ANNALES DE L'I. H. P.

F. POLLACZEK

Application d'opérateurs intégro-combinatoires dans la théorie des intégrales multiples de Dirichlet

Annales de l'I. H. P., tome 11, nº 3 (1949), p. 113-133
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1949__11_3_113_0>

Application d'opérateurs intégro-combinatoires dans la théorie des intégrales multiples de Dirichlet

par

F. POLLACZEK.

Pour calculer, au moyen de la théorie des fonctions analytiques, des probabilités continues multidimensionnelles, nous avons utilisé certaines sommes d'intégrales n-uples de Fourier, de la forme

$$\int_{-i\infty\pm\varepsilon_1}^{i\infty\pm\varepsilon_1}\cdots\int_{-i\infty\pm\varepsilon_n}^{i\infty\pm\varepsilon_n}\frac{F(z_1,\ \dots,\ z_n)}{z_1\ \dots\ z_n}dz_1\ \dots\ dz_n \qquad (0<\varepsilon_1,\ \dots,\ \varepsilon_n\leqslant c),$$

où $F(z_1,\ \dots,\ z_n)$ est holomorphe aux points finis du domaine

$$|\mathrm{R}(z_\nu)|<c \qquad (\nu=1,\ \dots,\ n;\ c>0).$$

Ces sommes d'intégrales, généralisations de l'intégrale classique de Dirichlet, s'avèrent comme un moyen propre à représenter des fonctions réelles ou complexes de n variables réelles, qui sont définies à l'aide de notions d'ordre; un exemple d'une telle fonction est fourni par la $a^{\text{ième}}$ puissance du $b^{\text{ième}}$ de n nombres réels $x_1,\ \dots,\ x_n$, rangés en ordre croissant ou décroissant. De même, certaines fonctions qu'on obtient en itérant ces notions, peuvent être représentées convenablement à l'aide de sommes de pareilles intégrales. Pour simplifier, autant que possible, les calculs combinatoires dont on a besoin ici, et afin d'échapper aux difficultés que présente l'écriture, très encombrante, de telles expressions au moyen des signes usuels, nous avons établi un calcul opérationnel qui permet de déduire et d'écrire, de manière succincte, diverses formules assez générales.

Afin de faire ressortir plus nettement les méthodes analytiques que nous utilisons dans d'autres travaux, nous avons exposé ce calcul et les formules qu'il permet d'établir, indépendamment de toute notion de

Théorie des Probabilités; mais comme nous ne l'avons élaboré que dans la mesure où nous nous en servirons dans deux Mémoires subséquents ([1]), ([2]), l'article présent n'épuise pas cette matière.

1. Notations; représentation de différentes fonctions de n variables réelles à l'aide des opérateurs C_ν, C'_ν, R_n^λ, S_n^μ. — Comme point de départ, nous utilisons les intégrales de Dirichlet

$$(1)\qquad \begin{cases} s(x)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} e^{xz}\frac{dz}{z}, \qquad s'(x)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{i\infty-\varepsilon}^{-i\infty-\varepsilon} e^{xz}\frac{dz}{z} \\ \qquad\qquad (x\neq 0;\ \varepsilon>0), \end{cases}$$

qui satisfont à l'identité

$$(2)\qquad s(x)+s'(x)=1,$$

et qui représentent les fonctions

$$(3a)\qquad s(x)=\begin{cases} 1 & (x>0), \\ 0 & (x<0); \end{cases}$$

$$(3b)\qquad s'(x)=s(-x)=\begin{cases} 0 & (x>0), \\ 1 & (x<0). \end{cases}$$

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels; nous désignons par

$$(4)\qquad \min_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu)} x_\nu \quad\text{et}\quad \max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu)} x_\nu \qquad (\mu=1, 2, \ldots;\ \min{}^{(1)}\equiv\min;\ \max{}^{(1)}\equiv\max),$$

le $\mu^{\text{ième}}$ de ces nombres rangés respectivement en ordre croissant ou décroissant. En outre, nous employons les notations

$$(5a)\qquad x^+=\max(x, 0) \qquad (x\gtrless 0),$$

$$(5b)\qquad \max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu)+} x_\nu = [\max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu)} x_\nu]^+.$$

Considérons maintenant les $n+1$ fonctions symétriques élémentaires des $s(x_\nu)$ et des $s'(x_\nu)$ dont la somme est égale au produit

$$(6)\qquad \prod_{\nu=1}^{n}\big(s(x_\nu)+s'(x_\nu)\big)=1 \qquad (x_\nu\neq 0;\ \nu=1, \ldots, n).$$

([1]) Réduction de différents problèmes concernant la probabilité d'attente au téléphone, à la résolution de systèmes d'équations intégrales, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. XI, 1949, p. 135.

([2]) Problèmes de Calcul des Probabilités relatifs à des systèmes téléphoniques sans possibilité d'attente [*Ann. Inst. H. Poincaré* (sous presse)].

L'expression

$$(7)\qquad \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{n} s'(x_{1'})\ldots s'(x_{\lambda'})\prod_{1}^{n}{}^{(\lambda)} s(x_\nu) \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, n)$$

$\Bigg($où la somme $\sum\limits_{1',\ldots,\lambda'}^{n}$ doit être étendue à toutes les C_n^λ combinaisons λ à λ des indices $1, \ldots, n$, $\prod\limits_{1}^{n}{}^{(\lambda)}$ désignant un produit où les facteurs d'indice $1', \ldots, \lambda'$ sont absents$\Bigg)$ est évidemment égale à l'unité si exactement λ parmi les n nombres x_ν sont négatifs, et égale à zéro dans le cas contraire. Par conséquent, la fonction qu'on obtient en sommant ici depuis $\lambda = 0$ jusqu'à $\lambda = \mu \leqq n$, sera égale à 1 ou à 0, selon qu'il se trouve tout au plus μ, ou plus de μ nombres négatifs parmi les x_ν. Pour cette fonction qui, à l'aide de nos notations ($3a$) et (4), sera désignée par $s\min\limits_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)} x_\nu$, il vient donc

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} s\min\limits_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)} x_\nu = \sum\limits_{\lambda=0}^{\mu}\sum\limits_{1',\ldots,\lambda'=1}^{n} s'(x_{1'})\ldots s'(x_{\lambda'})\prod\limits_{1}^{n}{}^{(\lambda)} s(x_\nu) \\ \qquad\qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n-1;\ x_\nu \neq 0); \end{array}\right.$$

pour $\mu \geqq n$, où [*voir* (6)] le deuxième membre devient égal à 1, la fonction (8) sera par définition égale à l'unité.

