ANNALES DE L'I. H. P.

D. DUGUÉ

Analycité et convexité des fonctions caractéristiques

Annales de l'I. H. P., tome 12, nº 1 (1951), p. 45-56
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1951__12_1_45_0>

Analycité et convexité des fonctions caractéristiques

par

D. DUGUÉ (Caen).

---

1. On connaît la grande importance du rôle joué par la convexité en théorie des fonctions analytiques. Le premier théorème obtenu dans ce domaine est celui de M. Hadamard appelé quelquefois « théorème des trois cercles ». Nous allons tout d'abord donner quelques généralisations de ces résultats et montrer comment on peut en déduire un certain nombre d'inégalités utiles.

Théorème I. — *Si $f(z)$ est une fonction analytique dans un domaine $\mathcal{D}$ du plan $z = x + iy$ comprenant un intervalle a, b de l'axe réel et si $|f(x+iy)| < |f(x)|$ ($x+iy$ et x appartenant à $\mathcal{D}$) on a :*

1° $\operatorname{Arg} f(x)$ *indépendant de x ;*
2° $\log|f(x)|$ *fonction convexe de x dans l'intervalle a, b.*

En effet on ne peut avoir $f(x_0) = 0$ pour $a < x_0 < b$ car $f(z)$ serait nul sur un segment de la droite $x_0 + iy$. On peut donc écrire

$$f(z) = e^{g(z)} = e^{A(x,y)+iB(x,y)},$$

$g(z)$ étant analytique dans un domaine intérieur à $\mathcal{D}$ et comprenant le segment a, b. $e^{A(x,y)}$ et par suite $A(x, y)$ pour une valeur donnée de x atteint son maximum pour $y = 0$. Donc $\frac{\partial A}{\partial y}(x, 0) = 0$ et $\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}(x, 0) < 0$ quel que soit x. Les égalités de Cauchy jointes à l'équation de Laplace entraînent que sur tout l'intervalle a, b, $\frac{\partial B}{\partial x}(x, 0) = 0$ et $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(x, 0) > 0$.

Par suite $B(x, o) = \operatorname{Arg} f(x)$ est constant et $A = \log|f(x)|$ est convexe sur l'intervalle a, b. Bien entendu si $B(x, o) = o$, $\log|f(x)| = \log f(x)$.

Ce résultat est tout à fait analogue au théorème des trois cercles, à ceci près que le maximum envisagé est ici non pas un maximum sur un cercle mais un maximum sur un intervalle parallèle à oy.

On peut immédiatement énoncer la réciproque suivante :

THÉORÈME I *bis*. — *Si $f(z)$ est analytique,* $\operatorname{Arg} f(x)$ *constant et* $\log|f(x)|$ *convexe sur un intervalle a, b il existe un domaine $\mathcal{D}$ contenant l'intervalle a, b tel que* $|f(x+iy)| < |f(x)|$, *x et $x+iy$ appartenant à $\mathcal{D}$.*

On déduit facilement du théorème I les conséquences suivantes :

a. Si $f(z)$ est une fonction entière et si le maximum du module de $f(z)$ sur un segment parallèle à l'axe imaginaire est atteint pour un point de l'axe réel $f(z)$ est d'ordre au moins égal à 1 (et ne peut être d'ordre 1 et du type inférieur pour employer la terminologie de M. Valiron).

En effet $\log|f(x)|$ est une fonction convexe. Cette fonction doit croître au moins aussi rapidement que kx et par conséquent $|f(x)|$ doit croître au moins aussi rapidement que e^{Kx}.

b. Considérons une fonction entière $\varphi(z)$ d'ordre inférieur à 2 et dont tous les zéros sont réels et négatifs, $\varphi(z)$ étant réel sur l'axe réel et $\varphi(o)$ égal à 1. $\frac{1}{\sqrt[x]{\varphi(x)}}$ sera une fonction croissante pour $x > o$.

