ANNALES DE L'I. H. P.

EDITH MOURIER

Éléments aléatoires dans un espace de Banach

Annales de l'I. H. P., tome 13, n° 3 (1953), p. 161-244
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1953__13_3_161_0>

Éléments aléatoires dans un espace de Banach

par

Mlle Edith MOURIER.

INTRODUCTION.

Jusqu'à une époque récente, l'objet du Calcul des Probabilités a été l'étude des *nombres* aléatoires ou, probabilités géométriques, l'étude d'un point aléatoire, défini par ses coordonnées, dans un espace euclidien. Le développement du Calcul des Probabilités et de ses applications impose l'étude d'*éléments* plus généraux : séries, vecteurs, fonctions, courbes, transformations, ... aléatoires. M. Fréchet [M. Fréchet, I, p. 215-310] (1) a montré la nécessité d'une étude systématique d'éléments aléatoires abstraits; nous ne reviendrons pas sur ce point.

L'ensemble des déterminations d'un élément X constitue l'espace $\mathfrak{X}$ de X et chaque détermination de X est un *point* de $\mathfrak{X}$. La définition d'éléments aléatoires abstraits (é. a.), implique l'existence d'une *mesure* ou *probabilité* sur $\mathfrak{X}$; il faut d'abord introduire les ensembles mesurables formant un corps de Borel $\mathcal{F}$: les éléments de $\mathcal{F}$ sont des sous-ensembles de $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}$ *lui-même fait partie de la famille* $\mathcal{F}$; puis la mesure elle-même μ telle que à tout $A \in \mathcal{F}$ corresponde

$$\mu(A) \geqq 0, \qquad \mu(\mathfrak{X}) = 1, \qquad \sum_i \mu(A_i) = \mu\left(\sum_i A_i\right)$$

si les A_i en infinité dénombrable sont deux à deux disjoints. La généralisation de la notion de loi de probabilité est alors immédiate : c'est l'ensemble des probabilités de tous les éléments de $\mathcal{F}$. Les notions

(1) Les [ ] renvoient à la bibliographie, p. 243.

de valeurs centrales, dispersion, etc. impliquent celle de « voisinage »; il doit donc y avoir une topologie sur $\mathfrak{X}$. Toute distance définit une topologie mais il peut y avoir une topologie dans un espace sans distance; toutefois, nous nous bornerons, comme M. Fréchet, aux espaces distanciés.

On peut alors, ainsi que l'ont fait M. Fréchet [M. Fréchet, I] et S. Doss [S. Doss, I], généraliser la notion d'espérance mathématique (e. m.); toutefois, si l'on veut généraliser l'espérance mathématique en tant qu'*opération linéaire*, il faut qu'une addition soit définie dans $\mathfrak{X}$, finalement que $\mathfrak{X}$ soit vectoriel; on peut alors faire directement une généralisation de la loi classique des grands nombres. Notons que S. Doss [S. Doss, I] considérant le cas où $\mathfrak{X}$ est distancié mais non linéaire, définit l'analogue de $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ comme étant tout élément Z_n, s'il existe, tel que :

$$(Z_n, \lambda) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i, \lambda)$$

quel que soit λ, (a, b) désignant la distance de a et b.

Il peut ainsi obtenir une loi des grands nombres, mais, sauf dans un cas très particulier, il n'a ni théorème d'existence, ni théorème d'unicité. Nous voyons ainsi que nous sommes amenés à considérer des espaces distanciés et vectoriels; plus précisément, nous nous limiterons aux espaces de *Banach*, c'est-à-dire à des espaces vectoriels, distanciés, complets et où la distance est définie à l'aide d'une norme. Les fonctionnelles linéaires [2], réelles ou complexes, relatives à $\mathfrak{X}$ seront appelées x^*; elles forment l'espace conjugué $\mathfrak{X}^*$ de $\mathfrak{X}$ qui est lui-même de Banach.

Nous supposerons que la mesure définie sur $\mathfrak{X}$ est telle que *toutes* les fonctionnelles linéaires sont mesurables; on dira alors que la mesure est une L-mesure.

Dans ces conditions, nous étudierons la définition et l'existence d'une e. m. (chap. I) et nous établirons des lois des grands nombres en moyenne ou presque-sûrement (p. s.) au point de vue de la convergence

---

[2] Dans tout ce qui suit, « linéaire » implique : *additif et continu.*

faible et aussi de la convergence forte (chap. II). Le chapitre III est consacré à la définition et à l'étude de la caractéristique d'un élément aléatoire, enfin dans le chapitre IV nous définirons et étudierons les éléments aléatoires laplaciens.

Les principaux résultats démontrés dans cette Thèse ont été résumés dans les Notes suivantes :

É. Mourier, *C. R. Acad. Sc.*, t. **229**, 1949, p. 1300; t. **231**, 1950, p. 28; t. **232**, 1951, p. 923; t. **236**, 1953, p. 575.

Je suis heureuse d'exprimer ici à M. le Professeur G. Darmois ma respectueuse reconnaissance pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail, ses observations et ses conseils si utiles.

J'adresse également mes vifs remerciements à M. Fréchet dont les travaux récents m'ont founi le sujet de cette étude et qui s'est toujours intéressé à mes recherches, me faisant profiter de nombreux et instructifs entretiens.

CHAPITRE I.

DÉFINITION ET ÉTUDE D'UNE ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE DANS LE CAS D'UNE L-MESURE.

En Calcul des Probabilités on définit l'e. m. de variables aléatoires (v. a.) numériques, mais depuis longtemps, dans diverses applications, on a défini, et l'on utilise couramment, des « valeurs moyennes » d'éléments qui ne sont pas des nombres. Par exemple rien n'est plus familier à l'artilleur que le « point moyen » qu'il définit par la propriété que les coordonnées de ce point sont les e. m. des coordonnées correspondantes ; c'est-à-dire que, si l'on désigne par $X_i(M)$ la $i^{\text{ième}}$ coordonnée d'un point M, le « point moyen » $E(M)$ est défini par la relation :

$$X_i[E(M)] = E[X_i(M)] \quad \text{pour tout } i.$$

Partant de la notion connue d'e. m. pour une v. a. numérique, nous généraliserons d'une façon analogue [É. Mourier, I] la définition de l'e. m. d'un é. a. X dont les valeurs appartiennent à un espace de Banach quelconque $\mathfrak{X}$, ce que nous noterons $X \in \mathfrak{X}$. De même que dans l'exemple précédent le point moyen n'est défini que lorsque l'e. m. de tous les

$X_i(M)$ existe, de même nous ne définirons l'e. m. $E(X)$ de $X \in \mathfrak{X}$ que si $E[x^\star(X)]$ existe pour tout $x^\star \in \mathfrak{X}^\star$.

Définition. — L'e. m. $E(X)$ de $X \in \mathfrak{X}$ est l'élément de $\mathfrak{X}$, s'il existe, tel que :

$$x^\star[E(X)] = E[x^\star(X)] \qquad \text{pour tout} \quad x^\star \in \mathfrak{X}^\star.$$

Notons que $E[x^\star(X)]$ est une e. m. de v. a. numérique ordinaire, Alors $E(X)$, si elle existe, est unique; en effet la connaissance de $x^\star[E(X)]$ pour tout $x^\star$ détermine $E(X)$ [E. Hille, I, p. 22].

Cette définition équivaut à celle de l'intégrale de Pettis [Pettis I. p. 277-304].

Remarque. — Étant donné un ensemble, on peut quelquefois choisir des normes différentes telles que l'espace défini avec l'une ou l'autre de ces normes soit un espace de Banach. Changer la norme peut avoir pour effet de modifier la classe des fonctionnelles linéaires (continues) qui se trouve ainsi agrandie ou rétrécie (mais il y a toujours des fonctionnelles additives qui sont linéaires dans tous les cas).

Il est intéressant de savoir si $E(X)$, existant avec une norme, existe aussi avec une autre, et si ces e. m. sont les mêmes. En effet, dans les applications concrètes, le choix de la norme comporte, en général, de l'arbitraire.

Soient deux normes $\|x\|_1$ et $\|x\|_2$; si l'on suppose qu'il existe deux nombres a et b tels que :

$$0 < a < \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} < b, \tag{1}$$

les fonctionnelles linéaires sont *les mêmes* [E. Hille, I, th. **2**, **13**, 8] avec $\|x\|_1$ et avec $\|x\|_2$ donc l'e. m. si elle existe dans un cas existe dans l'autre et avec la même valeur.

La condition (1) s'interprète qualitativement et est forcément réalisée dans le cas d'un nombre fini de dimensions (en relation avec le théorème $E[U(X)] = U[E(X)]$, *cf.* p. 166).

Propriété **1**. — Si $E(X)$ existe, $E(\alpha X)$,ou α est un nombre certain, existe et vaut $\alpha E(X)$

$$\begin{aligned} x^\star[E(\alpha X)] &= E[x^\star(\alpha X)] = E[\alpha x^\star(X)] = \alpha E[x^\star(X)] \\ &= \alpha x^\star[E(X)] = x^\star[\alpha E(X)] \quad \text{pour tout } x^\star, \end{aligned}$$

donc $E(\alpha X)$ existe et $E(\alpha X) = \alpha E(X)$.

Propriété 2. — Si X est certainement ou p. s. égal à l'élément certain x, E(X) existe et vaut x.

$$x^{\star}[E(X)] = E[x^{\star}(X)] = x^{\star}(x) \quad \text{pour tout } x^{\star};$$

donc E(X) existe et vaut x.

Propriété 3. — Si X est certainement ou p. s. égal à l'élément certain x, si A est une variable aléatoire numérique et si E(A) existe, alors E[AX] existe et vaut xE[A].

$$\begin{aligned} x^{\star}[E(AX)] &= E[x^{\star}(AX)] = E[A\,x^{\star}(X)] = x^{\star}(x)[E(A)] \\ &= x^{\star}[x\,E(A)] \quad \text{pour tout } x^{\star}, \end{aligned}$$

donc E(AX) existe et vaut x[E(A)].

Propriété 4. — Si X et Y sont définis sur le même $\mathfrak{X}$ et si E(X) et E(Y) existent, E(X + Y) existe et l'on a :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

Lemme. — *Rappelons* [Banach, I, p. 181] *que* $\mathfrak{X}$ *et* $\mathfrak{X}_1$ *étant des espaces de Banach et* $x \in \mathfrak{X}$, $y \in \mathfrak{X}_1$, *si l'on désigne par* $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}_1$ *l'espace de tous les couples ordonnés* x, y *où l'on définit l'addition et la multiplication par un scalaire* h *en posant :*

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1),$$
$$h(x, y) = (hx, hy)$$

et la norme de façon que :

$$(1)\quad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} y_n = y_0 \quad \textit{équivaut à} \quad \lim_{n \to \infty} \|(x_n, y_n) - (x_0, y_0)\| = 0,$$

alors $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}_1$ *est un espace de Banach appelé produit de* $\mathfrak{X}$ *et* $\mathfrak{X}_1$. (1) *est remplie en particulier si l'on prend comme norme de* $z = (x, y)$ *l'une des expressions :*

$$\|z\| = [\|x\|^p + \|y\|^p]^{\frac{1}{p}}$$

ou

$$\|z\| = \max[\|x\|, \|y\|];$$

il y a d'autres normes possibles, mais en choisissant des normes quelconques vérifiant (1), *on obtiendra toujours des espaces isomorphes. Le produit* $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, *est appelé carré de* $\mathfrak{X}$ *et désigné par* $\mathfrak{X}^2$.

On définit de même le produit $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \times \ldots \times \mathfrak{X}_n$.

Le produit d'un nombre fini d'espaces séparables (3) *est séparable.*

Démonstration de la propriété 4. — Soit

$$X \in \mathfrak{X}, \qquad Y \in \mathfrak{Y} \equiv \mathfrak{X}.$$

On suppose que $E(X)$ et $E(Y)$ existent.

Soit

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} \quad \text{et} \quad (X, Y) = Z.$$

On a une mesure sur $\mathfrak{T}$, elle induit une mesure sur $\mathfrak{X}$ et une autre sur $\mathfrak{Y}$ que l'on suppose être des L-mesures [puisque $E(X)$ et $E(Y)$ existent]. Une fonctionnelle linéaire appliquée à $X + Y$ est du type

$$x^*(X + Y) = x^*(X) + x^*(Y).$$

Or $x^*(X)$ et $y^*(Y)$ [c'est-à-dire $x^*(Y)$] sont mesurables sur $\mathfrak{T}$, donc $x^*(X + Y)$ l'est aussi. Or la mesure sur $\mathfrak{T}$ induit une mesure sur l'espace $\mathfrak{X}'$ (identique à $\mathfrak{X}$) de $X + Y$, cette dernière est donc une L-mesure. On peut donc bien chercher si $X + Y$ a une e. m. $E(X+Y)$, cette e. m. doit être telle que :

$$\begin{aligned} x^*[E(X + Y)] &= E[x^*(X + Y)] = E[x^*(X) + x^*(Y)], \\ &= E[x^*(X)] + E[x^*(Y)], \\ &= x^*[E(X)] + x^*[E(Y)], \\ &= x^*[E(X) + E(Y)], \end{aligned}$$

et ce pour tout $x^* \in \mathfrak{X}^*$ donc : $E(X+Y)$ existe et $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

THÉORÈME. — *Soit* U *une opération linéaire définie dans un espace de Banach* $\mathfrak{X}$ *et dont le contredomaine est un espace de Banach* $\mathfrak{X}_1$; *soit* $X \in \mathfrak{X}$, *si* $E(X)$ *existe*, $E[U(X)]$ *existe et est égale à* $U[E(X)]$.

LEMME (4). — *Soient* $\mathfrak{X}$ *et* $\mathfrak{X}_1$ *deux espaces de Banach;* $y = U(x)$ *une opération linéaire définie dans* $\mathfrak{X}$ *dont le contredomaine est contenu dans* $\mathfrak{X}_1$ *et* x^* *et* y^* *des fonctionnelles linéaires définies dans* $\mathfrak{X}$ *et* $\mathfrak{X}_1$ *respectivement. Considérons l'expression* $y^*[U(x)]$, *où* y^* *est une fonctionnelle linéaire quelconque définie dans* $\mathfrak{X}_1$. *Cette*

(3) On rappelle qu'un espace de Banach $\mathfrak{X}$ est séparable s'il existe une suite dénombrable S de points de $\mathfrak{X}$ telle que tout point de $\mathfrak{X}$ est limite d'une suite partielle de S.

(4) BANACH, *loc. cit.*, p. 99.

expression peut être regardée comme une fonctionnelle définie dans $\mathfrak{X}$.

Posons

$$x^*(x) = y^*[U(x)];$$

ainsi définie la fonctionnelle x^* *est additive et continue, car on a*

$$|x^*(x)| = |y^*[U(x)]| \leq \|y^*\| \cdot \|U\| \cdot \|x\|,$$

d'où

$$\|x^*\| \leq \|y^*\| \cdot \|U\|.$$

Démonstration du théorème. — Par définition

$$x^*[E(X)] = E[x^*(X)];$$

$E[X]$ existe, donc aussi $E[x^*(X)]$ pour tout x^*; d'après le lemme, à tout $y^*[U(X)]$ correspond un $x^*(X)$ tel que :

$$y^*[U(X)] = x^*(X),$$

donc $E[y^*[U(X)]]$ existe et

$$\begin{aligned} E[y^*[U(X)]] &= E[x^*(X)], \\ y^*[E[U(X)]] = E[y^*[U(X)]] &= E[x^*(X)] = x^*[E(X)], \\ &= y^*[U[E(X)]] \end{aligned}$$

et ce pour tout $y^* \in \mathfrak{X}_1^*$ donc :

$$E[U(X)] = U[E(X)].$$

***Propriété* 5. — Si $\|X\|$ est mesurable, si $E[\|X\|] < +\infty$ et si $E(X)$ existe, on a :**

$$\|E(X)\| \leq E[\|X\|].$$

Il existe [Banach, I, p. 99], [E. Hille, I, th. 2. 9. 3] une fonctionnelle linéaire $x_0^* \in \mathfrak{X}^*$ telle que :

$$(\alpha) \qquad \|x_0^*\| = 1,$$

$$(\beta) \qquad x_0^*[E(X)] = \|E(X)\|.$$

Or

$$\begin{aligned} x_0^*[E(X)] &= E[x_0^*(X)], \\ |x_0^*[E(X)]| = |E[x_0^*(X)]| &\leq E|x_0^*(X)| \leq E[\|x_0^*\| \cdot \|X\|], \\ \|E(X)\| &\leq E[\|X\|]. \end{aligned}$$

L'examen de cette propriété pose le problème d'étudier la mesurabilité de $\|X\|$.

Théorème. — *Avec une* L-*mesure, si* $\mathfrak{X}$ *est* séparable, $\|x\|$ *est mesurable.*

En effet, une L-mesure signifie que x est faiblement mesurable Pettis, mais $\mathfrak{X}$ séparable entraîne que x est mesurable Bochner [Pettis, I, p. 279], c'est-à-dire qu'il existe une suite de fonctions en escalier ([5]) $\lambda_n(x)$ telles que, pour x fixe, hors ensemble de mesure nulle,

$$\|x - \lambda_n(x)\| \to 0;$$

ceci entraîne

$$\|\lambda_n(x)\| \to \|x\|;$$

or $\|\lambda_n(x)\|$ est mesurable, donc $\|x\|$ aussi. Plus généralement, toute fonction numérique continue $f(x)$ de x est mesurable; toute fonction f à valeurs dans un espace de Banach et continue sera mesurable Bochner.

Théorème. — *Avec une* L-*mesure, si* $\mathfrak{X}$ *est séparable et réflexif et si* $E[\|X\|] = m < +\infty$, *alors* $E(X)$ *existe.*

$\mathfrak{X}$ est séparable, donc $\|X\|$ est mesurable (théorème précédent). $\mathfrak{X}$ séparable et réflexif implique que $\mathfrak{X}^\star$ est séparable. Soit $\{x_n^\star\}$ une suite dénombrable dense dans $\mathfrak{X}^\star$; pour que $E(X) = y$ existe, il faut et il suffit que

$$x_n^\star(y) = E[x_n^\star(X)] \quad \text{pour tout } n, \tag{1}$$

il faut évidemment. Il suffit : si pour tout n, $E[x_n^\star(X)]$ existe, $E[x^\star(X)]$ existe pour tout $x^\star$; en effet :

$$E[x^\star(X)] = E[x_n^\star(X)] + E[(x^\star - x_n^\star)(X)],$$

si $\|x^\star - x_n^\star\| \leq \varepsilon$:

$$|E[(x^\star - x_n^\star)(X)]| \leq E[\|x^\star - x_n^\star\|\|X\|] \leq m\varepsilon$$

Donc si y satisfait (1) :

$$\begin{aligned}|E[x^\star(X)] - x^\star(y)| &\leq m\varepsilon + |x_n^\star(y) - x^\star(y)|, \\ &\leq \varepsilon(m + \|y\|).\end{aligned}$$

Or [E. Hille, I, p. 21], la condition nécessaire et suffisante pour que (1) ait une solution y telle que $\|y\| \leq M$ est que, pour tout $y^\star$ de la forme :

$$y^\star = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n x_n^\star,$$

([5]) « Step functions » constante sur chacun d'un nombre fini d'ensembles mesurables disjoints dont la somme est l'espace entier (*voir* Pettis).

on ait :

$$\sum_{1}^{k} \alpha_n \mathrm{E}[x_n^\star(\mathrm{X})] \| \leqq \mathrm{M} \cdot \|y^\star\|,$$

c'est-à-dire

$$|\mathrm{E}[y^\star(\mathrm{X})]| \leqq \mathrm{M} \cdot \|y^\star\|.$$

Or on a :

$$|\mathrm{E}[y^\star(\mathrm{X})]| \leqq \mathrm{E}[\|y^\star\| \cdot \|\mathrm{X}\|] \leqq \|y^\star\| \, m.$$

Au chapitre II, ce théorème sera élargi en ce sens que la condition $\mathfrak{X}$ *réflexif* sera supprimée. Nous obtiendrons alors ce théorème comme conséquence de la loi forte des grands nombres. Il était cependant intéressant d'obtenir dès maintenant une condition suffisante d'existence de $\mathrm{E}(\mathrm{X})$.

COMPARAISON AVEC L'ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE DE FRÉCHET.

Définition de M. Fréchet. — M. Fréchet [M. Fréchet, II] a donné une définition constructive de l'e. m. d'un élément aléatoire. Cette e. m. existe si deux conditions sont réalisées. La première porte sur la mesure. La mesure doit satisfaire à une certaine condition F, disons être une F-mesure; cette condition est que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on puisse trouver un nombre fini ou dénombrable d'ensembles $e_1, \ldots, e_k, \ldots$ tels que :

α. $\sum_k e_k = \mathfrak{X}$;

β. Les e_k sont deux à deux disjoints et chaque e_k est mesurable;

γ. Pour tout e_k, la variation de x, quand x varie sur e_k, reste inférieure en norme à ε, c'est-à-dire que le diamètre de chaque e_k est inférieur à ε.

Cette condition implique que l'espace $\mathfrak{X}$ est séparable; et, inversement, si $\mathfrak{X}$ est séparable, une telle décomposition est possible. La condition γ a été généralisée par Fréchet lui-même et par Shafik Doss [S. Doss, I] et remplacée par :

γ'. Pour tout e_k de *mesure* $m(e_k)$ *positive* la variation de x, quand x varie sur e_k reste inférieure en norme à ε, c'est-à-dire que le diamètre de chaque e_k, tel que $m(e_k) > 0$, est $< \varepsilon$, ce qui équivaut à dire que X est *presque-sûrement* dans un sous-ensemble séparable $\mathfrak{X}_1$ de $\mathfrak{X}$.

La deuxième condition, condition F′, pour l'existence de l'e. m. est qu'il existe une valeur de ε, un choix des e_k pour cet ε, un choix ξ_k sur e_k tel que :

$$\sum_k \|\xi_k\| m(e_k) < +\infty.$$

Cette définition de l'e. m. est équivalente à la définition d'une intégrale d'une fonction à valeurs dans un espace de Banach, elle correspond à l'intégrale de Bochner [Bochner, I] alors que la définition que nous avons donnée correspond à l'intégrale de Pettis [Pettis, I, p. 277] qui inclut celle de Bochner.

THÉORÈME 1. — *Toute* F-*mesure est une* L-*mesure; plus généralement, si $f(x)$ est une fonction* numérique réelle et continue, *l'ensemble $\mathfrak{A}$ des x pour lesquels $f(x) < a$ (a, nombre réel quelconque) est mesurable (avec la* F-*mesure supposée donnée*).

1° $\mathfrak{A}$ *est ouvert.*— Si $x_0 \in \mathfrak{A}$, on peut trouver une sphère de centre x_0 tout entière incluse dans $\mathfrak{A}$; en effet, $x_0 \in \mathfrak{A}$ entraîne $a - f(x_0) > 0$.

Soit $d = a - f(x_0)$. Puisque f est continue, on peut trouver η tel que $\|x - x_0\| < \eta$ implique $|f(x) - f(x_0)| < \frac{d}{2}$, donc la sphère de centre $x_0$et de rayon η est incluse dans $\mathfrak{A}$.

2° $\mathfrak{A}$ *est* F-*mesurable.* — Soit $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, et soient e_k^n des e_k pour $\varepsilon = \varepsilon_n$; désignons par $e_k'^n$ les e_k^n qui sont inclus dans $\mathfrak{A}$, par $e_k''^n$ les autres.

Soit $\mathfrak{A}_n$ la somme des $e_k'^n$,

$$\mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{A}.$$

Soit $\mathfrak{B}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i$ (réunion des $\mathfrak{A}_i$),

$$\mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B}_{n+1}.$$

$\mathfrak{A}_n$ *est* F-*mesurable, donc $\mathfrak{B}_n$ l'est aussi*; désignons par $(\overline{e''})$ l'ensemble de tous les e_k^n, s'il en existe, qui sont de mesure nulle et ont au moins un point dans $\mathfrak{A}$ et au moins un point hors de $\mathfrak{A}$; ils sont au plus en infinité dénombrable, leur réunion $\bar{e}$ est donc de mesure nulle.

Posons alors :

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}\bar{e} \qquad (\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}).$$

Si $x_0 \in \mathfrak{A}'$, x_0 appartient à tous les $\mathfrak{B}_n$ à partir d'un certain rang; en effet : pour tout n, il y a un k, soit k_n, tel que $x_0 \in e^n_{k_n}$, or si n est assez grand, tout $e^n_{k_n}$ est un e'^n_k car si x varie sur $e^n_{k_n}$

$$\| x - x_0 \| \leqq \varepsilon_n = \frac{1}{n};$$

soit η le rayon d'une sphère de centre x_0 et tout entière incluse dans $\mathcal{A}$ (on a vu que $\eta > 0$ existe); si $\frac{1}{n} < \eta$, $e^n_{k_n}$ est inclus dans la sphère, donc inclus dans $\mathcal{A}$, c'est donc un e'^n_k. Donc

$$\mathcal{A}' \subset \mathcal{B} = \lim \mathcal{B}_n$$

(puisque tout $x \in \mathcal{A}'$ est $\in \mathcal{B}_n$ à partir d'un n)

$$\mathcal{B}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i \subset \mathcal{A},$$

donc

$$\mathcal{A}' \subset \mathcal{B} = \lim \mathcal{B}_n \subset \mathcal{A},$$

puisque $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ est de mesure nulle, $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ est de mesure nulle, $\mathcal{B}$ étant mesurable, $\mathcal{A}$ l'est aussi, et $m(\mathcal{A}) = m(\mathcal{B})$.

Le théorème s'étend immédiatement aux fonctions $f(x)$ complexes qui sont mesurables si les parties réelle et imaginaire sont séparément mesurables.

Les x^* sont des fonctions numériques, continues, donc toute F-mesure est une L-mesure.

Remarquons, en outre, que $\|x\|$ est aussi une fonction numérique continue, donc $\|x\|$ est F-mesurable. Dans le cas d'une L-mesure qui est aussi une F-mesure, $\|x\|$ est L-mesurable; ce que nous savions déjà (*cf.* p. 168), car alors $\mathfrak{X}$ est séparable. Dans le cas d'une F-mesure, F′ est une condition suffisante pour que $E[\|x\|]$ existe; c'est aussi une condition nécessaire [M. Fréchet, II, p. 494]. Avec une L-mesure, nous avons vu (p. 168) que si $\mathfrak{X}$ est non seulement séparable mais aussi réflexif, alors $\mathfrak{X}^*$ est séparable, l'existence de $E[\|X\|] = m$ entraîne celle de $E(X)$.