A l'aide des formules (1), la fonction $s\min^{(\mu+1)}$ peut être représentée sous forme d'une somme d'intégrales n-uples de Fourier. Pour simplifier l'écriture, nous introduisons les opérateurs

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} C_\nu = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-i\infty+\varepsilon_\nu}^{i\infty+\varepsilon_\nu}\ldots\frac{dz_\nu}{z_\nu}, \qquad C'_\nu = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{i\infty-\varepsilon_\nu}^{-i\infty-\varepsilon_\nu}\ldots\frac{dz_\nu}{z_\nu} \\ \qquad\qquad (\nu = 1, 2, \ldots;\ 0 < \varepsilon_\nu \leqslant 1); \end{array}\right.$$

les chemins d'intégration de ces opérateurs, parcourus respectivement du bas vers le haut et du haut vers le bas, seront désignés par les mêmes lettres C_ν et C'_ν. En outre, nous introduisons les opérateurs

$$(10)\qquad R_n^\lambda = \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{n} C'_{1'}\ldots C'_{\lambda'}\prod_{\nu=1}^{n}{}^{(\lambda)} C_\nu \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, n),$$

et

$$(11)\qquad S_n^\mu = \sum_{\lambda=0}^{\mu} \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{n} C'_{1'}\ldots C'_{\lambda'} \prod_{\nu=1}^{n}{}^{(\lambda)} C_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\mu} R_n^\lambda \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n).$$

En appelant ordre du produit $C'_{1'}\ldots C'_{\lambda'}\prod_{1}^{n}{}^{(\lambda)} C_\nu$ le nombre λ de facteurs C'_ν qu'il contient, R_n^λ et S_n^μ sont respectivement la somme de tous les termes d'ordre λ, et la somme de tous les termes d'ordre $\leq \mu$, contenus dans le produit $\prod_{\nu=1}^{n}(C_\nu + C'_\nu)$. Pour les S_n^μ, on obtient à l'aide de l'équation $Cf(z) = C'f(-z)$ immédiatement l'identité

$$(12)\qquad \begin{aligned} &S_n^\mu f(z_1, \ldots, z_n) + S_n^{n-\mu-1} f(-z_1, \ldots, -z_n) \\ &\quad = \prod_{\nu=1}^{n}(C_\nu + C'_\nu) f(z_1, \ldots, z_n) = f(0, \ldots, 0), \end{aligned}$$

$f(z_1, \ldots, z_n)$ étant supposé holomorphe pour $|R(z_\nu)| \leq \varepsilon_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ et tel que toutes ces intégrales existent.

A l'aide des formules (1) et des opérateurs (9) et (11), la formule (8) prend la forme

$$(13)\qquad \underset{\nu=1,\ldots,n}{s\min{}^{(\mu+1)}} x_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\mu} \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{n} C'_{1'}\ldots C'_{\lambda'} \prod_{1}^{n}{}^{(\lambda)} C_\nu \exp\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu z_\nu = S_n^\mu \exp\sum_{1}^{n} x_\nu z_\nu.$$

Maintenant, l'identité

$$(14)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-\zeta t} \underset{\nu=1,\ldots,n}{s\min{}^{(\mu+1)}} (t - x_\nu)\, dt = \int_{\max^{(\mu+1)+} x_\nu}^{\infty} e^{-\zeta t}\, dt = \frac{1}{\zeta} \exp[-\zeta \underset{\nu=1,\ldots,n}{\max{}^{(\mu+1)+}} x_\nu] \\ &\qquad [R(\zeta) > 0] \end{aligned} \right.$$

nous permettra de déduire pour la fonction

$$\frac{1}{\zeta} \exp[-\zeta \underset{\nu=1,\ldots,n}{\max{}^{(\mu+1)+}} x_\nu] \qquad [R(\zeta) > 0;\ \mu = 0, 1, \ldots]$$

une formule analogue à (13) dont nous aurons besoin dans ce qui suit. En substituant le troisième membre de (13), avec $t - x_\nu$ au lieu de x_ν, dans le premier membre de (14), cette intégrale prend la forme

$$\int_0^\infty e^{-\zeta t} S_n^\mu e^{\sum_1^n (t - x_\nu) z_\nu}\, dt,$$

et en supposant que les parties réelles des z_ν [*voir* (9)] soient assez petites pour que l'on ait

$$R\left(\zeta-\sum_1^n z_\nu\right)>0, \qquad \text{sur } S_n^\mu,$$

il est légitime d'intervertir les opérations $\int_0^\infty \ldots dt$ et S_n^μ. Intégrons donc d'abord par rapport à t, en évitant les points $t=x_\nu$ au moyen de passages aux limites $t\to x_\nu\pm 0$; on obtient ainsi la formule

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\zeta}\exp[-\zeta \max\limits_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+} x_\nu] = S_n^\mu\, e^{-\sum_1^n x_\nu z_\nu}\dfrac{1}{\zeta-\sum_1^n z_\nu} \\ \left[R(\zeta)>0;\ R\left(\zeta-\sum_1^n z_\nu\right)>0;\ \mu=0,1,\ldots\right]. \end{cases}$$

En appliquant ensuite la formule (12) pour

$$f(z_1,\ldots,z_n)=e^{-\sum_1^n x_\nu z_\nu}\frac{1}{\zeta-\sum_1^n z_\nu},$$

et en tenant compte de ce que $\max\limits_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(n-\mu)+}x_\nu=\min\limits_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+}x_\nu$, on a la représentation

$$(16\,a)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\zeta}\exp[\zeta \min\limits_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+} x_\nu]-\dfrac{1}{\zeta} = S_n^\mu\, e^{\sum_1^n x_\nu z_\nu}\dfrac{1}{\sum_1^n z_\nu-\zeta} \\ \left[R\left(\sum_1^n z_\nu-\zeta\right)>0\right], \end{cases}$$

et de là,

$$(16\,b)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{m!}[\min\limits_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+} x_\nu]^m = S_n^\mu\, e^{\sum_1^n x_\nu z_\nu}\dfrac{1}{\left(\sum_1^n z_\nu\right)^m} \\ \left[R\left(\sum_1^n z_\nu\right)>0;\ m=1,2,\ldots\right], \end{cases}$$

(13) et (15) peuvent être généralisés de différentes manières; par exemple, on a

$$(17\,a)\qquad \mathrm{s}\min\big[\min_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)} x_\nu;\ \min_{\nu=1,\ldots,n'}{}^{(\mu'+1)} x'_\nu\big] = \mathrm{S}_n^{\mu}(z)\,\mathrm{S}_{n'}^{\mu'}(z')\exp\left[\sum_1^n x_\nu z_\nu + \sum_1^{n'} x'_\nu z'_\nu\right],$$

et de là,

$$(17\,b)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\zeta}\exp[-\zeta\max{}^+[\max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+} x_\nu;\ \max_{\nu=1,\ldots,n'}{}^{(\mu'+1)+} x'_\nu]] \\ \quad = \mathrm{S}_n^{\mu}(z)\,\mathrm{S}_{n'}^{\mu'}\exp\left[-\sum_1^n x_\nu z_\nu - \sum_1^{n'} x'_\nu z'_\nu\right]\dfrac{1}{\zeta-\sum_1^n z_\nu-\sum_1^{n'} z'_\nu} \\ \quad \left[\mathrm{R}(\zeta)>0;\ \mathrm{R}\left(\zeta-\sum_1^n z_\nu-\sum_1^{n'} z'_\nu\right)>0\right]. \end{cases}$$

Ces formules se simplifient dans le cas où le signe d'un x_ν ou le signe d'une différence $x_{\nu_1}-x_{\nu_2}$ est connu; par exemple, nous obtenons de (9), (11), (15) (pour $\mu=0$, $n=2$) la formule

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta}\exp[-\zeta\max{}^+(x_0,x_1)] &= \mathrm{C}_0\,\mathrm{C}_1\,\frac{e^{-x_0z_0-x_1z_1}}{\zeta-z_0-z_1} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\mathrm{C}_0}\int_{\mathrm{C}_1}\frac{e^{-x_0z_0-x_1z_1}}{(\zeta-z_0-z_1)z_0z_1}\,dz_0\,dz_1 \\ &[\mathrm{R}(\zeta-z_0-z_1)>0], \end{aligned}$$

où, dans l'hypothèse $x_1\geqq 0$, l'intégrale $\int_{\mathrm{C}_1}$ est égale au résidu en $z_1=\zeta-z_0$, de sorte que l'intégrale double se réduit à $\mathrm{C}_0\,\dfrac{e^{-x_0z_0-x_1(\zeta-z_0)}}{\zeta-z_0}$. En remplaçant x_1 par $\max\limits_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+}x_\nu$ (qui est $\geqq 0$), nous avons ainsi la formule

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\zeta}\exp[-\zeta\max{}^+(\max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+}x_\nu;\ x_0)] \\ \quad = \mathrm{C}_0\,\dfrac{e^{-x_0z_0}}{\zeta-z_0}\exp[-(\zeta-z_0)\max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+}x_\nu] \\ \quad [\mathrm{R}(\zeta)>0,\mathrm{R}(\zeta-z_0)>0], \end{cases}$$

que nous utiliserons dans la suite.