En effet d'après la décomposition très classique on pourra écrire

$$\varphi(z) = e^{\alpha z} \prod \left(1 + \frac{z}{z_n}\right) e^{-\frac{z}{z_n}} \qquad (\text{avec } z_n \text{ positif et } \alpha \text{ réel}),$$

$$\frac{1}{\varphi(z)} = e^{-\alpha z} \prod \frac{1}{1 + \frac{z}{z_n}} e^{\frac{z}{z_n}}.$$

Les exponentielles ont un module constant sur toute parallèle à oy. $\frac{1}{|z + z_n|}$ est évidemment maximum sur l'axe réel. Donc $\frac{1}{\varphi(z)}$ est analytique dans tout le demi-plan $\mathcal{R}(z) > o$ et le maximum du module sur toute parallèle à oy est atteint sur ox. Par conséquent $\log \frac{1}{\varphi(x)}$ est une fonction convexe de x et comme $\varphi(o) = 1$ on en déduit que $\frac{1}{\sqrt[x]{\varphi(x)}}$ est croissant [en particulier $\sqrt[x]{\Gamma(x)}$ est une fonction croissante]. $\sqrt[x]{\varphi(x)}$ décroît donc et par conséquent $\varphi(x) < e^{Kx}$ (K étant fixe sur l'axe réel.)

c. Soit maintenant

$$f(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n + \ldots,$$

une fonction définie par une série entière dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et tels que $\Sigma p_n = 1$. La série converge donc pour $|x| \leqq 1$.

Pour $\mathcal{R}(z) \geqq 1$ la fonction $\varphi(z) = p_0 + \frac{p_1}{z} + \ldots + \frac{p_n}{z^n} = \ldots = f\left(\frac{1}{z}\right)$ est une fonction telle que $|\varphi(z)|$ atteigne son maximum sur une parallèle à oy en un point de l'axe réel. Par conséquent $\log f\left(\frac{1}{x}\right)$ est une fonction convexe pour $x \geqq 1$. Comme $f\left(\frac{1}{1}\right) = 1$, $\dfrac{\log f\left(\frac{1}{x}\right)}{x-1}$ est une fonction croissante ainsi que $f\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ pour $x \geqq 1$ et $f(x)^{\frac{x}{1-x}}$ est décroissant pour $0 < x \leqq 1$. $f(x)$ est ce que Laplace a appelé la fonction génératrice d'une variable aléatoire prenant la valeur entière n avec la probabilité p_n. Désignons par $I(x)$ (fonction indicatrice) l'expression $\frac{d}{dx}\frac{x}{x-1}\log f(x)$. On a évidemment

$$I(x) > 0 \quad \text{pour} \quad 0 < x \leqq 1.$$

et

$$I_S(x) = I_{X_1}(x) + I_{X_2}(x) \quad \text{si} \quad S = X_1 + X_2,$$

X_1 et X_2 étant indépendants. (Dans ces conditions X_1 et X_2 seront dites composantes de S).

Par conséquent :

Théorème. — *Pour $0 < x \leqq 1$ la fonction indicatrice d'une variable aléatoire est supérieure à la fonction indicatrice d'une de ses composantes.*

Dans un mémoire connu M. Paul Lévy a étudié le cas où $e^{P(x)}$ a tous ses coefficients positifs $P(x)$ étant un polynome tel que $P(1) = 0$. Les remarques précédentes permettent d'énoncer une condition nécessaire pour $P(x)$. En effet le polynome $\frac{x\,P(x)}{1-x}$ doit être décroissant. Donc ce polynome ne peut avoir qu'une racine au plus entre 0 et 1 et il doit en être de même pour le polynome $P(x)$.

Donc *pour que* $e^{P(x)}$ *ait tous ses coefficients positifs il est nécessaire que* $P(x)$ *n'ait pas plus d'une racine entre* o *et* 1 [$P(1)$ *étant nul*].

