ANNALES DE L'I. H. P.

MAURICE FRÉCHET

Les inégalités de Minkowski dégénérées et leurs applications en Calcul des probabilités

Annales de l'I. H. P., tome 15, nº 1 (1956), p. 1-33
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1956__15_1_1_0>

Les inégalités de Minkowski dégénérées et leurs applications en Calcul des probabilités

par

Maurice FRÉCHET.

SOMMAIRE.

Éléments aléatoires de nature quelconque :

Inégalités de Minkowski généralisées, puis dégénérées. — Cas d'égalité. — Dominante. Centre de variation. — Convergences stocastiques.

RAPPEL.

Nous avons précédemment étudié les éléments aléatoires de nature quelconque.

Dans le cas particulier où ces éléments sont des points d'un même espace distancié $\mathcal{D}$ (1), nous avons pu leur étendre une inégalité algébrique due à Minkovski et déjà généralisée par F. Riesz dans l'Analyse fonctionnelle.

---

(1) Rappelons qu'un ensemble E d'éléments de nature quelconque devient un espace distancié quand on peut associer à tout couple x, y d'éléments de E, un nombre réel représenté par la notation (x, y) et appelé distance de x et de y et tel que :

1° $(x, y) = (y, x) \geqq 0$;

2° (x, y) est $\neq 0$ si x, y sont distincts et dans ce cas seulement;

3° on a « l'inégalité triangulaire »

$$(x, y) \leqq (x, z) + (z, y).$$

On obtient ainsi ([2])

$$(1)\qquad \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(X, Y)^\alpha} \leqq \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(X, Z)^\alpha} + \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(Y, Z)^\alpha} \qquad \text{pour} \quad \alpha \geqq 1$$

et

$$(2)\qquad \mathfrak{M}(X, Y)^\alpha \leqq \mathfrak{M}(X, Z)^\alpha + \mathfrak{M}(Y, Z)^\alpha \qquad \text{pour} \quad \alpha \leqq 1.$$

Ici (X, Y) désigne la distance de deux positions particulières X, Y dans une même épreuve et $\mathfrak{M}L$ la moyenne d'un nombre aléatoire L.

Au cours de la démonstration, on établit l'inégalité de Schwarz généralisée

$$\mathfrak{M}|LN| \leqq \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}|L|^\alpha} \sqrt[\frac{\alpha}{\alpha-1}]{\mathfrak{M}|N|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}},$$

où $\alpha > 1$ pour deux *nombres* aléatoires L, N quelconques.

Les inégalités précédentes permettent de définir d'une façon correspondante la distance « globale »

$$([X], [Y])$$

des deux éléments « globaux » $[X]$, $[Y]$ entendant ainsi l'*ensemble* des couples de positions correspondantes X, Y, auquel on associe la loi de probabilité de ces couples.

Il suffira, en effet, de poser

$$(3)\qquad ([X], [Y]) = \begin{cases} \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(X, Y)^\alpha} & \text{pour} \quad \alpha \geqq 1, \\ \mathfrak{M}(X, Y)^\alpha & \text{pour} \quad \alpha \leqq 1. \end{cases}$$

La condition 3° de la note ci-dessus résulte alors des inégalités (1), (2). La condition 1° résulte de (3). Quant à la condition 2°, elle sera réalisée si nous convenons maintenant que $[X]$, $[Y]$ ne sont *pas distincts* quand X et Y sont « presque certainement » égaux, c'est-à-dire *quand la probabilité que*, dans une même épreuve, X, Y *ne coïncident pas*, *est nulle*.

D'autre part, nous avons généralisé la notion d'écart moyen et de valeur typique d'un nombre aléatoire de la façon suivante ([3]).

([2]) *Les éléments aléatoires de nature quelconque* (*Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. 14, 1948, p. 15 et 18).

([3]) *Loc. cit.*, p. 2.

Généralisation. — Supposons que l'on ait, d'une façon quelconque, défini une distance « globale » ([X], [Y]) (satisfaisant à 1°, 2°, 3°, de la note de la p. 1) de deux éléments « globaux » [X], [Y], dont les positions X, Y *définies simultanément dans chaque épreuve*, appartiennent à un même espace (distancié *ou non*).

Nous appellerons écart typique de [X] à partir d'un élément certain [a], la distance globale ([X], [a]), *écart typique* tout court de [X], la borne inférieure (nécessairement $\geqq 0$) de cette distance quand [a] est arbitraire. Enfin si cette borne inférieure est atteinte pour au moins une position γ de a, nous dirons que γ est une *position typique* de [X].