Substituons maintenant l'expression (15) dans l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}}\exp[-z\max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+}x_\nu]f(z)\frac{dz}{z}\qquad\left(\int_{\mathrm{C}}=\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0}\right),$$

où $f(z)$ est supposé holomorphe et $O\left(\frac{1}{|z|}\right)$ pour $R(z) < c$ (c étant une constante positive) et intervertissons les opérations $\int_C$ et S_n^μ, ce qui est permis puisque toutes les intégrales $(n+1)$-uples convergent absolument; il vient alors

$$S_n^\mu e^{-\sum_1^n x_\nu z_\nu} \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\sum_1^n z_\nu}\,dz \qquad \left[R\left(z-\sum_1^n z_\nu\right) > 0\right],$$

et comme ici, l'intégrale intérieure est égale à $f\left(\sum_1^n z_\nu\right)$, nous obtenons l'identité

$$(19)\quad \begin{cases} S_n^\mu e^{-\sum_1^n x_\nu z_\nu} f\left(\sum_1^n z_\nu\right) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \exp[-z \max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+} x_\nu] f(z)\frac{dz}{z} \\ \qquad\qquad [R(z) > 0]. \end{cases}$$

Grâce à (19), l'expression

$$(20\,a)\quad \begin{cases} S_n^\mu e^{-\sum_1^n x_\nu z_\nu}\left[\dfrac{\sum_1^n z_\nu}{\sum_1^n z_\nu-\zeta} f\left(\sum_1^n z_\nu - \zeta\right) - \dfrac{\zeta}{\sum_1^n z_\nu - \zeta} f(0)\right] \\ \qquad\qquad \left[R\left(\sum_1^n z_\nu - \zeta\right) < c\right], \end{cases}$$

que nous devons considérer maintenant, se réduit à

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \exp[-z \max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+} x_\nu]\left(\frac{z}{z-\zeta}f(z-\zeta) - \frac{\zeta}{z-\zeta}f(0)\right)\frac{dz}{z}$$
$$[R(z) > 0,\ R(z-\zeta) < c],$$

ou, en remplaçant z par $z+\zeta$, à

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{z+\zeta}} \exp[-(\zeta+z)\max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+} x_\nu]\left(f(z) - \frac{\zeta}{z+\zeta}f(0)\right)\frac{dz}{z}$$
$$[R(z+\zeta) > 0,\ R(z) < c \text{ sur } C_{z+\zeta}].$$

Amenons ici $C_{z+\zeta}$ à droite de l'axe imaginaire; alors, la contribution du terme $\frac{\zeta}{z+\zeta}f(0)$ à la valeur de l'intégrale sera nulle, de sorte que nous obtenons l'identité

$$(20\,b)\qquad \exp[-\zeta \max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+}x_\nu]\frac{1}{2\pi i}\int_C \exp[-z \max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)}x_\nu]f(z)\frac{dz}{z}$$
$$= S_n^\mu e^{-\sum_1^n x_\nu z_\nu}\left[\frac{\sum_1^n z_\nu}{\sum_1^n z_\nu-\zeta}f\left(\sum_1^n z_\nu-\zeta\right)-\frac{\zeta}{\sum_1^n z_\nu-\zeta}f(0)\right].$$

En utilisant pour le deuxième facteur du premier membre l'identité (19), nous obtenons enfin la formule

$$(21)\qquad \exp[-\zeta \max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+}x_\nu]S_n^\mu e^{-\sum_1^n x_\nu z_\nu} f\left(\sum_1^n z_\nu\right)$$
$$= S_n^\mu e^{-\sum_1^n x_\nu z_\nu}\left[\frac{\sum_1^n z_\nu}{\sum_1^n z_\nu-\zeta}f\left(\sum_1^n z_\nu-\zeta\right)-\frac{\zeta}{\sum_1^n z_\nu-\zeta}f(0)\right],$$

qui permet de représenter le produit de la fonction (15) et de l'intégrale de Fourier (19) sous forme d'une intégrale de Fourier du même type.

Remplaçons maintenant, dans l'équation (19), μ par $\mu_1(\geqq\mu)$ et x_ν par $-x_\nu$, multiplions-la ensuite par $\mathrm{s}\min\limits_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)}x_\nu$ et utilisons la relation

$$\max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu_1+1)}(-x_\nu) = -\min_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu_1+1)}x_\nu;$$

il vient alors

$$\mathrm{s}\min_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)}x_\nu\, S_n^{\mu_1} e^{\sum_1^n x_\nu z_\nu} f\left(\sum_1^n z_\nu\right)$$
$$= \mathrm{s}\min_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)}x_\nu \frac{1}{2\pi i}\int_C \exp[-z(-\min_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu_1+1)}x_\nu)^+]f(z)\frac{dz}{z}$$
$$(\mu_1\geqq\mu).$$

Ici, l'intégrale qui figure dans le deuxième membre peut évidemment être remplacée par

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{dz}{z}=f(0),$$

de sorte qu'à l'aide de (13), la dernière formule prend la forme

$$(22)\quad \begin{cases} \underset{\nu=1,\ldots,n}{\mathrm{s}\,\min}{}^{(\mu+1)} x_\nu\, S_n^{\mu_1} e^{\sum\limits_1^n x_\nu z_\nu} f\left(\sum_1^n z_\nu\right) = S_n^{\mu} e^{\sum\limits_1^n x_\nu z_\nu} f(0) \\ \left[\mu_1 \geqq \mu \geqq 0;\ x_\nu \neq 0,\ \nu = 1, \ldots, n;\ f(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right) \text{ pour } R(z) < c\right]. \end{cases}$$

Les formules (21) et (22) seront généralisées dans le Chapitre suivant.