2. Un second théorème va nous permettre d'unifier différents résultats sur les moments et les fonctions caractéristiques.

THÉORÈME II. — *Si* $f(x, X+iY)$ *est une fonction analytique de* $X+iY$ *quel que soit* x, $X+iY$ *appartenant à un domaine* $\mathcal{D}$ *contenant l'intervalle* a, b *de l'axe réel et si* $f(x, X)$ *est une fonction réelle et convexe de* X *alors* $\log \int e^{f(x,X)}\, dF(x)$ *est une fonction convexe de* X [$F(x)$ *étant une fonction non décroissante*].

En effet considérons la fonction analytique $e^{f(x,X+iY)}$. D'après les hypothèses son logarithme est réel et convexe sur l'axe réel. Par conséquent d'après le théorème I *bis* il existe un domaine $\mathcal{D}'$ contenant l'intervalle a, b tel que $X+iY$ étant dans $\mathcal{D}'$,

$$|e^{f(x,X+iY)}| < e^{f(x,X)}.$$

Donc

$$\left|\int e^{f(x,X+iY)}\, dF(x)\right| < \int |e^{f(x,X+iY)}|\, dF(x) < \int e^{f(x,X)}\, dF(x)$$

et d'après le théorème I, $\log \int e^{f(x,X)}\, dF(x)$ est une fonction convexe de X. Si $X = 0$ fait partie de l'intervalle a, b. Ce fait peut s'énoncer

$$\int e^{f(x,X)}\, dF(x) = A[\varphi(X)]^X,$$

$\varphi(X)$ étant croissant et A constant. Ce résultat contient beaucoup de théorèmes sur les moments et les fonctions caractéristiques. On peut en déduire une méthode que nous croyons nouvelle et qui fera apparaître les théorèmes connus en Calcul des Probabilités sous le nom de théorèmes de Raikoff et de Lévy Cramer comme des cas particuliers de théorèmes de théorie des fonctions.

a. Inégalités sur les moments. — Prenons $f(x, z) = z \log|x|$. $f(x, z)$ satisfait aux conditions du théorème II. Donc

$$\log \int e^{X \log|x|}\, dF(x) = \log M_X$$

est une fonction convexe de X. Si $F(x)$ est une fonction de probabilité totale $M_0 = 1$. Donc $\sqrt[X]{M_X}$ est une fonction croissante de X ou d'une manière plus générale si $a < b < c$.

$$\sqrt[b-a]{\frac{M_b}{M_a}} < \sqrt[c-a]{\frac{M_c}{M_a}} \qquad \text{(inégalité de Liapounoff)},$$

M_X est ici le moment absolu d'ordre X. X peut naturellement ne pas être entier. L'inégalité de Hölder est la conséquence du fait que pour une fonction convexe

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

avec α_1 et α_2 positifs et tels que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. En appliquant cette relation à la fonction $\log M_X$ qui est convexe

$$M_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} \leqq (M_{x_1})^{\alpha_1} (M_{x_2})^{\alpha_2}$$

l'égalité ne pouvant être satisfaite que si $\log M_X$ est une fonction linéaire de X, donc $M_X = A^X$.

Appliquée à $\Gamma(x)$ l'inégalité donne

$$\Gamma(x_1 + x_2) < [\Gamma(p x_1)]^{\frac{1}{p}} \left[\Gamma\left(\frac{p}{p-1} x_2\right)\right]^{1-\frac{1}{p}},$$

p étant supérieur à 1.

