0, \frac{1}{S_N}\right[$, tels que :

$$\Delta_g\, \Phi_\alpha + \alpha \Phi_\alpha = \lambda_\alpha \Phi_\alpha^p \,\mathrm{sur}\, B \tag{1}$$

$$\int_B \Phi_\alpha^{p+1} \, dv\,(g) = 1. \tag{2}$$

On étudie dans ce paragraphe les premières propriétés vérifiées par les Φ_α. Pour un complément sur le type des phénomènes décrits ici on pourra voir [19], [21], [22] et [25]. Dans tout ce qui suit nous considérons des suites de réels α qui tendent vers $+\infty$, et nous prenons successivement des sous suites.

LEMME 3. – (1) *Toute sous suite de* (Φ_α) *qui converge dans un* $L^q\,(B)$, $q > 1$, *a pour limite* 0. *En particulier, on pourra supposer que* $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \Phi_\alpha = 0$ p.p. *et dans* $L^2\,(B)$.

(2) $\lim_{\alpha \to \infty} \lambda_\alpha = \frac{1}{S_N}$.

Démonstration. – (1) Puisque

$$\alpha \int_B \Phi_\alpha^2 \, dv(g) \leq \int_B |\nabla_g \Phi_\alpha|^2 \, dv(g) + \alpha \int_B \Phi_\alpha^2 \, dv(g) \leq \lambda_\alpha \leq \frac{1}{S_N},$$

on obtient $\lim_{\alpha \to \infty} \int_B \Phi_\alpha^2 \, dv(g) = 0$. La première partie du lemme est donc bien démontrée.

(2) Supposons maintenant qu'il existe une sous suite (λ_α) de (λ_α) vérifiant $\lim_{\alpha \to \infty} \lambda_\alpha = \lambda < \frac{1}{S_N}$. Soit $\varepsilon > 0$ choisi de sorte que $(1+\varepsilon)\lambda < \frac{1}{S_N}$, et soit C_ε une constante strictement positive pour laquelle

$$\forall u \in H_{0,1}(B),$$
$$\left(\int_B |u|^{p+1} \, dv(g) \right)^{2/(p+1)} \leq (1+\varepsilon) S_N \left(\int_B |\nabla_g u|^2 \, dv(g) + C_\varepsilon \int_B u^2 \, dv(g) \right).$$

On a alors
$$\lambda_\alpha = \int_B |\nabla_g \Phi_\alpha|^2 \, dv(g) + \alpha \int_B \Phi_\alpha^2 \, dv(g) \geq \frac{1}{(1+\varepsilon) S_N} + (\alpha - C_\varepsilon) \int_B \Phi_\alpha^2 \, dv(g),$$

puisque $\int_B \Phi_\alpha^{p+1} \, dv(g) = 1$.

Par suite, on obtient
$$\left(\frac{1}{S_N} - (1+\varepsilon)\lambda_\alpha \right) + (1+\varepsilon)(\alpha - C_\varepsilon) \int_B \Phi_\alpha^2 \, dv(g) \leq 0,$$

ce qui est impossible pour $\alpha \gg 1$. Le lemme est donc bien démontré. ■

LEMME 4. – $\lim_{\alpha \to \infty} \alpha \int_B \Phi_\alpha^2 \, dv(g) = 0$.

Démonstration. – Soit $\varepsilon > 0$ et soit $C_\varepsilon > 0$ telle que pour tout $u \in H_{0,1}(B)$,

$$\left(\int_B |u|^{p+1} \, dv(g) \right)^{2/(p+1)} \leq (S_N + \varepsilon) \int_B |\nabla_g u|^2 \, dv(g) + C_\varepsilon \int_B u^2 \, dv(g).$$

D'après (1) et (2),

$$\int_B |\nabla_g \Phi_\alpha|^2 \, dv(g) + \alpha \int_B \Phi_\alpha^2 \, dv(g) = \lambda_\alpha \left(\int_B \Phi_\alpha^{p+1} \, dv(g) \right)^{2/(p+1)}.$$

Par suite,

$$\int_B |\nabla_g \Phi_\alpha|^2 \, dv(g) + \alpha \int_B \Phi_\alpha^2 \, dv(g) \leq \lambda_\alpha (S_N + \varepsilon) \int_B |\nabla_g \Phi_\alpha|^2 \, dv(g) + \lambda_\alpha C_\varepsilon \int_B \Phi_\alpha^2 \, dv(g).$$

Comme par ailleurs, $\lambda_\alpha < \dfrac{1}{S_N}$ et $\displaystyle\int_B |\nabla_g \Phi_\alpha|^2 \, dv(g) \leq \lambda_\alpha$, on obtient l'existence d'une constante $C > 0$, indépendante de α et ε, pour laquelle

$$\alpha \int_B \Phi_\alpha^2 \, dv(g) \leq C\varepsilon + \tilde{C}_\varepsilon \int_B \Phi_\alpha^2 \, dv(g).$$

Du lemme 3 on déduit alors $\displaystyle\overline{\lim_{\alpha \to \infty}} \, \alpha \int_B \Phi_\alpha^2 \, dv(g) \leq C\varepsilon$. ε étant arbitraire, on récupère $\displaystyle\lim_{\alpha \to \infty} \alpha \int_B \Phi_\alpha^2 \, dv(g) = 0$, et le lemme est démontré. ■

Comme dans [13], on dira maintenant que $x_0 \in \bar{B}$ est un point de concentration de (Φ_α) si pour tout $\delta > 0$, $\displaystyle\overline{\lim_{\alpha \to \infty}} \int_{B(x_0, \delta)} \Phi_\alpha^{p+1} \, dv(g) > 0$. (Une fois pour toutes, par l'intégrale sur $B(x_0, \delta)$ on entend l'intégrale sur $B(x_0, \delta) \cap \bar{B}$.) On démontre alors le résultat suivant.

LEMME 5. – (1) *Si x_0 est un point de concentration de (Φ_α), alors pour tout $\delta > 0$,* $\displaystyle\overline{\lim_{\alpha \to \infty}} \int_{B(x_0, \delta)} \Phi_\alpha^{p+1} \, dv(g) = 1$

(2) *(Φ_α) possède un et un seul point de concentration (toujours quitte à extraire une sous suite)*

(3) $\displaystyle\lim_{\alpha \to \infty} \|\Phi_\alpha\|_{L^\infty(B)} = \infty$.

Démonstration. – (1) Soit $x_0 \in \bar{B}$ et soit $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ vérifiant $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ sur $B(x_0, \delta/2)$, $\eta = 0$ sur $\mathbb{R}^N \backslash B(x_0, \delta)$, $\delta > 0$.

En multipliant (1) par $\eta^2\,\Phi_\alpha^k$, $k \geq 1$, on obtient (*voir* [14]) :

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\frac{4k}{(k+1)^2}\int_B |\nabla_g\,(\eta\Phi_\alpha^{(k+1)/2})|^2\,dv\,(g)\\ &\quad -\frac{2\,(k-1)}{(k+1)^2}\int_B \eta\,(\Delta_g\eta)\,\Phi_\alpha^{k+1}\,dv\,(g)\\ &\quad -\frac{2}{k+1}\int_B |\nabla_g\eta|^2\,\Phi_\alpha^{k+1}\,dv\,(g)+\alpha\int_B \eta^2\,\Phi_\alpha^{k+1}dv\,(g)\\ &= \lambda_\alpha \int_B \eta^2\,\Phi_\alpha^{k+p}dv\,(g). \end{aligned}$$

Les inégalités de Hölder pour le membre de droite de (3), l'inégalité de Sobolev classique rappelée dans l'introduction et le fait que (Φ_α) soit bornée dans H_1, permettent alors de montrer le résultat suivant :

$$\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,C_1>0/\forall\,\delta\ll 1\,\mathrm{et}\,\forall\,k\in[1,\,p],\\ &\int_B |\nabla_g\,(\eta\Phi_\alpha^{(k+1)/2})|^2\,dv\,(g)\\ &\quad\leq \frac{(k+1)^2}{4\,k}\,\lambda_\alpha\,(S_N+\varepsilon)\left(\int_{B\,(x_0,\,\delta)}\Phi_\alpha^{p+1}\,dv\,(g)\right)^{(p-1)(p+1)}\\ &\quad\times\int_B |\nabla_g\,(\eta\Phi_\alpha^{(k+1)/2})|^2\,dv\,(g)+C_1. \end{aligned}$$

Par suite, en tenant compte du fait que $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\lambda_\alpha=\dfrac{1}{S_N}$, on obtient :

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,C_1>0/\forall\,\delta\ll 1,\ \forall\,\alpha\gg 1\,\mathrm{et}\,\forall\,k\in[1,\,p],\\ &\int_B |\nabla_g\,(\eta\Phi_\alpha^{(k+1)/2})|^2\,dv\,(g)\\ &\quad\leq \frac{(k+1)^2}{4\,k}\,(1+\varepsilon)\left(\int_{B\,(x_0,\,\delta)}\Phi_\alpha^{p+1}\,dv\,(g)\right)^{(p-1)(p+1)}\\ &\quad\times\int_B |\nabla_g\,(\eta\Phi_\alpha^{(k+1)/2})|^2\,dv\,(g)+C_1. \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'il existe $\delta_0>0$ tel que

$$\overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\int_{B\,(x_0,\,\delta_0)}\Phi_\alpha^{p+1}\,dv\,(g)\ <\ 1.$$

En utilisant (4), on obtient pour $k > 1$ suffisamment proche de 1 et pour $\delta \ll 1$,

$$\int_B |\nabla_g (\eta \Phi_\alpha^{(k+1)/2})|^2 \, dv(g) \le C_2 \int_B |\nabla_g (\eta \Phi_\alpha^{(k+1)/2})|^2 \, dv(g) + C_3,$$

où C_2 et C_3 sont deux constantes indépendantes de α avec $C_2 < 1$.

Par suite, $\int_B |\nabla_g (\eta \Phi_\alpha^{(k+1)/2})|^2 \, dv(g) \le$ Cte.

Posons alors $a = \overline{\lim_{\alpha \to \infty}} \int_{B(x_0, \delta_0/2)} \Phi_\alpha^{p+1} \, dv(g)$. Par définition, si x_0 est un point de concentration de (Φ_α), $a > 0$.

Indépendamment, avec Hölder,

$$\begin{aligned} &\int_{B(x_0, \delta_0/2)} \Phi_\alpha^{p+1} \, dv(g) \\ &\le \left(\int_{B(x_0, \delta_0/2)} \Phi_\alpha^{N(k+1)/(N-2)} \, dv(g) \right)^{(N+2)/N(k+1)} \\ &\quad \left(\int_{B(x_0, \delta_0/2)} \Phi_\alpha^{N(k+1)/(Nk-2)} \, dv(g) \right)^{(Nk-2)/N(k+1)} \\ &\le C_4 \left(\int_{B(x_0, \delta_0/2)} \Phi_\alpha^{N(k+1)/(Nk-2)} \, dv(g) \right)^{(Nk-2)/N(k+1)} \end{aligned}$$

puisque

$$\int_B |\nabla_g (\eta \Phi_\alpha^{(k+1)/2})|^2 \, dv(g) \le \text{Cte}.$$

Par conséquent, si $k_1 = \dfrac{N(k+1)}{Nk-2}$, on obtient

$$1 < k_1 < p + 1 \quad \text{et} \quad \int_B \Phi_\alpha^{k_1} dv(g) \ge C_5 > 0.$$

Cette dernière inégalité contredisant le premier point du lemme 3, la première partie du lemme 5 est démontrée.