Théorème 2. — *Si l'on considère une* L-*mesure qui est une* F-*mesure satisfaisant à* F′, *l'e. m. de* X *existe et est égale à l'e. m. au sens de Fréchet.*

Soit $E_F(X)$ l'e. m. de X au sens de Fréchet,

$$E_F(X) = \lim_{\varepsilon \succ 0} \sum_k m(e_k)\xi_k;$$

on a

$$\sum_k m(e_k) \| \xi_k \| < +\infty.$$

Soit $x^\star$ une fonctionnelle linéaire (donc bornée) quelconque :

$$\begin{aligned} x^\star[E_F(X)] &= x^\star \left[\lim \sum_k m(e_k)\xi_k \right], \\ &= \lim \left[\sum_k m(e_k) x^\star(\xi_k) \right], \\ &= E[x^\star(X)]. \end{aligned}$$

Par conséquent, $E[x^\star(X)]$ existe et il existe un élément $E_F(X)$ tel que

$$x^\star[E_F(X)] = E[x^\star(X)].$$

Donc E(X) existe et :

$$\boxed{E(X) = E_F(X).}$$

CHAPITRE II.

ADDITION D'ÉLÉMENTS ALÉATOIRES.

I. — PRÉLIMINAIRES.

Nous considérerons toujours des éléments aléatoires X dont les valeurs appartiennent à un espace de Banach $\mathfrak{X}$ et tels que pour toute fonctionnelle linéaire — c'est-à-dire additive et continue, donc bornée — $x^\star$, $x^\star(X)$ est mesurable; nous allons maintenant étudier le problème de l'addition d'éléments aléatoires « indépendants » ou en suite « strictement stationnaire ». Il nous faut donc définir ces termes; nous rappellerons d'abord la définition et quelques propriétés de l'espace produit.

Espace produit. — Si A et B sont deux ensembles quelconques (pas nécessairement sous-ensembles d'un même espace), le produit $A \times B$ est l'ensemble de tous les couples ordonnés x, y, où $x \in A$ et $y \in B$.

Nous avons défini (chap. I, p. 165) le produit de deux espaces $\mathfrak{X}_1$ et $\mathfrak{X}_2$, en particulier le produit de deux espaces de Banach.

On définit de même le produit d'un nombre fini d'espaces $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots \times \mathcal{X}_n$ et, en particulier, le produit d'un nombre fini d'espaces de Banach. Le produit d'un nombre fini d'espaces séparables est séparable.

$\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$. …, $\mathcal{X}_n$ étant des espaces de Banach ainsi que leur produit $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots \times \mathcal{X}_n$, désignons par $\mathcal{X}_1^\star$, …, $\mathcal{X}_n^\star$, $\mathcal{X}^\star$ l'espace conjugué de $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, …, $\mathcal{X}_n$, $\mathcal{X}$ respectivement. Les espaces $\mathcal{X}^\star$ et $\mathcal{X}_1^\star \times \ldots \times \mathcal{X}_n^\star$ sont isomorphes [Banach, I, p. 192]. En particulier, le dual de $\mathcal{X}^2$ est isomorphe à $(\mathcal{X}^\star)^2$.

Si, outre les espaces $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ on se donne deux corps de Borel $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ de sous-ensembles de $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ respectivement, on désigne par $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ le corps de Borel de sous-ensembles de $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ engendré par tous les ensembles de la forme $A_1 \times A_2$, où $A_1 \in \mathcal{F}_1$ et $A_2 \in \mathcal{F}_2$.

L'espace mesurable $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ est le produit des deux espaces mesurables $(\mathcal{X}_1, \mathcal{F}_1)$ et $(\mathcal{X}_2, \mathcal{F}_2)$.

Si μ_1 et μ_2 sont deux mesures [6] définies sur $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ respectivement, il existe une mesure et une seule λ, telle que, pour tout ensemble $A_1 \times A_2 \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$:

$$\lambda(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \times \mu_2(A_2),$$

λ est appelée le produit des mesures μ_1, μ_2 et on la désigne par :

$$\lambda = \mu_1 \times \mu_2,$$

Éléments aléatoires indépendants. — Dans la théorie classique du Calcul des Probabilités, on dit que deux v. a. numériques X_1 et X_2 sont indépendantes si, quels que soient x_1 et x_2 :

$$\Pr[X_1 < x_1 ; X_2 < x_2] = \Pr[X_1 < x_1] \times \Pr[X_2 < x_2],$$

ce qui équivaut à dire que les événements $X_1 < x_1$ et $X_2 < x_2$ sont indépendants quels que soient x_1 et x_2, c'est-à-dire que la probabilité que $X_2 < x_2$ n'est pas modifiée par la connaissance que l'événement $X_1 < x_1$ est réalisé ou encore que $\Pr[X_2 < x_2 / X_1 < x_1] = \Pr[X_2 < x_2]$.

Considérons maintenant des éléments aléatoires X_1 et X_2 prenant leurs valeurs dans des espaces de Banach $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ respectivement, nous dirons

(6) Nous considérerons des mesures qui sont des mesures de probabilité, c'est-à-dire telles que $\mu(\mathcal{X}) = 1$. Le théorème est vrai si μ_1 et μ_2 sont des mesures « σ-finite » quelconques [P. R. Halmos, I, p. 144].

encore que ces é. a. sont indépendants si le fait que l'on a des renseignements sur les valeurs prises par l'un d'eux ne modifie pas la loi de Probabilité du second. Sans étudier quand et comment il serait possible de définir des probabilités conditionnelles, la généralisation immédiate de la définition de l'indépendance de deux v. a. donne une définition de l'indépendance d'é. a.

Soient μ_1, μ_2, λ, les mesures définies sur $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ respectivement et telles que :

$$\begin{aligned} \Pr[X_1 \in A_1] &= \mu_1(A_1) \qquad \text{pour tout} \quad A_1 \in \mathcal{F}_1, \\ \Pr[X_2 \in A_2] &= \mu_2(A_2) \qquad \text{pour tout} \quad A_2 \in \mathcal{F}_2, \\ \Pr[X_1 \in A_1;\ X_2 \in A_2] &= \lambda(A_1 \times A_2). \end{aligned}$$

Définition. — Deux éléments aléatoires X_1 et X_2 sont indépendants si, quels que soient $A_1 \in \mathcal{F}_1$ et $A_2 \in \mathcal{F}_2$:

$$\boxed{\Pr[X_1 \in A_1; X_2 \in A_2] = \Pr[X_1 \in A_1] \times \Pr[X_2 \in A_2]}$$

ou

$$\boxed{\lambda(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \times \mu_2(A_2),}$$

c'est-à-dire si, dans l'espace produit, la mesure est le produit des mesures.

La définition s'étend immédiatement à un nombre quelconque d'é. a. : X_1, X_2, $\ldots$, X_n sont mutuellement indépendants ou indépendants dans leur ensemble, si

$$\lambda[A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n] = \mu_1(A_1) \times \ldots \times \mu_n(A_n),$$
$$A_1 \times \ldots \times A_n \in \mathcal{F}_1 \times \ldots \times \mathcal{F}_n.$$

Suite strictement stationnaire. — Par analogie avec le cas des v. a. nous dirons que des é. a, X_n forment une suite strictement stationnaire si, quel que soit l'entier positif s, quels que soient les entiers n_1, n_2, $\ldots$, n_s et quel que soit l'entier h, la loi de probabilité de l'é. a. X_{n_1+h}, X_{n_2+h}, $\ldots$, X_{n_s+h} ne dépend pas de h.

II. — LOI FORTE DES GRANDS NOMBRES POUR LA CONVERGENCE FAIBLE.

THÉORÈME 1. — *Si $\mathfrak{X}^*$ est séparable, si X_1, X_2, $\ldots$, X_i, $\ldots$ est une suite indéfinie d'é. a. dans $\mathfrak{X}$, mutuellement indépendants et de* *même loi, si* $E[\| X_i \|] = M < +\infty$ [7] *et si* $E[X_i]$ *existe, — on peut alors, sans restriction, supposer* $E[X_i] = 0$ —

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

tend faiblement p. s. vers 0 *quand* n *tend vers l'infini.*

$\mathfrak{X}^*$ étant séparable, soit $\{x_k^*\}$ une suite dense dans $\mathfrak{X}^*$:

$$x_k^*(Y_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_k^*(X_i);$$

$x_k^*(X_i)$ est une v. a. numérique d'e. m. nulle; en effet, par définition même :

$$E[x_k^*(X_i)] = x_k^*[E(X_i)].$$

Or $E(X_i) = 0$, donc

$$x_k^*[E(X_i)] = x_k^*(\theta) = 0,$$

donc

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_k^*(X_i) \to 0$$

p. s. pour k donné, quelconque (loi classique des grands nombres).

Donc il est p. s. que pour tout k, $x_k^*(Y_n)$ converge vers zéro.

x^* étant une fonctionnelle linéaire quelconque de $\mathfrak{X}^*$, on a :

$$x^* = x_k^* + y_k^*$$

et k peut être choisi tel que $\| y_k^* \|$ soit aussi petit que l'on veut, puisque $\mathfrak{X}^*$ est séparable.

$$x^*(Y_n) = x_k^*(Y_n) + y_k^*(Y_n),$$
$$| x^*(Y_n) | \leq | x_k^*(Y_n) | + \| y_k^* \| \cdot \| Y_n \|.$$

Or :

$$\| Y_n \| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \| X_i \|$$

et :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \| X_i \| \quad \text{converge p. s. vers} \quad E[\| X_i \|] = M$$

(loi classique des grands nombres).

---

[7] $\mathfrak{X}^*$ séparable implique $\mathfrak{X}$ séparable et, par conséquent, $\| X \|$ mesurable.

Donc sur une épreuve, à l'exclusion d'épreuves de probabilité totale nulle,

$$|x^\star(Y_n)| \leqq |x_k^\star(Y_n)| + \|x^\star - x_k^\star\| \cdot (M + \varepsilon),$$

étant donné $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre k tel que

$$\|x^\star - x_k^\star\| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

et alors n assez grand pour que

$$|x_k^\star(Y_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour avoir

$$|x^\star(Y_n)| \leqq \varepsilon, \qquad \text{donc} \quad x^\star(Y_n) \to 0,$$

donc Y_n tend faiblement p. s. vers 0.

Théorème 2. — *Si* $\mathfrak{X}$ *est* séparable *et* réflexif, *si* $\ldots, X_1, \ldots, X_i, \ldots$ *forment une suite indéfinie dans les deux sens, strictement stationnaire — ce qui contient le cas particulier où les* X_i *sont indépendants et de même loi — si* $E[\|X_i\|] < +\infty$ *— et alors* $E(X_i)$ *existe — :*

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

tend faiblement p. s. vers une limite Y *quand* n *tend vers l'infini.*

Pour tout $x^\star$ donné, la suite de v. a. numériques $x^\star(X_i)$ est stationnaire et $E|x^\star(X_i)|$ existe, car :

$$|x^\star(X_i)| \leqq \|x^\star\| \cdot \|X_i\|$$

et par hypothèse $E[\|X_i\|]$ existe ; donc, théorème ergodique de Birkhoff,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x^\star(X_i) = x^\star\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = x^\star(Y_n)$$

tend p. s. vers une limite $\mathcal{L}(x^\star)$.

D'autre part,

$$\|Y_n\| \leqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\|X_i\|].$$

La suite des v. a. $\|X_i\|$ est stationnaire, $E[\|X_i\|]$ existe donc $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|X_i\|$

tend p. s. vers une limite, donc p. s. reste borné; donc sur presque toute épreuve u, $\|Y_n\|$ reste borné.

$\mathfrak{X}$ étant séparable et réflexif, $\mathfrak{X}^\star$ l'est aussi; soit $\{x_j^\star\}$ une suite dénombrable *dense*, dans $\mathfrak{X}^\star$; d'après ce qui précède, il est p. s. que tous les $x_j^\star(Y_n)$ convergent vers une limite $\mathcal{L}(x_j^\star)$.

Soit $x^\star$ quelconque dans $\mathfrak{X}^\star$; il existe $x_j^\star$ tel que $\|x^\star - x_j^\star\| < \varepsilon$; on a :

$$x^\star(Y_n) = x_j^\star(Y_n) + [x^\star - x_j^\star](Y_n). \tag{1}$$

Sauf épreuves de probabilité totale nulle, pour une épreuve u : $x_j^\star(Y_n)$ a une limite, quel que soit j, et $\|Y_n\|$ est borné, indépendamment de j; comme

$$|[x^\star - x_j^\star](Y_n)| \leqq \varepsilon \|Y_n\|$$

et que ε peut être arbitrairement petit, $x^\star(Y_n)$ converge.

Donc il est p. s. que tous les $x^\star(Y_n)$, simultanément, ont une limite $\mathcal{L}(x^\star)$. Pour prouver que Y_n converge faiblement p. s., il faut en outre montrer qu'il existe un $y \in \mathfrak{X}$, variable avec l'épreuve considérée, tel que :

$$x^\star(y) = \mathcal{L}(x^\star) \quad \text{pour tout } x^\star.$$

Or pour une épreuve considérée [$\mathcal{L}(x^\star)$ dépend de cette épreuve], $\mathcal{L}(x^\star)$ est une fonctionnelle additive de $x^\star$ sur $\mathfrak{X}^\star$ ce qui est évident. C'est, en outre, une fonctionnelle continue; pour le montrer, il faut prouver que

$$|\mathcal{L}(x^\star)| \to 0 \qquad \text{si} \quad \|x^\star\| \to 0.$$

Cela est vrai si $x^\star$ est un $x_j^\star$, car :

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(x_j^\star)| = \lim_{n\to\infty} |x_j^\star(Y_n)| &\leqq \limsup_{n\to\infty} |x_j^\star(Y_n)| \\ &\leqq \|x_j^\star\| \limsup_{n\to\infty} \|Y_n\| \end{aligned}$$

et l'on a vu que lim sup$\|Y_n\|$ est borné, indépendamment de j.

Pour un $x^\star$ quelconque, on a :

$$|\mathcal{L}(x^\star)| \leqq \limsup_{n} |x_j^\star(Y_n)| + \varepsilon \|Y_n\|,$$

d'après (1).

On vient de voir que lim sup$|x_j^\star(y_n)|$ tend vers zéro si $\|x_j^\star\| \to 0$, ce qui est le cas si $\|x^\star\| \to 0$; comme ε est arbitrairement petit $\mathcal{L}(x^\star) \to 0$ quand $\|x^\star\| \to 0$.

Donc $\mathcal{L}(x^\star)$ est une fonctionnelle linéaire sur $\mathfrak{X}^\star$ et alors $\mathfrak{X}$ étant réflexif pour toute fonctionnelle linéaire $\mathcal{L}(x^\star)$ sur $\mathfrak{X}^\star$ il existe un $y \in \mathfrak{X}$ tel que :

$$\mathcal{L}(x^\star) = x^\star(y) \quad \text{pour tout } x^\star,$$

donc Y_n converge p. s. faiblement vers une limite Y.

Remarque. — Nous avons vu que lorsque les X_i sont *indépendants* $\mathcal{L}(x^\star) = E[x^\star(X_i)]$, pour un $x^\star$ donné, c'est un nombre certain; mais lorsque les X_i forment une suite stationnaire quelconque pour $x^\star$ donné, $\mathcal{L}(x^\star)$ est une variable aléatoire.

III. — ÉTUDE D'UN ESPACE AUXILIAIRE $\overset{a}{\mathfrak{X}}$.

Soit $\mathfrak{X}$ un espace de Banach quelconque. Considérons des éléments aléatoires X, prenant leurs valeurs dans $\mathfrak{X}$, tels que $x^\star(X)$ est mesurable quel que soit $x^\star$ — c'est-à-dire des é. a. définis par une L-mesure sur $\mathfrak{X}$ — satisfaisant en outre à la condition C_α :

Condition C_α. — $\|X\|$ est mesurable et α étant un nombre réel donné $\geqq 1$, $E(\|X\|^\alpha) < +\infty$ (ce qui implique que X est un é. a. proprement dit).

A $\mathfrak{X}$ nous associons l'espace $\overset{a}{\mathfrak{X}}$ défini de la façon suivante :

Tout é. a. X dont les valeurs appartiennent à l'espace $\mathfrak{X}$, satisfaisant aux conditions précédentes sera considéré comme un point désigné par la même lettre X surmontée d'un a : $\overset{a}{X}$, d'un espace $\overset{a}{\mathfrak{X}}$ normé en posant :

$$(1) \qquad \|\overset{a}{X}\| = [E(\|X\|^\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

L'élément nul de $\overset{a}{\mathfrak{X}}$ est $\overset{a}{0}$ correspondant à X p. s. égal à 0.

L'addition et la multiplication par un scalaire seront définies dans $\overset{a}{\mathfrak{X}}$ de la façon suivante :

1° Si k est un nombre et si X définit $\overset{a}{X}$, kX définit $k\overset{a}{X}$.

2° Si X_1 et X_2 définissent $\overset{a}{X}_1$ et $\overset{a}{X}_2$ respectivement, $X_1 + X_2$ définit $\overset{a}{X}_1 + \overset{a}{X}_2$.

Or $\mathfrak{X}$ étant un espace de Banach, kX et $X_1 + X_2$ sont bien définis.

Enfin, $\overset{a}{\mathfrak{X}}$ sera distancié en posant :

$$d(\overset{a}{X}_1, \overset{a}{X}_2) = \|\overset{a}{X}_1 - \overset{a}{X}_2\|.$$

Avec cette définition, $\overset{a}{\mathfrak{X}}$ est donc vectoriel, distancié et nous allons voir que (1) constitue bien une norme; en effet :

1° $\|\overset{a}{X}\|$ est un nombre réel positif (car, bien entendu, c'est cette détermination qui sera prise dans $[E(\|X\|^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}})$;

2° $\|\overset{a}{X}\| = 0$ si et seulement si $\|X\| = 0$ p. s., c'est-à-dire si $X = 0$ p. s., donc si $\overset{a}{X} = \overset{a}{0}$;

3° $\|k\overset{a}{X}\| = [E(\|kX\|^\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}} = |k|[E(\|X\|^\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}} = |k|.\|\overset{a}{X}\|$;

4° $\|\overset{a}{X}_1 + \overset{a}{X}_2\| \leqq \|\overset{a}{X}_1\| + \|\overset{a}{X}_2\|$ parce que :

$$\|\overset{a}{X}_1 + \overset{a}{X}_2\| = [E(\|X_1 + X_2\|^\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}};$$

or :

$$\|X_1 + X_2\| \leqq \|X_1\| + \|X_2\|,$$

donc

$$E[\|X_1 + X_2\|] \leqq E[\|X_1\|] + E[\|X_2\|]$$

et alors

$$(E[\|X_1 + X_2\|^\alpha])^{\frac{1}{\alpha}} \leqq (E[\|X_1\|^\alpha])^{\frac{1}{\alpha}} + (E[\|X_2\|^\alpha])^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{[M. Fréchet, III].}$$

Enfin $\overset{a}{\mathfrak{X}}$ est *complet*, c'est-à-dire que si l'on a une suite de $\overset{a}{X}_n$ satisfaisant à la condition de Cauchy :

$$(2) \qquad \|\overset{a}{X}_{n+p} - \overset{a}{X}_n\| = [E(\|X_{n+p} - X_n\|^\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}} \to 0, \qquad \text{avec } \frac{1}{n}$$

uniformément en p, il existe un $\overset{a}{X}$ dans $\overset{a}{\mathfrak{X}}$ tel que :

$$\|\overset{a}{X}_n - \overset{a}{X}\| \to 0.$$

Au cours de la démonstration, nous utilisons le lemme suivant :

Lemme de Fatou. — *Si des v. a. numériques* X_n *sont positives ou nulles, si* $Y = \liminf_{n\to+\infty} X_n$ *et si* $\liminf_{n\to+\infty} E(X_n) = M < +\infty$, $E(Y)$ *existe et est* $\leqq M$ [P. R. Halmos, I, p. 113].

1° *Construction de* $\overset{a}{X}$. — Soient s_k des nombres tels que

$$s_k > 0, \qquad \sum_k s_k < +\infty$$

et ε_k des nombres positifs tels que

$$\sum_k \frac{\varepsilon_k}{s_k^\alpha} < +\infty$$

en vertu de (2) on peut définir une suite d'entiers croissants n_k tels que :

$$\text{(3)} \qquad E(\| X_{n_{k+p}} - X_{n_k} \|^\alpha) < \varepsilon_k \quad \text{pour tout } p,$$

en particulier

$$E(\| X_{n_{k+1}} - X_{n_k} \|^\alpha) < \varepsilon_k$$

et d'après l'inégalité de Bienaymé :

$$\Pr(\| X_{n_{k+1}} - X_{n_k} \| < s_k) > 1 - \frac{\varepsilon_k}{s_k^\alpha}.$$

D'après le théorème de Borel-Cantelli, p. s. à partir d'un certain rang les événements :

$$\| X_{n_{k+1}} - X_{n_k} \| < s_k$$

sont réalisés pour toutes les valeurs de k $\left(\text{parce que } \sum_k \frac{\varepsilon_k}{s_k^\alpha} < +\infty\right)$.

$\mathfrak{X}$ étant complet et $\sum_k s_k < +\infty$, il en résulte que X_{n_k} a une limite X lorsque $k \to +\infty$; on a :

$$\| X_{n_k} \| \to \| X \|,$$

les $E(\| X_{n_k} \|^\alpha)$ sont bornés, car les $\overset{a}{X}_n$ sont bornés, donc, d'après le lemme de Fatou, $E(\| X \|^\alpha) < +\infty$; en outre, $x^*(X)$ est limite p. s. de $x^*(X_{n_k})$, donc $x^*(X)$ est mesurable. Donc X définit un $\overset{a}{X}$ dans $\overset{a}{\mathfrak{X}}$.

2° En passant à la limite dans (3) ($p \to +\infty$), on a (lemme de Fatou),

$$\text{(4)} \qquad E(\| X - X_{n_k} \|^\alpha) < \varepsilon_k \qquad \text{ou} \qquad \left\| \overset{a}{X} - \overset{a}{X}_{n_k} \right\| \leqq (\varepsilon_k)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Étudions $\left\| \overset{a}{X}_n - \overset{a}{X} \right\|$, on a :

$$\left\| \overset{a}{X}_n - \overset{a}{X} \right\| \leqq \left\| \overset{a}{X}_n - \overset{a}{X}_{n_k} \right\| + \left\| \overset{a}{X}_{n_k} - \overset{a}{X} \right\|,$$

prenons $n_k > n$; si $n \to +\infty$ $\left\| \overset{a}{X}_{n_k} - \overset{a}{X} \right\| \to 0$, d'après (4) et $\left\| \overset{a}{X}_{n_k} - \overset{a}{X}_n \right\|$ aussi par hypothèse, donc $\overset{a}{X}_n \to \overset{a}{X}$.

C. Q. F. D.

On peut donc conclure :

Théorème. — *Sous les conditions indiquées,* $\overset{a}{\mathfrak{X}}$ *est un espace de Banach* ($\alpha \geqq 1$).

Définition. — Un $\overset{a}{X}$ de $\overset{a}{\mathfrak{X}}$ sera dit dénombrable si le X correspondant ne prend qu'une infinité dénombrable de valeurs distinctes x_1, x_2, ..., x_i, ... et si l'événement $X = x_i$ est probabilisable.

La terminologie suivante sera employée (théorie de la mesure au lieu de probabilité) : u désigne une épreuve; e un ensemble d'épreuves; $\mathfrak{U}$ l'ensemble de toutes les épreuves possibles; $\mu(e) =$ probabilité que l'épreuve réalisée appartienne à e; $\mu(e)$ est une mesure sur $\mathfrak{U}$. Si e_i est l'ensemble des u pour lesquelles $X = x_i$, dire que l'événement $X = x_i$ est probabilisable revient à dire que e_i est mesurable (avec μ); un élément aléatoire X dans $\mathfrak{X}$ peut se définir par une fonction de u : si à chaque u [sauf peut-être pour les u d'un ensemble e tel que $\mu(e) = 0$] on fait correspondre un x, soit $x(u)$, de $\mathfrak{X}$ cela définit un X : la probabilité que X appartienne à un ensemble $h \subset \mathfrak{X}$ est la mesure μ de l'ensemble e des u pour lesquelles $x(u) \in h$; pour que X définisse un $\overset{a}{X}$, il faut évidemment que $x(u)$ soit convenable : $x^\star[x(u)]$ mesurable μ et

$$\int \| x(u) \|^\alpha \, d\mu < +\infty;$$

si les $x(u)$ n'ont qu'une infinité dénombrable de valeurs distinctes : x_1, ..., x_i, ... et si l'ensemble e_i des u telles que : $x(u) = x_i$ est mesurable quel que soit i, $x^\star[x(u)]$ est automatiquement mesurable; il suffit alors que

$$\sum_i \mu(e_i) \| x_i \|^\alpha = \int \| x(u) \|^\alpha \, d\mu < +\infty$$

pour que X définisse un $\overset{a}{X}$ dénombrable.

Supposons $\mathfrak{X}$ séparable; soit $\{x_j\}$ une suite dénombrable dense dans $\mathfrak{X}$; ε étant donné positif quelconque, soit A_j l'ensemble des x tels que :

$$\| x - x_j \| \leqq \varepsilon$$

et soit B_j l'ensemble défini par :

$$B_1 = A_1, \qquad B_j = A_j - A_j(A_1 + A_2 + \ldots + A_{j-1}) \qquad (j \geqq 2).$$

Les B_j sont disjoints et naturellement

$$\sum_j B_j = \sum_j A_j = \mathfrak{X}.$$

Soit un $\overset{a}{X}(X)$, soit $\overset{a}{X}'(X')$ défini de la façon suivante :

$$X' = x_j \quad \text{quand} \quad X \in B_j.$$

X' n'a qu'une infinité dénombrable de valeurs; d'autre part $\|X - x_j\|$ est mesurable, c'est-à-dire que $\Pr[X \in A_j]$ existe, donc $\Pr[X \in B_j]$ existe, donc l'ensemble e_i des u pour lesquelles $X' = x_j$ est mesurable. En outre on a toujours :

$$\|X' - X\| \leq \varepsilon,$$

donc :

$$E(\|X' - X\|^\alpha) \leq \varepsilon^\alpha,$$

ce qui prouve que $E(\|X'\|^\alpha) < +\infty$ que $\overset{a}{X}'$ est dénombrable et aussi que $\overset{a}{X}'$ *est arbitrairement approché de* $\overset{a}{X}$ *dans* $\overset{a}{\mathfrak{X}}$.