Si $|x| > 1$ considérons la fonction $z^2 \log |x|^p + z \log |x|^q = \log |x|^{pz^2+qz}$ (p étant positif et q réel). Cette fonction est une fonction convexe de z^2 sur l'axe réel. Donc $\log M_{pz^2+qz}$ est convexe et sous les conditions indiquées $\sqrt[n]{M_{pn^2+qn}}$ est une fonction croissante de n.

b. Inégalités sur les fonctions caractéristiques. — Nous prendrons pour définition de la fonction caractéristique de la variable aléatoire X de fonction de probabilité totale $F_X(x)$ celle donnée par Poincaré $\varphi_X(z) = \int e^{zx}\, dF_X(x)$; il peut se faire que cette expression ne soit définie que pour z imaginaire pur, mais dans le cas qui nous occupe nous supposerons que $\varphi_X(z)$ existe pour z réel et compris entre $a < 0$ et $b > 0$. Dans ces conditions $\varphi_X(z)$ est analytique dans la bande $a < \mathcal{R}(z) < b$. En effet elle existe dans cette bande puisque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{zx}\, dF_X(x)$ est absolument convergente pour $a < \mathcal{R}(z) < b$.

Donc $\varphi_X(z) = \lim_{M,N \to \infty} \int_{-M}^{N} e^{zx}\, d\,F_X(x)$ dans cette bande. Or, quels que soient M et N $\int_{-M}^{N} e^{zx}\, d\,F_X(x)$ est analytique dans tout le plan et en particulier dans la bande ab. En vertu du théorème de Weierstrass sa limite est donc analytique. On en déduit immédiatement la conséquence suivante :

Théorème II *b*. — *Si une variable aléatoire* Y *a pour composantes* X_1 *et* X_2 *et si* $\varphi_Y(z)$ *est analytique dans la bande* ab, $\varphi_{X_1}(z)$ *et* $\varphi_{X_2}(z)$ *sont analytiques au moins dans la même bande.*

En effet

$$\int e^{tx}\, d\,F_Y(x) \text{ existe pour } a < t < b$$

or

$$\int e^{tx}\, d\,F_Y(x) = \int e^{t(x_1+x_2)}\, d\,F_{X_1}(x_1)\, d\,F_{X_2}(x_2)$$
$$= \int e^{tx_1}\, d\,F_{X_1}(x_1) \int e^{tx_2}\, d\,F_{X_2}(x_2),$$

ce qui implique que $\int e^{tx_1}\, d\,F_{X_1}(x_1)$ et $\int e^{tx_2}\, d\,F_{X_2}(x_2)$ existent pour $a < t < b$, et par conséquent que $\varphi_{X_1}(z)$ et $\varphi_{X_2}(z)$ sont analytiques au moins dans la bande. M. Paul Lévy avait dans la *Théorie de l'Addition des variables aléatoires* signalé que si $\varphi_Y(z)$ était une fonction entière $\varphi_{X_1}(z)$ et $\varphi_{X_2}(z)$ devaient être entières. J'avais donné en 1939 dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* une démonstration du fait indiqué fondée sur la méthode des moments. M. Mazurkiewicz a donné une autre démonstration de ce même théorème dans le *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et Lettres*, années 1940-1941 (p. 1, *Un théorème sur les fonctions caractéristiques*). On sait d'autre part que si ab est la bande la plus large dans laquelle $\varphi_Y(z)$ est analytique a et b sont des points singuliers de $\varphi_Y(z)$. Si dans cette bande $\varphi_Y(z)$ a des zéros et si Y a pour composantes X_1 et X_2 l'ensemble des zéros de $\varphi_{X_1}(z)$ et $\varphi_{X_2}(z)$ dans cette bande doit être l'ensemble des zéros de $\varphi_Y(z)$ [autrement un des zéros de $\varphi_{X_1}(z)$ devrait être un pôle $\varphi_{X_2}(z)$ et φ_{X_2} ne serait plus analytique dans la bande.]

$\varphi_X(z)$ étant ainsi définie comme zx satisfait aux conditions du théorème II, $\log \varphi_X(x)$ que l'on appelle quelquefois $\psi_X(x)$ ou deuxième fonction caractéristique est convexe. Donc $\psi''(x) \geqq 0$. En particulier $\psi''(1) \geqq 0$ si 1 est un point de la bande ab. Il en résulte l'inégalité suivante sur les cumulants (terminologie de M. R. A. Fisher).

$$K_2 + \frac{K_3}{1!} + \frac{K_4}{2!} + \ldots + \frac{K_n}{(n-2)!} + \ldots \geqq 0.$$

En appelant cumulant général le premier membre de cette inégalité on a donc le théorème.