2. Définition de l'opérateur $T_n^{\lambda,\mu}$; relations entre $T_n^{\lambda,\mu}$ et les autres opérateurs. — Soit maintenant

$$f_\lambda(z_\nu;\ \zeta_{\nu'}) = f_\lambda(z_1, \ldots, z_n;\ \zeta_1, \ldots, \zeta_\lambda)$$

une fonction analytique de deux systèmes de variables complexes z_ν et $\zeta_{\nu'}$, que nous supposons en outre symétrique par rapport aux $\zeta_{\nu'}$ et telle que toutes les intégrales n-uples qui figurent ci-après, existent; l'opérateur $T_n^{\lambda,\mu}$ qui contient des termes de tous les ordres compris entre λ et μ inclus, sera défini par l'équation

$$(23)\quad \begin{cases} T_n^{\lambda,\mu} f_\lambda(z_1, \ldots, z_n;\ z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}) \\ \quad = \sum\limits_{1',\ldots,\lambda'=1}^{n} C'_{1'} \ldots C'_{\lambda'} S_{n-\lambda}^{\mu-\lambda}[\nu \neq 1', \ldots, \lambda'] f_\lambda(z_1, \ldots, z_n;\ z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}) \\ \quad = \sum\limits_{1',\ldots,\lambda'=1}^{n} C'_{1'} \ldots C'_{\lambda'} \sum\limits_{\tau=0}^{\mu-\lambda} R_{n-\lambda}^{\tau}[\nu \neq 1', \ldots, \lambda'] f_\lambda(z_1, \ldots, z_n;\ z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}) \\ \qquad (0 \leqq \lambda \leqq \mu \leqq n;\ T_0^{0,\mu} = 1;\ T_n^{\lambda,\mu} = 0 \text{ pour } n < \lambda \text{ ou } \mu < \lambda), \end{cases}$$

où les opérateurs $R_{n-\lambda}^{\tau}$ et $S_{n-\lambda}^{\mu-\lambda}$ se rapportent aux $n - \lambda$ indices, différents de $1', \ldots, \lambda'$, de l'ensemble $1, \ldots, n$.

Ces opérateurs satisfont à plusieurs identités que nous établirons maintenant.

Pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \mu$, le deuxième membre de (23) se confond respectivement avec (11) et (10), si bien que nous avons

$$(24\,a)\qquad T_n^{0,\mu} = S_n^{\mu},$$

$$(24\,b)\qquad T_n^{\mu,\mu} = R_n^{\mu}.$$

Ensuite, nous tirons de (22) et (10) la relation

$$\begin{aligned}
&(T_n^{\lambda,\mu} - T_n^{\lambda,\mu-1}) f_\lambda(z_\nu;\, z_{\nu'}) \\
&= \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{n} C'_{1'} \ldots C'_{\lambda'} R_{n-\lambda}^{\mu-\lambda} f_\lambda(z_\nu;\, z_{\nu'}) \\
&= \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{n} C'_{1'} \ldots C'_{\lambda'} \sum_{1'',\ldots,(\mu-\lambda)''=1}^{n\,(\lambda)} C'_{1''} \ldots C'_{(\mu-\lambda)''} \prod_{1}^{n\,(\mu)} C_\nu f_\lambda(z_\nu;\, z_{1'},\, \ldots,\, z_{\lambda'}) \\
&= \sum_{1''',\ldots,\mu'''=1}^{n} C'_{1'''} \ldots C'_{\mu'''} \prod_{\nu=1}^{n\,(\mu)} C_\nu \sum_{1',\ldots,\lambda'=1'''}^{\mu'''} f_\nu(z_\nu;\, z_{1'},\, \ldots,\, z_{\lambda'}),
\end{aligned}$$

et comme le dernier opérateur est égal à $T_n^{\mu,\mu}$, nous obtenons

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
&T_n^{\lambda,\mu-1} f_\lambda(z_\nu;\, z_{\nu'}) \\
&\quad = T_n^{\lambda,\mu} f_\lambda(z_\nu;\, z_{\nu'}) - T_n^{\mu,\mu} \sum_{1'',\ldots,\lambda''=1'}^{\mu'} f_\lambda(z_1,\, \ldots,\, z_n;\, z_{1''},\, \ldots,\, z_{\lambda''}) \\
&\qquad\qquad (\lambda = 0,\, \ldots,\, \mu),
\end{aligned}\right.$$

où, dans le dernier terme, $1', \ldots, \mu'$ sont les indices des variables permutées par $T_n^{\mu,\mu}$.

Nous avons donc la relation suivante entre des opérateurs

$$(26\,a)\qquad T_n^{\lambda,\mu-1} = T_n^{\lambda,\mu} - T_n^{\mu,\mu} \sum_{1'',\ldots,\lambda''=1'}^{\mu'};$$

en itérant cette formule on a ensuite

$$(26\,b)\quad \left\{\begin{aligned}
&T_n^{\lambda,\varkappa} = T_n^{\lambda,\mu} - \sum_{\tau=\varkappa+1}^{\mu} (-1)^{\tau-\varkappa-1} \binom{\tau-1-\lambda}{\varkappa-\lambda} T_n^{\tau,\mu} \sum_{1'',\ldots,\lambda''=1'}^{\tau'} \\
&\qquad (0 \leqq \lambda \leqq \varkappa \leqq \mu;\; n \geqq 1),
\end{aligned}\right.$$

et de là,

$$(26\,c)\quad \left\{\begin{aligned}
&T_n^{\lambda,\varkappa} - T_n^{\lambda,\varkappa-1} = \sum_{\tau=\varkappa}^{\mu} (-1)^{\tau-\varkappa} \binom{\tau-\lambda}{\varkappa-\lambda} T_n^{\tau,\mu} \sum_{1'',\ldots,\lambda''=1'}^{\tau'} \\
&\qquad (0 \leqq \lambda \leqq \varkappa \leqq \mu;\; n \geqq 1).
\end{aligned}\right.$$

Pour $\lambda = 0$, on a, en vertu de (24 a) et (11), $T_n^{0,\varkappa} - T_n^{0,\varkappa-1} = R_n^\varkappa$ [*voir* (10)]; (26 c) prend alors la forme

$$(26\,d)\qquad R_n^\varkappa f(z_1,\, \ldots,\, z_n) = \sum_{\tau=\varkappa}^{\mu} (-1)^{\tau-\varkappa} \binom{\tau}{\varkappa} T_n^{\tau,\mu} f(z_1,\, \ldots,\, z_n),$$

et s'applique à une fonction f d'un seul système de variables qui ne sont pas permutées par les $T_n^{\tau,\mu}$.

Nous exprimerons maintenant les opérateurs R, S, T en fonction de C_n et C'_n. En groupant, dans (10), les termes où figurent respectivement C_n et C'_n, on a

$$R_n^\lambda = \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{n-1} C'_{1'}\ldots C'_{\lambda'}\prod_1^{n-1}{}^{(\lambda)} C_\nu \times C_n + \sum_{1',\ldots,(\lambda-1)'=1}^{n-1} C'_{1'}\ldots C'_{(\lambda-1)}\prod_1^{n-1}{}^{(\lambda-1)} C_\nu \times C'_n,$$

ou

$$R_n^\lambda = R_{n-1}^\lambda C_n + R_{n-1}^{\lambda-1} C'_n. \tag{27}$$

Grâce à cette formule, on a pour l'opérateur S_n^μ [équ. (11)] la relation

$$S_n^\mu = \sum_{\lambda=0}^{\mu} R_n^\lambda = C_n \sum_{\lambda=0}^{\mu} R_{n-1}^\lambda + C'_n \sum_{\lambda=1}^{\mu} R_{n-1}^{\lambda-1},$$

ou

$$S_n^\mu = S_{n-1}^\mu C_n + S_{n-1}^{\mu-1} C'_n. \tag{28}$$

En substituant la formule (28) dans le deuxième membre de (23), on obtient

$$\begin{aligned} T_n^{\lambda,\mu} f_\lambda(z_\nu;\, z_{\nu'}) = {} & T_{n-1}^{\lambda-1,\mu-1} C'_n f_\lambda(z_\nu;\, z_{1'},\, \ldots,\, z_{(\lambda-1)'},\, z_n) \\ & + (T_{n-1}^{\lambda,\mu} C_n + T_{n-1}^{\lambda,\mu-1} C'_n) f_\lambda(z_\nu;\, z_{1'},\, \ldots,\, z_{\lambda'}), \end{aligned}$$