Dans le cas particulier où X, a sont des *nombres*, on peut d'après l'inégalité (1) prendre en particulier, pour la distance globale de [X] à [a]

$$([X], [a]) = \begin{cases} \sqrt{\mathfrak{M}\,|X - a|^2} & (\alpha = 2), \\ \text{ou} & \\ \mathfrak{M}\,|X - a| & (\alpha = 1). \end{cases}$$

Dans le premier cas, la valeur typique de X est la moyenne classique $\mathfrak{M}(X)$ (ou $\overline{X}$) de X; dans le second cas c'est la valeur équiprobable, $\overline{\overline{X}}$ de X.

Dans le cas général d'un espace distancié quelconque, en posant

$$([X], [Y]) = \begin{cases} \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(X, Y)^\alpha} & \text{pour } \alpha \geqq 1, \\ \mathfrak{M}(X, Y)^\alpha & \text{pour } \alpha \leqq 1, \end{cases} \tag{4}$$

on peut définir de même un *écart moyen d'ordre* α et une *position typique d'ordre* α.

[Il y a lieu d'observer que la définition (3) de la distance globale et, par suite, celle de l'écart moyen d'ordre α sont plus satisfaisantes dans le cas où $\alpha \geqq 1$ que pour $\alpha < 1$, en ce sens que si, dans toutes les épreuves, (X, Y) a une valeur constante, ρ, la distance globale ([X], [Y]) lui est égale pour $\alpha \geqq 1$ comme il serait conforme à la conception intuitive de l'écart et est, quand $\alpha < 1$, égale à ρ^α et non à ρ].

Position dominante et centre de variation. — En procédant par des passages à la limite, nous avons précédemment défini ([1]) des positions

([1]) *Positions typiques d'un élément aléatoire de nature quelconque* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 65, 1948, p. 201-213).

typiques d'ordre nul et d'ordre infini. En employant deux définitions distinctes (1) de la limite, nous avons montré que l'ensemble des positions d'ordre infini de X, au sens de la première définition, est identique à l'ensemble des « centres de variation » (définis plus loin) de X. Et que l'ensemble des positions d'ordre nul de X, au sens de la seconde définition, coïncide avec l'ensemble des positions dominantes (définies plus loin) de X.

Ces positions dominantes et centrales se trouvaient ainsi obtenues par un passage à la limite où interviennent les distances globales d'ordre variable α, mais sans calculer les limites de ces distances.

Il nous a paru intéressant de montrer que ces deux sortes de positions peuvent être aussi définies par application directe de la définition générale de la page 3. Mais à cet effet, il faut d'abord déterminer les deux formes limites des distances globales (3) quand $\alpha \to +\infty$ et quand $\alpha \to 0$.

Limites des distances globales. — I. $\alpha \to +\infty$. — Si $X \equiv Y$ presque certainement, (X, Y) est nul presque certainement et

$$\mathcal{M}(X, Y)^\alpha = 0$$

quel que soit $\alpha > 0$. Donc quand $\alpha \to +\infty$

$$\lim_{\alpha \to 0} \sqrt{\mathcal{M}(X, Y)^\alpha} = 0.$$

Si la probabilité que $X \neq Y$ est positive, alors il y a au moins un nombre $\rho_1 > 0$, tel que

$$p \equiv \text{Prob}[(X, Y) > \rho_1] > 0.$$

Or

$$\mathcal{M}(X, Y)^\alpha \geqq p\rho_1^\alpha,$$

$$\sqrt[\alpha]{\mathcal{M}(X, Y)^\alpha} \geqq \rho_1 \sqrt[\alpha]{p}. \tag{5}$$

Le second membre $\to \rho_1$ quand $\alpha \to +\infty$, donc toutes les limites du premier membre sont au moins égales à ρ_1 et, par suite, aussi à la borne supérieure ρ des nombres tels que ρ_1. Nous appellerons cette borne, le *maximum généralisé de* (X, Y) et *nous la représenterons* par

$$\text{Max. gén.}(X, Y).$$

On voit que si cette quantité est infinie, on pourra prendre ρ_1 aussi grand que l'on veut et $\sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(X, Y)^\alpha}$ sera infini ou tendra vers l'infini quand $\alpha \to +\infty$. On pourra donc écrire

$$\boxed{\text{Max. gén.}\,(X, Y) = \lim_{\alpha \to \infty} \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(X, Y)^\alpha}} \tag{6}$$

en donnant à cette égalité la signification

$$+\infty = +\infty.$$

Supposons enfin ρ fini. Alors, pour $\varepsilon > 0$,

$$\{\operatorname{Prob}[(X, Y) \geqq \rho + \varepsilon]\} = 0$$

ou

$$\{\operatorname{Prob}[(X, Y) < \rho + \varepsilon]\} = 1$$

ou

$$\{\operatorname{Prob}[(X, Y) \leqq \rho]\} = 1,$$

d'où

$$\sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(X, Y)^\alpha} \leqq \rho.$$

Quand $\alpha \to +\infty$, les limites du premier membre qui, d'après ce qui précédait, étaient $\geqq \rho$ sont aussi $\leqq \rho$. L'égalité (6), déjà établie pour $\rho = 0$ ou $+\infty$, se trouve ainsi prouvée *quel que soit* ρ.