Étude des fonctionnelles linéaires sur $\overset{a}{\mathfrak{X}}$ quand $\mathfrak{X}$ est séparable et réflexif, $\alpha > 1$. — Soit un $\overset{a}{X}(X)$ équivalent à une fonction $x(u)$ de u; à chaque u faisons correspondre un $x_u^\star$ fonction de u (ce qui équivaut à définir un élément aléatoire $X^\star$ dans $\mathfrak{X}^\star$); supposons $x_u^\star$ tel que :

1° $x_u^\star(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$ fixe est une fonction mesurable; il en résulte, comme on le verra (p. 186), que $\|x_u^\star\|$ est mesurable

2° $\int \|x_u^\star\|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} d\mu < +\infty.$

On prouve alors facilement que $x_u^\star[x(u)]$ est mesurable, pour tout $\overset{a}{X} \in \overset{a}{\mathfrak{X}}$ et que :

$$\int |x_u^\star[x(u)]|\, d\mu < +\infty$$

en vertu de l'inégalité de Hölder [F. Riesz, I, p. 44].

Donc :

$$\int x_u^\star[x(u)]\, d\mu = E[X^\star(X)] \tag{5}$$

existe pour tout $\overset{a}{X} \in \overset{a}{\mathfrak{X}}$.

Il est facile de voir que c'est une fonctionnelle linéaire de $\overset{a}{\mathrm{X}}$, la démonstration implique *seulement* que $\mathfrak{X}$ est *séparable*.

Réciproquement, si $\mathfrak{X}$ est *séparable et réflexif*, toute fonctionnelle linéaire $\overset{a}{\mathrm{X}}$ sur $\overset{a}{\mathfrak{X}}$ est de la forme (5). En effet :

A. Soit un $\overset{a}{\mathrm{X}}{}^\star$; considérons un $\overset{a}{\mathrm{X}}(\mathrm{X})$ tel que $\mathrm{X} = x$ pour $u \in e$, e mesurable, quelconque, et $\mathrm{X} = \theta$ pour $u \notin e$ (il est clair qu'un tel X définit un $\overset{a}{\mathrm{X}}$).

Pour e fixe et x variable, $\overset{a}{\mathrm{X}}{}^\star(\overset{a}{\mathrm{X}})$ est un nombre fonction de x; c'est évidemment une fonction additive, c'est aussi une fonction continue, car :

$$(6) \qquad \left|\overset{a}{\mathrm{X}}{}^\star(\overset{a}{\mathrm{X}})\right| \leqq \left\|\overset{a}{\mathrm{X}}{}^\star\right\| . \left\|\overset{a}{\mathrm{X}}\right\| = \left\|\overset{a}{\mathrm{X}}{}^\star\right\| . [\mathrm{E}(\|\mathrm{X}\|^\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}} = \left\|\overset{a}{\mathrm{X}}{}^\star\right\| . [\mu(e)]^{\frac{1}{\alpha}} \|x\|,$$

donc si $\|x\| \to 0$, $\left|\overset{a}{\mathrm{X}}{}^\star(\overset{a}{\mathrm{X}})\right| \to 0$, donc $\overset{a}{\mathrm{X}}{}^\star(\overset{a}{\mathrm{X}})$ est une fonctionnelle additive, continue $x^\star(e)$ faisant partie de $\mathfrak{X}^\star$; naturellement $x^\star(e)$ dépend de e; $x^\star(e; x)$ désignera le nombre obtenu en appliquant $x^\star(e)$, à $x \in \mathfrak{X}$. Ainsi, il existe une fonction d'ensemble $x^\star(e)$, à valeurs dans $\mathfrak{X}^\star$, définie pour tout e mesurable : *$x^\star(e)$ est une fonction d'ensemble additive.*

Soient e_1 et e_2 disjoints; x_1 et x_2 deux points de $\mathfrak{X}$; soit $\mathrm{X}_1 = x_1$ pour $u \in e_1$, $\mathrm{X}_1 = \theta$ pour $u \notin e_1$; $\mathrm{X}_2 = x_2$ pour $u \in e_2$ et $\mathrm{X}_2 = \theta$ pour $u \notin e_2$. $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2$ définit $\overset{a}{\mathrm{X}}$, X_1 et X_2 définissent $\overset{a}{\mathrm{X}}_1$ et $\overset{a}{\mathrm{X}}_2$ et :

$$\overset{a}{\mathrm{X}} = \overset{a}{\mathrm{X}}_1 + \overset{a}{\mathrm{X}}_2,$$

donc :

$$\overset{a}{\mathrm{X}}{}^\star(\overset{a}{\mathrm{X}}) = \overset{a}{\mathrm{X}}{}^\star(\overset{a}{\mathrm{X}}_1) + \overset{a}{\mathrm{X}}{}^\star(\overset{a}{\mathrm{X}}_2)$$

et d'après ce qui précède :

$$(7) \qquad \overset{a}{\mathrm{X}}{}^\star(\overset{a}{\mathrm{X}}) = x^\star(e_1; x_1) + x^\star(e_2; x_2).$$

Mais prenons $x_1 = x_2 = x$, alors :

$$\overset{a}{\mathrm{X}}{}^\star(\overset{a}{\mathrm{X}}) = x^\star(e_1 + e_2; x) \quad [\text{définition de } x^\star(e)]$$

et d'après (7) :

$$x^\star(e_1 + e_2; x) = x^\star(e_1; x) + x^\star(e_2; x) \quad \text{quel que soit } x,$$

ce qui revient à dire que :

$$x^{\star}(e_1+e_2)=x^{\star}(e_1)+x^{\star}(e_2);$$

$x^{\star}(e)$ est une fonction d'ensemble complètement additive.

Soit $e_1, \ldots, e_j, \ldots$ une famille dénombrable d'ensembles deux à deux disjoints et $x_1, \ldots, x_j, \ldots$ une suite de points dans $\mathfrak{X}$; soit X_j l'élément aléatoire qui vaut x_j si $u \in e_j$, θ si $u \notin e_j$

$$\overset{a}{Y}_n=\overset{a}{X}_1+\ldots+\overset{a}{X}_n \quad \text{appartient à } \overset{a}{\mathfrak{X}}.$$

Soit $\overset{a}{X}(X)$ défini par $X=\sum_j X_j$, si l'on prend les x_j tels que :

$$\sum_j \mu(e_j).\|x_j\|^{\alpha}=E(\|X\|^{\alpha})<+\infty,$$

$\overset{a}{X}$ appartient à $\overset{a}{\mathfrak{X}}$, il est dénombrable et

$$\overset{a}{X}=\lim_{n\to+\infty}\overset{a}{Y}_n,$$

$$\overset{a}{X}{}^{\star}\left(\overset{a}{X}\right)=\lim_{n\to+\infty}\overset{a}{X}{}^{\star}\left(\overset{a}{Y}_n\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}x^{\star}(e_j;\,x_j),$$

d'après ce qui précède.

Choisissons x_j sommet de $x^{\star}(e_j)$, c'est-à-dire

$$\|x_j\|=1 \qquad \text{et} \qquad x^{\star}(e_j;\,x_j)=\|x^{\star}(e_j)\|.$$

Un tel sommet existe si $\mathfrak{X}$ est *réflexif*. On a alors :

$$\overset{a}{X}{}^{\star}\left(\overset{a}{Y}_n\right)=\sum_{j=1}^{n}\|x^{\star}(e_j)\|.$$

Donc la série à termes positifs ou nuls $\sum_j \|x^{\star}(e_j)\|$ converge. Prenons maintenant les x_j tous égaux à x quelconque :

$$\overset{a}{X}{}^{\star}\left(\overset{a}{X}\right)=x^{\star}\left(\sum_j e_j;\,x\right) \qquad [\text{définition de } x^{\star}(e)]$$

et d'après ce qui précède :

$$x^{\star}\left(\sum_j e_j;\,x\right)=\sum_j x^{\star}(e_j;\,x),$$

où la série du second membre est absolument convergente, et ceci revient à dire que :

$$x^\star\left(\sum_j e_j\right)=\sum_j x^\star(e_j), \qquad \text{avec} \quad \sum_j \| x^\star(e_j) \| < +\infty.$$

B. *Rappel du théorème de Radon-Nicodym* [P. R. Halmos, I, p. 128]. — Si $L(e)$ est une fonction numérique d'ensemble, bornée, complètement additive et absolument continue, il existe une fonction numérique $\lambda(u)$ telle que l'on ait pour tout e mesurable :

$$L(e)=\int_e \lambda(u)\,d\mu.$$

$\lambda(u)$ est finie p. p. il est clair que l'on peut sans inconvénient l'altérer sur un ensemble de mesure nulle (ce qui empêche les démonstrations si $\mathfrak{X}$ n'est pas séparable).

D'après A, $x^\star(e)$ et, par suite, $x^\star(e;x)$ pour tout x fixe, est une fonction de l'ensemble e *complètement additive* et d'après (6) *absolument continue* [$\| x^\star(e) \|$ et $| x^\star(e;x) | \to 0$ si $\mu(e) \to 0$ pour x fixe quelconque].

D'après le théorème de Radon-Nicodym, il existe pour tout x un nombre fonction mesurable de u, et évidemment fonction de x, $K(u;x)$ tel que l'on ait pour tout e mesurable :

$$x^\star(e;x)=\int_e K(u;x)\,d\mu;$$

$\mathfrak{X}$ étant séparable soit (x_j) une suite dénombrable dense sur une sphère de rayon 1 de $\mathfrak{X}$; les nombres a_j intervenant par la suite sont supposés rationnels; tout point de la forme : $\sum_{j=1}^{k} a_j x_j$ (k fini) est dit être un x', l'ensemble $\mathfrak{X}'$ des x' est *dénombrable* et *dense* dans $\mathfrak{X}$; on peut supposer les x' dénombrés en une suite $\{x'_j\}$.

Soit $K_j(u)=K(u;x_j)$; pour tout $x\in\mathfrak{X}'$, donc pour tout x de la forme $\sum_{j=1}^{k} a_j x_j$, posons :

$$h(u;x)=\sum_{j=1}^{k} a_j K_j(u);$$

pour tout u fixe, $h(u; x)$ est une fonctionnelle évidemment additive de x, définie pour $x \in \mathfrak{X}$ et pouvant être infinie, mais seulement pour les u d'un ensemble de mesure nulle et indépendant de x [c'est l'ensemble des valeurs de u pour lesquelles l'un ou l'autre des $K_j(u)$ est infini]; posons :

$$\lambda(u) = \underset{x \in \mathfrak{X}'}{\text{b. s.}} \frac{|h(u; x)|}{\|x\|} \qquad (u \text{ fixe quelconque}).$$

Remarquons que pour un x fixe quelconque de $\mathfrak{X}'$, $\frac{|h(u; x)|}{\|x\|}$ est une fonction mesurable de u puisqu'il en est ainsi de $K_j(u)$; $\mathfrak{X}'$ étant dénombrable, $\lambda(u)$ est donc aussi mesurable [P. R. Halmos, I, p. 84].

Soit ε positif quelconque, on peut trouver un $x_1(u)$ tel que (par définition de la b. s.) :

a. $x_1(u) \in \mathfrak{X}'$;
b. $\|x_1(u)\| = 1$;
c. $|h[u; x_1(u)]| \geqq \lambda(u) - \varepsilon$.

Maintenant en posant :

$$x(u) = x_1(u) \qquad \text{si} \quad h[u; x_1(u)] > 0$$

et

$$x(u) = -x_1(u) \qquad \text{si} \quad h[u; x_1(u)] \leqq 0,$$

on obtient un $x(u)$ tel que :

a. $x(u) \in \mathfrak{X}'$;
b. $\|x(u)\| = 1$;
c. $h(u; x(u)) \geqq \lambda(u) - \varepsilon$.

Soit $\overset{a}{X}(X)$ défini par $x(u)$; je dis que c'est un dénombrable. D'abord $E(\|X\|^{\alpha}) = 1 < +\infty$ ($\|X\|$ étant $\equiv 1$ est mesurable); ensuite X ne prend qu'une infinité dénombrable de valeurs : les x'_j; il faut maintenant vérifier que l'ensemble e_j des u pour lesquelles $x(u) = x'_j$ est mesurable; soit e'_j l'ensemble des u pour lesquelles :

$$\frac{h(u; x'_j)}{\|x'_j\|} \geqq \lambda(u) - \varepsilon.$$

comme les deux membres de cette inégalité sont des fonctions mesurables de u, e'_j est mesurable; soient e''_j les ensembles définis par :

$$e''_1 = e'_1, \qquad e''_j = e'_j - e'_j(e'_1 + \ldots + e'_{j-1}).$$

Les e''_j sont mesurables. Choisissons $x(u) = x'_j$ si $u \in e''_j$; d'après ce qui précède les e''_j sont deux à deux disjoints et $\sum_j e''_j = \mathfrak{U}$, ce qui justifie l'opération; alors $e_j = e''_j$ est mesurable.

On a vu précédemment que quand X est dénombrable on a :

$$\overset{a}{\mathrm{X}}{}^{\star}(\overset{a}{\mathrm{X}}) = \sum_j x^{\star}(e_j;\, x'_j).$$

Mais d'après la définition de h :

$$x^{\star}(e_j;\, x'_j) = \int_{e_j} h(u);\, x'_j\, d\mu$$

et puisque sur e_j, $x'_j = x(u)$, on a :

$$\overset{a}{\mathrm{X}}{}^{\star}(\overset{a}{\mathrm{X}}) = \sum_j \int_{e_j} h[u;\, x(u)]\, d\mu = \int_{\mathfrak{U}} h[u;\, x(u)]\, d\mu \geqq \int_{\mathfrak{U}} [\lambda(u) - \varepsilon]\, d\mu;$$

comme ε est arbitrairement petit et que $\overset{a}{\mathrm{X}}{}^{\star}(\overset{a}{\mathrm{X}})$ est fini, on a :

$$\int_{\mathfrak{U}} \lambda(u)\, d\mu < +\infty$$

[$\lambda(u)$ est évidemment positif ou nul], donc $\lambda(u)$ est fini p. p. Donc, à part pour des u exceptionnels, $h(u;\, x)$ est, pour u fixe, une fonctionnelle additive continue sur $\mathfrak{X}'$; si $x \notin \mathfrak{X}'$ et si $x_j \in \mathfrak{X}'$ avec $x_j \to x$ puisque $\mathfrak{X}'$ est dense dans $\mathfrak{X}$, $h(u,\, x_j)$ converge d'après Cauchy; soit $h(u;\, x)$ sa limite : il est clair que $h(u;\, x)$ est une fonctionnelle additive définie sur $\mathfrak{X}$ continue et de norme $\lambda(u)$.

C. On va maintenant prouver que

$$\int_{\mathfrak{U}} \lambda(u)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\, d\mu < +\infty.$$

Le principe de la démonstration est emprunté à Landau [F. Riesz, I, p. 44] et à ce qui précède.

Supposons que $\int_{\mathfrak{U}} \lambda(u)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\, d\mu = +\infty$; on peut trouver alors une suite de nombres positifs croissants b_k tels que :

$$(8) \qquad \mathrm{B}_r = \int_{b_r}^{b_{r+1}} \lambda(u)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\, d\mu \geqq 2^{\frac{r}{\alpha-1}} \qquad \text{pour tout } r.$$

Soit $x_1(u)$ le sommet de $h(u;\, x)$ considérée comme fonctionnelle linéaire de x; et $x_2(u)$ le point, si u tel que $b_r \leqq \lambda(u) < b_{r+1}$, égal à :

$$\frac{\| h(u) \|^{\frac{1}{\alpha-1}}}{B_r} x_1(u).$$

On remarque que $\| x_2(u) \|$ est mesurable et que, d'après (8),

$$\int_{\mathfrak{U}} \| x_2(u) \|^\alpha d\mu < +\infty,$$

en outre :

$$h[u;\, x_2(u)] = \frac{\| h(u) \|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{B_r}.$$

Soit e'_j l'ensemble des u pour lesquelles on a à *la fois* :

$$h(u;\, x'_j) \geqq \frac{1}{2} \frac{\| h(u) \|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{B_r} \tag{9}$$

$$\| x_2(u) \|^\alpha \geqq \| x'_j \|^\alpha - \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0 \text{ quelconque}). \tag{10}$$

Les e'_j sont mesurables puisque $h[u;\, x'_j]$, $\| h(u) \|$, $\| x_2(u) \|$ sont mesurables; tout u appartient à l'un au moins des e'_j puisque pour u donné quelconque (sauf les u exceptionnels) il y a un x'_j arbitrairement approché de $x_2(u)$; soit e''_j défini par :

$$e''_1 = e'_1, \qquad e''_j = e'_j - e'_j\,(e'_1 + \ldots + e'_{j-1}).$$

Les e''_j sont mesurables, deux à deux disjoints et

$$\sum_j e''_j = \mathfrak{U}.$$

Si $u \in e''_j$, posons $x(u) = x'_j$ et soit $\overset{a}{\mathrm{X}}(\mathrm{X})$ l'élément aléatoire défini par $x(u)$; d'après ce qui précède, il est dénombrable car grâce à (10) :

$$\int_{\mathfrak{U}} \| x(u) \|^\alpha d\mu \leqq \varepsilon + \int_{\mathfrak{U}} \| x_2(u) \|^\alpha d\mu < +\infty.$$

On a, puisque sur e''_j, $x(u) = x'_j$:

$$\begin{aligned}
\overset{a}{\mathrm{X}}{}^\star\big(\overset{a}{\mathrm{X}}\big) &= \sum x^\star[e''_j;\, x'_j] = \sum_j \int_{e''_j} h[u;\, x'_j]\, d\mu \\
&= \sum_j \int_{e''_j} h[u;\, x(u)]\, d\mu = \int_{\mathfrak{U}} h[u;\, x(u)]\, d\mu = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{U}} \frac{\| h(u) \|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{B_r},
\end{aligned}$$

$$\overset{a}{\mathrm{X}}{}^\star\big(\overset{a}{\mathrm{X}}\big) \geqq \frac{1}{2} \sum_r \frac{1}{B_r} \int_{b_r}^{b_{r+1}-0} \| h(u) \|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} d\mu = \frac{1}{2} \sum_r 1 = +\infty,$$

ce qui est impossible, donc

$$\int_{\mathfrak{U}} \| h(u) \|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} d\mu < +\infty \qquad [\| h(u) \| = \lambda(u)].$$

D. Ce qui précède montre que si $\overset{a}{\mathrm{X}} - \mathrm{X} - x(u)$ est dénombrable, $h[u;\, x(u)]$ est une fonction mesurable de u ; soit un $\overset{a}{\mathrm{X}} - \mathrm{X} - x(u)$ quelconque ; soit $\overset{a}{\mathrm{X}}_n - \mathrm{X}_n - x_n(u)$ dénombrable qui tend vers $\overset{a}{\mathrm{X}}$ comme il a été indiqué précédemment, c'est-à-dire de telle sorte que $\| x_n(u) - x(u) \|$ tende vers zéro uniformément en u ; alors $h[u;\, x_n(u)]$ est mesurable et tend vers $h[u;\, x(u)]$ qui est donc mesurable (comme limite de fonctions mesurables).

On en conclut que :

$$\int_{\mathfrak{U}} h[u;\, x(u)]\, d\mu$$

a un sens pour $\overset{a}{\mathrm{X}} - \mathrm{X} - x(u)$ quelconque, car

$$\int_{\mathfrak{U}} | h[u;\, x(u)] |\, d\mu \leqq \int_{\mathfrak{U}} \lambda(u) \| x(u) \|\, d\mu.$$

Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Hölder pour voir que :

$$\int_{\mathfrak{U}} | h[u;\, x(u)] |\, d\mu < +\infty$$

sachant que

$$\int_{\mathfrak{U}} \lambda(u)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} d\mu < +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathfrak{U}} \| x(u) \|^{\alpha} d\mu < +\infty.$$

On a :

$$\overset{a}{\mathrm{X}}{}^{\star}\big(\overset{a}{\mathrm{X}}\big) = \int_{\mathfrak{U}} h[u;\, x(u)]\, d\mu ;$$

cela est vrai, on l'a vu, si $\overset{a}{\mathrm{X}}$ est dénombrable. Si $\overset{a}{\mathrm{X}}$ est quelconque, soit $\overset{a}{\mathrm{X}}_n$ dénombrable et tendant vers $\overset{a}{\mathrm{X}}$.

$\overset{a}{\mathrm{X}}{}^{\star}\big(\overset{a}{\mathrm{X}}_n\big)$ est égal à $\int_{\mathfrak{U}} h[u;\, x_n(u)]\, d\mu$ et tend vers $\overset{a}{\mathrm{X}}{}^{\star}\big(\overset{a}{\mathrm{X}}\big)$, or si $x_n(u) \to x(u)$ uniformément en u, comme cela est possible, d'après

$$\int_{\mathfrak{U}} \lambda(u)\, d\mu < +\infty,$$

il en résulte que

$$\int_{\mathfrak{U}} h[u;\, x_n(u)]\, d\mu \to \int_{\mathfrak{U}} h[u;\, x(u)]\, d\mu,$$

donc

$$\overset{''}{\mathrm{X}}{}^{\star}(\overset{''}{\mathrm{X}}) = \int_{\mathfrak{U}} h[u;\, x(u)]\, d\mu. \tag{11}$$

C. Q. F. D.

Le cas $\alpha = 1$ ne se distingue qu'à partir du paragraphe C, mais la démonstration est plus simple; dans ce cas $\alpha = 1$ et sous l'hypothèse $\mathfrak{X}^\star$ séparable, le résultat a été obtenu par Dieudonné [J. Dieudonné, I, p. 38]. En collaboration avec M. Fortet [R. Fortet et E. Mourier, I], nous avons pu étendre les résultats précédents pour $\alpha \geqq 1$ sous la seule hypothèse que $\mathfrak{X}$ est séparable.

IV. — LA LOI FORTE DES GRANDS NOMBRES POUR LA CONVERGENCE FORTE.

Rappel du théorème ergodique de Birkhoff ([8]). — Si des variables aléatoires numériques ordinaires X_s, sont en chaîne discontinue strictement stationnaire et si $E(X_s)$ existe, la moyenne arithmétique $Y_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ tend, lorsque n augmente indéfiniment presque sûrement vers une variable aléatoire limite Y.

Soit maintenant un élément aléatoire X prenant ses valeurs dans un espace de Banach séparable $\mathfrak{X}$, tel que $x^\star(X)$ soit mesurable quel que soit $x^\star$ fixe et que

$$E(\|X\|) < +\infty.$$

Considérons une suite de X_s discontinue et strictement stationnaire.

1er *Cas.* — Les X_s ne prennent qu'un nombre *fini* de valeurs distinctes $x_1, \ldots, x_k$ (les mêmes quel que soit s, à cause de la stationnarité).

Soit A_s^j la variable aléatoire (ordinaire), qui vaut 1 si $X_s = x_j$, 0 dans

([8]) On trouvera une démonstration du théorème de Birkhoff, qui reprend en la simplifiant, la démonstration originale de Birkhoff [Khintchine, I, p. 485] et une démonstration probabiliste simple dans [Kolmogoroff, II, p. 367].

le cas contraire. L'ensemble e_j^s des épreuves pour lesquelles $X_s = x_j$ est supposé mesurable;

$$\mu(e_j^s) = \Pr(X_s = x_j) = P_j$$

est indépendant de s à cause de la stationnarité. Pour j donné, les A_s^j forment une suite de variables aléatoires strictement stationnaire, donc

$$\text{p. s. } \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} A_s^j \underset{n\to\infty}{\to} \text{une limite } L^j.$$

Il en résulte immédiatement que presque-sûrement $\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} X_s$ converge fortement vers $\sum_{j=1}^{k} L^j x_j$ quant $n \to \infty$.

On voit plus précisément que :

$$E\left[\left\|\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_s - \sum_{1}^{k} L^j x_j\right\|\right] \to 0.$$

2^e^ *Cas.* — Les X_s ne prennent qu'une infinité *dénombrable* de valeurs distinctes $x_1, \ldots, x_j, \ldots$ (indépendantes de s) et l'événement $X_s = x_j$ est probabilisable.

Soit X_s^t l'élément aléatoire défini par $X_s^t = X_s$ si $X_s = x_1$, ou $x_2, \ldots,$ ou x_t; $X_s^t = 0$ si $X_s = x_{t+1}$, ou x_{t+2}, ou .... Les X_s^t sont du type étudié dans le 1^er^ cas; donc, sauf pour les s d'un ensemble e_t tel que $\mu(e_t) = 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} X_s^t = A_t$$

(une certaine limite dépendant du t considéré).

Posons

$$X_s = X_s^t + R_s^t;$$

R_s^t est égal à 0 ou à $x_{t+1}, x_{t+2}, \ldots$.

Si $P_j = \Pr[X_s = x_j]$,

$$E(\|R_s^t\|) = \sum_{j>t} P_j \|x_j\|.$$

L'hypothèse est que

$$\sum_j P_j \|x_j\| < +\infty,$$

donc

$$E(\| R_s^t \|) \to 0 \quad \text{si} \quad t \to +\infty,$$

$$(12) \qquad \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} X_s = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} X_s^t + \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} R_s^t,$$

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} R_s^t \right\| \leq \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} \| R_s^t \|.$$

Les $\| R_s^t \|$ pour un t donné quelconque forment une suite stationnaire de variables aléatoires ordinaires; donc, sauf si $u \in e'_t$,

$$\mu(e'_t) = 0, \qquad \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} \| R_s^t \| \underset{n \to +\infty}{\to} M_t (\geqq 0)$$

et, d'après le lemme de Fatou, puisque

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} \| R_s^t \| \right) = E(\| R_s^t \|) = \sum_{j>t} P_j \| x_j \| \quad \text{indépendant de } n$$

on a

$$E(M_t) \leqq \sum_{j>t} P_j \| x_j \| = K_t \geqq 0;$$

on peut donc trouver une suite de t croissants $t_1, t_2, \ldots, t_\nu, \ldots$, tels que

$$\sum_{\nu} K_{t_\nu} < +\infty,$$

alors, et d'après le théorème de Borel-Cantelli, la suite de variables aléatoires $M_{t_\nu} (\nu = 1, 2, \ldots)$ tend p. s. vers zéro.