Le cumulant général d'une aléatoire est supérieur ou égal à celui de ses composantes.

3. Appelons classe de fonctions $\mathcal{C}_D$ l'ensemble des fonctions analytiques qui dans un certain domaine D intérieur à leur domaine d'analycité et contenant un intervalle de l'axe réel ont la propriété exigée pour l'application du théorème I soit $|f(x+iy)| < |f(x)|$. e^{Kz} et $e^{K^2z^2}$ appartiennent à la classe $\mathcal{C}_P$ (P étant le plan complexe) et K une quantité réelle. Plus généralement toute fonction caractéristique analytique appartient à la classe $\mathcal{C}_B$, B étant une bande. Mais la classe $\mathcal{C}_B$ est plus étendue que l'ensemble des fonctions caractéristiques. Par exemple il est facile de voir que $e^{-\frac{1}{1+e^{iz}}}$ bien qu'appartenant à la classe $\mathcal{C}_B$[B étant ici la région $\mathcal{R}(z) < 0$] n'est pas caractéristique. En effet si cette fonction était caractéristique $e^{-\frac{1}{1+z^2}}$ devrait être génératrice et avoir tous ses coefficients positifs ce qui n'est pas le cas puisque le point $z = 1$ est régulier. Il est d'autre part facile de voir que le maximum du module de $e^{-\frac{1}{1+z^2}}$ sur le cercle de rayon R(R < 1) est atteint pour le point R sur l'axe réel ce qui montre que $e^{-\frac{1}{1+e^{iz}}}$ appartient bien à la classe indiquée.

Cherchons les décompositions possibles de e^{Kz} et $e^{K^2z^2}$ en produits de deux facteurs f_1 et f_2 appartenant tous deux à une classe $\mathcal{C}_D$. D'après les remarques du début $f_1 = e^{\varphi_1}$ et $f_2 = e^{\varphi_2}$, φ_1 et φ_2 étant analytiques dans un domaine D′ intérieur à D et contenant le même intervalle d'axe réel. De plus $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ sont convexes sur le segment a, b. Dans le premier cas (décomposition de e^{Kz}), φ_1 et φ_2 sont analytiques sur un segment ab convexes sur ce segment et leur somme est égale à Kx. Leurs dérivées secondes positives ou nulles ont donc leur somme nulle.

Elles ne peuvent donc être que nulles; φ_1 et φ_2 sont linéaires sur le segment *ab et leur prolongement ne peut donc être que $m_1 z$ et $m_2 z$.* D'après la remarque faite au début du paragraphe 3 un cas particulier du résultat obtenu est que :

Si le produit de deux fonctions caractéristiques est égal à e^{Kz} ces deux fonctions sont $e^{m_1 z}$ et $e^{m_2 z}$ autrement dit : *les seules composantes d'une aléatoire se réduisant à une quantité certaine sont des quantités certaines* ce qui entraîne le théorème de Raikoff :

Les composantes d'une aléatoire de Poisson sont des aléatoires de Poisson.

Dans ce cas le domaine D servant à définir la classe $\mathcal{C}_D$ peut être arbitrairement petit. Voyons maintenant s'il n'y a pas un théorème analogue pour la fonction $e^{K^2z^2}$ en cherchant la décomposition de $e^{K^2z^2}$ en produit $f_1 f_2$ et f_1 et f_2 appartenant à la classe $\mathcal{C}_P$; dans ce cas la seule décomposition possible serait $e^{P_1(z)}e^{P_2(z)}$, P_1 et P_2 étant deux polynomes de degré inférieur ou égal à 2. Remarquons que le théorème serait faux pour une classe $\mathcal{C}_B$, B étant une bande.