(2) En vertu de ce qui vient d'être dit, et puisque $\int_B \Phi_\alpha^{p+1} dv(g) = 1$, quitte à extraire une sous suite (Φ_α) possède au plus un point de concentration. À l'inverse, par définition même des points de concentration, on montre facilement que (Φ_α) possède au moins un point de concentration. La seconde partie du lemme 5 est donc démontrée.

(3) Pour finir, $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \|\Phi_\alpha\|_{L^\infty(B)} = \infty$ se démontre avec la première partie du lemme 5. Il suffit de remarquer que pour tout $\delta > 0$, $\displaystyle\int_{B(x_0, \delta)} \Phi_\alpha^{p+1}\, dv(g) \leq \mathrm{Cte}\, \delta^N \|\Phi_\alpha\|_{L^\infty(B)}^{p+1}$. ■

LEMME 6. – *Soit x_0 le point de concentration de (Φ_α). Alors, $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \Phi_\alpha = 0$ dans $C^1_{\mathrm{loc}}(\bar{B}\backslash\{x_0\})$.*

Démonstration. – Soit $x \neq x_0$, $x \in \bar{B}$. Pour $\delta \ll 1$ on a alors $\overline{\lim\limits_{\alpha \to \infty}} \int_{B(x, \delta)} \Phi_\alpha^{p+1}\, dv(g) = 0$. Par ailleurs, *voir* (3) et (4),

$$(5) \quad \int_B |\nabla_g (\eta \Phi_\alpha^{(k+1)/2})|^2\, dv(g) \leq C_1 \int_B |\nabla_g (\eta \Phi_\alpha^{(k+1)/2})|^2\, dv(g) + C_2$$

où

$$C_1 = \frac{(k+1)^2}{4k} (1+\varepsilon) \left(\int_{B(x, \delta)} \Phi_\alpha^{p+1}\, dv(g) \right)^{(p-1)/(p+1)}$$

$$C_2 \leq \frac{(k-1)}{2k} \int_B \eta |\Delta_g \eta|\, \Phi_\alpha^{k+1} dv(g) + \frac{(k+1)}{2k} \int_B |\nabla_g \eta|^2\, \Phi_\alpha^{k+1} dv(g).$$

Par suite :

(i) $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \displaystyle\int_B |\nabla_g (\eta \Phi_\alpha^{(k+1)/2})|^2\, dv(g) = 0$ pour tout $1 \leq k \leq p$

(ii) $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \displaystyle\int_{B(x, \delta/2)} \Phi_\alpha^{(k+1)(p+1)/2}\, dv(g) = 0$ pour tout $1 \leq k \leq p$ (avec Sobolev).

(ii) nous permet maintenant d'utiliser (5) avec $k = \dfrac{(p+1)^2}{2} - 1$, et on obtient ainsi $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \displaystyle\int_{B(x, \delta')} \Phi_\alpha^{(p+1)^3/4}\, dv(g) = 0$ pour un certain $\delta' > 0$, $\delta' \ll 1$.

Finalement, par récurrence, on voit que pour tout $x \neq x_0$, et tout q, il existe $\delta \ll 1$ tel que $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \displaystyle\int_{B(x, \delta)} \Phi_\alpha^q\, dv(g) = 0$. Par suite, puisque $\Delta_g \Phi_\alpha \leq \lambda_\alpha \Phi_\alpha^p$, on obtient que pour tout $\omega \Subset \bar{B}\backslash\{x_0\}$, $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \Phi_\alpha = 0$ dans $L^\infty(\omega)$. (*Voir* [11], théorème 8.25.)

Pour finir, le lemme 7 ci-dessous, le théorème 8.32 et le corollaire 8.36 de [11], montrent que $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \Phi_\alpha = 0$ dans $C^1_{\mathrm{loc}}(\bar{B}\backslash\{x_0\})$. ■

LEMME 7. – *Soit x_0 le point de concentration de (Φ_α). Alors, pour tout q et tout $\omega \Subset \bar{B}\backslash\{x_0\}$, $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \alpha^q \|\Phi_\alpha\|_{L^\infty(\omega)} = 0$. En particulier, pour tout $\omega \Subset \bar{B}\backslash\{x_0\}$, $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \alpha \|\Phi_\alpha\|_{L^\infty(\omega)} = 0$.*

Démonstration. – Soit $x \neq x_0$, $x \in \bar{B}$, et soit $\delta > 0$ tel que $x_0 \notin \bar{B}(x, \delta)$. On a alors, *voir* (3),

$$\alpha^{q+1} \int_B \eta^2 \Phi_\alpha^{k+1} dv(g) \leq C_1 \alpha^q \int_{B(x,\delta)} \Phi_\alpha^{k+1} dv(g) + C_2 \alpha^q \int_{B(x,\delta)} \Phi_\alpha^{k+p} dv(g),$$

où C_1 et C_2 ne dépendent que de η et k.

Par ailleurs, en raison de ce qui vient d'être démontré, pour tout $\omega \Subset \bar{B}\backslash\{x_0\}$ et tout m, $\lim_{\alpha\to\infty} \int_\omega \Phi_\alpha^m dv(g) = 0$. Par suite, en raisonnant par récurrence sur q, on obtient que pour tout $x \neq x_0$, tout m et tout q, il existe $\delta > 0$, $\delta \ll 1$, tel que

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^q \int_{B(x,\delta)} \Phi_\alpha^m dv(g) = 0.$$

Pour finir, comme $\Delta_g \Phi_\alpha \leq \lambda_\alpha \Phi_\alpha^p$, on obtient que pour tout q et tout $\omega \Subset \bar{B}\backslash\{x_0\}$, $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^q \|\Phi_\alpha\|_{L^\infty(\omega)} = 0$. (*Voir* [11], théorème 8.25).

Le lemme est donc bien démontré. ■

On note alors

$$u_\alpha = \left(\frac{\lambda_\alpha}{N(N-2)}\right)^{(N-2)/4} \Phi_\alpha.$$

Tout comme les Φ_α, les u_α se concentrent au point x_0, et :

$$\Delta_g u_\alpha + \alpha u_\alpha = N(N-2) u_\alpha^p \text{ sur } B \tag{6}$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_B u_\alpha^{p+1} dv(g) = \frac{\omega_N}{2^N} \tag{7}$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_B |\nabla_g u_\alpha|^2 dv(g) = \frac{N(N-2)\omega_N}{2^N}. \tag{8}$$

Soit maintenant x_α un point de B tel que

$$u_\alpha(x_\alpha) = \|u_\alpha\|_{L^\infty(B)}$$

et soit μ_α tel que

$$\|u_\alpha\|_{L^\infty(B)} = \mu_\alpha^{-(N-2)/2}.$$

D'après les lemmes 5 et 6, $\lim_{\alpha\to\infty} x_\alpha = x_0$ et $\lim_{\alpha\to\infty} \mu_\alpha = 0$. De plus :

LEMME 8. – *$(\alpha\mu_\alpha^2)$ est bornée.*

Démonstration. – Au point x_α, $\Delta_g u_\alpha \geq 0$. Par suite, $\alpha \mu_\alpha^{-(N-2)/2} \leq N(N-2) \mu_\alpha^{-(N+2)/2}$, et $\alpha \mu_\alpha^2 \leq N(N-2)$. ■

5. ESTIMATION DE LA VITESSE DE CONVERGENCE DES x_α AU BORD DE B

On note d la distance euclidienne de $\mathbb{R}^N$. Les x_α ayant été introduits à la fin du paragraphe 4, l'objet de cette partie est de démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION 9. – $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \dfrac{d(x_\alpha, \partial B)}{\mu_\alpha} = +\infty.$

Démonstration. – Puisque $\lim\limits_{\alpha\to\infty} x_\alpha = x_0$, on remarque déjà que le résultat est immédiat si $x_0 \in B$. Sans perdre en généralité, on pourra donc supposer que $x_0 = (0, \ldots, 0, 1) \in \partial B$. On introduit maintenant les isométries vectorielles de $\mathbb{R}^N$ qui ramènent le point x_α sur un point $x_\alpha^R \in [0, x_0]$ (où $[0, x_0] = \{\theta x_0, 0 \le \theta \le 1\}$). En composant g et u_α par ces isométries, on obtient une famille g_α de métriques sur $\bar{B}$, et des fonctions encore notées u_α, qui vérifient :

$$\lim_{\alpha\to\infty} g_\alpha = g \,\mathrm{dans}\, C^2(\bar{B}) \tag{9}$$

$$u_\alpha \in C^2(\bar{B}) \cap H_{0,1}(B),\ u_\alpha > 0 \,\mathrm{sur}\, B \tag{10}$$

$$\Delta_{g_\alpha} u_\alpha + \alpha u_\alpha = N(N-2)\, u_\alpha^p \,\mathrm{sur}\, B \tag{11}$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_B u_\alpha^{p+1}\, dv(g_\alpha) = \frac{\omega_N}{2^N} \tag{12}$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_B |\nabla_{g_\alpha} u_\alpha|^2\, dv(g_\alpha) = \frac{N(N-2)\,\omega_N}{2^N} \tag{13}$$

$$u_\alpha(x_\alpha^R) = \mu_\alpha^{-(N-2)/2} = \|u_\alpha\|_{L^\infty(B)}. \tag{14}$$

Comme $d(x_\alpha, \partial B) = d(x_\alpha^R, x_0)$, il nous faut montrer que $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \dfrac{d(x_\alpha^R, x_0)}{\mu_\alpha} = \infty$. Pour se faire, on introduit les fonctions

$$v_\alpha(x) = \mu_\alpha^{(N-2)/2}\, u_\alpha(\mu_\alpha x + x_0).$$

v_α est définie pour $x \in B_\alpha = B\left(\dfrac{-x_0}{\mu_\alpha}, \dfrac{1}{\mu_\alpha}\right)$. On a alors $0 \le v_\alpha \le 1$ et $\cup B_\alpha = E$ où $E = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N / x_N < 0\}$. De plus, $0 \in \bar{B}_\alpha$ pour tout α, et si on suppose que (μ_α) est décroissante (ce qui ne nuit pas à la généralité), on obtient $B_\alpha \subset B_{\alpha'}$ dès que $\alpha < \alpha'$.

On définit maintenant $h_\alpha(x) = g_\alpha(\mu_\alpha x + x_0)$, $x \in B_\alpha$. D'après (9), pour tout $K \Subset E$, $\lim_{\alpha\to\infty} h_\alpha = g(x_0)$ dans $C^2(K)$. De plus, si ξ désigne la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^N$:

$$\text{(15)} \qquad \exists \lambda > 0/\forall\alpha, \qquad \frac{1}{\lambda}\xi \leq h_\alpha \leq \lambda\xi$$

$$\text{(16)} \qquad \text{les } h_\alpha \text{ sont uniformément bornées } C^1 \text{ sur } B_\alpha.$$

Par ailleurs, avec (11), on voit facilement que

$$\text{(17)} \qquad \Delta_{h_\alpha} v_\alpha + (\alpha\mu_\alpha^2)\, v_\alpha = N(N-2)\, v_\alpha^p \text{ sur } B_\alpha.$$

On définit alors $y_\alpha = \dfrac{(x_\alpha^R - x_0)}{\mu_\alpha}.y_\alpha \in B_\alpha$ et $v_\alpha(y_\alpha) = 1$.