Soient

$$e = \sum_t e_t, \qquad e' = \sum_t e'_t;$$

e'' l'ensemble des u exceptionnels pour lesquels M_{t_ν} ne tend pas vers zéro

$$\mu(e) = \mu(e') = \mu(e'') = 0,$$

soit enfin $e''' = e + e' + e''$ et soit u quelconque $\notin e'''$, on peut prendre ν

assez grand pour que, pour le u considéré, $M_{t_\nu} \leqq \varepsilon$, ν étant ainsi fixé, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\| R_s^{t_\nu} \| \leqq 2\varepsilon$$

et, par suite,

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} R_s^{t_\nu} \right\| \leqq 2\varepsilon$$

pour tout n assez grand.

D'autre part,

$$\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} X_s^{t_\nu} \to A_{t_\nu} \qquad \text{lorsque} \quad n \to +\infty;$$

d'après (12) écrite pour $t = t_\nu$ il en résulte, comme ε est arbitraire, que $\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} X_s$ a une limite $y(u)$ (convergence forte) pour cet u. Donc, pour tous les $u \notin e'''$ ou $\mu(e''') = 0$, donc $\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} X_s$ converge fortement p. s. Si Y est l'élément aléatoire défini par $y(u)$, on a pour tout $x^\star$ fixe $x^\star[y(u)]$ fonction mesurable de u, comme limite p. p. de $x^\star\left[\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} X_s\right]$ qui est mesurable. Alors $\mathfrak{X}$ étant séparable, $\|y(u)\|$ est mesurable et d'après le lemme de Fatou :

$$E(\|Y\|) = \int_{\mathfrak{U}} \|y(u)\|\, d\mu \leqq \liminf_n \int_{\mathfrak{U}} \left\| \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} X_s \right\| d\mu \leqq E(\|X_s\|) < +\infty,$$

et on a le théorème :

THÉORÈME. — *Si les X_s de la suite stationnaire ne prennent qu'une infinité dénombrable de valeurs distinctes $x_1, \ldots, x_j, \ldots$ et si l'événement $X_s = x_j$ est probabilisable,* p. s. $\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} X_s$ *tend fortement vers une limite* Y *qui est un élément aléatoire du type des X_s, c'est-à-dire que $x^\star(Y)$ est mesurable et que*

$$E(\|Y\|) < +\infty.$$

3ᵉ *Cas. — Les X_s ont des valeurs quelconques.*

$\mathfrak{X}$ étant séparable, soit $[x_j]$ une suite dénombrable dense dans $\mathfrak{X}$.

Soit ν un entier quelconque et A_j^ν l'ensemble des $x \in \mathfrak{X}$ pour lesquels $\|x - x_j\| \leqq \frac{1}{\nu}$.

Soit B_j^ν les ensembles définis de la façon suivante :

$$B_1^\nu = A_1^\nu, \qquad B_j^\nu = A_j^\nu - A_j^\nu(A_1^\nu + \ldots + A_{j-1}^\nu) \qquad (j \geqq 2).$$

Les B_j^ν sont disjoints et

$$\sum_j B_j^\nu = \sum_j A_j^\nu = \mathfrak{X}.$$

Soit $\mathcal{C}_\nu$ la transformation qui à tout $x \in \mathfrak{X}$ fait correspondre $y = \mathcal{C}_\nu(x)$ par la règle

$$y = x_j \quad \text{si} \quad x \in B_j^\nu.$$

On a toujours

$$\|\mathcal{C}_\nu(x) - x\| \leqq \frac{1}{\nu}.$$

Soit X un élément aléatoire, du type considéré, sur $\mathfrak{X}$ on lui fait correspondre l'élément aléatoire X^ν par

$$X^\nu = \mathcal{C}_\nu(X).$$

Il est clair que X^ν ne prend qu'une infinité dénombrable de valeurs distinctes, que $X^\nu = x_j$ est probabilisable, et que

$$E(\|X^\nu - X\|) \leqq \frac{1}{\nu},$$

plus précisément, on a *certainement*

$$\|X^\nu - X\| \leqq \frac{1}{\nu},$$

$X_1, X_2, \ldots, X_s, \ldots$, étant une suite strictement stationnaire, la suite des $X_s^\nu = \mathcal{C}_\nu(X_s)$ est strictement stationnaire, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} X_s = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} X_s^\nu + \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}[X_s^\nu - X_s].$$

On a *certainement*

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}[X_s^\nu - X_s]\right\| \leqq \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\|X_s^\nu - X_s\| \leqq \frac{1}{\nu} \quad \text{quel que soit } n.$$

Pour un ν donné quelconque, mais fixe, on a vu que $\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} X_s^\nu$ converge fortement p. s. (2^e cas précédent), c'est-à-dire sauf si

$$u \in e_\nu, \qquad \text{avec} \qquad \mu(e_\nu) = 0.$$

Si l'on considère un

$$u \notin e = \sum_\nu e_\nu, \qquad \mu(e) = 0,$$

$\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} X_s^\nu$ converge quel que soit ν, il en résulte que $\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} X_s$ converge fortement p. s. vers une limite Y [il est clair que $x^\star(Y)$ est mesurable et $E(\|Y\|) < +\infty$ comme dans le cas précédent], d'où :

Loi forte des grands nombres. — Si $\mathfrak{X}$ est séparable, si tout $x^\star(X_s)$ est mesurable et $E(\|X_s\|) < +\infty$, si $X_1, X_2, \ldots, X_s, \ldots$ forment une suite discontinue strictement stationnaire, p. s. la moyenne temporelle $\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} X_s$ tend *fortement* vers une limite Y qui est un élément aléatoire du type des X_s.

Remarque I. — On n'a pas supposé $\mathfrak{X}$ réflexif, on n'a pas supposé l'existenee de $E(X_s)$. Remarquons que si $\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} X_s$ converge *fortement, a fortiori* il converge *faiblement*. D'autre part, si les X_s sont *indépendants*, de même loi (cas particulier d'une suite stationnaire), les $x^\star(X_s)$ le seront aussi; de plus

$$|x^\star(X_s)| \leqq \|x^\star\|.\|X_s\|,$$

donc $E\|X_s\| < +\infty$ entraîne l'existence de $E[x^\star(X_s)]$. Or, d'après le théorème précédent,

$$x^\star\left[\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} X_s\right] = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} x^\star(X_s) \to \text{p. s. } x^\star(Y),$$

mais, d'après le théorème de Kolmogoroff,

$$\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} x^\star(X_s) \to \text{p. s. } E[x^\star(X_s)],$$

donc

$$E[x^*(X_s)] = x^*(Y).$$

Donc, par définition même de $E(X_s)$, X_s a une espérance mathématique Y, donc :

THÉORÈME. — *Quand* $\mathfrak{X}$ *est* séparable, $E(\|X\|) < +\infty$ *entraîne l'existence de* $E(X)$.

Ce théorème est un intéressant théorème d'existence de l'intégrale de Pettis; il généralise le théorème du chapitre I (p. 168), où $\mathfrak{X}$ était supposé non seulement séparable, mais aussi réflexif.

Remarque II. — Quand les X_s sont indépendants de même loi, la limite Y de $\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} X_s$ est l'espérance mathématique $E(X_s)$.

V. — LOI DES GRANDS NOMBRES EN MOYENNE D'ORDRE α.

Théorème ergodique de Yosida et Kakutani [Yosida et Kakutani, I]. — Soit T une opération linéaire bornée qui transforme un espace de Banach $\mathfrak{X}$ en lui-même et telle que $\|T^n\| \leqq C$ pour $n = 1, 2, \ldots$ (C étant un nombre fixe indépendant de n).

Si pour tout $x \in \mathfrak{X}$, la suite $\{x_n\}$, où

$$x_n = \frac{1}{n}(T + T^2 + \ldots + T^n)x,$$

$n = 1, 2, \ldots$ contient une sous-suite qui converge faiblement vers un point $\bar{x} \in \mathfrak{X}$, la suite $\{x_n\}$ converge *fortement* vers ce point $\bar{x}$.

Si l'on désigne par T_1 l'opération $x \to \bar{x}$, T_1 est une opération linéaire bornée qui transforme $\mathfrak{X}$ en lui-même et

$$TT_1 = T_1T = T_1^2 = T_1.$$

Nous allons appliquer ce théorème :

Soit $\{X_i\}$ $i = (0 \pm 1 \pm 2 \pm \ldots)$ une suite strictement stationnaire d'éléments aléatoires à valeurs dans un espace de Banach quelconque $\mathfrak{X}$ tels que

$$E(\|X_i\|^\alpha) < +\infty;$$

soient $\overset{a}{\mathrm{X}}_i$ les éléments correspondants de $\overset{a}{\mathfrak{X}}$, ces $\overset{a}{\mathrm{X}}_i$ définissent dans $\overset{a}{\mathfrak{X}}$ une variété linéaire fermée $\overset{a}{\mathfrak{X}}'$ qui est elle-même un espace de Banach (c'est une partie de $\overset{a}{\mathfrak{X}}$, c'est même une partie séparable).

Nous aurons besoin de connaître la forme des fonctionnelles linéaires sur cette variété linéaire; or, au paragraphe III, nous avons trouvé la forme générale des fonctionnelles linéaires sur $\overset{a}{\mathfrak{X}}$; mais, compte tenu du théorème de l'extension des fonctionnelles linéaires sur un sous-espace linéaire à l'espace entier avec conservation de la norme [E. Hille, I], nous pourrons utiliser ce résultat.

Les $\overset{a}{\mathrm{X}}$ de la forme $\sum_{i=1}^{k} a_i \overset{a}{\mathrm{X}}_i$, où k est fini, quelconque, les a_i étant des nombres quelconques, forment une partie non fermée $\overset{a}{\mathfrak{X}}''$ de $\overset{a}{\mathfrak{X}}'$; $\overset{a}{\mathfrak{X}}'$ est la fermeture de $\overset{a}{\mathfrak{X}}''$. Si $\overset{a}{\mathrm{X}}$ est dans $\overset{a}{\mathfrak{X}}''$, donc de la forme

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \overset{a}{\mathrm{X}}_i,$$

posons

$$\overset{a}{\mathrm{Z}} = \mathrm{T}\left(\overset{a}{\mathrm{X}}\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i \overset{a}{\mathrm{X}}_{i+1}; \tag{13}$$

$\mathrm{T}\left(\overset{a}{\mathrm{X}}\right)$ est une opération visiblement additive, en vertu de la stationnarité, on a

$$\mathrm{E}(\|\mathrm{Z}\|^\alpha) = \mathrm{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{k} a_i \mathrm{X}_{i+1}\right\|^\alpha\right) = \mathrm{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{k} a_i \mathrm{X}_i\right\|^\alpha\right) = \mathrm{E}(\|\mathrm{X}\|^\alpha),$$

donc

$$\|\overset{a}{\mathrm{Z}}\| = \|\overset{a}{\mathrm{X}}\|. \tag{14}$$

Il faut voir si $\overset{a}{\mathrm{Z}}$ est défini univoquement. Si $\overset{a}{\mathrm{X}}$ n'admet qu'une représentation de la forme $\sum_{i=1}^{k} a_i \overset{a}{\mathrm{X}}_i$, cela est évident; mais supposons que $\overset{a}{\mathrm{X}}$ admette deux représentations de cette forme, distinctes, par exemple :

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \overset{a}{\mathrm{X}}_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{k} a'_i \overset{a}{\mathrm{X}}_i$$

(on peut toujours supposer que k est le même pour les deux formes); on obtiendra avec (13) deux transformées de $\overset{a}{\mathrm{X}}$, $\overset{a}{\mathrm{Z}}$ et $\overset{a}{\mathrm{Z}}'$ donnés par

$$\overset{a}{\mathrm{Z}} = \sum_{i=1}^{k} a_i \overset{a}{\mathrm{X}}_{i+1}, \qquad \overset{a}{\mathrm{Z}}' = \sum_{i=1}^{k} a'_i \overset{a}{\mathrm{X}}_{i+1}.$$

Mais $\overset{a}{\mathrm{Z}}$ et $\overset{a}{\mathrm{Z}}'$ ne sont pas distincts, en effet,

$$\overset{a}{\mathrm{X}} = \sum_{i=1}^{k} a_i \overset{a}{\mathrm{X}}_i = \sum_{i=1}^{k} a' \overset{a}{\mathrm{X}}_i$$

implique que, en posant $b_i = a_i - a'_i$,

$$\mathrm{E}\left(\left\| \sum_{i=1}^{k} b_i \mathrm{X}_i \right\|^{\alpha} \right) = 0.$$

Donc, en vertu de la stationnarité,

$$\mathrm{E}\left(\left\| \sum_{i=1}^{k} b_i \mathrm{X}_{i+1} \right\|^{\alpha} \right) = 0,$$

ce qui revient à dire que $\overset{a}{\mathrm{Z}} = \overset{a}{\mathrm{Z}}'$.

Soit maintenant $\overset{a}{\mathrm{X}}$ quelconque dans $\overset{a}{\mathfrak{X}}$; il y a une suite de $\overset{a}{\mathrm{X}}_i \in \mathfrak{X}''$ tendant vers $\overset{a}{\mathrm{X}}$, ce qui implique d'après Cauchy que :

$$\text{quand} \quad n \to \infty \quad \left\| \overset{a}{\mathrm{X}}_{n+p} - \overset{a}{\mathrm{X}}_n \right\| \to 0,$$

avec $\frac{1}{n}$, uniformément par rapport à p, on a alors

$$\left\| \mathrm{T}\left(\overset{a}{\mathrm{X}}_{n+p}\right) - \mathrm{T}\left(\overset{a}{\mathrm{X}}_n\right) \right\| = \mathrm{T}\left(\overset{a}{\mathrm{X}}_{n+p} - \overset{a}{\mathrm{X}}_n\right) = \left\| \overset{a}{\mathrm{X}}_{n+p} - \overset{a}{\mathrm{X}}_n \right\| \quad \text{d'après (14)}.$$

Donc $\mathrm{T}\left(\overset{a}{\mathrm{X}}_n\right)$ converge vers une limite que, par définition, nous appellerons $\mathrm{T}\left(\overset{a}{\mathrm{X}}\right)$.

$\mathrm{T}\left(\overset{a}{\mathrm{X}}\right)$ dépend de $\overset{a}{\mathrm{X}}$, mais évidemment pas de la suite $\overset{a}{\mathrm{X}}_n$; $\mathrm{T}\left(\overset{a}{\mathrm{X}}\right)$ est alors une transformation définie sur $\overset{a}{\mathfrak{X}}$; il est immédiat qu'elle est linéaire, continue et que

$$\|\mathrm{T}\| = 1 \qquad \left(\text{plus précisément : } \left\|\mathrm{T}\left(\overset{a}{\mathrm{X}}\right)\right\| = \left\|\overset{a}{\mathrm{X}}\right\|\right)$$

et, par suite, pour tout n,

$$\|\mathrm{T}^n\| = 1.$$

Le théorème de Yosida et Kakutani nous donne alors l'énoncé suivant : soit $\overset{a}{X} \in \overset{a}{\mathfrak{X}}'$; si $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T^i(\overset{a}{X})$ converge faiblement, il converge *fortement*.

En particulier, prenons

$$\overset{a}{X} = \overset{a}{X}_1, \qquad T(\overset{a}{X}) = \overset{a}{X}_2, \qquad \ldots, \qquad T^n(\overset{a}{X}) = \overset{a}{X}_{n+1},$$

nous obtenons : si

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T^i(\overset{a}{X}) = \frac{1}{n}(\overset{a}{X}_2 + \overset{a}{X}_3 + \ldots + \overset{a}{X}_{n+1})$$

converge *faiblement*, il converge *fortement*, ce qui revient à dire qu'il existe un élément aléatoire L tel que

$$\text{(15)} \qquad E\left(\left\|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - L\right\|^{\alpha}\right) \to 0.$$

Il suffit d'ailleurs qu'il y ait une sous-suite de $\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n+1} \overset{a}{X}_i$ qui converge faiblement; ceci aura lieu, par exemple, si $\overset{a}{\mathfrak{X}}'$ est faiblement compact, donc en particulier si $\overset{a}{\mathfrak{X}}'$ est uniformément convexe.

Notons que l'existence de $E(X_i)$ n'est pas supposée, de même $E(L)$ n'existe pas forcément, mais si $\mathfrak{X}$ est séparable et réflexif, $E(X_i)$ et $E(L)$ existent (*cf.* chap. I, p. 168); de toutes façons, quand $E(L)$ existe, L ne se réduit pas forcément à l'élément presque certain $E(L)$. Dans tous les cas on a les propriétés suivantes :

Propriété 1. — Si $E(X_i)$ et $E(L)$ existent — donc en particulier si $\mathfrak{X}$ est séparable et réflexif — on a $E(L) = E(X_i)$. En effet, on ne diminue pas la généralité en supposant $E(X_i) = 0$; alors

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - L\right) = -E(L)$$

existe, mais

$$\left\|E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - L\right)\right\| \leq E\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - L\right\|$$

qui tend vers zéro d'après (15); donc

$$E(L) = \theta = E(X_i).$$

Propriété 2. — Lorsque (15) s'applique, quel que soit $x^\star \in \mathfrak{X}^\star$,

$$x^\star\left[\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x^\star(X_i).$$

tend en moyenne d'ordre α, donc en probabilité, vers $x^\star(L)$; $E[x^\star(X_i)]$ existe, parce que $E\|X_i\|^\alpha < +\infty$; si les X_i sont *indépendants* les $x^\star(X_i)$ le sont, alors, théorème de Kolmogoroff,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x^\star(X_i) \to \text{p. s. vers } E[x^\star(X_i)]$$

donc

$$x^\star(L) = \text{p. s. } E[x^\star(X_i)],$$

autrement dit

$$x^\star(L) = E[x^\star(X_i)],$$

sauf pour les u appartenant à un ensemble e de μ mesure nulle, mais e peut dépendre de $x^\star$.

Mais supposons $\mathfrak{X}^\star$ séparable et soit $\{x_j^\star\}$ une suite dénombrable dense dans $\mathfrak{X}^\star$, il existe e indépendant de j avec $\mu(e) = 0$ tel que pour tout $u \notin e$ on a :

$$x_j^\star(L) = E[x_j^\star(X_i)].$$

Soit $x^\star$ quelconque et $x_j^\star$ telle que $\|x^\star - x_j^\star\| \leqq \varepsilon$, il existe un ensemble e' tel que $\mu(e') = 0$ et que si $u \notin e'$, $\|L\|$ est finie [puisque $E(\|L\| < +\infty$], on a :

$$|E[x^\star(X_i)] - E[x_j^\star(X_i)]| < \varepsilon E(\|X_i\|),$$

$$\begin{aligned} |x^\star(L) - E[x^\star(X_i)]| &\leqq |(x^\star - x_j^\star)(L) + x_j^\star(L) - E[x_j^\star(X_i)] \\ &\quad + E[x_j^\star(X_i)] - E x^\star(X_i)]| \\ &\leqq \varepsilon E\|X_i\| + E\|L\| + |x_j^\star(L) - E[x_j^\star(X_i)]|; \end{aligned}$$

si $u \notin e' + e$,

$$x_j^\star(L) - E[x_j^\star(X_i)] = 0,$$

il vient

$$|x^\star(L) - E[x^\star(X_i)]| \leqq \varepsilon\|L\| + \varepsilon E(\|X_i\|)$$

et comme ε est arbitrairement petit,

$$x^\star(L) = E[x^\star(X_i)].$$

Comme un point L de $\mathfrak{X}$ est entièrement déterminé par l'ensemble des valeurs $x^\star(\mathrm{L})$, L est un e. a. presque certain l satisfaisant à :

$$x^\star(l) = \mathrm{E}[x^\star(\mathrm{X}_i)]$$

pour tout $x^\star$, ce qui prouve que les X_i ont une espérance mathématique l et que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i$ tend « en moyenne d'ordre α », donc en probabilité vers l.

Application 1. — $\mathfrak{X}$ est la droite réelle, $\overset{a}{\mathfrak{X}}$ et $\overset{a}{\mathfrak{X}}'$ sont alors l'espace L^α qui est uniformément convexe si $\alpha > 1$, car une variable aléatoire équivaut à une fonction numérique $f(u)$, alors (15) s'applique (le théorème de Yosida se réduit dans ce cas au théorème de Birkhoff); d'où le théorème :

Soit une suite de v. a. strictement stationnaire $\{\mathrm{X}_i\}$, *avec*

$$\mathrm{E}(\|\mathrm{X}_i\|^\alpha) < +\infty \qquad (\alpha > 1),$$

sa moyenne temporelle $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i$ *converge en moyenne d'ordre* α.

Le résultat est connu pour $\alpha = 2$ sous la condition moins stricte de la stationnarité d'ordre 2 seulement, mais ici aussi pour $\alpha = 2$ ou α pair, et peut-être pour α quelconque on pourrait éviter la stationnarité stricte; pour α quelconque, le théorème est peut-être nouveau.

Il s'étend immédiatement au cas où les X_i sont des v. a. à plusieurs dimensions.

Application 2. — Supposons que $\mathfrak{X}$ est l'espace L^α; un X_i est une fonction *numérique* $f(t)$ d'une variable t telle que

$$\int |f(t)|^\alpha \, dt < +\infty,$$

mais cette fonction f varie avec u; on peut donc considérer une fonction $f(u;\, t)$ des deux variables u, t; on a :

$$\int |f(u;\, t)|^\alpha \, dt < +\infty,$$

mais l'hypothèse $\mathrm{E}(\|\mathrm{X}\|^\alpha) < +\infty$, étant donné que

$$\|\mathrm{X}\|^\alpha = \int |f(u;\, t)|^\alpha \, dt$$

équivaut à

$$\iint |f(u;t)|^{\alpha}\,dt\,d\mu < +\infty$$

qui montre que $\overset{a}{\mathfrak{X}}$ est l'espace L^{α} des fonctions numériques des deux variables u, t, c'est donc un espace uniformément convexe et (15) s'applique.

Ce cas qui est le cas extrêmement important des fonctions aléatoires est d'ailleurs un cas particulier du suivant, puisque $\mathfrak{X} = L^{\alpha}$ est réflexif, $\alpha > 1$.