En effet on a $e^{K^2z^2} = e^{K^2z^3}e^{K^2(z^2-z^3)}$ et il est facile de voir que $e^{K^2z^3}$ et $e^{K^2(z^2-z^3)}$ appartiennent à la classe $\mathcal{C}_B\left[\text{B étant la bande } 0 < \mathcal{R}(z) < \frac{1}{3}\right]$. Donc le domaine où la propriété du maximum doit avoir lieu est la totalité du plan complexe. f_1 et f_2 sont deux fonctions entières sans zéros car l'une ne peut avoir de zéros sans que l'autre ait un pôle. Donc $f_1 = e^{\varphi_1}$ et $f_2 = e^{\varphi_2}$, φ_1 et φ_2 étant deux fonctions entières et $e^{\varphi_1}e^{\varphi_2} = e^{K^2z^2}$. On peut multiplier les deux membres par e^{mz+n} de telle sorte que

$$e^{\varphi_1+m_1z+n_1}e^{\varphi_2+m_2z+n_2} = e^{K^2z^2+mz+n},$$

m, n, m_1, n_1, m_2, n_2 étant réels. Posons

$$\varphi_1 + m_1 z + n_1 = \psi_1(z) \quad \text{et} \quad \varphi_2 + m_2 z + n_2 = \psi_2(z), \qquad e^{\psi_1} \text{ et } e^{\psi_2}$$

font encore partie de la classe $\mathcal{C}_P$ et l'on peut choisir m_1 et n_1, m_2 et n_2 tels que

$$\psi_1'(0) = \psi_1(0) = \psi_2'(0) = \psi_2(0) = 0.$$

En posant

$$\psi_1(z) = A_1(x, y) + iB_1(x, y)$$

et de même pour ψ_2 il faut trouver $A_1(x, y)$ et $A_2(x, y)$ tels que

$$\text{(A)} \qquad A_1(x, y) \leqq A_1(x, 0)$$

et de même pour A_2 [donc que $A_1(x, o)$ et $A_2(x, o)$ soient convexes quels que soient x] et

$$A_1(x, o) + A_2(x, o) = K^2x^2 + mx + n.$$

De plus $A_2(o,o) = A'_2(o, o) = o$. Donc $A_2(x, o)$ dont la courbe représentative est au-dessus de sa tangente, est positive et

$$A_1(x, o) < K^2x^2 + mx + n.$$

En appelant $\mathcal{A}(r)$ le maximum de $A(x, y)$ sur un cercle de centre O et de rayon r la condition (A) entraîne que $\mathcal{A}_1(r) = A_1(-r, o)$ ou $A_1(r, o)$. Donc $\mathcal{A}_1(r) < K^2r^{2+\varepsilon}$, ε étant arbitrairement petit pour r assez grand. Cette inégalité a pour conséquence en vertu d'un autre théorème bien connu de M. Hadamard sur le maximum de la partie réelle que

$$\psi_1(z) = A_1(x, y) + iB_1(x, y)$$

est un polynome du deuxième degré. Par suite :

Si le produit de deux fonctions f_1 et f_2 de la classe $\mathcal{C}_P$ est égal à $e^{K^2z^2}$, f_1 et f_2 sont de la forme $e^{K_1z^2+m_1z+n_1}$.

Ce théorème joint au théorème II b a pour conséquence comme cas particulier le théorème de Lévy-Cramer.

Les composantes d'une variable normale sont normales.

Ce résultat est donc un théorème de convexité; il se déduit des deux grands théorèmes cités de M. Hadamard.