On distingue maintenant deux étapes dans la démonstration.

Étape 1. – On montre que $\underline{\lim}_{\alpha\to\infty} \dfrac{d(x_\alpha^R, x_0)}{\mu_\alpha} = 0$ est impossible. Si ce n'était pas le cas, quitte à extraire une sous suite, on pourrait supposer que $\lim_{\alpha\to\infty} \dfrac{d(x_\alpha^R, x_0)}{\mu_\alpha} = 0$. Par suite, on aurait $\lim_{\alpha\to\infty} y_\alpha = 0$. Or, *voir* l'appendice 2, les relations (15), (16), (17), le lemme 8 et le fait que $0 \leq v_\alpha \leq 1$, entraînent que les v_α sont uniformément bornées C^1 au voisinage de 0. Avec le théorème des accroissement finis, on devrait donc avoir

$$1 = |v_\alpha(y_\alpha) - v_\alpha(0)| \leq \text{Cte}\, d(0, y_\alpha),$$

ce qui est impossible. En conclusion, $\underline{\lim}_{\alpha\to\infty} \dfrac{d(x_\alpha^R, x_0)}{\mu_\alpha} > 0$.

Étape 2. – On montre que $\underline{\lim}_{\alpha\to\infty} \dfrac{d(x_\alpha^R, x_0)}{\mu_\alpha} = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$, est impossible. Là encore, si ce n'était pas le cas, quitte à extraire une sous suite, on pourrait supposer que $\lim_{\alpha\to\infty} y_\alpha = y_0 \in E$. On remarque alors que (v_α) est équicontinue sur tout compact de E. Pour le voir, on utilise (15), (16), (17), le fait que $0 \leq v_\alpha \leq 1$ et le théorème 8.32 de [11]. Par suite, il existe $v \in C^0(E)$ telle que pour tout $K \Subset E$, une sous suite de (v_α) converge vers v dans $L^\infty(K)$. La fonction v vérifie ainsi $0 \leq v \leq 1$ et $v(y_0) = 1$. En particulier, $v \not\equiv 0$.

On remarque maintenant qu'à extraction près d'une sous suite, $\lim_{\alpha \to \infty} \alpha \mu_\alpha^2 = 0$. En effet,

$$\alpha \int_B u_\alpha^2 \, dv\,(g_\alpha) = \alpha\, \mu_\alpha^2 \int_{B_\alpha} v_\alpha^2 \, dv\,(h_\alpha) \geq \alpha\, \mu_\alpha^2 \int_K v_\alpha^2 \, dv\,(h_\alpha),$$

Pour tout $K \Subset E$. Or,

$$\int_B u_\alpha^2 \, dv\,(g_\alpha) = \left(\frac{\lambda_\alpha}{N\,(N-2)} \right)^{(N-2)/2} \int_B \Phi_\alpha^2 \, dv\,(g_\alpha),$$

et puisque $v \not\equiv 0$, on déduit du lemme 4 que, quitte à extraire une sous suite, $\lim_{\alpha \to \infty} \alpha\, \mu_\alpha^2 = 0$.

Par conséquent, avec (17), $v \in C^\infty(E)$ et

$$\Delta_{g\,(x_0)}\, v = N\,(N-2)\, v^p \text{ sur } E. \tag{18}$$

(On rappelle que $\lim_{\alpha \to \infty} h_\alpha = g\,(x_0)$ dans $C^2(K)$ pour tout $K \Subset E$.)

On remarque maintenant qu'en transportant la métrique $g\,(x_0)$ par un isomorphisme vectoriel de $\mathbb{R}^N$ convenablement choisi, et en composant v par ce même isomorphisme, on obtient une solution de $\Delta_\xi\, v = N\,(N-2)\, v^p$ sur un demi-espace de $\mathbb{R}^N$. (Quitte à composer de nouveau par une isométrie vectorielle, on pourra même supposer que ce demi-espace est encore le demi-espace E.) Pour ne pas trop alourdir les notations, on continue de noter v cette solution et E le demi-espace sur lequel elle est définie.

Soit maintenant

$$w\,(x) = \left(\frac{1}{1 + |x|^2} \right)^{(N-2)/2}, \ |x| = d\,(0, x).$$

On pose $h = w^{4/(N-2)}\, \xi$. À un facteur multiplicatif 4 près, h représente la métrique standard de la sphère après projection stéréographique. On note alors $\tilde{v} = \dfrac{v}{w}$ et $\tilde{v}_\alpha = \dfrac{v_\alpha}{w}$. La courbure scalaire de la métrique h valant $4N\,(N-1)$, on obtient

$$\Delta_h\, \tilde{v} + N\,(N-2)\, \tilde{v} = N\,(N-2)\, \tilde{v}^p \quad \text{sur } E. \tag{19}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\alpha} |\nabla_h \tilde{v}_\alpha|^2 \, dv\,(h) + N\,(N-2) \int_{B_\alpha} \tilde{v}_\alpha^2 \, dv\,(h) \\
&= \int_{B_\alpha} |\nabla_\xi \, v_\alpha|^2 dv\,(\xi) \\
&\leq C_1 \int_{B_\alpha} |\nabla_{h_\alpha} v_\alpha|^2 dv\,(h_\alpha) && \text{(d'après (15))} \\
&\leq C_2 \int_{B_\alpha} v_\alpha^{p+1} \, dv\,(h_\alpha) && \text{(d'après (17))} \\
&= C_2 \int_{B} u_\alpha^{p+1} \, dv\,(g_\alpha) \\
&\leq \text{Cte} && \text{(d'après (12))}.
\end{aligned}$$

Les $(\tilde{v}_\alpha)$ sont donc uniformément bornées dans $H_{0,1}\,(E,\, h)$. Par suite, puisque $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \tilde{v}_\alpha = \tilde{v}$ uniformément sur tout compact de E, on obtient $\tilde{v} \in H_{0,1}\,(E,\, h)$. (Toute suite bornée dans un Hilbert possède une sous suite faiblement convergente.)

Notons maintenant S^N la sphère unité de $\mathbb{R}^{N+1}$ et g_0 sa métrique standard. Par projection stéréographique, E devient une demi-sphère S^+ de S^N. Avec (19) on obtient ainsi une solution positive $v_1 \in H_{0,1}\,(S^+,\, g_0)$ de

$$\Delta_{g_0} v_1 + \frac{N\,(N-2)}{4} v_1 = \frac{N\,(N-2)}{4} v_1^p \text{ sur } S^+.$$

En effectuant une nouvelle projection stéréographique, mais de pôle opposé au sommet de S^+, on obtient alors une solution positive $v_2 \in H_{0,1}\,(B)$ de

$$\Delta_\xi \, v_2 = \frac{N\,(N-2)}{4} v_2^p \,\text{sur}\, B.$$

Or ceci est impossible d'après Pohozaev. On obtient donc la contradiction recherchée, et, par suite, $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \dfrac{d\,(x_\alpha^R,\, x_0)}{\mu_\alpha} = \infty$. En conclusion, la proposition 9 est démontrée.

(On rappelle que $d\,(x_\alpha^R,\, x_0) = d\,(x_\alpha,\, \partial B)$.) ■

Remarque. – Avec les résultats de [10], théorème 2, x_0 se trouve forcément dans B si la métrique g est euclidienne au voisinage de ∂B. Dans ce cas particulier, la proposition 9 est immédiate.

6. TRANSFORMATION DU PROBLÈME ET BLOW-UP

La métrique g vérifiant la propriété (*) sur $\bar{B}$, il existe une boule ouverte B', centrée en 0 et contenant $\bar{B}$, telle que g soit géodésiquement convexe sur B et sur B'. L'application exponentielle est alors une fonction C^∞ de deux variables, à valeurs dans B', et définie sur un voisinage ouvert de $B' \times \{0\}$ dans $B' \times \mathbb{R}^N$. (Pour plus de détails, *voir* [17], tome 1.) Par ailleurs, puisque la métrique g est géodésiquement convexe sur B', pour tout x donné de B', $\exp_x$ réalise un C^∞ difféomorphisme d'un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^N$ sur B'. Avec le théorème des fonctions implicites, $(\exp_x)^{-1}$, regardée comme une fonction définie sur $B' \times B'$, est alors C^∞ des deux variables.

On note maintenant $\Psi_\alpha = \exp_{x_\alpha}$. Ψ_α est donc un C^∞ difféomorphisme d'un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^N$ sur B'. On note alors

$$\begin{aligned} \omega_\alpha &= (\Psi_\alpha)^{-1}(B) \\ g_\alpha &= (\Psi_\alpha)^* g \\ \tilde{u}_\alpha &= u_\alpha \circ \Psi_\alpha. \end{aligned}$$

(u_α et x_α ont été introduits à la fin du paragraphe 4).

ω_α est un domaine relativement compact étoilé en 0 de $\mathbb{R}^N$ (au sens où pour tout x de ω_α et tout $0 \le \theta \le 1$, $\theta x \in \omega_\alpha$). De plus, puisque l'exponentielle et son inverse sont C^∞ des deux variables, on obtient facilement :

(20) $\qquad \exists \lambda > 0 / \forall \alpha,\ \frac{1}{\lambda}\xi \le g_\alpha \le \lambda \xi \qquad$ (ξ la métrique euclidienne)

(21) $\qquad$ les g_α sont uniformément bornées C^2 sur ω_α

(22) $\lim_{\alpha \to \infty} g_\alpha = (\exp_{x_0})^* g$ dans $C^1(K)$ pour tout $K \Subset (\exp_{x_0})^{-1}(B')$.