Application 3. — Supposons $\mathfrak{X}$ *séparable* et *réflectif*, (11) est valable, soit :

$$Y_n = \frac{X_2 + \ldots + X_{n+1}}{n}$$

et soit $y_n(u)$ la valeur de Y_n pour l'épreuve u. On va montrer que $\overset{a}{Y}_n$ converge faiblement. Sauf des u exceptionnels, d'après un théorème précédent, $y_n(u)$ converge fortement, donc faiblement vers une limite $y(u)$, ce qui implique que :

$$h[u;\, y_n(u)] \to h[u;\, y(u)];$$

$h[u;\; y(u)]$ est une fonction mesurable de u, comme limite de $h[u;\; y_n(u)]$ qui est mesurable (*voir* précédemment). On va montrer que :

$$\overset{a}{X}{}^{\star}(\overset{a}{Y}_n) = \int_{\mathfrak{U}} h[u;\, y_n(u)]\,d\mu \to \int_{\mathfrak{U}} h[u;\, y(u)]\,d\mu. \tag{16}$$

Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des u pour lesquels on n'a pas p. s. $\|y_n(u)\| \leq A$; comme $y_n(u)$ tend, sauf pour des u exceptionnels, vers une limite $y(u)$, les $y_n(u)$ sont bornés uniformément en n; donc si l'on prend A assez grand, $\mu(\mathfrak{A}) \leq \varepsilon$; on a :

$$\left| \int_{\mathfrak{A}} h[u;\, y_n(u)]\,d\mu \right| \leq \int_{\mathfrak{A}} \lambda(u)\,\|y_n(u)\|\,d\mu$$

et d'après l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{A}} \lambda(u)\|y_n(u)\|\,d\mu &\leq \left[\int_{\mathfrak{A}} \lambda(u)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\,d\mu\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left[\int_{\mathfrak{A}} \|y_n(u)\|^{\alpha}\,d\mu\right]^{\frac{1}{\alpha}} \\ &\leq \left[\int_{\mathfrak{A}} \lambda(u)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\,d\mu\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left[\int_{\mathfrak{U}} \|y_n(u)\|^{\alpha}\,d\mu\right]^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned} \tag{17}$$

Mais

$$\left[\int_{\mathfrak{U}} \|y_n(u)\|^\alpha d\mu\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \|\overset{\alpha}{Y}_n\| = [E(\|X_i\|^\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}} < +\infty$$

et indépendant de n; d'autre part

$$\int_{\mathfrak{U}} \lambda(u)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} d\mu < +\infty;$$

si l'on remplace A par $A' > A$, $\mathfrak{A}$ est remplacé $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ et $\mu(\mathfrak{A}) \to 0$ si $A \to +\infty$; il en résulte qu'en prenant A assez grand (ε assez petit), $\int_{\mathfrak{A}} \lambda(u)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} d\mu$ est arbitrairement petit, donc aussi $\int_{\mathfrak{A}} h[u, y_n(u)]\, d\mu$ et cela uniformément *en* n. Simultanément et pour les mêmes raisons $\int_{\mathfrak{A}} h[u; y(u)]\, d\mu$ est petit, car quel que soit n :

$$\int_{\mathfrak{A}} |h[u; y_n(u)]|\, d\mu \leq \left[\int_{\mathfrak{U}} \lambda(u)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} d\mu\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} [E(\|X_i\|^\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}} = C \quad \text{(Hölder)},$$

$$|h[u, y_n(u)]| \to \text{p. p. vers } |h[u; y(u)]|;$$

donc (Lemme de Fatou)

$$\int_{\mathfrak{U}} |h[u; y(u)]|\, d\mu < C, \tag{18}$$

donc quand $\mu(\mathfrak{A}) \to 0$,

$$\int_{\mathfrak{A}} h[u; y(u)]\, d\mu \to 0,$$

De même, soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des u pour lesquels on a $\lambda(u) > B$, où B est un nombre positif; si l'on remplace B par $B' > B$; $\mathcal{B}$ est remplacé par $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ et $\mu(\mathcal{B}) \to 0$ si $B \to +\infty$ parce que

$$\int_{\mathfrak{U}} \lambda(u)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} d\mu < +\infty$$

alors

$$\int_{\mathcal{B}} \lambda(u)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} d\mu \to 0.$$

Il résulte alors de (17) que

$$\int_{\mathcal{B}} h[u; y_n(u)]\, d\mu$$

est petit, uniformément en n quand B est grand, de même d'après (18)

$$\int_{\mathcal{B}} h[u; y(u)]\, d\mu \quad \text{est petit.}$$

Soit $\mathcal{D} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, sur $\mathfrak{U} - \mathcal{D}$, on a : $\lambda(u) \leqq \mathrm{B}$,

$$\text{b. s. } \|y_n(u)\| \leqq \mathrm{A}, \qquad \text{donc} \quad |h[u, y_n(u)]| \leqq \mathrm{AB}.$$

On a alors le droit de passer à la limite sous le signe $\int$ et d'écrire :

$$\int_{\mathfrak{U}-\mathcal{D}} h[u, y(u)]\, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathfrak{U}-\mathcal{D}} h[u, y_n(u)]\, d\mu.$$

Mais ce qui précède montre alors que, puisque A et B peuvent être arbitrairement grands,

$$\int_{\mathfrak{U}} h[u; y(u)]\, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathfrak{U}} h[u; y_n(u)]\, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \overset{a}{\mathrm{X}}{}^{\star}(\overset{a}{\mathrm{Y}}_n).$$

Maintenant, soit Y l'é. a. défini par $\mathrm{Y} = y(u)$ pour l'épreuve u, montrons que Y défini un $\overset{a}{\mathrm{Y}} \in \overset{a}{\mathfrak{X}}$, c'est-à-dire que :

a. $$x^{\star}(\mathrm{Y}) = x^{\star}[y(u)]$$

est une fonction mesurable de u pour tout $x^{\star}$ fixe et $\|\mathrm{Y}\|$ est mesurable. Le premier point résulte de ce que p. p. $x^{\star}[y(u)] = \lim x^{\star}[y_n(u)]$ et que $x^{\star}[y_n(u)]$ est mesurable. $\mathfrak{X}$ étant séparable, il en résulte que $\|\mathrm{Y}\|$ est mesurable (*cf.* chap. I).

b. $$\mathrm{E}[\|\mathrm{Y}\|^{\alpha}] = \int_{\mathfrak{U}} \|y(u)\|^{\alpha}\, d\mu < +\infty,$$

on a vu que si $h(u) \in \mathfrak{X}^{\star}$ est tel que :

1° $h[u; x]$ est mesurable en u pour tout x fixe, ce qui entraîne $\|h(u)\|$ mesurable, puisque $\mathfrak{X}^{\star}$ est séparable (*cf.* chap. I);

2° $$\int_{\mathfrak{U}} \|h(u)\|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\, d\mu < +\infty,$$

$h(u)$ définit une fonctionnelle linéaire continue $\overset{a}{\mathrm{X}}{}^{\star}$ sur $\overset{a}{\mathfrak{X}}$ par la formule

$$\overset{a}{\mathrm{X}}{}^{\star}(\overset{a}{\mathrm{X}}) = \int_{\mathfrak{U}} h[u; x(u)]\, d\mu,$$

où $x(u)$ est la valeur du X correspondant à $\overset{a}{\mathrm{X}}$ pour l'épreuve u, il résulte alors de ce qui précède que :

$$\int_{\mathfrak{U}} |h[u; y(u)]| \, d\mu < +\infty$$

pour tout $h(u)$ satisfaisant aux conditions 1° et 2° précédentes, il suffit de reprendre la démonstration c de la page 184 pour en déduire que :

$$\int_{\mathfrak{U}} \|y(u)\|^{\alpha} d\mu < +\infty,$$

le rôle de α étant joué par $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ et *vice versa*, $h(u)$ jouera le rôle de $x(u)$ de la page 184, $y(u)$ celui de $h(u)$ de la page 184; cet « échange » est normal, $\mathfrak{X}$ étant réflexif.

Conclusion. — Puisque Y définit un $\overset{a}{\mathrm{Y}} \in \overset{a}{\mathfrak{X}}$,

$$\int_{\mathfrak{U}} h[u; y(u)] \, d\mu = \overset{a}{\mathrm{X}}{}^{\star}\left(\overset{a}{\mathrm{Y}}\right),$$

et nous avons prouvé que, pour tout $\overset{a}{\mathrm{X}}{}^{\star} \in \overset{a}{\mathfrak{X}}{}^{\star}$

$$\lim_{n \to +\infty} \overset{a}{\mathrm{X}}{}^{\star}\left(\overset{a}{\mathrm{Y}}_n\right) = \overset{a}{\mathrm{X}}{}^{\star}\left(\overset{a}{\mathrm{Y}}\right),$$

ce qui prouve que $\overset{a}{\mathrm{Y}}_n$ converge faiblement vers $\overset{a}{\mathrm{Y}}$; il en résulte alors que $\overset{a}{\mathrm{Y}}$ qui, on le sait, appartient à $\overset{a}{\mathfrak{X}}$, appartient plus précisément à $\overset{a}{\mathfrak{X}}{}'$, en vertu d'un théorème qui dit que si un point appartenant à une variété limitée fermée, fixe, $\mathfrak{V}$ tend faiblement vers une limite, celle-ci appartient à $\mathfrak{V}$.

Le théorème de Yosida s'applique alors et dit que $\overset{a}{\mathrm{Y}}_n$ tend *fortement* vers $\overset{a}{\mathrm{Y}}$, soit :

$$\lim_{n \to +\infty} \left\|\overset{a}{\mathrm{Y}}_n - \overset{a}{\mathrm{Y}}\right\| = \lim_{n \to +\infty} \left[\mathrm{E}\left(\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i - \mathrm{Y} \right\| \right)^{\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha}} = 0.$$

THÉORÈME. — *Loi des grands nombres en moyenne d'ordre* α. — $\mathfrak{X}$ *étant séparable et réflexif et* $\alpha > 1$, $\{\mathrm{X}_i\}$ $(\alpha = 0 \pm 1 \ldots)$ *désignant une suite strictement stationnaire d'éléments* X_i *de* $\overset{a}{\mathfrak{X}}$, *il existe un élément* Y *dans* $\mathfrak{X}$ *tel que :*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{E}\left(\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i - \mathrm{Y} \right\|^{\alpha} \right) = 0.$$

Remarque. — Revenons au théorème 2 (§ II); on y a prouvé que si Y est l'é. a. défini par $y(u)$, sauf épreuve exceptionnelle, $y_n(u)$ tend faiblement vers $y(u)$, ce qui permet de dire que p. s. $Y_n \to Y$ mais on avait laissé dans l'ombre le point suivant : Y est-il un é. a. du type étudié, c'est-à-dire tel que :

a. $x^*[y(u)]$ est mesurable, quel que soit x^* fixe; $\|y(u)\|$ est mesurable;

b. $\int_{\mathfrak{U}} \|y(u)\|^\alpha d\mu < +\infty$ (dans le théorème 2, § II, α peut être égal à 1).

Pour *a*, $x^*[y(u)]$ est nécessairement mesurable comme limite de $x^*[y_n(u)]$ et alors $\|y(u)\|$ est mesurable parce que $\mathfrak{X}$ est séparable.

Pour *b*, si $\alpha > 1$, cela vient d'être démontré ci-dessus; pour $\alpha = 1$, on peut le prouver directement en utilisant toujours le procédé de Landau. $\overset{a}{\mathfrak{X}}$ est toujours défini, on ne peut en trouver toutes les fonctionnelles ([9]), mais certaines, évidentes, suffisent pour prouver *b*.

CHAPITRE III.

CARACTÉRISTIQUE D'UN ÉLÉMENT ALÉATOIRE DANS UN ESPACE-B.

Définition. — Soit x^* une fonctionnelle linéaire réelle quelconque; $x^*(X)$ est une variable aléatoire numérique X^* pourvue d'une fonction de répartition; la variable aléatoire e^{iX^*} est également mesurable et, comme elle est bornée en module, elle a une e. m. — la fonction caractéristique usuelle de X^* — $\varphi(x^*)$:

$$\varphi(x^*) = E[e^{iX^*}] = E[e^{ix^*(X)}].$$

Ceci suppose toutefois que X^* *est une v. a. proprement dite*. Par définition, X sera un élément aléatoire proprement dit s'il existe une suite d'ensembles $e_k \in \mathfrak{X}$ mesurables, bornés, tendant vers $\mathfrak{X}$ et tels que :

$$\lim_{k \to +\infty} \text{mes}(e_k) = 1.$$

([9]) Cette question est maintenant résolue [R. Fortet et E. Mourier, I].

Si X est un élément aléatoire proprement dit, X^* est une v. a. proprement dite. Dans le cas de la mesure introduite par M. Fréchet (F-mesure, avec condition F′), X est toujours un élément aléatoire proprement dit. Dans tout ce qui suit nous supposerons que X est un é. a. proprement dit.

Par définition $\varphi(x^*)$, *considérée comme fonction de* x^* *sur* $\mathfrak{X}^*$ *est la caractéristique de* X. [E. Mourier, I et III] [L. Le Cam, I].

Remarque. — Dans le cas d'un espace euclidien R_n à n dimensions, X ayant les coordonnées $X_1, \ldots, X_n$, toute fonctionnelle linéaire est de la forme :

$$x^*(X) = v_1 X_1 + \ldots + v_n X_n,$$

où $v_1, \ldots, v_n$ sont des constantes définissant x^* et inversement.

Or dans ce cas on appelle depuis longtemps caractéristique de X la fonction :

$$\begin{aligned}\varphi(v_1, \ldots, v_n) &= E[e^{i(v_1 X_1 + \ldots + v_n X_n)}]\\ &= E[e^{ix^*(X)}].\end{aligned}$$

Pour un espace-B quelconque, la définition $\varphi(x^*) = E[e^{ix^*(X)}]$ est donc la généralisation immédiate de la caractéristique classique.

THÉORÈME 1. — *Si* X *et* Y *sont des é. a. indépendants définis sur le même* $\mathfrak{X}$, *la caractéristique de* X + Y *est le produit de la caractéristique de* X *par celle de* Y.

Soient φ_X, φ_Y, φ_{X+Y} les caractéristiques de X, Y, X + Y respectivement :

$$\begin{aligned}\varphi_{X+Y} &= E[e^{ix^*(X+Y)}]\\ &= E[e^{ix^*(X)}\ e^{ix^*(Y)}]\\ &= \varphi_X(x^*)\ \varphi_Y(x^*).\end{aligned}$$

En effet $e^{ix^*(X)}$ et $e^{ix^*(Y)}$ sont deux variables aléatoires numériques indépendantes et l'on peut leur appliquer le théorème classique de l'espérance mathématique du produit de deux variables aléatoires indépendantes.

THÉORÈME 2. — $\varphi(x^*)$ *est une fonction uniformément continue de* x^*, *c'est-à-dire que si* ε *positif est donné, on peut trouver* η *positif ne dépendant que de* ε, *tel que :*

$$|\varphi(x_1^*) - \varphi(x_2^*)| \leq \varepsilon,$$

pourvu que

$$\| x_1^\star - x_2^\star \| \leqq \eta.$$

En effet :

$$\begin{aligned} |\varphi(x_1^\star) - \varphi(x_2^\star)| &= |\mathrm{E}[e^{ix_1^\star(\mathrm{X})}] - \mathrm{E}[e^{ix_2^\star(\mathrm{X})}]| \\ &\leqq \mathrm{E}[|e^{ix_1^\star(\mathrm{X})} - e^{ix_2^\star(\mathrm{X})}|] \\ &\leqq \mathrm{E}[|e^{ix_1^\star(\mathrm{X})}(1 - e^{iy^\star(\mathrm{X})})|], \end{aligned}$$

avec

$$x_2^\star = x_1^\star + y^\star.$$

On a donc $\|y^\star\| \leqq \eta$; soit e_k tel que

$$\operatorname{mes}(e_k) > 1 - \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a :

$$\mathrm{E}[|e^{ix_1^\star(\mathrm{X})}(1 - e^{iy^\star(\mathrm{X})})|] = \int_{x \in e_k} |1 - e^{iy^\star(\mathrm{X})}|\, dm + \int_{x \in \mathfrak{X} - e_k} |1 - e^{iy^\star(\mathrm{X})}|\, dm.$$

Le deuxième terme est inférieur à $2\frac{\varepsilon}{3}$, car

$$|1 - e^{iy^\star(x)}| \leqq 2$$

et $m(\mathfrak{X} - e_k)$ est inférieur à $\frac{\varepsilon}{3}$.

Quant à

$$\int_{\mathrm{X} \in e_k} |1 - e^{iy^\star(x)}|\, dm,$$

si $\|y^\star\| < \eta$,

$$|1 - e^{iy^\star(x)}| \leqq \frac{\varepsilon}{3},$$

car e_k est borné, donc il existe M tel que sur e_k, $\|x\| \leqq \mathrm{M}$; donc

$$|\varphi(x_1^\star) - \varphi(x_2)^\star| \leqq \varepsilon.$$

Théorème 3. — *$\varphi(x^\star)$ est continue au sens de la convergence faible dans $\mathfrak{X}^\star$.*

Comme dans le théorème précédent, on a :

$$|\varphi(x_1^\star) - \varphi(x_2^\star)| \leqq \mathrm{E}\,|1 - e^{i(x_2^\star - x_1^\star)(\mathrm{X})}| = \int_{e_k} + \int_{\mathfrak{X} - e_k},$$

où l'on a encore e_k borné et tel que $m(e_k) > 1 - \frac{\varepsilon}{3}$, donc le deuxième terme est $\leqq 2\frac{\varepsilon}{3}$ comme dans le théorème 2.

Dire que $x_2^\star$ converge faiblement vers $x_1^\star$, c'est dire que pour tout $x^{\star\star}$ on a

$$|x^{\star\star}(x_2^\star - x_1^\star)| \to 0.$$

Donc pour tout x fixé, la convergence faible de $x_2^\star$ vers $x_1^\star$ implique que

$$(x_2^\star - x_1^\star).(x) \to 0.$$

La fonction mesurable et bornée $e^{i(x_2^\star - x_1^\star)(x)}$ tend donc vers un *partout* et :

$$\int_{e_k} |1 - e^{i(x_2^\star - x_1^\star)(x)}|\, dm \to 0.$$

THÉORÈME 4. — *Si* $E(X)$ *et* $E[\|X\|^2]$ *existent* (10) *la caractéristique* $\varphi(x^\star)$ *de* X *se met sous la forme :*

$$\varphi(x^\star) = 1 + i x^\star[E(X)] - \frac{1}{2} E[|x^\star(X)|^2] + \|x^\star\|^2 \omega(x^\star),$$

où

$$\omega(x^\star) \to 0 \quad \text{si} \quad \|x^\star\| \to 0.$$

Démonstration. — Soit $z^\star \in \mathfrak{X}^\star$ telle que $\|z^\star\| = 1$ et que $x^\star = \lambda z^\star$, ce qui implique $\lambda = \pm \|x^\star\|$. Posons $U = z^\star(X)$,

$$\mu_1 = E(U) = E[z^\star(X)] = z^\star[E(X)]$$

existe puisque $E(X)$ existe. De même, $E(U^2)$ existe car $|U| \leqq \|X\|$ et $E[\|X\|^2]$ existe.

$$\varphi(x^\star) = E[e^{ix^\star}(X)] = [e^{i\lambda z^\star}(X)] = E[e^{i\lambda U}].$$

Comme fonction de λ, $\varphi(x^\star)$ est donc la caractéristique de la v.a. U et, par conséquent :

$$(1) \qquad \varphi(x^\star) = 1 + i\mu_1 - \frac{1}{2} E(U^2)\lambda^2 + \lambda^2 \omega_1(z^\star, \lambda),$$

où pour tout $z^\star$ fixé, $\omega(z^\star; \lambda) \to 0$ si $\lambda \to 0$. Mais (1) s'écrit :

$$\varphi(x^\star) = 1 + ix^\star[E(X)] - \frac{1}{2} E\{[x^\star(X)^2]\} + \|x^\star\|^2 \omega_1(z^\star; \lambda).$$

La convergence de $\omega_1(z^\star; \lambda)$ vers 0 quand $\lambda \to 0$ est uniforme par rapport

(10) On sait que si $\mathfrak{X}$ est séparable et réflexif, $E[\|X\|] < +\infty$, qui est impliqué par $E[\|X\|^2] < +\infty$, implique l'existence de $E(X)$.

à $z^\star$. En effet, $F_{z^\star}(\alpha)$ désignant la fonction de répartition de U, le théorème des accroissements finis donne :

$$\omega_1(z^\star;\lambda) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^2[1 - e^{i\lambda_0\alpha}]\, dF_{z^\star}(\alpha), \qquad \text{où} \qquad 0 \leqq \lambda_0 \leqq \lambda,$$

M étant un nombre positif quelconque :

$$\omega_1(z^\star;\lambda) = \frac{1}{2}\int_{|\alpha|>M} \alpha^2[1 - e^{i\lambda_0\alpha}]\, dF_{z^\star}(\alpha) + \frac{1}{2}\int_{-M}^{+M}.$$

En désignant par m la l-mesure sur $\mathfrak{X}$, le premier terme du deuxième membre est borné par :

$$\int_{|U|>M} U^2\, dm \leqq \int_{|U|>M} \|X\|^2\, dm \leqq \int_{\|X\|>M} \|X\|^2\, dm,$$

car $|U| \leqq \|X\|$ et le domaine $(|U| > M)$ est contenu dans le domaine $(\|X\| > M)$.

Par hypothèse, on peut trouver M indépendant de $z^\star$ tel que :

$$\int_{\|X\|>M} \|X\|^2\, dm < \frac{\varepsilon}{2}.$$

M étant ainsi choisi, il suffit que λ_0, donc λ, soit assez petit pour que $|e^{i\lambda_0\alpha} - 1| < \frac{\varepsilon}{M^2}$ quel que soit α dans $(-M, +M)$ et alors

$$\frac{1}{2}\int_{-M}^{+M} \alpha^2[1 - e^{i\lambda_0\alpha}]\, dF_{z^\star}(\alpha) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{quel que soit } F_{z^\star}(\alpha).$$

Donc la convergence de $\omega_1(z^\star;\lambda) \to 0$ lorsque $\lambda \to 0$ est uniforme en $z^\star$, ce qui établit le théorème.

Définition. — Étant donnée une fonction numérique réelle ou complexe $\varphi(x^\star)$, nous dirons qu'elle est *définie-positive* si :

1° elle est continue au sens de la convergence forte dans $\mathfrak{X}^\star$;

2° quels que soient n, $x_1^\star$, ..., $x_n^\star$ et les nombres complexes α_1, ..., α_n, on a :

$$\sum_{j,k}^{n} \varphi(x_j^\star - x_k^\star)\alpha_j\bar{\alpha}_k \quad \text{réel et} \geqq 0.$$

THÉORÈME 5. — *Toute caractéristique est définie-positive.*

Nous avons vu qu'elle est continue (th. 2). La seconde condition est vérifiée, en effet :

$$\begin{aligned}0 \leqq |\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n|^2 &= (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n)\left(\overline{\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n}\right) \\ &= (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n)(\bar{\alpha}_1 \bar{u}_1 + \ldots + \bar{\alpha}_n \bar{u}_n) \\ &= \sum_{j,k}^{n} \alpha_j \bar{\alpha}_k u_j \bar{u}_k ;\end{aligned}$$

il suffit alors de prendre $u_j = e^{ix_j^\star(\mathrm{X})}$

$$u_j \bar{u}_k = e^{ix_j^\star(\mathrm{X})} e^{-ix_k^\star(\mathrm{X})} = e^{i[x_j^\star(\mathrm{X}) - x_k^\star(\mathrm{X})]}$$

et alors :

$$\sum_{j,k} \alpha_j \bar{\alpha}_k e^{i[x_j^\star - x_k^\star](\mathrm{X})} \geqq 0 \quad \text{réel}$$

entraîne **que** :

$$\mathrm{E}\left[\sum_{j,k} \cdots\right] = \sum_{j,k} \alpha_j \bar{\alpha}_k \varphi(x_j^\star - x_k^\star) \geqq 0 \quad \text{réel.}$$

Remarque. — De la définition même de la caractéristique résulte que $\varphi(\theta^\star) = 1$ et que

$$\varphi(-x^\star) = \overline{\varphi(x^\star)}.$$

Nous allons voir que si une fonction $\varphi(x^\star)$ satisfait à la condition

$$\sum_{j,k} \alpha_j \bar{\alpha}_k \varphi(x_j^\star - x_k^\star) \quad \text{réel} \geqq 0$$

quels que soient n; $x_1^\star, \ldots, x_n^\star$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, alors : $\varphi(\theta^\star)$ est réel $\geqq 0$ nul seulement si $\varphi \equiv 0$

$$\varphi(-x^\star) = \overline{\varphi(x^\star)};$$

si φ est continue à l'origine, elle est continue partout et aussi si $\varphi(x^\star) \to \varphi(\theta^\star)$ lorsque $x^\star$ tend faiblement vers $\theta^\star$, alors $\varphi(y^\star - x^\star)$ tend vers $\varphi(y^\star)$ quel que soit $y^\star$ lorsque $x^\star \to \theta^\star$.

Prenons $n = 2$:

$$\alpha_1 \bar{\alpha}_2 \varphi(x_1^\star - x_2^\star) + \bar{\alpha}_1 \alpha_2 \varphi(x_2^\star - x_1^\star) + [|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2] \varphi(\theta^\star) \quad \text{réel} \geqq 0;$$

si $x_2^\star = \theta^\star$:

$$\alpha_1 \bar{\alpha}_2 \varphi(x_1^\star) + \alpha_2 \bar{\alpha}_1 \varphi(-x_1^\star) + [|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2] \varphi(\theta^\star) \quad \text{réel} \geqq 0.$$

$\alpha_2 = 0$ montre que $\varphi(0^\star)$ *est réel* $\geqq 0$.

$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$:

$$\varphi(x_1^\star) + \varphi(-x_1^\star) \quad \text{réel},$$

donc

$$\mathcal{I}\,\varphi(x_1^\star) = -\mathcal{I}\,\varphi(-x_1^\star).$$

$\alpha_1 = i$, $\alpha_2 = 1$:

$$i\,\varphi(x_1^\star) - i\,\varphi(-x_1^\star) \quad \text{réel},$$

donc

$$\mathcal{R}\,\varphi(x_1^\star) = \mathcal{R}\,\varphi(-x_1^\star),$$

donc

$$\varphi(-x^\star) = \overline{\varphi(x^\star)}.$$

Prenons $n = 3$:

$$\alpha_1 = 1, \qquad \alpha_2 = -1, \qquad \alpha_3 = \lambda, \qquad x_1^\star = 0^\star, \qquad x_2^\star = x^\star, \qquad x_3^\star = y^\star.$$

On a :

$$\begin{aligned}&[2 + |\lambda|^2]\,\varphi(0^\star) - \varphi(x^\star) - \varphi(-x^\star)\\ &\quad + \lambda[\varphi(y^\star) - \varphi(y^\star - x^\star)] + \bar{\lambda}[\varphi(-y^\star) - \varphi(x^\star - y^\star)] \geqq 0.\end{aligned}$$

Soit, en posant $A = \varphi(y^\star) - \varphi(y^\star - x^\star)$:

$$[2 + |\lambda|^2]\,\varphi(0^\star) - \varphi(x^\star) - \varphi(-x^\star) + \lambda A + \bar{\lambda}\bar{A} \geqq 0$$

et en prenant $\lambda = -\dfrac{\bar{A}}{\varphi(0^\star)}$

$$\frac{|A|^2}{\varphi(0^\star)} - \frac{|A|^2}{\varphi(0^\star)} - \frac{|A|^2}{\varphi(0^\star)} + 2\,\varphi(0^\star) - \varphi(x^\star) - \varphi(-x^\star) \geqq 0.$$

Soit :

$$|\varphi(y^\star) - \varphi(y^\star - x^\star)|^2 \leqq \varphi(0^\star)[2\,\varphi(0^\star) - \varphi(x^\star) - \varphi(-x^\star)],$$

ce qui montre que $\varphi(0^\star)$ ne peut être nul à moins que φ ne soit identiquement nul, et que si φ est continue à l'origine, elle est continue partout et même uniformément continue partout, et aussi que si $\varphi(x^\star) \to \varphi(0^\star)$ lorsque $x^\star$ tend faiblement vers $0^\star$, $\varphi(y^\star - x^\star) \to \varphi(y^\star)$ quel que soit $y^\star$ lorsque $x^\star \to 0^\star$ faiblement.

Définition d'un ensemble cylindrique. — Un ensemble cylindrique $\mathcal{E}_n$ de $\mathfrak{X}$ est défini comme l'ensemble de tous les $x \in \mathfrak{X}$ tels que :

$$[x_1^\star(x), \ldots, x_n^\star(x)] \in E_n,$$

où E_n est un ensemble mesurable-B dans l'espace euclidien R_n à n dimensions.

Définition du corps $\mathcal{B}$. — Tous les ensembles cylindriques sont L-mesurables; ils forment un corps $\mathcal{C}$; si $\mathcal{F}$ est le corps de Borel de définition de la L-mesure m, on a :

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{F}.$$

Soit $\mathcal{B}$ le plus petit corps de Borel contenant $\mathcal{C}$, on a forcément $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. Or une fonction complètement additive sur un corps est extensible et d'une seule manière sur le plus petit corps de Borel qui le contient [Kolmogoroff]; donc : la connaissance de m sur $\mathcal{C}$ détermine m sur $\mathcal{B}$. Notons que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ ont une signification géométrique indépendante de m et qu'ils ne dépendent pas de la norme au sens de la page 164 (chap. I).

Théorème. — *Si $\mathfrak{X}$ est séparable, $\mathcal{B}$ contient les sphères et tous les ensembles définis par $f(x) < a$, où a est un nombre réel et f une fonction numérique, réelle, continue définie pour $x \subset \mathfrak{X}$. Plus généralement, $\mathcal{B}$ contient tous les ensembles ouverts $\subset \mathfrak{X}$.*

1° *Cas de $f(x) = \| x \|$.* — La démonstration consiste à prouver que toute sphère S de centre 0 appartient à $\mathcal{B}$. La démonstration est analogue à celle de Pettis [Pettis, I].