et en utilisant ensuite pour $T_{n-1}^{\lambda-1,\mu-1}$ et $T_{n-1}^{\lambda,\mu-1}$ la formule (25), on a

$$\begin{aligned} T_n^{\lambda,\mu} f_\lambda(z_\nu;\, z_{\nu'}) = {} & T_{n-1}^{\lambda-1,\mu} C'_n f_\lambda(z_\nu;\, z_{1'},\, \ldots,\, z_{(\lambda-1)'},\, z_n) \\ & + T_{n-1}^{\lambda,\mu} (C_n + C'_n) f_\lambda(z_\nu;\, z_{1'},\, \ldots,\, z_{\lambda'}) \\ & - T_{n-1}^{\mu,\mu} C'_n \sum_{1'',\ldots(\lambda-1)''=1'}^{\mu'} f_\lambda(z_\nu;\, z_{1''},\, \ldots,\, z_{(\lambda-1)''},\, z_n) \\ & - T_{n-1}^{\mu,\mu} C'_n \sum_{1'',\ldots,\lambda''=1'}^{\mu'} f_\lambda(z_\nu;\, z_{1''},\, \ldots,\, z_{\lambda''}). \end{aligned}$$

Les deux sommes qui figurent sous le signe $T_{n-1}^{\mu,\mu} C'_n$, peuvent être réunies sous la forme

$$\sum_{1'',\ldots,\lambda''=1'}^{(\mu+1)'} f_\lambda(z_\nu;\, z_{1''},\, \ldots,\, z_{\nu''}),$$

où $1', \ldots, \mu'$ sont toujours les μ indices des $z_{\nu'}$ qui sont permutés par $T_{n-1}^{\mu,\mu}$, et où l'on a posé $(\mu+1)' = n$; ainsi, on obtient la formule

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} T_n^{\lambda,\mu} f_\lambda(z_\nu;\, z_{\nu'}) = {} & T_{n-1}^{\lambda-1,\mu} C'_n f_\lambda(z_\nu;\, z_{1'}, \ldots, z_{(\lambda-1)'}, z_n) \\ & - T_{n-1}^{\mu,\mu} C'_n \sum_{1'', \ldots, \lambda''=1'}^{(\mu+1)'} f_\lambda(z_\nu;\, z_{1''}, \ldots, z_{\lambda''}) \\ & + T_{n-1}^{\lambda,\mu} (C_n + C'_n) f_\lambda(z_\nu;\, z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}) \\ & [(\mu+1)' = n]. \end{aligned}\right.$$

Admettons que les $\mu+1$ fonctions

$$(30)\qquad f_\lambda(z_1, \ldots, z_n;\, \zeta_1, \ldots, \zeta_\lambda) \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, \mu),$$

aient les propriétés mentionnées au début de ce Chapitre; en leur associant une $(\mu+2)^{\text{ième}}$ fonction $f_{\mu+1}$ définie par

$$(31)\quad f_{\mu+1}(z_1, \ldots, z_n;\, \zeta_1, \ldots, \zeta_{\mu+1}) = -\sum_{\lambda=0}^{\mu} \sum_{1', \ldots, \lambda'=1}^{\mu+1} f_\lambda(z_1, \ldots, z_n;\, \zeta_{1'}, \ldots, \zeta_{\lambda'}),$$

on voit que celle-ci a encore les propriétés admises pour les fonctions (30).

En sommant dans (29) depuis $\lambda = 0$ jusqu'à $\lambda = \mu$, on obtient, à l'aide de la notation (31), la relation

$$(32)\quad \begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^{\mu} T_n^{\lambda,\mu} f_\lambda(z_\nu;\, z_{\nu'}) = \sum_{\lambda=0}^{\mu} T_{n-1}^{\lambda,\mu} [& (C_n + C'_n) f_\lambda(z_1, \ldots, z_n;\, z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}) \\ & + C'_n f_{\lambda+1}(z_1, \ldots, z_n;\, z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}, z_n)], \end{aligned}$$

où $T_{n-1}^{\lambda,\mu}$ se rapporte aux indices $1, \ldots, n-1$ et où $C_n + C'_n$ signifie, en vertu de (9), le résidu en $z_n = 0$; en écrivant ensuite $-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \ldots \frac{d\zeta}{\zeta}$ au lieu de C'_n; on a

$$(33)\quad \begin{aligned} & \sum_{\lambda=0}^{\mu} T_n^{\lambda,\mu} f_\lambda(z_\nu;\, z_{\nu'}) \\ & = \sum_{\lambda=0}^{\mu} T_{n-1}^{\lambda,\mu} \Bigg[f_\lambda(z_1, \ldots, z_{n-1}, 0;\, z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}) \\ & \qquad - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} f_{\lambda+1}(z_1, \ldots, z_{n-1}, \zeta;\, z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \Bigg]. \end{aligned}$$

Ces formules permettent de mettre en évidence, dans l'expression $\sum_{\lambda=0}^{\mu} T_n^{\lambda,\mu} f_\lambda$, les intégrations par rapport à une variable particulière z_n; en les itérant, on pourrait transformer le premier membre de (32) en une expression de la forme $\sum_{\lambda=0}^{\mu} T_{n-a}^{\lambda,\mu} f_{\lambda,a}(z_\nu;\, z_{\nu'})$ $(a = 1, 2, \ldots)$.

A l'aide des opérateurs

$$(34) \qquad K_n = C_n + C'_n = \frac{1}{2\pi i}\oint \cdots \frac{dz_n}{z_n} \qquad \text{ou} \qquad K_\xi = C_\xi + C'_\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint \cdots \frac{d\xi}{\xi}$$

et

$$(35) \qquad (\lambda : \lambda+1;\, \xi) f_\lambda(z_1, \ldots, z_n;\, z_1, \ldots, z_\lambda) = f_{\lambda+1}(z_1, \ldots, z_n;\, z_1, \ldots, z_\lambda, \xi),$$

(32) ou (33) prennent la forme plus succincte

$$(36) \qquad \sum_{\lambda=0}^{\mu} T_n^{\lambda,\mu} f_\lambda(z_\nu;\, z_{\nu'})$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{\mu} T_{n-1}^{\lambda,\mu}\left[K_n + C'_n(\lambda : \lambda+1;\, z_n)\right] f_\lambda(z_1, \ldots, z_n;\, z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}).$$