Par ailleurs, toujours d'après les propriétés élémentaires de l'exponentielle, on obtient :

(23) $\qquad$ les g_α sont géodésiquement normales en 0. En particulier,

$$\text{pour tout } \alpha \text{ et tous } i,\ j,\ k = 1, \ldots, N,\ g_\alpha(0)_{ij} = \delta_{ij}$$
$$\text{et } (\partial_k g_\alpha)(0)_{ij} = 0.$$

Enfin :

(24)
$$\begin{gathered}\tilde{u}_\alpha \in C^2(\bar{\omega}_\alpha) \cap H_{0,1}(\omega_\alpha),\ \tilde{u}_\alpha > 0 \text{ sur } \omega_\alpha,\\ \text{et } \tilde{u}_\alpha \text{ atteint son maximum } \mu_\alpha^{-(N-2)/2} \text{ en } 0\end{gathered}$$

(25)
$$\Delta_{g_\alpha} \tilde{u}_\alpha + \alpha \tilde{u}_\alpha = N(N-2)\,\tilde{u}_\alpha^p \text{ sur } \omega_\alpha$$

(26)
$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{\omega_\alpha} \tilde{u}_\alpha^{p+1}\, dv(g_\alpha) = \frac{\omega_N}{2^N}$$

(27)
$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{\omega_\alpha} |\nabla_{g_\alpha} \tilde{u}_\alpha|^2\, dv(g_\alpha) = \frac{N(N-2)\,\omega_N}{2^N}.$$

On définit maintenant :

$$\begin{aligned}\tilde{v}_\alpha(x) &= \mu_\alpha^{(N-2)/2}\, \tilde{u}_\alpha(\mu_\alpha x)\\ h_\alpha(x) &= g_\alpha(\mu_\alpha x),\ x \in \Omega_\alpha = \frac{\omega_\alpha}{\mu_\alpha}.\end{aligned}$$

$\tilde{v}_\alpha$ vérifie alors :

(28)
$$0 \le \tilde{v}_\alpha \le 1 \text{ et } \tilde{v}_\alpha(0) = 1$$

(29)
$$\Delta_{h_\alpha} \tilde{v}_\alpha + (\alpha\mu_\alpha^2)\,\tilde{v}_\alpha = N(N-2)\,\tilde{v}_\alpha^p \quad \text{sur } \Omega_\alpha.$$

Par ailleurs, comme $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \dfrac{d(x_\alpha, \partial B)}{\mu_\alpha} = \infty$ (*voir* proposition 9), et puisque les métriques g et g_α sont équivalentes à la métrique euclidienne, on obtient $\lim\limits_{\alpha\to\infty} d(0, \partial\Omega_\alpha) = \infty$. Par suite, $\cup\Omega_\alpha = \mathbb{R}^N$ au sens où pour tout $K \Subset \mathbb{R}^N$ et tout $\alpha \gg 1$, $K \subset \Omega_\alpha$.

Enfin, utilisant (22), on obtient

(30)
$$\text{pour tout } K \Subset \mathbb{R}^N,\ \lim_{\alpha\to\infty} h_\alpha = \xi \text{ dans } C^1(K).$$

On étudie dans ce paragraphe les premières propriétés vérifiées par les $\tilde{v}_\alpha$.

Pour commencer, on remarque que (20), (28), (29), (30) et [11], théorème 8.32, entraînent que les $\tilde{v}_\alpha$ sont équicontinues sur tout compact de $\mathbb{R}^N$. Par suite, il existe $\tilde{v} \in C^0(\mathbb{R}^N)$ telle que pour tout $K \Subset \mathbb{R}^N$, une sous suite de $(\tilde{v}_\alpha)$ converge vers $\tilde{v}$ dans $L^\infty(K)$. On a alors $0 \le \tilde{v}_\alpha \le 1$ et $\tilde{v}(0) = 1$. En particulier, $\tilde{v} \not\equiv 0$. On démontre maintenant le résultat suivant.

LEMME 10. – *À extraction près d'une sous suite,* $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha\mu_\alpha^2 = 0$.

Démonstration. – On remarque que pour tout $K \Subset \mathbb{R}^N$,

$$\alpha \int_B u_\alpha^2\, dv\,(g) = \alpha \int_{\omega_\alpha} \tilde{u}_\alpha^2\, dv\,(g_\alpha) = \alpha\,\mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha^2\, dv\,(h_\alpha)$$
$$\geq \alpha\,\mu_\alpha^2 \int_K \tilde{v}_\alpha^2\, dv\,(h_\alpha).$$

Or $u_\alpha = \left(\frac{\lambda_\alpha}{N\,(N-2)}\right)^{(N-2)/4} \Phi_\alpha$, et puisque $\tilde{v} \not\equiv 0$, on déduit facilement du lemme 4 que, quitte à extraire une sous suite, $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha\,\mu_\alpha^2 = 0$. (On rappelle que $\lim_{\alpha\to\infty} h_\alpha = \xi$ dans $C^1\,(K)$ pour $K \Subset \mathbb{R}^N$.) ■

Avec le lemme 10 et (29), (30), on obtient alors $\tilde{v} \in C^\infty\,(\mathbb{R}^N)$ et

$$\Delta_\xi\,\tilde{v} = N\,(N-2)\,\tilde{v}^p \text{ sur } \mathbb{R}^N.$$

Par suite, avec les résultats de [8] (*voir* aussi [20]), on obtient

$$\tilde{v}\,(x) = \left(\frac{1}{1+|x|^2}\right)^{(N-2)/2}, \text{ où } |x| = d\,(0,\, x).$$

LEMME 11. – $\lim_{\alpha\to\infty} \int_{\omega_\alpha} |\nabla_\xi\,\tilde{u}_\alpha|^2\, dv\,(\xi) = \frac{N\,(N-2)\,\omega_N}{2^N}$.

Démonstration. – Avec le lemme 6, $\lim_{\alpha\to\infty} u_\alpha = 0$ dans $C^1_{\text{loc}}\,(\bar{B}\backslash\{x_0\})$. Par suite, pour tout $\delta > 0$, $\delta \ll 1$,

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{\omega_\alpha} |\nabla_\xi\,\tilde{u}_\alpha|^2\, dv\,(\xi) = \lim_{\alpha\to\infty} \int_{B\,(0,\,\delta)} |\nabla_\xi\,\tilde{u}_\alpha|^2\, dv\,(\xi).$$

On remarque maintenant que :

$$\forall\,\varepsilon > 0,\, \exists\,\delta > 0,\, \exists\,\alpha_0 \gg 1/\forall\,\alpha \geq \alpha_0,\, \|g_\alpha - \xi\|_{C^0\,(B\,(0,\,\delta))} < \varepsilon.$$

Pour le voir, il suffit d'écrire que

$$\|g_\alpha - \xi\|_{C^0\,(B\,(0,\,\delta))} \leq \|g_\alpha - (\exp_{x_0})^*\,g\|_{C^0\,(B\,(0,\,\delta))}$$
$$+ \|(\exp_{x_0})^*\,g - \xi\|_{C^0\,(B\,(0,\,\delta))}.$$

D'après (22) on a alors $\lim_{\alpha\to\infty} \|g_\alpha - (\exp_{x_0})^*\,g\|_{C^0\,(B\,(0,\,\delta))} = 0$, et puisque $(\exp_{x_0})^*\,g$ est normale en 0, pour δ suffisamment petit on aurra $\|(\exp_{x_0})^*\,g - \xi\|_{C^0\,(B\,(0,\,\delta))} < \varepsilon/2$.

Par suite, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\delta \ll 1/$

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon) \int_{B(0,\delta)} &|\nabla_{g_\alpha} \tilde{u}_\alpha|^2 \, dv(g_\alpha) \\ &\leq \int_{B(0,\delta)} |\nabla_\xi \tilde{u}_\alpha|^2 \, dv(\xi) \\ &\leq (1+\varepsilon) \int_{B(0,\delta)} |\nabla_{g_\alpha} \tilde{u}_\alpha|^2 \, dv(g_\alpha).\end{aligned}$$

Reste maintenant à remarquer que pour tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to\infty} \int_{B(0,\delta)} |\nabla_{g_\alpha} \tilde{u}_\alpha|^2 \, dv(g_\alpha) &= \lim_{\alpha\to\infty} \int_{\omega_\alpha} |\nabla_{g_\alpha} \tilde{u}_\alpha|^2 \, dv(g_\alpha) \\ &= \frac{N(N-2)\,\omega_N}{2^N} \quad \text{d'après (27).}\end{aligned}$$

Le lemme est donc bien démontré. ■

Pour finir, on démontre le résultat suivant.

LEMME 12. – *$\lim_{\alpha\to\infty} \tilde{v}_\alpha = \tilde{v}$ dans $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, $\tilde{v}_\alpha$ étant prolongée par* 0 *en dehors de Ω_α.*

Démonstration. – On démontre en fait un peu plus en montrant que $\lim_{\alpha\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\xi(\tilde{v}_\alpha - \tilde{v})|^2 \, dv(\xi) = 0$. Le résultat annoncé découle alors du théorème d'inclusion de Sobolev.

On a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\xi(\tilde{v}_\alpha - \tilde{v})|^2 \, dv(\xi) = \int_{\Omega_\alpha} &|\nabla_\xi \tilde{v}_\alpha|^2 \, dv(\xi) + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\xi \tilde{v}|^2 \, dv(\xi) \\ &- 2 \int_{\Omega_\alpha} (\nabla_\xi \tilde{v}_\alpha \, \nabla_\xi \tilde{v}) \, dv(\xi).\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\alpha} (\nabla_\xi \tilde{v}_\alpha \, \nabla_\xi \tilde{v}) \, dv(\xi) &= \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha \, \Delta_\xi \tilde{v} \, dv(\xi) \\ &= N(N-2) \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha \, \tilde{v}^p \, dv(\xi),\end{aligned}$$

et puisque $0 \leq \tilde{v}_\alpha \leq 1$ (*voir* (28)),

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha \, \tilde{v}^p \, dv(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{v}^{p+1} \, dv(\xi).$$

Par ailleurs,

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_{\Omega_\alpha} |\nabla_\xi \tilde{v}_\alpha|^2 \, dv(\xi) = \lim_{\alpha \to \infty} \int_{\omega_\alpha} |\nabla_\xi \tilde{u}_\alpha|^2 \, dv(\xi) = \frac{N(N-2)\,\omega_N}{2^N}$$

d'après le lemme 11. Enfin,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\xi \tilde{v}|^2 \, dv(\xi) = N(N-2) \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{v}^{p+1} \, dv(\xi) = \frac{N(N-2)\,\omega_N}{2^N}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} &\lim_{\alpha \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_\xi (\tilde{v}_\alpha - \tilde{v})|^2 \, dv(\xi) \\ &= \frac{N(N-2)\,\omega_N}{2^N} + \frac{N(N-2)\,\omega_N}{2^N} - 2\,\frac{N(N-2)\,\omega_N}{2^N} = 0. \end{aligned}$$

Le lemme est donc bien démontré. ■

7. UNE ESTIMÉE C^0 POUR $\tilde{v}_\alpha$

Les notations sont celles du paragraphe 6. On démontre le résultat suivant.