Des considérations de convexité vont encore permettre d'écrire des inégalités sur les cumulants d'une composante d'une aléatoire donnée. Si les cumulants existent la fonction caractéristique est analytique au moins dans une bande ab. Si elle est finie $\underline{\lim}\sqrt[n]{\frac{n!}{K_n}}$ doit être le plus petit des trois nombres suivants : $|a|$, $|b|$ et le plus petit des modules des zéros de $\varphi_X(z)$. Si X_1 est une composante de X et si K'_n est le $n^{\text{ième}}$ cumulant de X_1 d'après ce que nous avons vu sur les zéros des fonctions caractéristiques des composantes d'une aléatoire et la largeur de la bande d'analycité relative à ces composantes, on a

$$(1)\qquad \underline{\lim}\sqrt[n]{\frac{n!}{K_n}} \leq \underline{\lim}\sqrt[n]{\frac{n!}{K'_n}}.$$

Si $\underline{\lim} \sqrt[n]{\frac{n!}{K_n}}$ est infinie, la fonction caractéristique dont on part est égale à $e^{g(z)} = e^{A(x,y)+iB(x,y)}$, $g(z)$ étant une fonction entière.

Si X_1 est une composante de X, sa fonction caractéristique sera $e^{g_1(z)} = e^{A_1(x,y)+iB_1(x,y)}$. En raisonnant comme dans le cas du théorème de Lévy-Cramer on voit que l'on peut trouver une quantité m réelle telle que

$$A_1(x, o) < A(x, o) + mx.$$

Si $g(z)$ est d'ordre α fini $A(x, o) < K\,e^{|x|^{\alpha+\varepsilon}}$. Donc $A_1(x, o) < K\,e^{|x|^{\alpha+\varepsilon}}$ et l'ordre de g_1 est inférieur à l'ordre de g. L'ordre de g_1 comme celui de g se déduit facilement de la suite des cumulants. On a donc

$$(2) \qquad \overline{\lim} \frac{n \log n}{\log\left(\frac{n!}{K'_n}\right)} \leq \overline{\lim} \frac{n \log n}{\log\left(\frac{n!}{K_n}\right)},$$

ce qui peut s'écrire

$$(2) \qquad \overline{\lim} \frac{\log K'_n}{n \log n} \leq \overline{\lim} \frac{\log K_n}{n \log n}.$$

Ces inégalités (1) et (2) sur les cumulants des composantes d'une aléatoire sont donc les mêmes que les inégalités sur les moments que j'avais signalées dans ma Note de 1939.

Pour terminer ces considérations sur les propriétés analytiques d'une fonction caractéristique, je voudrais prouver un résultat dont quelques cas particuliers avaient été indiqués par M. G. Kunetz dans sa thèse en 1937. La démonstration générale en a été donnée par M. Marcienkiewicz. Dans une Note parue en 1939 j'ai indiqué diverses extensions de ce théorème. e^{Kz} et $e^{K^2z^2}$ (K étant réel) sont deux fonctions caractéristiques. On peut se demander quels sont les polynomes $P(z)$ tels que $e^{P(z)}$ soient des fonctions caractéristiques. S'il en existait on pourrait leur étendre le résultat de Lévy-Cramer. Mais ce n'est pas le cas. Plus généralement $e^{P(z)}$ ne peut appartenir à $\mathcal{C}_P$, $P(z)$ étant un polynome de degré supérieur à 2.

En effet pour appartenir à $\mathcal{C}_P$, $e^{P(z)}$ doit avoir un argument constant sur l'axe réel; soit θ cet argument, $e^{P(z)-i\theta}$ doit donc être réel sur l'axe réel et $P(x) - i\theta$ doit avoir une partie complexe nulle quel que soit x, ce qui impose aux coefficients de $P(z)$, sauf le terme constant d'être réels. Soit

$$P(z) = a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \ldots + (a_p + ib_p).$$