3. Transformation des produits des fonctions $\exp\left[-\zeta \max_{\nu=1,\ldots,n}^{(\mu+1)+} x_\nu\right]$ **et** $s \min_{\nu=1,\ldots,n}^{(\mu+1)} x_\nu$ **par des sommes d'intégrales de Fourier, du type** $T_n^{\lambda,\mu}$, **en des sommes d'intégrales de Fourier du même type.** — Désignons par

$$(37) \qquad f(z_1, \ldots, z_\lambda;\, z),$$

une fonction symétrique de $z_1, \ldots, z_\lambda$ qui soit holomorphe et $O\left(\frac{1}{|z|}\right)$ dans le domaine

$$(38) \qquad R(z) < c; \qquad R(z_\nu) < c \qquad (\nu = 1, \ldots, \lambda;\ c > 0),$$

de sorte que toutes les intégrales contenues dans l'expression

$$T_n^{\lambda,\mu} e^{-\sum_1^n x_\nu z_\nu} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\, \sum_1^n z_\nu\right)$$

seront absolument convergentes. Nous nous proposons de démontrer la formule

$$
(39)\left\{
\begin{aligned}
&\exp[-\zeta \max_{\nu=1,\ldots,n}(\mu+1)+x_\nu]\,\mathrm{T}_n^{\lambda,\mu}\, e^{-\sum\limits_1^n x_\nu z_\nu} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^n z_\nu\right)\\
&= \mathrm{T}_n^{\lambda,\mu}\, e^{-\sum\limits_1^n x_\nu z_\nu}\left[\frac{\sum\limits_1^n z_\nu - \sum\limits_{1'}^{\lambda'} z_\nu}{\sum\limits_1^n z_\nu - \sum\limits_{1'}^{\lambda'} z_\nu - \zeta} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^n z_\nu - \zeta\right)\right.\\
&\qquad\left. - \frac{\zeta}{\sum\limits_1^n z_\nu - \sum\limits_{1'}^{\lambda'} z_\nu - \zeta} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_{1'}^{\lambda'} z_\nu\right)\right]\\
&\qquad\qquad [\mathrm{R}(\zeta) > -c],
\end{aligned}
\right.
$$

qui est une généralisation de (21).

En vertu de la définition des $\mathrm{T}_n^{\lambda,\mu}$ [équ. (23)], les deux membres de (39) sont respectivement égaux à

$$
(40\,a)\qquad \exp[-\zeta \max_{\nu=1,\ldots,n}(\mu+1)+x_\nu] \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{n} \mathrm{C}'_{1'}\ldots \mathrm{C}'_{\lambda'} \mathrm{S}_{n-\lambda}^{\mu-\lambda}[\nu \neq 1', \ldots, \lambda']
\times e^{-\sum\limits_1^n x_\nu z_\nu} f\left(z_{1''}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^n z_\nu\right),
$$

et à

$$
\begin{aligned}
(40\,b)\qquad &\sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{n} \mathrm{C}'_{1'}\ldots \mathrm{C}'_{\lambda'} \mathrm{S}_{n-\lambda}^{\mu-\lambda}[\nu \neq 1', \ldots, \lambda']\, e^{-\sum\limits_1^n x_\nu z_\nu}\\
&\times\left[\frac{\sum\limits_1^n z_\nu - \sum\limits_{1'}^{\lambda'} z_\nu}{\sum\limits_1^n z_\nu - \sum\limits_{1'}^{\lambda'} z_\nu - \zeta} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^n z_\nu - \zeta\right)\right.\\
&\qquad\left. - \frac{\zeta}{\sum\limits_1^n z_\nu - \sum\limits_{1'}^{\lambda'} z_\nu - \zeta} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_{1'}^{\lambda'} z_\nu\right)\right].
\end{aligned}
$$

Pour transformer ces deux expressions, appliquons les formules (19) et (20b) aux indices, différents de $1'$, ..., λ', de la suite 1, ..., n, et remplaçons-y μ, n, $f\left(\sum_1^n z_\nu\right)$ respectivement par $\mu-\lambda$, $n-\lambda$, $f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_{1'}^{\lambda'} z_\nu + \sum_1^{n\,(\lambda)} z_\nu\right)$; ainsi, (40$a$) et (40$b$) se réduisent respectivement à

$$(41\,a)\qquad \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{n} \exp[-\zeta \max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)}+x_\nu]\, C'_1 \ldots C'_\lambda$$
$$\times e^{-\sum_{\nu=1}^{\lambda} x_{\nu'} z_\nu} \frac{1}{2\pi i}\int_C \exp[-z \max_{\nu\neq 1',\ldots,\lambda'}{}^{(\mu-\lambda+1)}+x_\nu]$$
$$\times f\left(z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_1^\lambda z_\nu + z\right)\frac{dz}{z},$$

et à

$$(41\,b)\qquad \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{n} \exp[-\zeta \max_{\nu\neq 1',\ldots,\lambda'}{}^{(\mu-\lambda+1)}+x_\nu]\, C'_1 \ldots C_\lambda$$
$$\times e^{-\sum_{\nu=1}^{\lambda} x_{\nu'} z_\nu} \frac{1}{2\pi i}\int_C \exp[-z \max_{\nu\neq 1',\ldots,\lambda'}{}^{(\mu-\lambda+1)}+x_\nu]$$
$$\times f\left(z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_1^\lambda z_\nu + z\right)\frac{dz}{z}.$$

Remplaçons ici la variable d'intégration z par $z-\sum_1^\lambda z_\nu$ et intervertissons $\int_C \ldots dz$ avec $C'_1 \ldots C'_\lambda$; l'intégrale qui figure dans (41 a) et (41 b) prend alors la forme

$$(42\,a)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C \left[C'_1 \ldots C'_\lambda \exp\left[\sum_{\nu=1}^{\lambda} z_\nu (\max_{\nu\neq 1',\ldots,\lambda'}{}^{(\mu-\lambda+1)}+x_\nu - x_{\nu'})\right] \right.$$
$$\left. \times \exp[-z \max_{\nu\neq 1',\ldots,\lambda'}{}^{(\mu-\lambda+1)}+x_\nu] \frac{f(z_1, \ldots, z_\lambda; z)}{z-\sum_1^\lambda z_\nu} \right] dz.$$

Il faut maintenant distinguer deux cas :

a. Tous les λ nombres $x_{1'}, \ldots, x_{\lambda'}$ sont $> \max\limits_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+} x_\nu$, de sorte qu'on a

$$\max_{\nu\neq 1',\ldots,\lambda'}{}^{(\mu-\lambda+1)+} x_\nu = \max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+} x_\nu,$$

et que les termes correspondants de (41 *a*) et (41 *b*) coïncident.

b. Pour au moins un de ces λ nombres, que nous désignerons par $x_{1'}$, la relation

$$x_{1'} \leqq \max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+} x_\nu$$

a lieu ; on a alors

$$\max_{\nu\neq 1',\ldots,\lambda'}{}^{(\mu-\lambda+1)+} x_\nu \geqq \max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+} x_\nu \geqq x_{1'}$$

de sorte que la fonction à intégrer dans (42 *a*), considérée en tant que fonction de z_1, est holomorphe et $O\left(\frac{1}{|z_1|^2}\right)$ à gauche du chemin C'_1. Donc, l'opérateur C'_1 annule (42 *a*), si bien que les termes correspondants de (41 *a*) et (41 *b*) sont encore égaux ; ceci achève notre démonstration.