PROPOSITION 13. – *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout α et tout $x \in \Omega_\alpha$, $\tilde{v}_\alpha(x) \leq C\tilde{v}(x)$.*

La démonstration de cette proposition passe par plusieurs étapes. On note

$$\tilde{h}_\alpha = \tilde{v}^{4/(N-2)}\, h_\alpha$$
$$\tilde{h} = \tilde{v}^{4/(N-2)}\, \xi.$$

Là encore, à un facteur multiplicatif 4 près, $\tilde{h}$ représente la métrique standard de la sphère après projection stéréographique. Si maintenant $\tilde{w}_\alpha = \tilde{v}_\alpha/\tilde{v}$, on vérifie sans difficulté que

$$\Delta_{\tilde{h}_\alpha} \tilde{w}_\alpha + \left(\frac{\Delta_{\tilde{h}_\alpha} \tilde{v}}{\tilde{v}^p} + \frac{\alpha \mu_\alpha^2}{\tilde{v}^{p-1}} \right) \tilde{w}_\alpha = N(N-2)\, \tilde{w}_\alpha^p \quad \text{sur } \Omega_\alpha.$$

En effet, d'après (29).

$$\frac{4(N-1)}{N-2} \Delta_{h_\alpha} \tilde{v}_\alpha + \frac{4(N-1)}{N-2} \alpha \mu_\alpha^2 \, \tilde{v}_\alpha = 4N(N-1)\, \tilde{v}_\alpha^p$$

et si $S(h_\alpha)$ désigne la courbure scalaire de h_α, on peut écrire

$$\frac{4(N-1)}{N-2}\Delta_{h_\alpha}\tilde{v}_\alpha + S(h_\alpha)\tilde{v}_\alpha + \left(\frac{4(N-1)}{N-2}\alpha\mu_\alpha^2 - S(h_\alpha)\right)\tilde{v}_\alpha$$
$$= 4N(N-1)\tilde{v}_\alpha^p.$$

Reste alors à remarquer que

$$\frac{4(N-1)}{N-2}\Delta_{h_\alpha}\tilde{v}_\alpha + S(h_\alpha)\tilde{v}_\alpha = \tilde{v}^p\left(\frac{4(N-1)}{N-2}\Delta_{\tilde{h}_\alpha}\tilde{w}_\alpha + S(\tilde{h}_\alpha)\tilde{w}_\alpha\right)$$
$$\frac{4(N-1)}{N-2}\Delta_{h_\alpha}\tilde{v} + S(h_\alpha)\tilde{v} = S(\tilde{h}_\alpha)\tilde{v}^p.$$

On démontre maintenant le résultat suivant.

LEMME 14. – *Pour* $\alpha \gg 1$ *et pour tout* $x \in \Omega_\alpha$, $\dfrac{\Delta_{h_\alpha}\tilde{v}}{\tilde{v}^p} + \dfrac{\alpha\mu_\alpha^2}{\tilde{v}^{p-1}} \geq 0.$

Démonstration. – Soit $\phi_\alpha(x) = \mu_\alpha x$. ϕ_α réalise une isométrie de $(\Omega_\alpha, \mu_\alpha^2 h_\alpha)$ sur $(\omega_\alpha, g_\alpha)$. Par suite, $\Delta_{h_\alpha}\tilde{v} = \mu_\alpha^2(\Delta_{g_\alpha}(\tilde{v}\circ\phi_\alpha^{-1}))\circ\phi_\alpha$. Indépendamment, puisque les g_α sont géodésiquement normales en 0, pour tout $u = u(r)$

$$\Delta_{g_\alpha} u = \Delta_\xi u + u'\partial_r \operatorname{Log}\sqrt{|g_\alpha|}$$

où $r = |x|$ et $|g_\alpha|$ est comme dans [2], chapitre 4.

De plus, voir [2] chapitre 4 et théorème 1.53, $(\omega_\alpha, g_\alpha)$ et (B, g) étant isométriques, il existe une constante $A > 0$, indépendante de α, telle que $|\partial_r \operatorname{Log}\sqrt{|g_\alpha|}| \leq$ Ar. On obtient ainsi, $\Delta_{h_\alpha}\tilde{v} \geq \Delta_\xi\tilde{v} - A\mu_\alpha^2 r|\tilde{v}'|$. Par suite, puisque $\Delta_\xi\tilde{v} = N(N-2)\tilde{v}^p$ et puisque

$$\tilde{v}'(x) = -(N-2)|x|\left(\frac{1}{1+|x|^2}\right)^{N/2},$$

on obtient

$$\frac{\Delta_{h_\alpha}\tilde{v}}{\tilde{v}^p} + \frac{\alpha\mu_\alpha^2}{\tilde{v}^{p-1}} \geq N(N-2) + \alpha\mu_\alpha^2(1+|x|^2)^2$$
$$-(N-2)A\mu_\alpha^2|x|^2(1+|x|^2)$$
$$= N(N-2) + \mu_\alpha^2(1+|x|^2)(\alpha + \alpha|x|^2 - (N-2)A|x|^2)$$
$$= N(N-2) + \alpha\mu_\alpha^2(1+|x|^2) + (\alpha - (N-2)A)\mu_\alpha^2|x|^2(1+|x|^2)$$
$$\geq 0 \quad \text{si } \alpha \geq (N-2)A.$$

Le lemme 14 est donc bien démontré. ∎

Du lemme 14 on déduit maintenant

$$\Delta_{\tilde{h}_\alpha}\tilde{w}_\alpha \leq N(N-2)\tilde{w}_\alpha^p \text{ sur } \Omega_\alpha. \tag{31}$$

On note alors

$$\phi \text{ l'inversion définie par } \phi(x) = \frac{x}{|x|^2}$$

$$\Theta_\alpha = \phi(\Omega_\alpha)$$

$$W_\alpha = \tilde{w}_\alpha \circ \phi$$

$$H_\alpha = \phi^* \tilde{h}_\alpha.$$

Θ_α est du type $\mathbb{R}^N \backslash \theta_\alpha$ où les θ_α sont des ouverts contenant 0 et tels que pour tout $\delta > 0$, et tout $\alpha \gg 1$, $\theta_\alpha \subset B(0, \delta)$. De plus, puisque ϕ réalise une isométrie de $(\Omega_\alpha, h_\alpha)$ sur $(\Theta_\alpha, H_\alpha)$, l'inégalité (31) est conservée et on obtient

(32) $$\Delta_{H_\alpha} W_\alpha \leq N(N-2) W_\alpha^p \text{ sur } \Theta_\alpha.$$

Enfin,

$$(H_\alpha)(x)_{ij} = \left(\frac{|x|^2}{1+|x|^2}\right)^2 g_\alpha \left(\mu_\alpha \frac{x}{|x|^2}\right)_{kl} \times \left(\frac{(\delta_i^k |x|^2 - 2x_i x^k)}{|x|^4} \frac{(\delta_j^l |x|^2 - 2x_j x^l)}{|x|^4}\right),$$

et ainsi (*voir* (20) et (21)) :

(33) $$\exists \lambda > 0 / \text{pour tout } \alpha \text{ et tout } x \in \Theta_\alpha \cap B,\ \frac{1}{\lambda} \xi \leq H_\alpha \leq \lambda \xi$$

(34) les H_α sont uniformément bornées C^0 sur $\Theta_\alpha \cap B$.

On démontre maintenant le résultat suivant.

LEMME 15. – $\lim_{\alpha \to \infty} W_\alpha = 1$ *dans* $L^{p+1}(B)$.

Démonstration. – On a

$$\begin{aligned} \int_B |W_\alpha - 1|^{p+1} dv(\xi) &\leq C_1 \int_B |W_\alpha - 1|^{p+1} dv(H_\alpha) \qquad \text{(d'après (33))} \\ &= C_1 \int_{\phi(B)} |\tilde{w}_\alpha - 1|^{p+1} dv(\tilde{h}_\alpha) \\ &= C_1 \int_{\phi(B)} |\tilde{v}_\alpha - \tilde{v}|^{p+1} dv(h_\alpha) \\ &\leq C_2 \int_{\Omega_\alpha} |\tilde{v}_\alpha - \tilde{v}|^{p+1} dv(\xi) \end{aligned}$$

(avec (20), les h_α sont équivalents à la métrique euclidienne).

Par suite, en vertu du lemme 12, $\lim_{\alpha \to \infty} \int_B |W_\alpha - 1|^{p+1} dv(\xi) = 0$. ■

On possède maintenant tous les renseignements nécessaires à la démonstration de la proposition.

FIN DE LA DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 13. – On remarque déjà que démontrer la proposition équivaut à montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout α et tout $x \in \Omega_\alpha$, $\tilde{w}_\alpha(x) \leq C$. Or, pour tout $K \Subset \mathbb{R}^N$, $\lim_{\alpha \to \infty} \tilde{w}_\alpha = 1$ dans $L^\infty(K)$. Par suite, démontrer la proposition revient à montrer l'existence d'une constante $C > 0$ et d'un réel $R > 0$ tels que pour tout α et tout $x \in \Omega_\alpha$ vérifiant $|x| \geq R$, $\tilde{w}_\alpha(x) \leq C$. Ce que l'on peut encore écrire, après inversion :

$$\exists\, C > 0,\ \exists\, \delta_0 > 0/\forall \alpha \text{ et } \forall x \in \Theta_\alpha \text{ vérifiant } |x| < \delta_0,\ W_\alpha(x) \leq C.$$

Soit alors $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ sur $B(0, \delta/2)$, $\eta = 0$ sur $\mathbb{R}^N \backslash B(0, \delta)$, $\delta > 0$. En multipliant (32) par $\eta^2 W_\alpha^k$, $k \geq 1$, on obtient (*voir* [14]) :

$$\begin{aligned}(35)\qquad & \frac{4k}{(k+1)^2} \int_{\Theta_\alpha} |\nabla_{H_\alpha}(\eta\, W_\alpha^{(k+1)/2})|^2\, dv(H_\alpha) \\ & - \frac{2(k-1)}{(k+1)^2} \int_{\Theta_\alpha} \eta\,(\Delta_{H_\alpha} \eta)\, W_\alpha^{k+1}\, dv(H_\alpha) \\ & - \frac{2}{(k+1)} \int_{\Theta_\alpha} |\nabla_{H_\alpha} \eta|^2\, W_\alpha^{(k+1)}\, dv(H_\alpha) \\ & \leq N(N-2) \int_{\Theta_\alpha} \eta^2\, W_\alpha^{k+p}\, dv(H_\alpha).\end{aligned}$$

Les inégalités de Hölder pour le membre de droite de (35) et l'inégalité de Sobolev classique rappelée dans l'introduction permettent alors de montrer

$$\begin{aligned}(36)\qquad & \int_{\Theta_\alpha} |\nabla_{H_\alpha}(\eta W_\alpha^{(k+1)/2})|^2\, dv(H_\alpha) \\ & \leq C_1 \int_{\Theta_\alpha} |\nabla_{H_\alpha}(\eta W_\alpha^{(k+1)/2})|^2\, dv(H_\alpha) + C_2\end{aligned}$$

où

$$C_1 = \frac{(k+1)^2}{4k}(1+\varepsilon)\left(\int_{B(0,\delta)} W_\alpha^{p+1}\,dv(H_\alpha)\right)^{(p-1)/(p+1)}$$

$$C_2 \le \frac{k-1}{2k}\int_{\Theta_\alpha} \eta|\Delta_{H_\alpha}\eta|\,W_\alpha^{k+1}\,dv(H_\alpha) + \frac{k+1}{2k}\int_{\Theta_\alpha}|\nabla_{H_\alpha}\eta|^2\,W_\alpha^{k+1}\,dv(H_\alpha).$$

Avec le lemme 15, on voit maintenant que pour tout k, on peut choisir $\delta > 0$, $\delta \ll 1$, de sorte que $C_1 \le C < 1$, $\forall\alpha$. Par suite, avec un raisonnement par récurrence du même type que celui effectué pour la démonstration du lemme 6, on obtient :

$$(37)\qquad \forall q \in \mathbb{N},\ \exists\delta > 0,\ \delta \ll 1/\text{pour tout}\,\alpha,\ \int_{B(0,\delta)} W_\alpha^q\,dv(\xi) \le \text{Cte}.$$

(On rappelle que les métriques H_α vérifient (33).)