Désignons par $\bar{x}^\star$ les $x^\star$ telles que $\| x^\star \| = 1$ et soit Γ l'ensemble des $\bar{x}^\star$. Soit $A_{\bar{x}^\star}$ l'ensemble défini par : $|\bar{x}^\star(x)| \leqq a$; la sphère S définie par $\| x \| \leqq a$ est le produit $\prod A_{\bar{x}^\star}$, où le produit est étendu à tous les $\bar{x}^\star \in \Gamma$ (les $A_{\bar{x}^\star}$ sont en infinité non dénombrable).

En effet, $\prod A_{\bar{x}^\star} \subset S$: soit $x \in \prod A_{\bar{x}^\star}$, et $\bar{x}_0^\star$ une fonctionnelle $\bar{x}^\star$ telle que $\bar{x}_0^\star(x) = \| x \|$, on a par hypothèse : $\bar{x}_0^\star(x) \leqq a$, donc $\| x \| \leqq a$ et $S \subset \prod A_{\bar{x}^\star}$, car si $\| x \| \leqq a$

$$|\bar{x}^\star(x)| \leqq \| \bar{x}^\star \| . \| x \| = 1 . a = a.$$

$\mathfrak{X}$ étant séparable, il existe une suite $\{ \bar{x}_i^\star \}$ dénombrable de $\bar{x}^\star$ faiblement dense dans Γ [Banach, I, p. 124]. Soit A_i l'ensemble défini par

$$|\bar{x}_i^\star(x)| \leqq a$$

et $A = \prod_i A_i$. A produit d'une infinité dénombrable d'ensembles cylindriques A_i est dans $\mathcal{B}$.

On a :

$$A = \prod A_{\bar{x}^\star} = S.$$

D'abord

$$\prod A_{\bar{x}^\star} \subset A = \prod_i A_i;$$

évident puisque $\prod A_{\bar{x}^\star}$ est étendu à tous les $\bar{x}^\star \in \Gamma$ et que $\prod_i A_i$ est étendu au $\bar{x}^\star \in \{\bar{x}_i^\star\}$ sous-ensemble dénombrable de Γ.

D'autre part, si $x_1 \in A$ ne faisait pas partie de $\prod A_{\bar{x}^\star}$, on aurait :

$$|\bar{x}_i^\star(x_1)| \leqq a \quad \text{pour tout } i$$

et

$$|\bar{x}^\star(x_1)| > a \quad \text{pour au moins un } \bar{x}^\star;$$

soit $\bar{x}_0^\star$ un tel $\bar{x}^\star$, $\{\bar{x}_{i'}^\star\}$ une sous-suite de $\{\bar{x}_i^\star\}$ convergeant faiblement vers $\bar{x}_0^\star$:

$$|\bar{x}_0^\star(x)| = \lim |\bar{x}_{i'}^\star(x)| \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{X},$$

donc :

$$|\bar{x}_0^\star(x_1)| = \lim |\bar{x}_{i'}^\star(x_1)| \leqq a \quad \text{contradiction.}$$

Donc

$$A \subset \prod A_{\bar{x}^\star}.$$

Par conséquent,

$$A = \prod A_{\bar{x}^\star}.$$

On a vu que

$$\prod A_{\bar{x}^\star} = S,$$

donc :

$$A = \prod A_{\bar{x}^\star} = S,$$

donc S est dans $\mathcal{B}$.

2° *Cas de* $f(x) = \|x - x_0\|$. — Sphères de centre x_0, même démonstration.

3° *Cas de $f(x)$ quelconque.* — L'ensemble défini par $f(x) < a$ est ouvert. Or tout ensemble ouvert Ω d'un espace séparable $\mathfrak{X}$ est la réunion d'une infinité dénombrable de sphères.

En effet, $\mathfrak{X}$ étant séparable, soit $\{x_n\}$ une suite dénombrable dense dans $\mathfrak{X}$ et x'_n ceux des x_n intérieurs à Ω. Soit $S\left(x'_n;\frac{1}{k}\right)$ la sphère de centre x'_n et de rayon $\frac{1}{k}$ (k entier). Parmi ces sphères, certaines sont complètement intérieures à Ω : ce sont les S_1; les autres ont des points extérieurs à Ω. Soit A la réunion des S_1. Les S_1 sont en infinité dénombrable et toute sphère est dans $\mathcal{B}$, donc A est dans $\mathcal{B}$.

On a $A = \Omega$; pour le prouver, il suffit de montrer que tout $x \in \Omega$ appartient à une S_1. Or x appartient à $S\left(x'_n;\frac{1}{k}\right)$ si $\|x'_n - x\| \leq \frac{1}{k}$ et cette sphère est une S_1 si $\frac{2}{k} < \delta$, en appelant δ la borne inférieure de $\|x - y\|$ lorsque y parcourt la frontière de Ω. Donc il suffit de prendre $\frac{1}{k} < \frac{\delta}{2}$, puis x'_n assez voisin de x pour que $\|x'_n - x\| \leq \frac{1}{k}$, ce qui est possible puisqu'on a une suite dense.

Donc tout ensemble défini par $f(x) < a$ et plus généralement tout ensemble ouvert est dans $\mathcal{B}$.

Remarque. — De la définition même de la caractéristique :

$$\varphi(x^*) = E[e^{ix^*(X)}]$$

résulte que toute L-mesure sur $\mathfrak{X}$, proprement dite, définit une caractéristique et une seule; réciproquement nous allons voir que :

Théorème 6. — *La caractéristique détermine la* L-*mesure sur tout ensemble cylindrique, donc sur $\mathcal{B}$.*

Soit $X^* = x^*(X)$ si l'on connaît $\varphi(x^*) = E[e^{ix^*(X)}]$, on connaît la caractéristique φ_1 de X^* :

$$\varphi_1(v) = E[e^{ivX^*}] = E[e^{ivx^*(X)}] = \varphi(v x^*),$$

donc on connaît $\Pr[x^*(X) \in E_1]$, où E_1 est un ensemble mesurable de l'axe réel.

Soit $x_1^*, \ldots, x_n^*$ et $X_1^* = x_1^*(X), \ldots, X_n^* = x_n^*(X)$, on connaît $\varphi(x^*)$, donc on connaît la caractéristique $\varphi_1(v_1 \ldots v_n)$ de la variable aléatoire à n dimensions $\{X_1^*, \ldots, X_n^*\}$:

$$\varphi_1(v_1, \ldots, v_n) = E[e^{i(v_1 X_1^* + \ldots + v_n X_n^*)}] = \varphi(v_1 x_1^* + \ldots + v_n x_n^*).$$

Donc on connaît la mesure sur tout ensemble cylindrique, donc sur $\mathcal{B}$.

Remarque. — La démonstration du théorème précédent repose sur la propriété bien connue que dans un espace euclidien à un nombre fini de dimensions la caractéristique détermine complètement la loi de probabilité du point aléatoire. Il en est de même dans le cas d'un espace de Banach $\mathfrak{X}$ possédant une base, c'est-à-dire tel qu'il existe une suite dénombrable d'éléments distincts $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ de $\mathfrak{X}$ telle que, quel que soit $x \in \mathfrak{X}$, il lui corresponde une suite et une seule de nombres $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ tels que :

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n + \ldots,$$

avec $\lim_{n \to \infty} \| x - x(n) \| = 0$ en posant

$$x(n) = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n.$$

Connaissant $\varphi(x^*)$ pour tout x^*, on connaît en particulier :

$$\varphi(x_n^*) = E[e^{i[t_1 X_1 + \ldots + t_n X_n]}]$$

qui est la caractéristique du point $X(n)$ dans R_n et détermine la fonction de répartition de $X(n)$. Soit

$$F_n(x_1, \ldots, x_n) = \Pr[X_1 < x_1 \ldots X_n < x_n];$$

si l'on pose

$$F(x_1, \ldots, x_n, \ldots) = \Pr[X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n, \ldots],$$

on a :

$$F(x_1, \ldots, x_n, \ldots) = \lim_{n \to \infty} F_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Donc la caractéristique $\varphi(x^*)$ détermine alors complètement la loi de X.

Généralisation du théorème de Bochner [Bochner, II, p. 239]. — On sait que la caractéristique d'une variable aléatoire ordinaire est une fonction définie positive qui vaut 1 à l'origine et que, réciproquement, toute fonction φ définie positive telle que $\varphi(0) = 1$ est la caractéristique d'une loi de probabilité. Dans le cas d'un élément aléatoire X à valeurs dans un espace-B, $\mathfrak{X}$, nous venons de voir que la caractéristique de X,

$\varphi(x^\star) = \mathrm{E}[e^{ix^\star(\mathrm{X})}]$ est encore une fonction définie positive, $\varphi(0^\star) = 1$. On est donc conduit à se demander si toute fonction définie positive $\varphi(x^\star)$ telle que $\varphi(0^\star) = 1$ est la caractéristique d'un élément aléatoire proprement dit X sur $\mathcal{B}$.

Soit donc $\varphi(x^\star)$ une fonction définie positive sur $\mathfrak{X}^\star$ et telle que $\varphi(0^\star) = 1$. Soient $x_1^\star, \ldots, x_n^\star$ n fonctionnelles linéaires déterminées, linéairement indépendantes, posons :

$$\overline{x^\star} = v_1 x_1^\star + \ldots + v_n x_n^\star,$$

où $v_1, \ldots, v_n$ sont n variables numériques réelles quelconques; $\varphi(\overline{x^\star})$ considérée comme fonction de $v_1, \ldots, v_n$ est une fonction définie positive à n dimensions, dans un espace euclidien à n dimensions, et elle prend la valeur 1 si $v_1 = v_2 = \ldots = v_n = 0$; donc c'est une caractéristique à n dimensions (Bochner-Weil) et elle définit, par conséquent, une fonction de répartition à n dimensions : $\mathrm{F}_n(x_1^\star, x_1; x_2^\star, x_2; \ldots; x_n^\star; x_n)$.

F_n a les propriétés suivantes :

1° Comme fonction des couples $(x_j^\star, x_j)$, c'est une fonction symétrique;

2° Comme fonction des $x_1, \ldots, x_n$, c'est une fonction de répartition;

3° En outre, on a :

$$\mathrm{F}_{n+1}(x_1^\star, x_1; \ldots; x_n^\star, x_n; x_{n+1}^\star, +\infty) = \mathrm{F}_n(x_1^\star, x_1; \ldots; x_n^\star, x_n).$$

En effet :

$$\varphi(\overline{x^\star} + v_{n+1} x_{n+1}^\star) = \int e^{i(v_1 x_1 + \ldots + v_{n+1} x_{n+1})} d\,\mathrm{F}_{n+1}(x_1^\star, x_1; \ldots; x_n^\star, x_n; x_{n+1}^\star, x_{n+1});$$

si $v_{n+1} = 0$:

$$\varphi(\overline{x^\star} + 0) = \varphi(\overline{x^\star}) = \int e^{i(v_1 x_1 + \ldots + v_n x_n)} d\,\mathrm{F}_{n+1}(x_1^\star, x_1; \ldots; x_{n+1}^\star, x_{n+1})$$

en intégrant par rapport à x_{n+1}

$$\varphi(\overline{x^\star}) = \int e^{i(v_1 x_1 + \ldots + v_n x_n)} d\,\Phi(x_1^\star, x_1 \ldots x_n^\star, x_n)$$

en posant

$$\Phi(x_1^\star, x_1; \ldots; x_n^\star, x_n) = \mathrm{F}_{n+1}(\ldots x_n^\star, x_n; x_{n+1}^\star, +\infty),$$

mais par définition de F_n :

$$\varphi(\overline{x^\star}) = \int e^{i(v_1 x_1 + \ldots + v_n x_n)} d\,\mathrm{F}_n(x_1^\star, x_1; \ldots; x_n^\star, x_n),$$

donc :

$$\begin{aligned} F_n(x_1^\star, x_1; \ldots; x_n^\star, x_n) &= \Phi(x_1^\star, x_1; \ldots; x_n^\star, x_n) \\ &= F_{n+1}(x_1^\star, x_1; \ldots; x_n^\star, x_n; x_{n+1}^\star, +\infty. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{E}_n$ un ensemble cylindrique de $\mathfrak{X}$, défini comme l'ensemble de tous les $x \in \mathfrak{X}$ tels que :

$$\{ x_1^\star(x), \ldots, x_n^\star(x) \} \in E_n,$$

où E_n est un ensemble mesurable-B dans l'espace euclidien R_n à n dimensions. F_n définit une mesure dans R_n pour laquelle E_n est mesurable, soit $\mu(E_n)$ sa mesure, posons :

$$m(\mathcal{E}_n) = \mu(E_n),$$

on définit ainsi une fonction d'ensemble $m(\varepsilon)$ sur le corps des ensembles cylindriques dans $\mathfrak{X}$; on voit sans difficulté que :

1° $m(\mathfrak{X}) = 1$;

2° $m(\mathcal{E}_n) \geqq 0$;

3° $m(\mathcal{E}) + m(\mathcal{E}') = m(\mathcal{E} + \mathcal{E}')$ si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux ensembles cylindriques disjoints [Kolmogoroff, I, p. 27].

Il reste à voir si $m(\mathcal{E})$ est complètement additive (sur le corps des ensembles cylindriques) ou, ce qui revient au même, à essayer de prouver que si $\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2, \ldots, \mathcal{E}^k, \ldots$ sont des ensembles cylindriques tels que :

$$\mathcal{E}^1 \supset \mathcal{E}^2 \supset \ldots \supset \mathcal{E}^k \supset \ldots$$

et si $\lim\limits_{k\to\infty} m(\mathcal{E}^k) = L > 0$, $\mathcal{E}^2 = \lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{E}^k$ n'est pas vide.

Soit $\{x_j^\star\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ une suite quelconque de fonctionnelles linéaires de norme 1 et telle qu'un nombre fini quelconque de ces fonctionnelles soient linéairement indépendantes. Soit $S(a)$ la sphère de $\mathfrak{X}$ de centre θ et de rayon a. Soit A_n l'ensemble des points de R_n de coordonnées $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ tels que le système :

$$x_1^\star(x) = \alpha_1, \qquad \ldots, \qquad x_n^\star(x) = \alpha_n$$

ait au moins une solution x telle que $\| x \| \leqq a$.

Si $\mathfrak{X}$ est réflexif, A_n est fermé. — D'abord A_n est borné, évident puisque

$$\alpha_j = x_j^\star(x) \leqq \| x_j^\star \| . \| x \| \leqq a;$$

ensuite soit $P^k(\alpha_j^k)$ une suite de points de A_n tendant vers un point P de R_n de coordonnées (α_j), donc $\alpha_j^k \to \alpha_j$. On a : $P \in A_n$, c'est-à-dire qu'il existe un $x \in S(a)$ tel que :

$$x_j^*(x) = \alpha_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Une condition nécessaire et suffisante pour cela (E. Hille, I, p. 21) est que, quels que soient les nombres a_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, on ait :

$$(1) \qquad \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \alpha_j \right| \leq a \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j^* \right\|,$$

mais le même théorème implique, puisque $P^k \in A_n$,

$$(2) \qquad \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \alpha_j^k \right| \leq a \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j^* \right\|.$$

Pour obtenir (1), il suffit de faire tendre k vers $+\infty$ dans (2).

Soit $\mathfrak{A}_n$ l'ensemble des $x \in \mathfrak{X}$ tels que le point P de R_n de coordonnées $[x_1^*(x), \ldots, x_n^*(x)]$ appartient à A_n, on a évidemment :

$$\mathfrak{A}_n \supset S(a),$$

$\mathfrak{A}_n$ est un ensemble cylindrique, fermé dans $\mathfrak{X}$; il n'est pas borné en général; il faut entendre par fermé que si $x_1, \ldots, x_k, \ldots \in \mathfrak{A}_n$ et si $x_k \to x$, x appartient à $\mathfrak{A}_n$.

Tout ensemble cylindrique $\mathcal{E}_n$ défini par $x_1^*, \ldots, x_n^*$ qui contient $S(a)$ contient $\mathfrak{A}_n$.

D'autre part, $\mathfrak{A}_{n+1} \subset \mathfrak{A}_n$; en effet si $x_0 \in \mathfrak{A}_{n+1}$, les nombres α_j $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ définis par :

$$x_j^*(x_0) = \alpha_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n+1)$$

sont tels que les équations

$$x_j^*(x) = \alpha_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n+1)$$

admettent au moins une solution x' telle $\|x'\| \leq a$, donc les équations

$$x_j^*(x) = \alpha_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

admettent une solution $x' \in S(a)$, donc $x \in \mathfrak{A}_n$.

Remarque. — Si R_{n+1} correspondant à $x_1^\star, \ldots, x_n^\star, x_{n+1}^\star$ est construit comme produit de R_n correspondant à $x_1^\star, \ldots, x_n^\star$ et d'une droite, A_n est la projection parallèlement à cette droite, de R_{n+1} sur R_n.

Soit

$$\mathcal{L} = \lim_{n \to +\infty} \mathfrak{A}_n, \qquad \mathcal{L} = \prod_i \mathfrak{A}_i \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L} \supset S(a).$$

Si la suite considérée $\{x_i^\star\}$ est dense sur la sphère de rayon 1 de $\mathfrak{X}^\star$ (ce qui implique que $\mathfrak{X}^\star$, donc $\mathfrak{X}$ est non seulement réflexif, mais séparable), $\mathcal{L} = S(a)$.

En effet, si $x_0 \in \mathcal{L}$ n'était pas dans $S(a)$ on aurait $\| x_0 \| > a$ et

$$| x_i^\star(x_0) | = | \alpha_i | \leq a \quad \text{pour tout } i;$$

mais, d'autre part, il existe [E. Hille, I, th. 2.9.3] $x^\star \in \mathfrak{X}^\star$ telle que :

$$x^\star(x_0) = \| x_0 \| \qquad \text{et} \qquad \| x^\star \| = 1.$$

La suite $\{x_i^\star\}$ étant dense sur la sphère unité, soit $\{x_{i'}^\star\}$ une suite tendant vers $x^\star$

$$| x^\star(x_0) | = \lim | x_{i'}^\star(x_0) | \leq a,$$

ce qui est une contradiction avec

$$| x^\star(x_0) | = \| x_0 \| > a.$$

Donc $\mathcal{L} \subset S(a)$ et puisqu'on a toujours $\mathcal{L} \supset S(a)$:

$$\mathcal{L} = S(a).$$

Plaçons-nous dans ces conditions et soit $\rho(a)$ la limite pour $n \to +\infty$ de $m(\mathfrak{A}_n)$; $m(\mathfrak{A}_{n+1}) \leq m(\mathfrak{A}_n)$. Nous dirons que $\varphi(x^\star)$ satisfait à la condition C si, quelle que soit la suite $\{x_i^\star\}$ dense sur la sphère unité de $\mathfrak{X}^\star$, $\lim\limits_{a \to +\infty} \rho(a) = 1$. Il est clair que

$$\rho(a) \leq \rho(a') \quad \text{si} \quad a < a'.$$

Considérons des ensembles cylindriques $\mathcal{E}^k$ tels que

$$\mathcal{E}^1 \supset \mathcal{E}^2 \supset \ldots \mathcal{E}^k \supset \mathcal{E}^{k+1} \supset \ldots \qquad \text{et} \qquad \lim m(\mathcal{E}^k) = l >$$

Nous allons montrer que

$$\lim_k \mathcal{E}^k = \lim \left[\mathcal{B}_k = \prod_{j=1}^{k} \mathcal{E}^j \right].$$

n'est pas vide.

On ne restreint pas la généralité en considérant une suite de fonctionnelles linéaires $\{x_k^\star\}$ de norme 1, telle qu'un nombre fini quelconque soient linéairement indépendantes et que les fonctionnelles définissant ε^k soient $x_1^\star, \ldots, x_k^\star$. Soit E_n le correspondant dans R_n de $\mathcal{E}_n$; on a posé

$$m(\mathcal{E}_n) = \mu(E_n).$$

On peut trouver dans R_n un ensemble D_n borné, fermé, contenu dans E_n tel que

$$\mu(D_n) \geqq \mu(E_n) - \frac{\varepsilon}{2^n};$$

D_n définit dans $\mathfrak{X}$ un ensemble cylindrique $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{E}_n$, fermé mais pas nécessairement borné et

$$m(\mathcal{D}_n) \geqq m(\mathcal{E}_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Posons $\mathcal{C}_n = \prod_{k=1}^{n} \mathcal{D}_n$ et soit w_n dans R_n définissant $\mathcal{C}_n$; w_n est fermé, borné, contenu dans D_n :

$$m(\mathcal{C}_n) \geqq m(\mathcal{B}_n) - \varepsilon \geqq l - \varepsilon,$$

donc

$$\mu(w_n) \geqq l - \varepsilon.$$

Soit $S(a)$ la sphère de $\mathfrak{X}$ de rayon a et soit une suite de fonctionnelles linéaires de norme 1, dense sur la sphère de rayon 1 de $\mathfrak{X}^\star$, un nombre fini quelconque de ces fonctionnelles étant linéairement indépendantes, et contenant comme suite partielle la suite $x_{n_i}^\star$; on ne restreint pas la généralité en supposant que ce sont les $x_n^\star$ elles-mêmes. Considérons les ensembles $\mathcal{C}_n . S(a)$; si aucun n'est vide, ils ont une limite non vide. En effet $\mathcal{C}_n . S(a)$ étant supposé non vide quel que soit n, soit $x_n \in \mathcal{C}_n . S(a)$, la suite x_n est bornée puisque $x_n \in S(a)$; $\mathfrak{X}$ étant réflexif, une sous-suite, qu'on supposera être la suite elle-même, a une limite faible x; soit $\alpha_j^n = x_j^\star(x_n)$ et soit P_k^n le point de R_k de coordonnées $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k^n)$, $P_k^n \in w_k$ car $x_n \in \mathcal{C}_k . S(a)$ pour $k \leqq n$ tout au moins, donc $x_n \in \mathcal{C}_k$. Si P_k est le point de R_k de coordonnées $\alpha_j = x_j^\star(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, $P_k = \lim\limits_{n \to \infty} P_k^n$, donc $P_k \in w_k$, donc $x \in C_k$, ceci quel que soit k, donc x appartient à $\lim\limits_{n \to \infty} C_n$, donc *a fortiori* à $\lim\limits_{n \to \infty} \mathcal{E}_n$ qui n'est donc pas vide.

Supposons $C_N . S(a)$ vide, alors $C_n . S(a)$ est vide quel que soit $n \geqq N$. Je dis que si $C_n . S(a)$ est vide, $C_n \mathfrak{A}_l$ l'est, du moins pour $l \geqq n$. C_n peut être représenté dans R par une « extension » w'_n de w_n, si w'_n et A_l ont un point commun P il y a un $x \in S(a)$ qui est $\in \mathcal{C}_n$ contrairement à l'hypothèse, donc w'_n et A_l n'ont pas de point commun, donc $C_n \mathfrak{A}_l = 0$ et alors C_n étant extérieur à $\mathfrak{A}_l$ (quel que soit $l \geqq n$)

$$m(\mathcal{C}_n) = m[\mathfrak{X} - \mathfrak{A}_l] = 1 - m(\mathfrak{A}_l),$$

donc

$$m(\mathfrak{A}_l) \leqq 1 - m(C_n) \leqq 1 - l + \varepsilon,$$

donc

$$\rho(a) \leqq 1 - l + \varepsilon.$$

Si l'on a pris a assez grand pour que $\rho(a) > 1 - \varepsilon$ — ce qui est possible en vertu de la condition C — et $\varepsilon < \frac{l}{2}$ il y a contradiction, donc $C_n . S(a)$ n'est pas vide et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 7. — *Si $\mathfrak{X}$ est séparable et réflexif, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction définie positive $\varphi(x^*)$, telle que $\varphi(\theta^*) = 1$ soit une caractéristique — d'un élément aléatoire proprement dit — est que $\varphi(x^*)$ satisfasse à la condition* C.

Que la condition C soit suffisante résulte de la démonstration précédente, la nécessité est évidente puisque :

a. Si $\mathfrak{X}$ est séparable et réflexif, $\| x \|$ est mesurable, c'est-à-dire que $m[S(a)]$ existe quel que soit a;

b. et que $m[S(a)] \to 1$ si $a \to \infty$ si X est proprement dit. La condition C pose deux problèmes.

Problème 1. — On peut se demander si toute fonction définie positive $\varphi(x^*)$ telle que $\varphi(\theta^*) = 1$ ne satisfait pas à la condition C. On sait qu'il en est ainsi si $\mathfrak{X}$ est un espace euclidien à un nombre fini, quelconque, n de dimensions. Un exemple va montrer que cela ne subsiste pas dans le cas général.

Soit $\mathfrak{X}$ l'espace de Hilbert, séparable et réflexif, des suites de nombres réels $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots)$ telles que $\sum_k |x_k|^2 < +\infty$; soit x^*_k la fonctionnelle linéaire définie par $x_k^\star(x) = x_k$; toute fonctionnelle linéaire est de la forme $x^\star = \sum_k a_k x_k^\star$.

Posons

$$\varphi(x^\star) = e^{-\frac{\|x^\star\|^2}{2}},$$

on voit tout de suite que :

a. $\varphi(0^\star) = 1$;
b. $\varphi(x^\star) \to 1$ si $x^\star \to 0^\star$.