II. $\alpha \to 0$. — Plaçons-nous d'abord dans le cas où (X, Y) reste au plus égal à un nombre fini, fixe, c et soit $\varepsilon > 0$ fixe et

$$q = \operatorname{Prob}(X \neq Y),$$
$$Q = \operatorname{Prob}[(X, Y) > \varepsilon].$$

On aura

$$Q\varepsilon^\alpha \leqq \mathfrak{M}(X, Y)^\alpha \leqq qc^\alpha.$$

Quand $\alpha \to 0$, on voit que toutes les limites de $\mathfrak{M}(X, Y)^\alpha$ sont comprises entre q et Q. Or ε est arbitraire (> 0) et quand $\varepsilon \to 0$, $Q \to q$. Donc

$$\lim_{\alpha \to 0} \mathfrak{M}(X, Y)^\alpha = \operatorname{Prob}(X \neq Y).$$

Considérons maintenant le cas où (X, Y) n'est pas borné; la question de la limite de $\mathfrak{M}(X, Y)^\alpha$ quand $\alpha \to 0$ ne se pose que si pour α suffisamment petit $(\alpha \leqq \alpha_0)$, $\mathfrak{M}(X, Y)^\alpha$ est fini.

Dans ce cas, soit $(\omega > 0)$

$$\begin{aligned} p &= \operatorname{Prob}[(X, Y) = 0], \\ p_1 &= \operatorname{Prob}[0 < (X, Y) \leqq \omega], \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ p_n &= \operatorname{Prob}[(n-1)\,\omega < (X, Y) \leqq n\,\omega], \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et

$$a = \mathfrak{M}(X, Y)^{\alpha_0} \geqq [p_2 + \ldots + (n-1)^{\alpha_0} p_n + \ldots]\, \omega^{\alpha_0}.$$

Cette dernière série est donc finie. On peut écrire

$$a \leqq (p_1 + 2^{\alpha_0} p_2 + \ldots + n^{\alpha_0} p_n + \ldots)\, \omega^{\alpha},$$

où la dernière série est convergente. En effet,

$$n^{\alpha_0} p_n = [(n-1)^{\alpha_0} p_n] \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\alpha_0},$$

d'où

$$n^{\alpha_0} p_n \leqq 2^{\alpha_0} (n-1)^{\alpha_0} p_n \tag{7}$$

pour

$$\frac{n}{n-1} \leqq 2 \qquad \text{ou} \qquad n \geqq 2.$$

Et puisque la série $\Sigma(n-1)^{\alpha_0} p_n$ est convergente, il en sera de même de $\Sigma n^{\alpha_0} p_n$ d'après (7).

Mais, alors, pour $\alpha < \alpha_0$, les séries $\Sigma(n-1)^{\alpha} p_n$, $\Sigma n^{\alpha} p_n$ sont convergentes et majorées par les séries analogues pour $\alpha = \alpha_0$. Et l'on a

$$\omega^{\alpha} \Sigma (n-1)^{\alpha} p_n \leqq \mathfrak{M}(X, Y)^{\alpha} \leqq \omega^{\alpha} \Sigma n^{\alpha} p_n.$$

Soit $\varepsilon > 0$; il existe un N, tel que, pour $n > N$ et $\alpha < \alpha_0$, on ait

$$\sum_{n>N} n^{\alpha} p_n < \sum_{n>N} n^{\alpha_0} p_n < \varepsilon.$$

D'où

$$\omega^{\alpha} \left[\sum_{n=1}^{N} (n-1)^{\alpha} p_n \right] \leqq \mathfrak{M}(X, Y)^{\alpha} \leqq \omega^{\alpha} \left[\sum_{n=1}^{N} n^{\alpha} p_n + \varepsilon \right].$$

Quand $\alpha \to 0$, toutes les limites de $\mathfrak{M}(X, Y)^{\alpha}$ sont donc comprises entre

$$p_2 + \ldots + p_N \quad \text{et} \quad p_1 + \ldots + p_N + \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers zéro, on pourra faire tendre N vers l'infini et les deux dernières quantités tendront vers

$$p_2 + \ldots + p_n + p_{n+1} + \ldots \quad \text{et} \quad p_1 + \ldots + p_n + p_{n+1} + \ldots = 1 - p.$$

La somme de la première série diffère de la seconde par

$$p_1 = \operatorname{Prob}[0 < (X, Y) \leqq \omega]$$

qui est aussi petite que l'on veut en prenant ω assez petit.