On écrit maintenant (32) sous la forme

$$D_i\,(H_\alpha^{ij}\sqrt{|H_\alpha|}\,D_j\,W_\alpha) \ge -N\,(N-2)\sqrt{|H_\alpha|}\,W_\alpha^p.$$

D'après (33), (34) et (37) on peut appliquer le théorème 8.25 de [11]. Par suite, il existe une constante $C > 0$ et il existe $\delta_0 > 0$, $\delta_0 \ll 1$, tels que $W_\alpha(x) \le C$ pour tout x de Θ_α vérifiant $|x| \le \delta_0$. Comme annoncé, cette dernière inégalité termine de démontrer la proposition 13. ■

Remarque. – (1) Comme conséquence directe de la proposition 13, on obtient $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \tilde{v}_\alpha = \tilde{v}$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

(2) Le résultat de la proposition 13 est en fait strictement équivalent au résultat suivant : il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout α et tout $x \in \omega_\alpha$, $\tilde{u}_\alpha(x) \le C\left(\dfrac{\mu_\alpha}{\mu_\alpha^2 + |x|^2}\right)^{(N-2)/2}$.

8. CONCLUSION ET IDENTITÉ DE POHOZAEV

On achève la programme annoncé au paragraphe 3, et donc la démonstration du théorème, en montrant que l'existence des Φ_α de la proposition 2 pour α grand conduit à une contradiction. L'étude est basée sur l'identité de Pohozaev et utilise fondamentalement la proposition 13.

Les notations sont celles du paragraphe 6. Dans toute la suite, les C_i sont des constantes strictement positives qui ne dépendent pas de α. On pose maintenant :

n = normale extérieure unitaire à $\partial\Omega_\alpha$ pour la métrique eucilidienne ξ

$\partial_n \tilde{v}_\alpha$ = dérivée normale de $\tilde{v}_\alpha$ au sens de la métrique euclidienne.

On obtient alors (*voir* [18] pour plus de détails)

$$\int_{\Omega_\alpha} (x^k \partial_k \tilde{v}_\alpha) \Delta_\xi \tilde{v}_\alpha \, dv(\xi) + \frac{N-2}{2} \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha \Delta_\xi \tilde{v}_\alpha \, dv(\xi)$$
$$= -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_\alpha} (x, n) (\partial_n \tilde{v}_\alpha)^2 \, d\sigma(\xi),$$

où $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire euclidien.

Or Ω_α est étoilé en 0. Par suite, pour tout x de $\partial\Omega_\alpha$, $(x, n) \geq 0$. On obtient ainsi

$$\int_{\Omega_\alpha} (x^k \partial_k \tilde{v}_\alpha) \Delta_\xi \tilde{v}_\alpha \, dv(\xi) + \frac{N-2}{2} \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha \Delta_\xi \tilde{v}_\alpha \, dv(\xi) \leq 0. \tag{38}$$

Soit maintenant un réel $\eta > 0$ tel que pour tout X de $\mathbb{R}^N$, $h_\alpha^{ij} X_i X_j \geq \eta |X|^2$. ($\eta$ existe d'après (20)). On écrit que

$$\eta \Delta_\xi \tilde{v}_\alpha = \Delta_{h_\alpha} \tilde{v}_\alpha + (h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij}) \partial_{ij} \tilde{v}_\alpha - h_\alpha^{ij} \Gamma(h_\alpha)_{ij}^k \partial_k \tilde{v}_\alpha,$$

où les $\Gamma(h_\alpha)_{ij}^k = \frac{1}{2} (\partial_i (h_\alpha)_{mj} + \partial_j (h_\alpha)_{mi} - \partial_m (h_\alpha)_{ij}) h_\alpha^{mk}$ représentent les symbôles de Christoffel de h_α.

Par suite, après avoir multiplié (38) par η, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_\alpha} (x^k \partial_k \tilde{v}_\alpha) \Delta_{h_\alpha} \tilde{v}_\alpha \, dv(\xi) + \frac{N-2}{2} \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha \Delta_{h_\alpha} \tilde{v}_\alpha \, dv(\xi) \\ &+ \int_{\Omega_\alpha} (x^k \partial_k \tilde{v}_\alpha) (h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij}) \partial_{ij} \tilde{v}_\alpha \, dv(\xi) \\ &- \int_{\Omega_\alpha} (x^k \partial_k \tilde{v}_\alpha) (h_\alpha^{ij} \Gamma(h_\alpha)_{ij}^m) \partial_m \tilde{v}_\alpha \, dv(\xi) \\ &+ \frac{N-2}{2} \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha (h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij}) \partial_{ij} \tilde{v}_\alpha \, dv(\xi) \\ &- \frac{N-2}{2} \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha (h_\alpha^{ij} \Gamma(h_\alpha)_{ij}^m) \partial_m \tilde{v}_\alpha \, dv(\xi) \leq 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Or $\tilde{v}_\alpha$ vérifie l'équation (29) (*voir* paragraphe 6), et ainsi

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_\alpha} (x^k \partial_k \tilde{v}_\alpha) \Delta_{h_\alpha} \tilde{v}_\alpha \, dv(\xi) + \frac{N-2}{2} \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha \Delta_{h_\alpha} \tilde{v}_\alpha \, dv(\xi) \\ &= \int_{\Omega_\alpha} (x^k \partial_k \tilde{v}_\alpha) (N(N-2) \tilde{v}_\alpha^p - (\alpha\mu_\alpha^2) \tilde{v}_\alpha) \, dv(\xi) \\ &+ \frac{N-2}{2} \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha (N(N-2) \tilde{v}_\alpha^p - (\alpha\mu_\alpha^2) \tilde{v}_\alpha) \, dv(\xi) \end{aligned}$$

Avec des intégrations par parties, $\tilde{v}_\alpha$ étant nulle sur $\partial\Omega_\alpha$, on obtient maintenant

$$\int_{\Omega_\alpha} (x^k\, \partial_k\, \tilde{v}_\alpha)\, \tilde{v}_\alpha^p\, dv\,(\xi) = -\frac{(N-2)}{2} \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha^{p+1}\, dv\,(\xi)$$

$$\int_{\Omega_\alpha} (x^k\, \partial_k\, \tilde{v}_\alpha)\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi) = -\frac{N}{2} \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha^2\, dv\,(\xi).$$

Par suite,

$$\int_{\Omega_\alpha} (x^k\, \partial_k\, \tilde{v}_\alpha)\, \Delta_{h_\alpha}\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi) + \frac{N-2}{2} \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha\, \Delta_{h_\alpha}\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi)$$
$$= \alpha\mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha^2\, dv\,(\xi),$$

et (39) devient

$$\begin{aligned}(40)\quad & \alpha\mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha^2\, dv\,(\xi) + \int_{\Omega_\alpha} (x^k\, \partial_k\, \tilde{v}_\alpha)\, (h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij})\, \partial_{ij}\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi) \\ & - \int_{\Omega_\alpha} (x^k\, \partial_k\, \tilde{v}_\alpha)\, (h_\alpha^{ij}\, \Gamma\,(h_\alpha)_{ij}^m)\, \partial_m\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi) \\ & + \frac{N-2}{2} \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha\, (h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij})\, \partial_{ij}\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi) \\ & - \frac{N-2}{2} \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha\, (h_\alpha^{ij}\, \Gamma\,(h_\alpha)_{ij}^m)\, \partial_m\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi) \leq 0.\end{aligned}$$

On s'intéresse maintenant aux différents termes qui interviennent dans (40). Tout d'abord, en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega_\alpha} (x^k\, \partial_k\, \tilde{v}_\alpha)\, (h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij})\, \partial_{ij}\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi) \\ & \quad = \int_{\partial\Omega_\alpha} (x,\, n)\, (\partial_n\, \tilde{v}_\alpha)^2\, ((h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij})\, n_i\, n_j)\, d\sigma\,(\xi) \\ & \qquad - \int_{\Omega_\alpha} (\partial_i\, h_\alpha^{ij})\, x^k\, \partial_j\, \tilde{v}_\alpha\, \partial_k\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi) \\ & \qquad - \int_{\Omega_\alpha} (h_\alpha^{kj} - \eta\delta^{kj})\, \partial_k\, \tilde{v}_\alpha\, \partial_j\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi) \\ & \qquad - \int_{\Omega_\alpha} (h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij})\, x^k\, \partial_{ik}\, \tilde{v}_\alpha\, \partial_j\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\alpha} (h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij})\, x^k\, \partial_{ik}\, \tilde{v}_\alpha\, \partial_j\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi) \\
&\quad = \int_{\partial\Omega_\alpha} (x,\, n)\, (\partial_n\, \tilde{v}_\alpha)^2\, ((h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij})\, n_i\, n_j)\, d\sigma\,(\xi) \\
&\qquad - \int_{\Omega_\alpha} (x^k\, \partial_k\, h_\alpha^{ij})\, \partial_i\, \tilde{v}_\alpha\, \partial_j\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi) \\
&\qquad - N \int_{\Omega_\alpha} (h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij})\, \partial_i\, \tilde{v}_\alpha\, \partial_j\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi) \\
&\qquad - \int_{\Omega_\alpha} (h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij})\, x^k\, \partial_i\, \tilde{v}_\alpha\, \partial_{jk}\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\alpha} (h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij})\, x^k\, \partial_{ik}\, \tilde{v}_\alpha\, \partial_j\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi) \\
&\quad = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_\alpha} (x,\, n)\, (\partial_n\, \tilde{v}_\alpha)^2\, ((h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij})\, n_i\, n_j)\, d\sigma\,(\xi) \\
&\qquad - \frac{1}{2} \int_{\Omega_\alpha} (x^k\, \partial_k\, h_\alpha^{ij})\, \partial_i\, \tilde{v}_\alpha\, \partial_j\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi) \\
&\qquad - \frac{N}{2} \int_{\Omega_\alpha} (h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij})\, \partial_i\, \tilde{v}_\alpha\, \partial_j\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
(41)\qquad &\int_{\Omega_\alpha} (x^k\, \partial_k\, \tilde{v}_\alpha)\, (h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij})\, \partial_{ij}\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi) \\
&\quad = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_\alpha} (x,\, n)\, (\partial_n\, \tilde{v}_\alpha)^2\, ((h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij})\, n_i\, n_j)\, d\sigma\,(\xi) \\
&\qquad - \int_{\Omega_\alpha} (\partial_i\, h_\alpha^{ij})\, x^k\, \partial_j\, \tilde{v}_\alpha\, \partial_k\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi) \\
&\qquad + \frac{N-2}{2} \int_{\Omega_\alpha} (h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij})\, \partial_i\, \tilde{v}_\alpha\, \partial_j\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi) \\
&\qquad + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\alpha} (x^k\, \partial_k\, h_\alpha^{ij})\, \partial_i\, \tilde{v}_\alpha\, \partial_j\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi).
\end{aligned}$$