De plus quels que soient $x_{(1)}^\star, \ldots, x_{(h)}^\star$ et les nombres réels ou complexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$, on a :

$$\sum_{gj} \varphi[x_{(g)}^\star - x_{(j)}^\star]\alpha_g \bar{\alpha}_j \quad \textbf{réel} \geqq 0.$$

Soient $X_1, \ldots, X_k, \ldots$ des variables aléatoires ordinaires mutuellement indépendantes, laplaciennes, d'espérance mathématique nulle et d'écart moyen quadratique égal à 1; à toute

$$x^\star = \sum_k a_k x_k^\star, \qquad \text{avec} \quad \sum_k |a_k|^2 < +\infty,$$

faisons correspondre la variable aléatoire $Y = \sum_k a_k X_k$, cette série est convergente presque sûrement et aussi en moyenne quadratique puisque $\sum_k |a_k|^2 < +\infty$. Y est laplacienne, et

$$\|x^\star\|^2 = \Sigma |a_k|^2,$$

donc

$$E(e^{iY}) = e^{-\frac{\Sigma |a_k|^2}{2}} = \varphi(x^\star).$$

Si $Y_{(j)}$ est la v. a. correspondant à $x_{(j)}$, on voit que :

$$\varphi[x_{(g)}^\star - x_{(j)}^\star] = E[e^{i(Y_{(g)} - Y_{(j)})}],$$

$$\sum_{gj} \varphi[x_{(g)}^\star - x_{(j)}^\star]\alpha_g \bar{\alpha}_j = \sum_{gj} E[\alpha_g \bar{\alpha}_j e^{i(Y_{(g)} - Y_{(j)})}] = \sum_{gj} E[\alpha_g e^{iY_{(g)}} \overline{\alpha_j e^{iY_{(j)}}}]$$

$$= E\left[\sum_{gj} \alpha_g e^{iY_{(g)}} \overline{\alpha_j e^{iY_{(j)}}}\right] = E\left[\left|\sum_{gj} \alpha_j e^{iY_{(j)}}\right|^2\right] \geqq 0.$$

Il en résulte que $\varphi(x^\star)$ est définie positive. Or $\varphi(x^\star)$ ne satisfait pas à la condition C. En effet, avec la suite $[x_k^\star]$ construisons les $\mathcal{A}_k$ de la démonstration du théorème précédent; on remarque que A_n est défini par

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \leqq a^2 \qquad \text{ou} \qquad \sum_{k=1}^{n} |x_k^\star(x)|^2 \leqq a^2.$$

L'interprétation précédente de $\varphi(x^\star)$ avec les variables aléatoires Y montre que :

$$m(\mathcal{A}_n) = \Pr\left[\sum_{k=1}^{n} |X_k|^2 \leqq a^2\right] = P(a, n).$$

Le calcul de $P(a, n)$ est élémentaire; il montre que :

$$\lim_{n \to \infty} P(a, n) = 0 \quad \text{quel que soit } a.$$

D'ailleurs, cela est évident car la série à termes positifs $\sum_k |X_k|^2$ est p. s. divergente; on aurait pour toute définition de $\rho(a)$ faisant intervenir toutes les $x_k^\star$, $\rho(a) \leqq \lim_{n \to \infty} P(a, n)$, donc $\rho(a) = 0$ quel que soit a.

Remarque. — Dans l'exemple précédent, faisons la modification suivante : supposons que l'écart moyen quadratique de X_k au lieu d'être égal à 1 vaut $\frac{1}{\sqrt{k}}$ et posons :

$$\varphi(x^\star) = E[e^{iY}], \qquad \text{où} \quad Y = \sum a_k X_k,$$

Y est laplacienne

$$E(Y) = 0, \qquad E(Y^2) = \left[\sum_k \frac{a_k^2}{k}\right],$$

donc

$$\varphi(x^\star) = e^{-\sum \frac{a_k^2}{2k}}.$$

$\varphi(x^\star)$ est continue avec la convergence faible dans $\mathfrak{X}^\star$, il suffit pour le voir de montrer que $\rho(x^\star) \to 1$ si $x^\star \to \theta^\star$ faiblement; or si $x^\star$ tend faiblement vers $\theta^\star$, $\sum_k a_k^2$ est borné soit $< M$ et a_k pour k fixe tend vers zéro

$$\sum_k \frac{a_k^2}{k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{P} \frac{a_k^2}{k}}_{A} + \underbrace{\sum_{k>P} \frac{a_k^2}{k}}_{B}.$$

On a $B \leqq \frac{1}{P} M$, $A \to 0$ pour P fixe quelconque.

Si l'on a pris P assez grand, l'exposant de $e^{-\sum \frac{a_k^2}{k}}$ est arbitrairement petit. C. Q. F. D.

Mais, d'autre part, comme la série $\sum_k \frac{1}{k}$ est divergente $\sum_k |X_k|^2$ est p. s. divergente donc $P(a, n) \to 0$ quel que soit a.

Donc le fait que $\varphi(x^*)$ définie positive est continue avec la convergence faible pour x^* ne suffit pas à entraîner que $\varphi(x^*)$ satisfait à la condition C.

Problème 2. — Étant donné ces exemples, il faut rechercher des critères simples permettant de reconnaître si une fonction définie positive $\varphi(x^*)$ satisfait ou non à la condition C.

Soit $\mathfrak{X}$ un espace de Banach séparable et réflexif, et $\varphi_1(x^*)$, $\varphi_2(x^*)$, ..., $\varphi_n(x^*)$, ... une suite de caractéristiques telles que :

a. Il existe α positif et s positif tels que, quel que soit n :

$$E_n[\|X\|^\alpha] = s_n^\alpha < s^\alpha;$$

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n(x^*) = \varphi(x^*)$;

c. Il existe A tel que, quel que soit x^* satisfaisant à $\|x^*\| \leqq A$:

$$|\varphi_n(x^*) - \varphi(x^*)| \to 0 \quad \text{uniformément en } x^*.$$

$\varphi(x^*)$ est évidemment définie positive.

Considérons la loi $\mathcal{L}_n$ correspondant à la caractéristique φ_n, l'inégalité de Bienaymé donne :

$$\Pr{}^{(n)}[\|X\| < a] > 1 - \frac{s_n^\alpha}{a^\alpha} \qquad (a \text{ positif}).$$

Utilisant les notations du théorème de Bochner généralisé, on a quel que soit k :

$$\Pr{}^{(n)}[X \in \mathcal{A}_k] = m_n(\mathcal{A}_k) = \mu_n(A_k) > 1 - \frac{s_n^\alpha}{a^\alpha},$$

$$\lim_{n \to +\infty} m_n(\mathcal{A}_k) = m(\mathcal{A}_k) > 1 - \frac{s^\alpha}{a^\alpha}$$

et, par conséquent :

$$\rho(a) = \lim_{k \to +\infty} m(\mathcal{A}_k) > 1 - \frac{s^\alpha}{a^\alpha},$$

$$\lim_{a \to +\infty} \rho(a) = 1.$$

La condition C est satisfaite, donc $\varphi(x^*)$ est une caractéristique et définit une loi $\mathcal{L}$; d'où :

Théorème 8. — *Si une suite de caractéristiques $\varphi_n(x^*)$ converge uniformément en x^*, pour tout x^* tel que $\|x^*\| \leqq A$, vers une fonction $\varphi(x^*)$, si de plus il existe $\alpha > 0$ tel que $E_n[\|X\|^\alpha]$ est uniformément borné, alors $\varphi(x^*)$ est une caractéristique.*

Il se pose alors le problème de savoir si $\mathcal{L}$ est la limite des lois $\mathcal{L}_n$ et d'abord le problème de définir la convergence d'une suite de lois vers une loi limite.

Exemple. — Soit toujours un espace de Hilbert séparable $\mathfrak{X}$ et soit $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ des vecteurs orthonormés, soit m_n la l-mesure constituée en plaçant la masse 1 en x_n et rien ailleurs; sa caractéristique $\varphi_n(x^*)$ est

$$\varphi_n(x^*) = e^{ix^*(x_n)}$$

si x^* étant fixe quelconque, n tend vers $+\infty$, $x^*(x_n) \to 0$, donc $\varphi_n(x^*) \to 1$ qui est la caractéristique d'une masse 1 concentrée en θ : on voit que m_n ne tend pas vers cette répartition bien qu'il y ait convergence des caractéristiques.

CHAPITRE IV.

ÉLÉMENTS ALÉATOIRES LAPLACIENS.

I. — DÉFINITION DES ÉLÉMENTS ALÉATOIRES LAPLACIENS.

Définition. — Un élément aléatoire proprement dit X, à valeurs dans un espace de Banach $\mathfrak{X}$ est un élément aléatoire laplacien si $x^*(X)$ est un nombre aléatoire laplacien quelle que soit la fonctionnelle $x^* \in \mathfrak{X}^*$ [E. Mourier, IV].

Cette définition d'un élément aléatoire laplacien a déjà été proposée par M. Fréchet [M. Fréchet, IV] et comparée par cet Auteur à une seconde définition, déduite de la généralisation d'un théorème de S. Bernstein, qui suppose l'existence de $E[\|X\|^2]$. Un résultat récent de M. G. Darmois [G. Darmois, I] permet de supprimer cette hypothèse. Il est alors possible de démontrer l'équivalence des deux définitions quel que soit l'espace de Banach $\mathfrak{X}$. C'est ce que nous nous proposons de faire dans ce qui suit. Nous aurons pour cela besoin d'établir quelques propriétés caractéristiques de l'indépendance de deux éléments aléatoires dont la définition a été donnée au chapitre II (p. 173).

Théorème 1. — *Pour que deux éléments aléatoires* X_1 *et* X_2 *soient indépendants, il faut et il suffit que pour tout* $x_1^\star, x_2^\star \in \mathfrak{X}_1^\star \times \mathfrak{X}_2^\star$ *la caractéristique du couple* X_1, X_2 *soit le produit de la caractéristique de* X_1 *par la caractéristique de* X_2, *c'est-à-dire que :*

$$\Phi(x_1^\star, x_2^\star) = \varphi_1(x_1^\star)\,\varphi_2(x_2^\star),$$

où $\varphi_1(x_1^\star)$, $\varphi_2(x_2^\star)$, $\Phi(x_1^\star, x_2^\star)$ *sont les caractéristiques de* X_1, *de* X_2, *et du couple* X_1, X_2 *respectivement.*

Par définition même de la caractéristique d'un élément aléatoire [11] :

$$\varphi_1(x_1^\star) = \mathrm{E}[e^{ix_1^\star(X_1)}] = \int_{\mathfrak{X}_1} e^{ix_1^\star(X_1)}\,d\mu_1(\varepsilon_1),$$

fonction de $x_1^\star$ définie pour tout $x_1^\star \in \mathfrak{X}_1^\star$.

De même, la caractéristique de X_2 est :

$$\varphi_2(x_2^\star) = \mathrm{E}[e^{ix_2^\star(X_2)}] = \int_{\mathfrak{X}_2} e^{ix_2^\star(X_2)}\,d\mu_2(\varepsilon_2),$$

fonction de $x_2^\star$ définie pour tout $x_2^\star \in \mathfrak{X}_2^\star$.

Et la caractéristique de $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$ est :

$$\begin{aligned}\Phi(x_1^\star, x_2^\star) &= \mathrm{E}\, e^{i[x_1^\star(X_1)+x_2^\star(X_2)]}\\ &= \int_{\mathfrak{X}_1\times\mathfrak{X}_2} e^{i[x_1^\star(x_1)+x_2^\star(x_2)]}\,d\lambda(\varepsilon_1\times\varepsilon_2)\end{aligned}$$

définie pour tout $x_1^\star, x_2^\star \in (\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2)^\star \simeq \mathfrak{X}_1^\star \times \mathfrak{X}_2^\star$ (chap. II, p. 173). En effet, toute fonctionnelle linéaire $z^\star$ sur $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$ est du type

(1) $$z^\star(x_1, x_2) = x_1^\star(x_1) + x_2^\star(x_2);$$

d'abord (1) est bien une fonctionnelle linéaire sur $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$. Elle est additive puisque $x_1^\star(x_1)$ et $x_2^\star(x_2)$ le sont, et :

$$|z^\star(x_1, x_2)| \leqq \|x_1^\star\|.\|x_1\| + \|x_2^\star\|.\|x_2\|$$

si $\|x_1, x_2\|$ reste finie, $\|x_1\|$ et $\|x_2\|$ restent finies, donc $|z^\star(x_1 x_2)|$ reste finie, donc la fonctionnelle bornée.

---

[11] Les notations sont celles du chapitre II.

Ensuite toute fonctionnelle linéaire sur $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$ est du type (1), en effet :

$$z^\star(x_1, x_2) = z^\star(x_1 + \theta, \theta + x_2) = z^\star(x_1, \theta) + z^\star(\theta, x_2).$$

Si X_1 et X_2 sont indépendants

$$\lambda(\varepsilon_1 \times \varepsilon_2) = \mu_1(\varepsilon_1) \times \mu_2(\varepsilon_2)$$

quels que soient $\varepsilon_1 \in \mathcal{F}_1$ et $\varepsilon_2 \in \mathcal{F}_2$, donc [P. R. Halmios, I, p. 146]

$$(2) \qquad \begin{aligned} \Phi(x_1^\star, x_2^\star) &= \iint_{\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2} e^{ix_1^\star(x_1)} e^{ix_2^\star(x_2)} d\mu_1(\varepsilon_1)\, d\mu_2(\varepsilon_2) \\ &= \int_{\mathfrak{X}_1} e^{ix_1^\star(x_1)} d\mu_1(\varepsilon_1) \int_{\mathfrak{X}_2} e^{ix_2^\star(x_2)} d\mu_2(\varepsilon_2), \\ \Phi(x_1^\star, x_2^\star) &= \varphi_1(x_1^\star)\, \varphi_2(x_2^\star). \end{aligned}$$

Inversement, si la caractéristique de X_1, X_2 est de la forme (2) quelle que soit $x_1^\star, x_2^\star \in \mathfrak{X}_1^\star \times \mathfrak{X}_2^\star$, X_1 et X_2 sont des éléments aléatoires indépendants, en effet la caractéristique détermine la mesure sur le plus petit corps de Borel qui contient le corps des ensembles cylindriques.

Remarquons que si une caractéristique $\Phi(x_1^\star, x_2^\star)$ est le produit d'une fonction de $x_1^\star$ par une fonction de $x_2^\star$:

$$\Phi(x_1^\star, x_2^\star) = f(x_1^\star)\, g(x_2^\star),$$

$f(x_1^\star)$ et $g(x_2^\star)$ sont nécessairement les caractéristiques de X_1 et X_2 respectivement; pour le voir il suffit de faire $x_1^\star = \theta^\star$ ou $x_2^\star = \theta^\star$.

THÉORÈME 2. — *Pour que deux é. a.* X_1 *et* X_2 *soient indépendants, il faut et il suffit que, quelles que soient* $x_1^\star \in \mathfrak{X}_1^\star$ *et* $x_2^\star \in \mathfrak{X}_2^\star$, $x_1^\star(X_1)$ *et* $x_2^\star(X_2)$ *soient des variables aléatoires indépendantes.*

Que la condition soit nécessaire est évident; qu'elle soit suffisante résulte du théorème précédent et du théorème sur l'espérance mathématique du produit de variables aléatoires indépendantes.

En effet :

$$\begin{aligned} \Phi(x_1^\star x_2^\star) &= \mathrm{E}\, e^{i[x_1^\star(X_1) + x_2^\star(X_2)]} \\ &= \mathrm{E}\left[e^{ix_1^\star(X_1)} e^{ix_2^\star(X_2)}\right] \\ &= \varphi_1(x_1^\star)\, \varphi_2(x_2^\star). \end{aligned}$$

THÉORÈME 3. — *Si* X *est un é. a. dans* $\mathfrak{X}$ *tel que* $\mathrm{E}(X) = \theta$, $X^\star$ *un é. a. dans* $\mathfrak{X}^\star$ *et si* X *et* $X^\star$ *sont indépendants*

$$\mathrm{E}[X^\star(X)] = 0.$$

En effet,

$$E[X^\star(X)] = E[E[X^\star(X)/X^\star]];$$

or pour $x^\star$ fixé, quelconque

$$E[X^\star(X)/X^\star = x^\star] = x^\star[E(X)] = 0,$$

puisque par hypothèse $E(X) = 0$.

Théorème 4. — *Si* $X^\star$ *est un é. a. dans* $\mathfrak{X}^\star$ *tel que* $E(X^\star) = 0^\star$, X *un é. a. dans* $\mathfrak{X}$ *et si* X *et* $X^\star$ *sont indépendants*, .

$$E[X^\star(X)] = 0.$$

En effet, on sait [E. Hille, I, p. 22] qu'à tout $x \in \mathfrak{X}$ on peut associer $x^{\star\star} \in \mathfrak{X}^{\star\star}$ tel que pour tout $x^\star \in \mathfrak{X}^\star$ on ait

$$x^\star(x) = x^{\star\star}(x^\star)$$

On a donc :

$$E[X^\star(X)] = E[X^{\star\star}(X^\star)];$$

or, d'après le théorème précédent, si $E(X^\star) = 0^\star$, on a :

$$E[X^{\star\star}(x)] = 0$$

et, par conséquent,

$$E[X^\star(X)] = 0.$$

Propriétés des éléments laplaciens. — Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des é. a. indépendants, laplaciens, à valeurs dans $\mathfrak{X}$, x_0 un élément certain de $\mathfrak{X}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres certains $Z = a_0 x_0 + a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n$ est laplacien,

En effet,

$$x^\star(Z) = a_0\, x^\star(x_0) + a_1 x^\star(X_1) + \ldots + a_n x^\star(X_n)$$

d'après un théorème classique du Calcul des Probabilités $x^\star(Z)$ est laplacien et ceci pour tout $x^\star$, donc Z est un élément laplacien.

Inversement, si $Z = aX + bY$ est laplacien et si ab est différent de zéro, alors si X et Y sont indépendants ils sont aussi laplaciens; en effet :

$$x^\star(Z) = a\, x^\star(X) + b\, x^\star(Y),$$

$x^\star(Z)$ est une variable laplacienne, $x^\star(X)$ et $x^\star(Y)$ sont deux variables indépendantes, puisque X et Y sont indépendantes, elles sont donc laplaciennes (théorème de Lévy-Cramer), donc X et Y sont des éléments laplaciens.

Soit X un élément aléatoire laplacien et $x^\star$ un élément quelconque de $\mathfrak{X}^\star$, désignons par $\sigma^2_{x^\star}$ la fluctuation de $x^\star(X)$,

$$\sigma^2_{x^\star} = E\{x^\star(X) - E[x^\star(X)]\}^2;$$

$x^\star(X)$ est une variable aléatoire laplacienne donc $E[x^\star(X)]$ et $\sigma^2_{x^\star}$ existent et sa caractéristique $\varphi_{x^\star}(v)$ est :

$$(1) \qquad \varphi_{x^\star}(v) = E[e^{iv x^\star(X)}] = e^{iv E[x^\star(X)] - \frac{1}{2}v^2 \sigma^2_{x^\star}},$$

mais en désignant par $\varphi(x^\star)$ la caractéristique de X

$$\varphi_{x^\star}(v) = E[e^{iv x^\star(X)}] = \varphi(v x^\star),$$

(1) peut s'écrire

$$\varphi_{x^\star}(v) = e^{iE[v x^\star(X)] - \frac{1}{2}\sigma^2_{v x^\star}} = \varphi(v x^\star)$$

et donc pour tout $x^\star \in \mathfrak{X}^\star$:

$$(2) \qquad \boxed{\varphi(x^\star) = e^{iE[x^\star(X)] - \frac{1}{2}\sigma^2_{x^\star}}.}$$

Inversement, supposons que X est un élément aléatoire dont la caractéristique est de la forme (2). Quelle que soit $x^\star \in \mathfrak{X}^\star$, la caractéristique de $x^\star(X)$ est :

$$\varphi_{x^\star}(v) = \varphi(v x^\star) = e^{iE[v x^\star(X)] - \frac{1}{2}\sigma^2_{v x^\star}} = e^{iv E[x^\star(X)] - \frac{1}{2}v^2 \sigma_{x^\star}},$$

donc $x^\star(X)$ est une v. a, laplacienne et X est un élément aléatoire laplacien.

Le théorème de S. Bernstein sur lequel s'appuie M. Fréchet est le suivant :

Pour que deux nombres aléatoires indépendants X *et* Y, *chacun pourvu partout d'une densité de probabilité et ayant la même fluctuation finie et non nulle* σ^2, *soient deux variables laplaciennes, il faut et il suffit que les deux variables* $X + Y$ *et* $X - Y$ *soient indépendantes.*

Au moyen d'une démonstration différente de celle de S. Bernstein, M. Fréchet étend cette proposition au cas où l'on ne suppose pas l'existence d'une densité, il définit la fluctuation d'un é. a. à valeurs dans un espace distancié complet comme étant la borne inférieure de l'espérance mathématique du carré de la distance de X et de a quand a, élément certain, parcourt l'espace. Il montre que si X à valeurs dans un espace de Banach $\mathfrak{X}$ est tel que :

1° sa fluctuation est finie ;

2° il existe dans le même espace $\mathfrak{X}$ un autre élément Y indépendant de X et tel que X + Y et X — Y soient indépendants, X est laplacien.

Inversement M. Fréchet montre que si $\mathfrak{X}$ possède une base et si X est laplacien il existe un élément aléatoire Y indépendant de X tel que X + Y et X — Y soient indépendants.

Théorème de G. Darmois. — *Deux variables aléatoires indépendantes* X *et* Y *sont nécessairement laplaciennes si* X + Y *et* X — Y *sont indépendantes.*

Théorème. — $\mathfrak{X}$ *étant un espace de Banach quelconque, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un é. a.* X *à valeurs dans* $\mathfrak{X}$ *soit laplacien est qu'il existe un é. a.* Y *à valeurs dans* $\mathfrak{X}$, *indépendant de* $\mathfrak{X}$ *et tel que* X + Y *et* X — Y *soient indépendants.*

La condition est suffisante, en effet : X et Y étant indépendants ainsi que X + Y et X — Y, il en est de même de $x^\star(\mathrm{X})$ et $x^\star(\mathrm{Y})$ ainsi que de $x^\star(\mathrm{X}+\mathrm{Y})$ et $x^\star(\mathrm{X}-\mathrm{Y})$ (*cf.* th. 2, p. 228).

Or

$$x^\star(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = x^\star(\mathrm{X}) + x^\star(\mathrm{Y}),$$

quelle que soit $x^\star \in \mathfrak{X}^\star$ et

$$x^\star(\mathrm{X}-\mathrm{Y}) = x^\star(\mathrm{X}) - x^\star(\mathrm{Y}).$$

Donc, d'après le théorème de G. Darmois, le nombre aléatoire $x^\star(\mathrm{X})$ est laplacien et ceci quel que soit $x^\star \in \mathfrak{X}^\star$, par conséquent X est laplacien.

La condition est nécessaire, en effet soit X un é. a. laplacien et Y un é. a. indépendant de X et de même loi. Soit $\varphi(^\star)$ la caractéristique de X

$$\varphi(x^\star) = e^{i\mathrm{E}[x^\star(\mathrm{X})] - \frac{1}{2}\sigma^2_{x^\star}} \qquad (x^\star \in \mathfrak{X}^\star).$$

Posons U = X + Y et V = X — Y, U et V sont deux é. a. laplaciens à valeurs dans le même espace $\mathfrak{X}$. Désignons leurs caractéristiques par φ_{U} et φ_{V} et par $\varphi_{\mathrm{U,V}}$ celle du couple U, V. X et Y étant indépendants et de même loi :

$$\varphi_{\mathrm{U}}(x^\star) = [\varphi(x^\star)]^2 = e^{i\,2\mathrm{E}[x^\star(\mathrm{X})] - \sigma^2_{x^\star}},$$
$$\varphi_{\mathrm{V}}(y^\star) = e^{-\sigma^2_{y^\star}},$$

donc

$$\varphi_{\mathrm{U}}(x^\star)\,\varphi_{\mathrm{V}}(y^\star) = e^{i\,2\,\mathrm{E}[x^\star(\mathrm{X})] - \sigma^2_{x^\star} - \sigma^2_{y^\star}}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathrm{U},\mathrm{V}}(x^\star, y^\star) &= \mathrm{E}\left\{ e^{i[x^\star(\mathrm{U}) + y^\star(\mathrm{V})]} \right\} \\ &= \mathrm{E}\left\{ e^{i[(x^\star(\mathrm{X}) + x^\star(\mathrm{Y}) + y^\star(\mathrm{X}) - y^\star(\mathrm{Y})]} \right\} \\ &= \mathrm{E}\left\{ e^{i[(x^\star + y^\star)(\mathrm{X}) + (x^\star - y^\star](\mathrm{Y}))} \right\} \\ &= \mathrm{E}\left[e^{i(x^\star + y^\star)(\mathrm{X})} \right] \mathrm{E}\left[e^{i(x^\star - y^\star)(\mathrm{Y})} \right] \\ &= \varphi(x^\star + y^\star)\,\varphi(x^\star - y^\star),\end{aligned}$$

car X et Y étant indépendants, il en est de même de $(x^\star + y^\star)(\mathrm{X})$ et $(x^\star - y^\star)(\mathrm{Y})$ quelles que soient $x^\star$ et $y^\star \in \mathfrak{X}^\star$, donc :

$$\varphi_{\mathrm{U},\mathrm{V}}(x^\star, y^\star) = e^{i\,\mathrm{E}[(x^\star + y^\star)(\mathrm{X})] - \frac{1}{2}\sigma^2_{x^\star + y^\star} + i\,\mathrm{E}[(x^\star - y^\star)(\mathrm{Y})] - \frac{1}{2}\sigma^2_{x^\star + y^\star}}$$

mais :

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[(x^\star + y^\star)(\mathrm{X})] = \mathrm{E}[(x^\star(\mathrm{X}) + y^\star(\mathrm{X})] = \mathrm{E}[x^\star(\mathrm{X})] + \mathrm{E}[y^\star(\mathrm{X})], \\ &\mathrm{E}[(x^\star - y^\star)(\mathrm{Y})] = \mathrm{E}[(x^\star - y^\star)(\mathrm{X}) = \mathrm{E}[x^\star(\mathrm{X})] - \mathrm{E}[y^\star(\mathrm{X})], \\ &\sigma^2_{x^\star + y^\star} = \sigma^2_{x^\star} + \sigma^2_{y^\star}, \\ &\sigma^2_{x^\star - y^\star} = \sigma^2_{x^\star} + \sigma^2_{y^\star},\end{aligned}$$

donc :

$$\varphi_{\mathrm{U},\mathrm{V}}(x^\star, y^\star) = e^{i\,2\,\mathrm{E}[x^\star(\mathrm{X})] - \sigma^2_{x^\star} - \sigma^2_{y^\star}} = \varphi_{\mathrm{U}}(x^\star)\,\varphi_{\mathrm{V}}(y^\star).$$

Donc U et V sont indépendantes.