En outre, on vérifie sans peine que (40 *a*) et (40 *b*) sont égaux dans le cas où f [(37)] ne dépend pas de z; donc, (39) reste valable en admettant que f est symétrique en $z_1, \ldots, z_\lambda$ ainsi qu'holomorphe, borné et de la forme

$$(42\,b)\qquad \left\{\begin{array}{l} f(z_1, \ldots, z_\lambda; z) = f_0(z_1, \ldots, z_\lambda) + O\left(\frac{1}{|z|}\right) \\ \quad\text{pour}\quad R(z) < c, \qquad R(z_\nu) < c \\ \qquad\qquad (\nu = 1, \ldots, \lambda). \end{array}\right.$$

Parfois nous utiliserons la formule (39) sous la forme

$$(43\,a)\qquad \exp[-\zeta \max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+} x_\nu]\, T_n^{\lambda,\mu}\, e^{-\sum\limits_1 x_\nu z_\nu} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^n z_\nu\right)$$

$$= T_n^{\lambda,\mu}\, e^{-\sum\limits_1^n x_\nu z_\nu} [f^{[\zeta]}(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; z)]_{z=\sum\limits_1^n z_\nu},$$

où l'on a posé

$$(43\,b)\quad \left\{\begin{aligned} & f^{[\zeta]}(z_1, \ldots, z_\lambda;\, z) \\ & = \frac{1}{z - \sum_1^\lambda z_\nu - \zeta}\left[\left(z - \sum_1^\lambda z_\nu\right) f(z_1, \ldots, z_\lambda;\, z - \zeta)\right. \\ & \qquad\qquad \left. - \zeta f\left(z_1, \ldots, z_\lambda;\, \sum_1^\lambda z_\nu\right)\right] \\ & [\mathrm{R}(\zeta) > -c]. \end{aligned}\right.$$

On voit aisément que les transformations $(43\,b)$ forment un groupe abélien; donc

$$(44)\qquad (f^{[\zeta_1]})^{[\zeta_2]} = (f^{[\zeta_2]})^{[\zeta_1]} = f^{[\zeta_1+\zeta_2]}.$$

La formule

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} & \mathrm{s}\min_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)} x_\nu\, \mathrm{T}_n^{\lambda,\mu_1} e^{\sum_1^n x_\nu z_\nu} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\, \sum_1^n z_\nu\right) \\ & = \mathrm{T}_n^{\lambda,\mu} e^{\sum_1^n x_\nu z_\nu} f\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\, \sum_{1'}^{\lambda'} z_\nu\right) \\ & (\mu_1 \geqq \mu \geqq 0;\ x_\nu \neq 0,\ \nu = 1, \ldots, n), \end{aligned}\right.$$

généralisation de (22) qui est valable dans les hypothèses $(42\,b)$ admises ici pour f, se démontre à l'aide de (19) et (22) de la même manière que cela a été fait pour (39).

4. Transformation de deux sommes d'intégrales multiples en des sommes d'intégrales de Fourier, respectivement des types $\mathrm{T}_n^{\lambda,\mu}$ et $\mathrm{T}_n^{\lambda,\mu}\mathrm{C}_{n+1}$. — 1° Comme première application des formules (33) et $(43\,a)$, $(43\,b)$, transformons l'expression

$$(46)\quad \sum_{\lambda=0}^{\mu} \mathrm{T}_{n+1}^{\lambda,\mu} e^{-\sum_1^n x_\nu z_\nu} f_\lambda\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\, \sum_1^{n+1} z_\nu\right) \exp[-z_{n+1} \max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+} x_\nu],$$

les $f_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda;\, z)$ étant supposés symétriques en $z_1, \ldots, z_\lambda$ ainsi qu'holomorphes et $\mathrm{O}\left(\frac{1}{|z|}\right)$ dans le domaine (38), en une somme d'intégrales de Fourier relatives aux n variables réelles $x_1, \ldots, x_n$.

A l'aide de (33), l'expression (46) se transforme en

$$(47)\quad \sum_{\lambda=0}^{\mu} \mathrm{T}_n^{\lambda,\mu} e^{-\sum_1^n x_\nu z_\nu} \left[f_\lambda\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\ \sum_1^n z_\nu\right) - \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} f_{\lambda+1}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\ \sum_1^n z_\nu+\zeta\right) \times \exp[-\zeta \max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+} x_\nu]\frac{d\zeta}{\zeta}\right],$$

où $f_{\mu+1}$ est donné, en vertu de (31), par la formule

$$(48)\quad f_{\mu+1}(z_1, \ldots, z_{\mu+1};\ z) = -\sum_{\lambda=0}^{\mu}\ \sum_{1', \ldots, \lambda'=1}^{\mu+1} f_\lambda(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\ z).$$

En intervertissant ensuite dans (47) les opérations $\mathrm{T}_n^{\lambda,\mu}$ et $\int \ldots d\zeta$, et en utilisant la formule (43 a), (43 b), nous obtenons l'identité

$$(49)\quad \sum_{\lambda=0}^{\mu} \mathrm{T}_{n+1}^{\lambda,\mu} e^{-\sum_1^n x_\nu z_\nu} f_\lambda\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\sum_1^{n+1} z_\nu\right)\exp[-z_{n+1}\max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+} x_\nu]$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{\mu} \mathrm{T}_n^{\lambda,\mu} e^{-\sum_1^n x_\nu z_\nu} \Bigg[f_\lambda\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\ \sum_1^n z_\nu\right) - \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \frac{1}{\sum_1^n z_\nu - \sum_{1'}^{\lambda'} z_\nu - \zeta}$$
$$\times\left[\left(\sum_1^n z_\nu - \sum_{1'}^{\lambda'} z_\nu\right) f_{\lambda+1}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\ \sum_1^n z_\nu\right) - \zeta f_{\lambda+1}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\ \sum_{1'}^{\lambda'} z_\nu+\zeta\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta}\Bigg].$$

2° Représentons maintenant l'expression

$$(50)\quad \sum_{\lambda=0}^{\mu} \mathrm{T}_{n+1}^{\lambda,\mu} \mathrm{C}_{\zeta_{n+1}} e^{-\sum_1^n x_\nu z_\nu} \varphi(z_{n+1}, z_{n+1}+\zeta_{n+1}) f_\lambda\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\ \sum_1^{n+1} z_\nu + \zeta_{n+1}\right)$$
$$\times \exp[-(z_{n+1}+\zeta_{n+1})\max{}^{+}[\max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+} x_\nu;\ y_n]],$$

f_λ satisfaisant aux hypothèses admises précédemment, et $\varphi(z, \zeta)$ étant holomorphe et borné pour

$$(51) \qquad |R(z)| < \varepsilon, \qquad R(\zeta) > -\varepsilon \qquad (\varepsilon > 0),$$

sous forme d'une somme d'intégrales de Fourier relatives aux variables réelles $x_1, \ldots, x_n, y_n$.

Appliquons d'abord la formule (36) et écrivons respectivement C'_ξ, ξ, C_ζ, ζ au lieu de C'_{n+1}, z_{n+1}, $C_{\zeta_{n+1}}$, ζ_{n+1} ; il vient alors

$$(52) \qquad \begin{aligned} &\sum_{\lambda=0}^{\mu} T_n^{\lambda,\mu} e^{-\sum_1^n x_\nu z_\nu} C_\zeta[K_\xi + C'_\xi(\lambda:\lambda+1;\xi)]\varphi(\xi, \xi+\zeta) \\ &\quad \times f_\lambda\left(z_{1'}; \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^n z_\nu + \xi + \zeta\right) \\ &\quad \times \exp[-(\xi+\zeta)\max{}^+[\max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+} x_\nu; y_n]], \end{aligned}$$

où conformément à (31), $f_{\mu+1}$ est donné par la formule (48).