De même,

$$\int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha \, (h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij}) \, \partial_{ij} \, \tilde{v}_\alpha \, dv \, (\xi) = - \int_{\Omega_\alpha} (h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij}) \, \partial_i \, \tilde{v}_\alpha \, \partial_j \, \tilde{v}_\alpha \, dv \, (\xi) - \int_{\Omega_\alpha} (\partial_i \, h_\alpha^{ij}) \, \tilde{v}_\alpha \, \partial_j \, \tilde{v}_\alpha \, dv \, (\xi)$$

et :

$$\int_{\Omega_\alpha} (\partial_i \, h_\alpha^{ij}) \, \tilde{v}_\alpha \, \partial_j \, \tilde{v}_\alpha \, dv \, (\xi) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_\alpha} (\partial_{ij} \, h_\alpha^{ij}) \, \tilde{v}_\alpha^2 \, dv \, (\xi).$$

Ainsi,

$$\int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha \, (h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij}) \, \partial_{ij} \, \tilde{v}_\alpha \, dv \, (\xi) = - \int_{\Omega_\alpha} (h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij}) \, \partial_i \, \tilde{v}_\alpha \, \partial_j \, \tilde{v}_\alpha \, dv \, (\xi) + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\alpha} (\partial_{ij} \, h_\alpha^{ij}) \, \tilde{v}_\alpha^2 \, dv \, (\xi). \tag{42}$$

Enfin,

$$\int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha \, (h_\alpha^{ij} \, \Gamma \, (h_\alpha)_{ij}^m) \, \partial_m \, \tilde{v}_\alpha \, dv \, (\xi) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_\alpha} (\partial_m \, (h_\alpha^{ij} \, \Gamma \, (h_\alpha)_{ij}^m)) \, \tilde{v}_\alpha^2 \, dv \, (\xi). \tag{43}$$

En reportant (41), (42) et (43) dans (40), et après simplification, on obtient maintenant :

$$\begin{aligned} &\alpha\mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha^2 \, dv \, (\xi) + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_\alpha} (x, \, n) \, (\partial_n \, \tilde{v}_\alpha)^2 \, ((h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij}) \, n_i \, n_j) \, d\sigma \, (\xi) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_\alpha} (x^k \, \partial_k \, h_\alpha^{ij}) \, \partial_i \, \tilde{v}_\alpha \, \partial_j \, \tilde{v}_\alpha \, dv \, (\xi) - \int_{\Omega_\alpha} (\partial_i \, h_\alpha^{ij}) \, x^k \, \partial_j \, \tilde{v}_\alpha \, \partial_k \, \tilde{v}_\alpha \, dv \, (\xi) \\ &+ \frac{N-2}{4} \int_{\partial\Omega_\alpha} (\partial_{ij} \, h_\alpha^{ij}) \tilde{v}_\alpha^2 \, dv \, (\xi) \\ &+ \frac{N-2}{4} \int_{\Omega_\alpha} (\partial_m \, (h_\alpha^{ij} \, \Gamma \, (h_\alpha)_{ij}^m)) \, \tilde{v}_\alpha^2 \, dv \, (\xi) \\ &- \int_{\Omega_\alpha} (x^k \, h_\alpha^{ij} \, \Gamma \, (h_\alpha)_{ij}^m) \, \partial_k \, \tilde{v}_\alpha \, \partial_m \, \tilde{v}_\alpha \, dv \, (\xi) \leq 0. \end{aligned}$$

Or, pour tout x de $\partial\Omega_\alpha$, $(x,\, n) \geq 0$ et $(h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij})\, n_i\, n_j \geq 0$. Par suite,

$$\int_{\partial\Omega_\alpha} (x,\, n)\, (\partial_n\, \tilde{v}_\alpha)^2\, ((h_\alpha^{ij} - \eta\delta^{ij})\, n_i\, n_j)\, d\sigma\,(\xi) \geq 0$$

et :

$$\begin{aligned}(44) \qquad & \alpha\mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha^2\, dv\,(\xi) + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\alpha} (x^k\, \partial_k\, h_\alpha^{ij})\, \partial_i\, \tilde{v}_\alpha\, \partial_j\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi) \\ & - \int_{\Omega_\alpha} (\partial_i\, h_\alpha^{ij})\, x^k\, \partial_j\, \tilde{v}_\alpha\, \partial_k\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi) \\ & + \frac{N-2}{4} \int_{\Omega_\alpha} (\partial_{ij}\, h_\alpha^{ij}) \tilde{v}_\alpha^2\, dv\,(\xi) \\ & + \frac{N-2}{4} \int_{\Omega_\alpha} (\partial_m\, (h_\alpha^{ij}\, \Gamma\,(h_\alpha)_{ij}^m))\, \tilde{v}_\alpha^2\, dv\,(\xi) \\ & - \int_{\Omega_\alpha} (x^k\, h_\alpha^{ij}\, \Gamma\,(h_\alpha)_{ij}^m)\, \partial_k\, \tilde{v}_\alpha\, \partial_m\, \tilde{v}_\alpha\, dv\,(\xi) \leq 0.\end{aligned}$$

On remarque maintenant que $\partial_{ij}\, h_\alpha^{ij}\,(x) = \mu_\alpha^2\, (\partial_{ij}\, g_\alpha^{ij})\, (\mu_\alpha\, x)$. Avec (20) et (21) on obtient alors :

$$(45) \qquad \left| \int_{\Omega_\alpha} (\partial_{ij}\, h_\alpha^{ij})\, \tilde{v}_\alpha^2\, dv\,(\xi) \right| \leq C_1\, \mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha^2\, dv\,(\xi).$$

De même, $|\partial_m\, (h_\alpha^{ij}\, \Gamma\,(h_\alpha)_{ij}^m)| \leq \mathrm{Cte}\, \mu_\alpha^2$, et ainsi

$$(46) \qquad \left| \int_{\Omega_\alpha} \partial_m\, (h_\alpha^{ij}\, \Gamma\,(h_\alpha)_{ij}^m)\, \tilde{v}_\alpha^2\, dv\,(\xi) \right| \leq C_2\, \mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha^2\, dv\,(\xi).$$

Indépendemment, avec Taylor et puisque les g_α sont normales en 0,

$$\begin{aligned}(\partial_k\, h_\alpha^{ij})\,(x) &= \mu_\alpha\, (\partial_k\, g_\alpha^{ij})\, (\mu_\alpha\, x) \\ &= \mu_\alpha\, ((\partial_k\, g_\alpha^{ij})\,(0) + \mu_\alpha\, (\partial_{kl}\, g_\alpha^{ij})\, (\mu_\alpha\, \theta\, x)\, x^l),\ \theta \in]0,\, 1[\\ &= \mu_\alpha^2\, (\partial_{kl}\, g_\alpha^{ij})\, (\mu_\alpha\, \theta\, x)\, x^l.\end{aligned}$$

Par suite, en utilisant l'équivalence des métriques h_α et ξ, des intégrations par parties, (20), (21) et l'équation (29) vérifiée par $\tilde{v}_\alpha$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Omega_\alpha} x^k (\partial_k h_\alpha^{ij}) \partial_i \tilde v_\alpha \partial_j \tilde v_\alpha \, dv(\xi)\right| &\le C_3 \mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} |x|^2 |\nabla_\xi \tilde v_\alpha|^2 \, dv(\xi) \\
&\le C_4 \mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} |x|^2 |\nabla_{h_\alpha} \tilde v_\alpha|^2 \, dv(h_\alpha) \\
&= -C_4 \mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} (\nabla_{h_\alpha} (|x|^2 \nabla_{h_\alpha} \tilde v_\alpha)) \tilde v_\alpha \, dv(h_\alpha) \\
&= C_4 \mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} |x|^2 (\Delta_{h_\alpha} \tilde v_\alpha) \tilde v_\alpha \, dv(h_\alpha) \\
&\quad - C_4 \mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} (\nabla_{h_\alpha} |x|^2 \nabla_{h_\alpha} \tilde v_\alpha) \tilde v_\alpha \, dv(h_\alpha) \\
&= C_4 \mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} |x|^2 (\Delta_{h_\alpha} \tilde v_\alpha) \tilde v_\alpha \, dv(h_\alpha) \\
&\quad - C_5 \mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} (\Delta_{h_\alpha} |x|^2) \tilde v_\alpha^2 \, dv(h_\alpha) \\
&\le C_4 \mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} |x|^2 (\Delta_{h_\alpha} \tilde v_\alpha) \tilde v_\alpha \, dv(h_\alpha) + C_6 \mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} \tilde v_\alpha^2 \, dv(h_\alpha) \\
&= C_4 \mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} |x|^2 \tilde v_\alpha (N(N-2) \tilde v_\alpha^p - \alpha \mu_\alpha^2 \tilde v_\alpha) \, dv(h_\alpha) \\
&\quad + C_6 \mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} \tilde v_\alpha^2 \, dv(h_\alpha) \\
&\le C_7 \mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} \tilde v_\alpha^2 \, dv(\xi) + C_8 \mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} |x|^2 \tilde v_\alpha^{p+1} \, dv(\xi).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Omega_\alpha} x^k (\partial_k h_\alpha^{ij}) \partial_i \tilde v_\alpha \partial_j \tilde v_\alpha \, dv(\xi)\right| \\
\le C_7 \mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} \tilde v_\alpha^2 \, dv(\xi) + C_8 \mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} |x|^2 \tilde v_\alpha^{p+1} \, dv(\xi)
\end{aligned} \tag{47}$$

et en raisonnant de la même façon, on montre que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Omega_\alpha} (\partial_i h_\alpha^{ij}) x^k \partial_j \tilde v_\alpha \partial_k \tilde v_\alpha \, dv(\xi)\right| \\
\le C_9 \mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} \tilde v_\alpha^2 \, dv(\xi) + C_{10} \mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} |x|^2 \tilde v_\alpha^{p+1} \, dv(\xi).
\end{aligned} \tag{48}$$

Par ailleurs, toujours d'après Taylor et en utilisant l'expression des $\Gamma(h_\alpha)_{ij}^k$, on voit que pour tout X de $\mathbb{R}^N$, $|(x^k h_\alpha^{ij}\Gamma(h_\alpha)_{ij}^m) X_k X_m| \leq C_{11}\mu_\alpha^2 |x|^2 |X|^2$. Par suite,

$$\left|\int_{\Omega_\alpha} (x^k h_\alpha^{ij}\Gamma(h_\alpha)_{ij}^m)\,\partial_k \tilde{v}_\alpha\,\partial_m \tilde{v}_\alpha\,dv(\xi)\right| \leq C_{12}\mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} |x|^2\,|\nabla_\xi \tilde{v}_\alpha|^2\,dv(\xi)$$

et, là encore,

$$\left|\int_{\Omega_\alpha} (x^k h_\alpha^{ij}\Gamma(h_\alpha)_{ij}^m)\,\partial_k \tilde{v}_\alpha\,\partial_m \tilde{v}_\alpha\,dv(\xi)\right| \leq C_{13}\mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha^2\,dv(\xi) + C_{14}\mu_\alpha^2 \int_{\Omega_\alpha} |x|^2\,\tilde{v}_\alpha^{p+1}\,dv(\xi). \tag{49}$$

En reportant les relations (45) à (49) dans (44), et en simplifiant par μ_α^2, on obtient maintenant :

$$\alpha \int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha^2\,dv(\xi) \leq C_{15}\int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha^2\,dv(\xi) + C_{16}\int_{\Omega_\alpha} |x|^2\,\tilde{v}_\alpha^{p+1}\,dv(\xi) \tag{50}$$

Pour conclure, et donc obtenir la contradiction recherchée, il reste à remarquer que :

$$\int_{\Omega_\alpha} \tilde{v}_\alpha^2\,dv(\xi) \geq \frac{1}{2}\int_B \tilde{v}^2\,dv(\xi) > 0 \quad \text{pour } \alpha \gg 1 \tag{51}$$

(puisque les $\tilde{v}_\alpha$ convergent uniformément vers $\tilde{v}$ sur tout compact de $\mathbb{R}^N$)

$$\int_{\Omega_\alpha} |x|^2 \tilde{v}_\alpha^{p+1}\,dv(\xi) \leq C_{17}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 \tilde{v}^{p+1}\,dv(\xi) \leq C_{18} \text{ dès que } N \geq 3 \tag{52}$$

(d'après la proposition 13).