Si $z = \rho\, e^{i\theta}$, les parties réelles et complexes sont en évidence en écrivant

$$\begin{aligned} P(\rho\, e^{i\theta}) = {} & a_0 \rho^p \cos p\theta + a_1 \rho^{p-1} \cos(p-1)\theta + \ldots + a_p \\ & + i(a_0 \rho^p \sin p\theta + a_1 \rho^{p-1} \sin(p-1)\theta + \ldots + b_p). \end{aligned}$$

On doit donc avoir, en vertu de la propriété de maximum de la partie réelle de $P(z)$,

$$a_0 \rho^p + a_1 \rho^{p-1} + \ldots + a_p > a_0 \left(\frac{\rho}{\cos\theta}\right)^p \cos p\theta + a_1 \left(\frac{\rho}{\cos\theta}\right)^{p-1} \cos(p-1)\theta + \ldots$$

pour $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$, et ceci quel que soit ρ. On devrait avoir en divisant les deux membres par ρ^p,

$$a_0 + \frac{a_1}{\rho} + \ldots + \frac{a_p}{\rho^p} > a_0 \frac{\cos p\theta}{\cos^p\theta} + a_1 \frac{\cos(p-1)\theta}{\cos^{p-1}\theta} \frac{1}{\rho} + \ldots,$$

ce qui n'est possible pour toute valeur de ρ que si $a_0 > a_0 \frac{\cos p\theta}{\cos^p\theta}$, c'est-à-dire suivant le signe de a_0 que si l'on a constamment ou bien $\cos p\theta < \cos^p\theta$ ou $\cos p\theta > \cos^p\theta$ pour $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$. Ceci n'est possible que si $p \leqq 3$. Le plus simple pour s'en apercevoir est de tracer les deux sinusoïdes $\cos^p\theta$ et $\cos p\theta$. Il est bien évident pour $p > 3$ que la courbe $\cos^p\theta$ rencontre la courbe $\cos p\theta$ et par conséquent que la différence de deux ordonnées changera de signe. De plus $e^{P(z)}$, $P(z)$ étant du troisième degré ne peut être de la classe $\mathcal{C}_P$. Car $P(x)$ doit être convexe, ce qui n'est pas le cas si $P(x)$ est du troisième degré. Bien entendu la démonstration n'exclut pas la possibilité d'existence de fonctions caractéristiques de la forme $e^{\varphi(z)}$, $\varphi(z)$ étant une fonction entière (cas de la loi de Poisson ou de certaines lois indéfiniment divisibles). Ceci peut être résumé en disant :

Les seules fonctions caractéristiques entières d'ordre fini ayant une valeur exceptionnelle de Picard sont les fonctions des quantités certaines et des quantités normales.

On peut énoncer un théorème plus général en cherchant à remplacer valeur exceptionnelle de Picard par valeur exceptionnelle de Borel. La démonstration est exactement la même. En effet $\varphi(z)$ serait alors de la forme $\psi(z)\, e^{P(z)}$, $P(z)$ étant un polynome et $\psi(z)$ une fonction entière d'ordre inférieur au degré de polynome. La propriété du maximum du module de $\varphi(z)$ entraîne exactement comme plus haut que le degré de $P(z)$ soit inférieur ou égal à 3. Et en se servant de la convexité de $\log\psi(x) + P(x)$ on établit exactement comme plus haut que $P(x)$ ne peut être de degré 3. Car on peut s'arranger pour que la tangente à l'origine à la courbe $\log\psi(x) + P(x)$ soit horizontale et comme $\frac{\log\psi(x)}{x^3}$ tend vers zéro quand $|x|$ augmente indéfiniment, $\log\psi(x) + P(x)$ ne peut être constamment positif si $P(x)$ est de degré 3. Ceci est incompatible avec la convexité de $\log\psi(x) + P(x)$.

Donc si $\varphi(z)$ est une fonction caractéristique d'ordre fini ayant une valeur exceptionnelle de Borel elle est au plus d'ordre 2.

Ces derniers résultats joints aux théorèmes de décomposition montrent à quel point il y a une analogie formelle entre les quantités certaines et les quantités normales.