En remplaçant ici ζ par $\zeta - \xi$, on a ensuite

$$(53) \qquad \begin{aligned} &\sum_{\lambda=0}^{\mu} T_n^{\lambda,\mu} e^{-\sum_1^n x_\nu z_\nu} [K_\xi + C'_\xi(\lambda:\lambda+1;\xi)]\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0}\frac{d\zeta}{\zeta-\xi}\varphi(\xi,\zeta) \\ &\quad \times f_\lambda\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^n z_\nu + \zeta\right)\exp[-\zeta[\max{}^+ \max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)} x_\nu; y_n]]. \end{aligned}$$

Pour la fonction $\exp[\ldots]$ qui figure ici, on obtient à l'aide de (18) où x_0, z_0, C_0 seront remplacés respectivement par y_n, ζ_n, C_{ζ_n}, la représentation

$$(54) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\exp[-\zeta\max{}^+[\max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+} x_\nu; y_n]] \\ &\quad = \zeta C_{\zeta_n}\exp[-(\zeta-\zeta_n)\max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)} x_\nu - \zeta_n y_n]\frac{1}{\zeta-\zeta_n} \\ &\qquad\qquad [R(\zeta-\zeta_n) > 0], \end{aligned} \right.$$

à l'aide de laquelle (53) se transforme en

$$(55) \qquad \begin{aligned} &\sum_{\lambda=0}^{\mu} T_n^{\lambda,\mu} C_{\zeta_n} e^{-\sum_1^n x_\nu z_\nu - y_n\zeta_n} [K_\xi + C'_\xi(\lambda:\lambda+1;\xi)] \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0}\frac{d\zeta}{\zeta-\xi}\varphi(\xi,\zeta)\frac{\zeta}{\zeta-\zeta_n} f_\lambda\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^n z_\nu + \zeta\right) \\ &\quad \times \exp[-(\zeta-\zeta_n)\max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+} x_\nu]. \end{aligned}$$

Appliquons ensuite la formule (43 a) où ζ sera remplacé par $\zeta - \zeta_n$ et notons que [*voir* (35) et (43 b)]

$$[(\lambda:\lambda+1\,;\,\xi) f_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda;\, z)]^{[\zeta]} = (\lambda:\lambda+1\,;\,\xi) f_\lambda^{[\zeta]}(z_1, \ldots, z_\lambda;\, z).$$

En vertu de (43 a), on est en droit de remplacer le produit des trois derniers facteurs de (55) par

$$(56)\qquad \frac{\zeta}{\zeta-\zeta_n}\Big[f_\lambda^{[\zeta-\zeta_n]}(z_1, \ldots, z_\lambda;\, z+\zeta)\Big]_{z=\sum_1^n z_\nu}$$

$$= \frac{\zeta}{\zeta-\zeta_n}\,\frac{1}{\sum_1^n z_\nu + \zeta_n - \sum_1^\lambda z_\nu - \zeta}$$

$$\times\left[\left(\sum_1^n z_\nu - \sum_1^\lambda z_\nu\right) f_\lambda\left(z_1, \ldots, z_\lambda;\, \sum_1^n z_\nu + \zeta_n\right)\right.$$

$$\left. - (\zeta-\zeta_n) f_\lambda\left(z_1, \ldots, z_\lambda;\, \sum_1^\lambda z_\nu + \zeta\right)\right]$$

$$= \left(\frac{\zeta_n}{\zeta-\zeta_n} + \frac{\sum_1^n z_\nu + \zeta_n - \sum_1^\lambda z_\nu}{\sum_1^n z_\nu + \zeta_n - \sum_1^\lambda z_\nu - \zeta}\right) f_\lambda\left(z_1, \ldots, z_\lambda;\, \sum_1^n z_\nu + \zeta_n\right)$$

$$- \frac{\zeta}{\sum_1^n z_\nu + \zeta_n - \sum_1^\lambda z_\nu - \zeta}\, f_\lambda\left(z_1, \ldots, z_\lambda;\, \sum_1^\lambda z_\nu + \zeta\right)$$

$$= \frac{\zeta_n}{\zeta-\zeta_n} f_\lambda\left(z_1, \ldots, z_\lambda;\, \sum_1^n z_\nu + \zeta_n\right) + \Big[f_\lambda^{[\zeta]}(z_1, \ldots, z_\lambda;\, z+\zeta)\Big]_{z=\sum_1^n z_\nu + \zeta_n}.$$

Le premier terme du dernier membre est annulé par l'opération $\int_{-i\infty}^{i\infty} \ldots d\zeta$, car en raison des hypothèses admises sur $\varphi(\xi, \zeta)$, on a

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\varphi(\xi, \zeta)\, d\zeta}{(\zeta-\xi)(\zeta-\zeta_n)} = 0 \qquad [\text{pour } R(\zeta-\xi) > 0,\ R(\zeta-\zeta_n) > 0].$$

On obtient donc l'identité

$$(58)\quad \sum_{\lambda=0}^{\mu} \mathrm{T}_{n+1}^{\lambda,\mu}\, \mathrm{C}_{\zeta_{n+1}}\, e^{-\sum_1^n x_\nu z_\nu} \varphi(z_{n+1}, z_{n+1}+\zeta_{n+1}) f_\lambda\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^{n+1} z_\nu + \zeta_{n+1}\right)$$

$$\times \exp[-(z_{n+1}+\zeta_{n+1})\max{}^+[\max_{\nu=1,\ldots,n}{}^{(\mu+1)+} x_\nu;\, y_n]]$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\mu} \mathrm{T}_n^{\lambda,\mu}\, \mathrm{C}_{\zeta_n}\, e^{-\sum_1^n x_\nu z_\nu - y_n \zeta_n} \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} [\mathrm{K}_\xi + \mathrm{C}'_\xi(\lambda:\lambda+1;\xi)] \frac{\varphi(\xi,\zeta)}{\zeta-\xi}$$

$$\times \left[f_\lambda^{[\zeta]}(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; z+\zeta)\right]_{z=\sum_1^n z_\nu + \zeta_n} d\zeta.$$

où [équ. (34), (35), (43 b)]

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned}
&[\mathrm{K}_\xi + \mathrm{C}'_\xi(\lambda:\lambda+1;\xi)] \frac{\varphi(\xi,\zeta)}{\zeta-\xi}\left[f_\lambda^{[\zeta]}(z_1, \ldots, z_\lambda; z+\zeta)\right]_{z=\sum_1^n z_\nu+\zeta_n} \\
&\quad = \frac{1}{\zeta}\, \frac{\varphi(0,\zeta)}{\sum_1^n z_\nu + \zeta_n - \sum_1^\lambda z_\nu - \zeta} \\
&\quad\quad \times \left[\left(\sum_1^n z_\nu + \zeta_n - \sum_1^\lambda z_\nu\right) f_\lambda\left(z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_1^n z_\nu + \zeta_n\right)\right. \\
&\quad\quad\quad \left. - \zeta f_\lambda\left(z_1, \ldots, z_\lambda; \sum_1^\lambda z_\nu + \zeta\right)\right] \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \frac{1}{\zeta-\xi}\, \frac{\varphi(\xi,\zeta)}{\sum_1^n z_\nu + \zeta_n - \sum_1^\lambda z_\nu - \zeta} \\
&\quad\quad \times \left[\left(\sum_1^n z_\nu + \zeta_n - \sum_1^\lambda z_\nu\right) f_{\lambda+1}\left(z_1, \ldots, z_\lambda, \xi; \sum_1^n z_\nu + \zeta_n\right)\right. \\
&\quad\quad\quad \left. - \zeta f_{\lambda+1}\left(z_1, \ldots, z_\lambda, \xi; \sum_1^\lambda z_\nu + \zeta\right)\right] \frac{d\xi}{\xi} \\
&\quad\quad [\mathrm{R}(\zeta-\xi) > 0)].
\end{aligned}\right.$$