Par suite, (50), (51) et (52) imposent $\alpha \leq$ Cte. Les Φ_α de la proposition 2 n'existent donc pas pour α grand, et le théorème est démontré. ■

9. APPENDICES

APPENDICE 1

(M, g) désignant une variété riemannienne compacte à bord de dimension $N \geq 3$, on note $H_{0,1}(M)$ l'espace de Sobolev complété de $\mathcal{D}(M)$, l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans $M \backslash \partial M$, pour la norme

$$\|u\|^2 = \int_M |\nabla_g u|^2 \, dv(g) + \int_M u^2 \, dv(g).$$

La question devient : montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

(53) pour tout $u \in H_{0,1}(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{p+1} \, dv(g)\right)^{2/(p+1)} \leq S_N \int_M |\nabla_g u|^2 \, dv(g) + C \int_M u^2 \, dv(g).$$

La réduction du problème présentée dans le paragraphe 2 reste valable pour cette question. Par suite :

THÉORÈME. – *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte à bord de dimension $N \geq 3$. Il existe alors une constante $C > 0$ pour laquelle* (53) *est vérifiée.*

APPENDICE 2

On démontre une version modifiée du corollaire 8.36 de [11].

LEMME. – *Pour $\alpha \gg 1$, on considère la famille (D_α) de domaines de $\mathbb{R}^N$ définis par l'intersection d'une boule de rayon 1 et d'une boule de rayon α, dont un modèle peut être obtenu de la façon suivante : $D_\alpha = B_1 \cap B_\alpha$*

$$\textit{où} \quad B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1} / x^2 + |y|^2 \leq 1\}$$
$$B_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1} / (x + \sqrt{\alpha^2 - 1})^2 + |y|^2 \leq \alpha^2\}.$$

On note $\partial D_\alpha^- = \partial D_\alpha \cap B_1$, $\partial D_\alpha^+ = \partial D_\alpha \cap B_\alpha$, et si $(x_0, 0) \in \partial D_\alpha^+$, on note O_α l'intersection de D_α avec la boule de centre $(x_0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Soit maintenant (g_α) *une famille de métriques définies sur un voisinage ouvert de* $\overline{D}_\alpha$ *telles que*

$$\frac{1}{\lambda}\,\xi \leq g_\alpha \leq \lambda \xi \; (\xi \textit{ la métrique euclidienne})$$

et soit (v_α) *une famille de solutions régulières sur* D_α *des équations*

$$\Delta_{g_\alpha} v_\alpha + h_\alpha v_\alpha = f_\alpha$$

$$v_\alpha = 0 \quad \textit{sur } \partial D_\alpha^+$$

où h_α *et* f_α *appartiennent à* $C^0(D_\alpha)$.

Si : (i) *les métriques* g_α *sont uniformément bornées* C^1 *sur* D_α

(ii) *les fonctions* h_α *et* f_α *sont uniformément bornées* C^0 *sur* D_α
alors il existe une constante C*, indépendante de* α*, telle que*

$$\|v_\alpha\|_{C^1(O_\alpha)} \leq C\,(\mathrm{Sup}_{D_\alpha}|v_\alpha| + \mathrm{Sup}_{D_\alpha}|f_\alpha|).$$

(C ne dépend en fait que de N*, de la borne* C^1 *des* g_α*, de la borne* C^0 *des* h_α *et de* λ*.)*

Démonstration. – Pour $y \in \mathbb{R}^{N-1}$, on note $x_\alpha^-(y)$ l'unique point de ∂D_α^- de coordonnée y sur $\mathbb{R}^{N-1}$, et on note $x_\alpha^+(y)$ l'unique point de ∂D_α^+ de coordonnée y sur $\mathbb{R}^{N-1}$.

On considère maintenant la famille d'homéomorphismes $\theta_\alpha : D_\alpha \to D_1$ définies par

$$\theta_\alpha(x, y) = \left(\frac{x_\alpha^-(y)\,(x_\alpha^+(y) - x)}{x_\alpha^+(y) - x_\alpha^-(y)},\, y\right).$$

On vérifie facilement que les θ_α, restreints à

$$D_\alpha^\varepsilon = \{(x, y) \in D_\alpha / |y| < 1 - \varepsilon\},\ \varepsilon > 0,\ \varepsilon \ll 1,$$

sont des difféomorphismes sur leurs images, et qu'il existe $C(\varepsilon)$, indépendante de α, telle que pour tout $(x, y) \in D_\alpha^\varepsilon$:

$$\frac{1}{C(\varepsilon)} \leq \|d\theta_\alpha(x, y)\| \leq C(\varepsilon). \tag{54}$$

Sur D_1 on considère maintenant la famille d'équations

$$\Delta_{k_\alpha} w_\alpha + (h_\alpha \circ \theta_\alpha^{-1})\, w_\alpha = f_\alpha \circ \theta_\alpha^{-1}$$

$$w_\alpha = 0 \quad \text{sur } T$$

où $k_\alpha = (\theta_\alpha^{-1})^* g_\alpha$, $w_\alpha = v_\alpha \circ \theta_\alpha^{-1}$ et $T = \{(0, y)/(0, y) \in B_1\}$.

Compte tenu de (54), on se trouve dans les conditions d'application du corollaire 8.36 de [11]. Par suite,

$$\|v_\alpha\|_{C^1(\theta_\alpha(B_\alpha))} \leq C\,(\mathrm{Sup}_{D_\alpha}|v_\alpha| + \mathrm{Sup}_{D_\alpha}|f_\alpha|).$$

et en utilisant (54),

$$\|v_\alpha\|_{C^1(O_\alpha)} \leq C\,(\mathrm{Sup}_{D_\alpha}|v_\alpha| + \mathrm{Sup}_{D_\alpha}|f_\alpha|).$$

Le lemme est donc bien démontré. ■

RÉFÉRENCES

[1] R. A. ADAMS, Sobolev spaces, Academic press, *Pure and Applied Mathematics*, vol. **65**, 1978.

[2] T. AUBIN, Nonlinear Analysis on Manifolds, Monge-Ampère equations, Berlin, Springer-Verlag, 1982, *Grudlehern Math. Wiss.*, vol. **252**.

[3] T. AUBIN, Problèmes isopérimétriques et espace de Sobolev, *Journal of Differential Geometry*, vol. **11**, 1976, p. 573-598.

[4] T. AUBIN, Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. **55**, 1976, p. 269-296.

[5] A. BESSE, Einstein manifolds, Springer-Verlag, vol. **10**, 1987.

[6] H. BREZIS, Elliptic equations with limiting Sobolev exponents, the impact of topology, *Comm. Pure and Appl. Math.*, vol. **XXXIX**, 1986, p. 17-39.

[7] P. CHERRIER, Meilleures constantes dans des inégalités relatives aux espaces de Sobolev, *Bull. Sci. Math.*, vol. **108**, 1984, p. 225-262.

[8] L. A. CAFFARELLI, B. GIDAS et J. SPRUCK, Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with Sobolev growth, *Comm. Pure and Appl. Maths.*, vol. **XLII**, 1989, p. 271-297.

[9] S. GALLOT, Inégalités isopérimétriques sur les variétés riemanniennes, *Astérisques*, 1988, p. 163-164.

[10] B. GIDAS, W. M. NI et L. NIRENBERG, Symmetry and related properties via the maximum principle, *Communications in Mathematical Physics*, vol. **68**, 1979, p. 209-243.

[11] D. GILBARG et N. S. TRUDINGER, Elliptic partial differential equations of second order, Berlin, Springer-Verlag, Second edition, 1983, *Grundleher Math. Wiss.*, vol. **224**.

[12] Z. C. HAN, Asymptotic approach to singular solutions for nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent, *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse non linéaire*, vol. **8**, 1991, p. 159-174.

[13] E. HEBEY, Changements de métriques conformes sur la sphère, Le problème de Nirenberg, *Bull. Sc. Math.*, vol. **114**, 1990, p. 215-242.

[14] E. HEBEY, La méthode d'isométries-concentration dans le cas d'un problème non linéaire sur la variétés riemanniennes compactes à bord avec exposant critique de Sobolev, *Bull. Sc. Math.*, vol. **116**, 1992, p. 35-51.

[15] E. HEBEY, Courbure scalaire et géométrie conforme, *Journal of Geometry and Physics*, vol. **10**, 1993, p. 345-380.

[16] E. HEBEY et M. VAUGON, Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et multiplicité pour les problèmes de Nirenberg et Yamabe, *Indiana University Mathematics Journal*, vol. **41**, 1992, p. 377-407.

[17] S. KOBAYASHI et K. NOMIZU, Foundations of differential geometry, *Interscience tracts in pure and applied mathematics*, n° 15, John Wiley & Sons.

[18] J. L. KAZDAN et F. W. WARNER, Remarks on some quasilinear elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. **28**, 1975, p. 567-597.

[19] P. L LIONS, The concentration-compactness principle in the calculus of variations, *Rev. Math. Iberoamericano*, vol. **1.1**, 1985, p. 145-201, et vol. **1.2**, 1985, p. 45-121.

[20] M. OBATA, The conjectures on conformal transformations of riemannian manifolds, *J. Diff. Geom.*, vol. **6**, 1971, p. 247-258.

[21] M. STRUWE, A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities, *Math. Z.*, vol. **187**, 1984, p. 511-517.

[22] P. SACKS et K. UHLENBECK, On the existence of minimal immersions of 2-sphères, *Ann. of Math.*, vol. **113**, 1981, p. 1-24.

[23] G. TALENTI, Best constant in Sobolev inequality, *Ann. Math. Pure Appl.*, vol. **110**, 1976, p. 353-372.

[24] M. VAUGON, Transformation conforme de la courbure scalaire sur une variété riemannienne compacte, *Journal of Functional Analysis*, vol. **71**, 1987, p. 182-194.

[25] H. C. WENTE, Large solutions to the volume constrained Plateau problem, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. **75**, 1980, p. 59-77.

(Manuscrit reçu le 22 mars 1994;
révisé le 2 juin 1994.)