Si X a une fluctuation nulle, X est un élément presque certain de $\mathfrak{X}$ et réciproquement; dans ce cas pour tout $x^\star \in \mathfrak{X}^\star$, $x^\star(\mathrm{X})$ est un nombre presque certain. Réciproquement M. Fréchet a montré [M. Fréchet, IV], que, si $\mathfrak{X}$ possède une base, $x^\star(\mathrm{X})$ ne peut être presque certainement constant que si X est un élément presque certain. Dans le théorème précédent, si X a une fluctuation nulle il suffit de prendre pour Y n'importe quel élément certain de $\mathfrak{X}$ pour que $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ et $\mathrm{X} - \mathrm{Y}$ soient indépendants. Ainsi qu'on le fait dans le cas des variables aléatoires, nous considérerons qu'un élément presque certain vérifie une loi de Laplace singulière.

L'étude précédente pose un certain nombre de problèmes : nous avons vu que si X est un é. a. laplacien, $\mathrm{E}[x^\star(\mathrm{X})]$ existe quelle que soit $x^\star \in \mathfrak{X}$. Il s'agit d'une condition nécessaire mais non suffisante d'existence de $\mathrm{E}(\mathrm{X})$, donc premier problème : que peut-on dire de $\mathrm{E}(\mathrm{X})$?

Ensuite que dire de $\|\mathrm{X}\|$? de $\mathrm{E}[\|\mathrm{X}\|^2]$?

Nous avons vu que la caractéristique d'un élément laplacien X est

$$\varphi(x^\star) = e^{i\,\mathrm{E}[x^\star(\mathrm{X})] - \frac{1}{2}\mathrm{E}[x^\star(\mathrm{X}) - \mathrm{E}(x^\star)(\mathrm{X})]^2};$$

inversement étant donnée une fonction de la forme :

$$f(x^\star) = e^{i\,\mathrm{E}[x^\star(\mathrm{X})] - \frac{1}{2}\mathrm{E}[x^\star(\mathrm{Y}) - \mathrm{E}(x^\star(\mathrm{Y}))]^2},$$

où Y est un é. a. à valeurs dans $\mathfrak{X}$, existe-t-il un élément aléatoire X à valeurs dans $\mathfrak{X}$ dont $f(x^\star)$ est la caractéristique ?

II. — ÉLÉMENTS ALÉATOIRES LAPLACIENS DANS UN ESPACE DE HILBERT.

Nous allons étudier ces problèmes dans le cas particulier où $\mathfrak{X}$ est un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. Nous savons que, alors, $\|\mathrm{X}\|$ est mesurable (*cf.* chap. I, p. 168). Il existe un système orthogonal $\{x_i\}$ tel que tout $x \in \mathcal{H}$ soit de la forme :

$$x = \sum_i a_i x_i$$

les a_i étant des nombres tels que

$$\sum_i |a_i|^2 < +\infty$$

et

$$\|x\|^2 = \sum_i |a_i|^2.$$

Toute fonctionnelle linéaire $x^\star(x)$ est de la forme :

$$x^\star(x) = \sum_i \alpha_i a_i,$$

les α_i étant des nombres tels que

$$\sum_i |\alpha_i|^2 < +\infty$$

et

$$\|x^\star\| = \sum_i |\alpha_i|^2.$$

Si $X = \sum_i A_i x_i$ est un é. a. laplacien, $x^*(X)$ est, pour tout $x^* \in \mathcal{H}^*$, une v. a. laplacienne, considérons une fonctionnelle x_i^* définie par $x_i^*(x) = a_i$.

$x_i^*(X) = A_i$ est une v. a. laplacienne, donc quel que soit i, $E(A_i)$ et $E[|A_i|^2]$ existent et sont finies.

Posons :

$$m_i = E(A_i), \qquad \sigma_i^2 = \sigma^2(A_i).$$

D'autre part,

$$\sum_i |A_i|^2 = \|X\|^2 = \rho^2$$

converge presque-sûrement vers une v. a. proprement dite.

Considérons le point P_n de coordonnées $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ (*cf.* figure, p. 235), c'est un point aléatoire laplacien dans un espace euclidien E_n à n dimensions, à axes orthogonaux; soit M_n le point de E_n de coordonnées $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, M_n est le point central de la distribution dans E_n. On a :

$$\rho_n^2 = \overline{OP}_n^2 = \sum_{i=1}^{n} |A_i|^2 \leqq \rho^2.$$

Soit Π le plan (dans E_n) passant par M_n et perpendiculaire à OM_n, c'est un plan diamétral pour l'ellipsoïde d'équidensité donc il y a une probabilité $\frac{1}{2}$ pour que P_n soit au delà de Π, donc une probabilité supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$ que $\rho^2 \geqq \overline{OM}_n^2$.

Si $\overline{OM}_n^2 = \sum_{i=1}^{n} |m_i|^2$ n'était pas borné, il y aurait une probabilité supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$ que ρ^2 ne soit pas borné : impossible. Donc

$$\sum_i |m_i|^2 < +\infty.$$

Soit m le point de $\mathcal{H}$ de coordonnées m_i, X et $X - m$ sont laplaciens en même temps, et si l'un a une e. m. il en est de même de l'autre (chap. I, p. 165); il nous suffit donc d'étudier $X - m$, soit encore de supposer les m_i tous nuls, ce que nous ferons dans ce qui suit.

Soit $x^*(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots)$, $\sum_i |\alpha_i|^2 < +\infty$, une fonctionnelle quelconque $\in \mathcal{H}^*$, et soit $x_n^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0, 0, 0, \ldots)$, x_n^* tend fortement vers $x^\star$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc, $\varphi(x^\star)$ désignant la caractéristique de X, $\varphi(x^\star_n)$ tend, uniformément en $x^\star$, vers $\varphi(x^\star)$ (*cf.* chap. III, p. 207).

Or, $x^\star_n(\mathrm{X})$ est une v. a. laplacienne à e. m. nulle et $x^\star(\mathrm{X})$ est une v. a. laplacienne, donc :

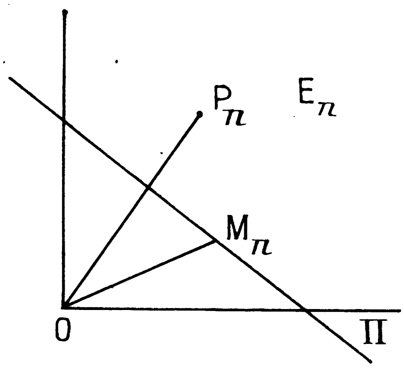
$$\mathrm{E}[x^\star(\mathrm{X})] = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}[x^\star_n(\mathrm{X})] = 0,$$

d'où il résulte que θ est l'e. m. de X, donc :

Théorème 1. — *Si* X, *à valeurs dans un espace de Hilbert séparable, est laplacien*, E(X) *existe.*

Si $\mathrm{X} = \sum_i \mathrm{A}_i x_i$,

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_i \mathrm{E}(\mathrm{A}_i) x_i.$$



Calcul préliminaire. — Soit Z une v. a. laplacienne à e. m. nulle et e. m. q. σ. Calculons la caractéristique φ_{Z^2} de Z^2.

$$\varphi_{\mathrm{Z}^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iv z^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}(1-2iv\sigma^2)} dz.$$

Posons

$$z = \frac{\sigma}{\sqrt{1-2iv\sigma^2}} u,$$

$$\varphi_{\mathrm{Z}^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-2iv\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

$$\varphi_{\mathrm{Z}^2} = \frac{1}{\sqrt{1-2iv\sigma^2}}.$$

Soit $X = \sum_i A_i x_i$ un é. a. laplacien dans $\mathcal{H}$ tel que $E(A_i) = 0$ quel que soit i, et P_n le point de E_n de coordonnées $(A_1, \ldots, A_n)$; les A_i sont des v. a. laplaciennes, mais pas forcément indépendantes. Dans E_n on peut prendre de nouveaux axes orthogonaux $(x'_{n,1}, \ldots, x'_{n,n})$ tels que les $A'_{n,1}, \ldots, A'_{n,n}$ soient des variables aléatoires laplaciennes et indépendantes $E(A'_{n,j}) = 0$ quel que soit j.

On a

$$\rho_n^2 = \sum_{j=1}^{n} |A'_{n,j}|^2.$$

Posons

$$\lambda_{n,j}^2 = E\,|A'_{n,j}|^2, \qquad \text{d'où} \qquad E(\rho_n^2) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j}^2,$$

nous allons montrer que les $\lambda_{n,j}$ sont bornés.

Soit $A'_{n,k}$ le $A'_{n,j}$ qui, pour n fixé, a le plus grand $\lambda_{n,j}$. Si $|A'_{n,k}|^2 > C^2$ *a fortiori* $\rho_n^2 > C^2$, supposons que $\lambda_{n,k}$ n'est pas borné quand n tend vers $+\infty$,

$$\Pr[A'^2_{n,k} > C^2] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\lambda_{n,k}} \int_C^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2\lambda_{n,k}^2}} du \qquad (C \text{ positif})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{C}{\lambda_{n,k}}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Prenons $C = \lambda_{n,k}$

$$\Pr[A'^2_{n,k} > \lambda_{n,k}^2] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

quantité qui n'est pas petite, donc si $\lambda_{n,k}$ n'est pas borné, il y a une probabilité pas petite que $\rho_n^2 \geqq C^2$ (C^2 très grand), ce qui est impossible puisque

$$\rho^2 = \sum_i |A_i|^2 \geqq \rho_n^2$$

est p. s. convergent.

Donc les $\lambda_{n,j}$ sont bornés, donc la caractéristique de ρ_n^2

$$\varphi_n(v) = \prod_{j=1}^{n} (1 - 2i\lambda_{n,j}^2 v)^{-\frac{1}{2}}$$

est régulière dans un cercle (γ) de cercle O et de rayon fixe, non nul, et il est par conséquent légitime d'utiliser un développement limité de $\varphi_n(v)$ au voisinage de l'origine.

Posons

$$u_j = 2i\lambda_{n,j}^2 v,$$

$$\psi_n(v) = \log \varphi_n(v) = -\frac{1}{2}\sum \log(1-u_j)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_1^n u_j + \frac{1}{2}\sum_1^n u_j^2 + \frac{1}{3}\sum_1^n u_j^3 + \ldots\right],$$

$$\varphi_n(v) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n u_j + \frac{1}{4}\sum_1^n u_j^2 + \frac{1}{8}\left(\sum_{j=1}^n u_j\right)^2 + \ldots,$$

$$\varphi_n(v) = 1 + i\sum_{j=1}^n \lambda_{n,j}^2 v - \left[\sum_{j=1}^n \lambda_{n,j}^4 + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n \lambda_{n,j}^2\right)^2\right] v^2 + (\ldots) v^3.$$

Mais, d'autre part, en désignant par M_1, M_2 les moments d'ordre 1 et 2 de ρ_n^2, on a

$$\varphi_n(v) = 1 + iM_1 v - \frac{1}{2} M_2 v^2 + (\ldots) v^3$$

et, par conséquent

$$M_1 = \sum_{j=1}^n \lambda_{n,j}^2,$$

$$M_2 = 2\sum_{j=1}^n \lambda_{n,j}^4 + \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{n,j}^2\right)^2,$$

d'où

$$\sigma^2(\rho_n^2) = M_2 - M_1^2 = 2\sum_{j=1}^n \lambda_{n,j}^4.$$

Imaginons que les $\lambda_{n,j}$ sont tous égaux à 1, on a alors :

$$E[\rho_n^2] = n, \qquad \sigma^2(\rho_n^2) = 2n.$$

L'inégalité de Bienaymé donne, quel que soit β,

$$\Pr[\,|\rho_n^2 - E(\rho_n^2)| < \beta_n] \geq 1 - \frac{2n}{\beta^2 n^2}$$

et *a fortiori*

$$\Pr[\rho_n^2 > n - \beta n] > 1 - \frac{2n}{\beta^2 n^2};$$

$1 - \frac{2n}{\beta^2 n^2}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ donc, en prenant β inférieur à 1, la probabilité que ρ_n^2 soit grand n'est pas petite; ce résultat est *a fortiori* exact si les $\lambda_{n,j}$ sans être égaux entre eux sont tous au moins égaux à 1, et cela prouve que les $\lambda_{n,j}$ ne peuvent être tous supérieurs ou égaux à 1. Soit q_n le nombre des $\lambda_{n,j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ qui sont supérieurs ou égaux à 1, supposons que q_n n'est pas borné lorsque n tend vers $+\infty$. Dans

$$\rho_n^2 = \sum_{i=1}^{n} |A'_{n,j}|^2$$

négligeons tous les termes pour lesquels le $\lambda_{n,j}$ correspondant est inférieur à 1, ce qui revient à considérer un $\rho_n'^2$ pour lequel tous les λ_{nj} sont supérieurs ou égaux à 1; d'après ce qui précède quel que soit C^2, aussi grand que l'on veut, il suffit que n soit assez grand pour que la probabilité de ρ_n^2 supérieur à C^2 ne soit pas petite, c'est impossible puisque ρ_n^2 est p. s. convergent. Donc q_n est *borné*.

Supposons que $E(\rho_n^2) = \sum \lambda_{n,j}^2$ tende vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit β inférieur à 1, l'inégalité de Bienaymé donne :

$$\Pr[\rho_n^2 > E(\rho_n^2)(1-\beta)] = \Pr[\,|\rho_n^2 - E(\rho_n^2)| < \beta E(\rho_n^2)] \geqq 1 - \frac{2\sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j}^4}{\beta^2 \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j}^2\right)^2}.$$

Étudions la quantité

$$Q_n = \frac{2\sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j}^4}{\beta^2 \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j}^2\right)^2} = \frac{2}{\beta^2} \frac{\sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j}^4}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j}^2} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j}^2}.$$

Nous avons démontré que lorsque n tend vers $+\infty$, les $\lambda_{n,j}$ sont bornés et que les $\lambda_{n,k}$ supérieurs ou égaux à 1 sont en nombre fini, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k_i = k_1}^{k} \lambda_{n,k_i}^4}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j}^2} \to 0.$$

Pour $j \neq k_i$,

$$\lambda_{n,j} < 1, \qquad \text{donc} \quad \lambda_{n,j}^4 < \lambda_{n,j}^2,$$

donc

$$\frac{\sum_{j \neq k_i} \lambda_{n,j}^4}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j}^2} < 1.$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} Q_n = 0,$$

ce qui prouve que la probabilité que $\rho_n^2 > E(\rho_n^2)(1-\beta)$ n'est pas petite; or par hypothèse $E(\rho_n^2)$ tend vers $+\infty$, donc la probabilité que ρ_n^2 soit supérieur à C^2, quel que soit C^2 n'est pas petite, c'est impossible, donc $E(\rho_n^2)$ est *borné*.

$\rho^2 = \lim\limits_{n \to +\infty} \rho_n^2$, donc, d'après le lemme de Fatou, $E(\rho^2)$ existe et

$$E(\rho^2) \leqq \lim_{n \to +\infty} E(\rho_n^2).$$

THÉORÈME 2. — *Si* X *à valeurs dans un espace de Hilbert séparable est laplacien*,

$$E(\| X \|^2) < +\infty.$$

Nous avons utilisé la propriété bien connue que si P_n est un point aléatoire laplacien dans un espace euclidien E_n à n dimensions, il existe un système d'axes orthogonaux dans E_n tel que les coordonnées de P_n soient des variables laplaciennes et indépendantes. Cette propriété subsiste-t-elle dans le cas d'un point aléatoire laplacien P dans un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$? Autrement dit existe-t-il dans $\mathcal{H}$ un système orthogonal $\{x'_j\}$ tel que si X est un é. a. laplacien à valeurs dans $\mathcal{H}$, $X = \sum_j A'_j x'_j$, les A'_j étant des v. a. laplaciennes et indépendantes?

Soit, avec le système orthogonal $\{x_j\}$, $X = \sum_j A_j x_j$, toute fonctionnelle linéaire est de la forme

$$x^*(X) = \sum_j \alpha_j A_j,$$

les α_j étant des nombres tels que $\sum |\alpha_j|^2 < +\infty$

$$E\{[x^*(X)]^2\} = E\left[\sum_{jk} \alpha_j \alpha_k A_j A_k\right] = \sum_{jk} r_{jk} \alpha_j \alpha_k = \Phi$$

en posant

$$E(A_j A_k) = r_{jk};$$

Φ est une forme quadratique hermitienne.

Considérons la réduite

$$\Phi_n = \sum_{j,\, k \leqq n} r_{jk} \alpha_j \alpha_k;$$

$$\Phi - \Phi_n = \sum_{\substack{j,\, k \text{ non tous} \\ \text{deux} \leqq n}} r_{jk} \alpha_j \alpha_k = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k>n} r_{jk} \alpha_j \alpha_k \right] + \sum_{j>n} \sum_{k} r_{jk} \alpha_j \alpha_k.$$

Supposons que $\sum |\alpha_j|^2 \leqq 1$,

$$\left| \sum_j \alpha_j A_j \right| = |x^\star(X)| \leqq \|x^\star\| . \|X\| \leqq \|X\|,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k>n} r_{jk} \alpha_j \alpha_k = E\left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{k>n} \alpha_j \alpha_k A_j A_k \right].$$

Or,

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k>n} \alpha_j \alpha_k A_j A_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A_j \sum_{k>n} \alpha_k A_k,$$

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A_j \right| \leqq 1 \|X\|,$$

$$\left| \sum_{k>n} \alpha_k A_k \right| \leqq \varepsilon_n \left[\sum_{k>n} |A_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

où ε_n est un nombre borné par 1.

On a de même

$$\left| \sum_{j>n} \sum_{k} \alpha_j \alpha_k A_j A_k \right| \leqq \|X\| \varepsilon_n \left[\sum_{j>n} |A_j|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

et puisque $\sum_k |A_k|^2 = \|X\|^2$ est p. s. convergente, $\left[\sum_{k>n} |A_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ tend vers zéro p. s. quand n tend vers $+\infty$.

Par conséquent, Φ_n tend vers Φ, uniformément en α_j, pourvu que $\sum |\alpha_j|^2 \leqq 1$, il en résulte [F. Riesz, I, p. 113] que Φ est complètement continue et donc [F. Riesz, I, p. 146] admet une décomposition de la forme

$$\Phi = \sum_{j=1}^{\infty} s_j \left(\sum_{k=1}^{\infty} l_{jk} \alpha_k \right)^2,$$

les formes linéaires $\sum_k l_{jk}\alpha_k$ étant normés et orthogonales deux à deux, c'est-à-dire qu'il existe des $s_1, s_2, \ldots, s_j, \ldots$ et des points $x'_1, \ldots, x'_j, \ldots$ deux à deux orthogonaux, $\|x'_j\| = 1$, tels que

$$\Phi = \sum_j s_j [x^\star(x'_j)]^2;$$

si l'on prend les x'_j pour nouveaux axes on a

$$\Phi = \sum_j s_j \alpha_j^2.$$

Or,

$$\Phi = \mathrm{E}\{[x^\star(\mathrm{X})]^2\} = \sum_{jk} [\alpha_j \alpha_k \mathrm{E}(\mathrm{A}'_j \mathrm{A}'_k)],$$

donc

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(\mathrm{A}'_j \mathrm{A}'_k) = 0 \quad \text{si } j \neq k, \\ &\mathrm{E}(\mathrm{A}'^2_j) \quad = s_j, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que A'_j et A'_k $(j \neq k)$ sont des variables aléatoires non corrélées ce qui entraîne, les A'_j étant des variables laplaciennes, qu'elles sont indépendantes, et que l'une d'elles A'_k est indépendante de $\mathrm{A}'_{j_1} \ldots \mathrm{A}'_{j_n}$ quels que soient n, $j_1, \ldots, j_n$, $k \neq j_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, donc

Théorème 3. — *Si* X *est un é. a. à valeurs dans un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$, il existe dans $\mathcal{H}$ un système orthogonal $\{x'_j\}$ tel que*

$$\mathrm{X} = \sum_j x'_j \mathrm{A}'_j,$$

les A'_j étant des variables aléatoires laplaciennes et indépendantes.

Enfin, cherchons si toute fonction de la forme

$$f(x^\star) = e^{i\mathrm{E}[x^\star(\mathrm{Y})] - \frac{1}{2}\mathrm{E}\{[x^\star(\mathrm{Y}) - \mathrm{E}(x^\star(\mathrm{Y}))]^2\}},$$

où Y est un é. a. à valeurs dans $\mathcal{H}$, est la caractéristique d'un é. a. à valeurs dans $\mathcal{H}$.

Nous supposerons que Y est tel que $E(\|Y\|^2) = s^2$, ce qui implique que $E(\|Y\|)$ et donc, puisque $\mathcal{H}$ est séparable, que $E(Y)$ existe. On peut alors, sans restreindre la généralité, supposer $E(Y) = 0$; on se ramène ainsi à

$$f(x^\star) = e^{-\frac{1}{2}E([x^\star(Y)]^2)}.$$

Considérons n éléments aléatoires indépendants, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ de même loi que Y et soit

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n).$$

Dans $\mathcal{H}$ le carré de la norme, $\|Z_n\|^2$, est égal au produit scalaire $(Z_n, \overline{Z}_n)$, donc

$$E[\|Z_n\|^2] = \frac{1}{n}\sum_{ij} E[(Y_i, \overline{Y}_j)];$$

si $i = j$:

$$E[(Y_i, \overline{Y}_j)] = E[\|Y_i\|^2] = s^2;$$

si $i \neq j$: $(Y_i, \overline{Y}_j)$ est une fonctionnelle linéaire de Y_i et $E(Y_i) = 0$, donc d'après le théorème 3 du paragraphe I de ce chapitre,

$$E[(Y_i, \overline{Y}_j)] = 0$$

et, par conséquent,

$$E[\|Z_n\|^2] = \frac{ns^2}{n} = s^2.$$

Soit $\varphi(x^\star)$ la caractéristique de Y, celle de Z_n est

$$\Phi_n(x^\star) = \left[\varphi\left(\frac{x^\star}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left\{1 - \frac{1}{2n}E[|x^\star(Y)|^2] + \frac{1}{n}\|x^\star\|^2\,\omega\left(\frac{x^\star}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n,$$

où $\omega\left(\frac{x^\star}{\sqrt{n}}\right) \to 0$ quand $\left\|\frac{x^\star}{\sqrt{n}}\right\| \to 0$ (th. 4, chap. III),

$$\log\Phi_n(x^\star) = -\frac{1}{2}E[|x^\star(Y)|^2] + \|x^\star\|^2\,\omega\left(\frac{x^\star}{\sqrt{n}}\right).$$

Donc si $\|x^\star\| < A$, $A > 0$ quelconque, $\Phi_n(x^\star)$ converge uniformément vers $f(x^\star)$ et, par conséquent, (th. 8, chap. III), $f(x^\star)$ est une caractéristique; c'est donc (§ I, chap. IV) la caractéristique d'un élément laplacien X, d'où :

THÉORÈME 4. — *Toute fonction*

$$f(x^*) = e^{i\mathrm{E}[x^*(\mathrm{Y})] - \frac{1}{2}\mathrm{E}\{[x^*(\mathrm{Y}) - \mathrm{E}(x^*(\mathrm{Y}))]^2\}},$$

où Y *est un é. a. à valeurs dans un espace de Hilbert séparable, tel que* $\mathrm{E}(\|\mathrm{Y}\|^2) = s^2$, *est la caractéristique d'un é. a. laplacien.*

La démonstration du théorème précédent nous montre également que :

THÉORÈME 5. — *Si* $\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \ldots, \mathrm{Y}_n$ *sont des é. a. indépendants et de même loi, à valeurs dans un espace de Hilbert séparable, et si*

$$\mathrm{E}(\|\mathrm{Y}_i\|^2) = s^2, \qquad \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathrm{Y}_1 + \ldots + \mathrm{Y}_n)$$

converge au sens de Bernoulli, lorsque $n \to +\infty$, *vers un é. a. laplacien.*

BIBLIOGRAPHIE.

BANACH :

I. *Théorie des opérations linéaires.*

BOCHNER :

I. *Integration von Funktionen deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind* (Fund. Math., t. 20, 1933).

II. *Vorlesung über Fouriersche Integrale* (*Akad. Verlagsges.*, Leipzig, 1939).

DARMOIS (G.) :

I. *C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 1999.

DIEUDONNÉ (J.) :

I. *Annales Univ. Grenoble*, (2), t. 23, 1947-1948.

DOSS (S.) :

I. *Sur la moyenne d'un élément aléatoire dans un espace distancié.* (*Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. 73, mars-avril 1949).

FORTET (R.) et MOURIER (E.) :

I. *Loi des grands nombres et théorie ergodique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 923).

FRÉCHET (M.) :

I. *Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié* (*Annales de l'Institut H. Poincaré*, X, fasc. IV).

II. *Intégrale abstraite d'une fonction abstraite d'une variable abstraite et son application à la moyenne d'un élément aléatoire de nature quelconque.* (*Revue Scientifique*, fasc. 8).

III. *Les éléments aléatoires de nature quelconque* (*Annales de l'Institut H. Poincaré*, t. XIV, 1948).

IV. *Généralisation de la loi de probabilité de Laplace* (*Annales de l'Institut H. Poincaré*, t. XII, fasc. I, 1951).

HALMOS (P.-R.) :

I. *Measure theory* (*D. van Nostrand Company, Inc.*, New-York).

HILLE (E.) :

I. *Functional Analysis and semi-groups* (*Amer. Math. Soc.*, édit.).

KHINTCHINE :

I. *Zur Birkhofflosung der Ergodein-problemes* (*Math. Ann.*, t. 107, 1932).

KOLMOGOROFF :

I. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.*

II. *Ein vereinfachter Beweis des Birkhoffschen Ergodensatzes* (*Rec. Math. de Moscou*, t. 44, 1937).

LE CAM (L.) :

I. *Un instrument d'étude des fonctions aléatoires : la fonctionnelle caractéristique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 224, 1947, p. 710).

MOURIER (E.) :

I. *Sur l'espérance mathématique d'un élément aléatoire dans un espace de Banach* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 229, 1949, p. 1300).

II. *Lois des grands nombres et théorie ergodique* (*C. R. Acad. sc.*, t. 232, 1951, p. 923).

III. *Propriétés des caractéristiques d'un élément aléatoire dans un espace de Banach* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 231, 1950, p. 28).

IV. *Éléments aléatoires laplaciens dans un espace de Banach* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 575).

PETTIS :

I. *On integration in vector spaces* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 44, 1938).

RIESZ (F.) :

I. *Systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Gauthier-Villars, Paris.

YOSIDA et KAKUTANI :

I. *Operator theorical treatment of Markoff process and mean ergodic theorem* (*Annals of Math.*, vol. 42, n° 1, 1941).