D'où

$$\boxed{\lim_{\alpha \to 0} \mathfrak{M}(X, Y)^{\alpha} = \operatorname{Prob}(X \neq Y).} \tag{6 bis}$$

Remarque. — Nous avons déjà noté plus haut que pour répondre à la notion intuitive de distance globale, quand (X, Y) garde une valeur constante λ, la distance globale ([X], [Y]) devrait être aussi égale à λ. La définition (5) qui mène au centre de variation satisfait bien à cette condition, mais non la définition (7) qui conduit aux dominantes.

Application. — Nous voyons, d'après les formules (3), (6) et (6 *bis*), que les limites des distances globales (4), vérifient aussi l'inégalité triangulaire. On voit facilement que ces limites satisfont aussi aux conditions 1°, 2° de la page 1. Ce sont donc aussi des « distances globales » et l'on peut en déduire, suivant les principes de la page 3, des définitions d'écart typique et de position typique. C'est ce que nous allons faire maintenant en examinant d'abord, pour nous orienter, une distance plus simple.

CENTRE DE VARIATION.

Considérons deux éléments aléatoires X, Y variant dans un espace distancié $\mathcal{D}$ et déterminés simultanément dans chacune des épreuves considérées.

Cas borné. — Nous nous limiterons d'abord au cas où X, Y sont *bornés*, c'est-à-dire restent chacun dans un sphéroïde de rayon fini. Alors la distance (X, Y) est aussi bornée et l'on peut représenter par Max(X, Y) la borne supérieure de (X, Y).

Ceci étant, *nous prendrons provisoirement*, *par définition*, pour *la distance « globale »* de $[X]$ et de $[Y]$, la quantité

$$([X], [Y]) = \operatorname{Max}(X, Y). \tag{8}$$

Il est clair que les conditions 1°, 2° sont satisfaites, en considérant $[X]$, $[Y]$ comme non distincts, si *dans chaque épreuve* X et Y coïncident (contrairement à la convention faite plus haut et que nous reprendrons tout à l'heure).

Quant à la condition 3°, il suffit d'observer que

$$(X, Y) \leqq (X, Z) + (Z, Y) \leqq \operatorname{Max}(X, Z) + \operatorname{Max}(Y, Z)$$

et que, par suite,

$$\operatorname{Max}(X, Y) \leqq \operatorname{Max}(X, Z) + \operatorname{Max}(Y, Z) \tag{9}$$

ou, ici,

$$([X], [Y]) \leqq ([X], [Z]) + ([Y], [Z]).$$

Appliquons maintenant nos définitions générales de la page 3.

L'écart typique ρ_a de $[X]$ à partir d'un élément certain a est égal, ici, par définition, à

$$\operatorname{Max}(X, a).$$

C'est le « plus petit » rayon des sphéroïdes de centre a où reste X dans toute épreuve. L'écart typique, tout court, de X est la borne inférieure, ρ, de ρ_a quand a varie. C'est donc le « plus petit » rayon des sphéroïdes (de centres, cette fois, arbitraires), où reste X dans toute épreuve ([5]).

Dans le cas où la borne inférieure, ρ, de ρ_a est atteinte pour une position γ de a, γ sera une position typique de X (correspondant — comme l'écart typique de X — à la définition (8).

Remarque. — Le paragraphe qui précède ne fait intervenir nulle part la notion de probabilité. Il s'agit seulement ici de notions de géométrie métrique étendues à des ensembles abstraits. La distance $([X], [Y])$ définie par (8), caractérise la distance globale de deux éléments X, Y formant un *couple* variable décrivant deux ensembles F, G.

Si, par exemple, X, Y sont deux positions au même instant, de deux points variables sur deux trajectoires F, G, Max(X, Y) sera une valeur typique (à savoir la plus grande) de la « distance » de ces deux *trajec-*

([5]) Dans le cas où X est un nombre, c'est la moitié de ce que les Anglais appellent le « range » de X.

toires en y tenant compte du temps (et non pas seulement des deux courbes F, G).

Extension au cas borné en probabilité. — Reprenons, au contraire, la convention abandonnée un instant, que [X], [Y] ne sont pas considérés comme distincts quand il y a une probabilité égale à un que dans une épreuve arbitraire X et Y coïncident. Alors, nous désignerons, comme plus haut, par Max. gén. (X, Y), la borne supérieure des valeurs d'un nombre $k \geqq 0$, s'il en existe, tel que

$$\{ \text{Prob}[(X, Y) \leqq k] \} < 1.$$

Et en prenant

$$\text{Max. gén.}\,(X, Y) = 0$$

dans le cas contraire.

On a évidemment

$$\text{Max. gén.}(X, Y) \leqq \text{Max}(X, Y).$$

Alors, en prenant

$$([X], [Y]) = \text{Max. gén.}(X, Y), \tag{10}$$

les conditions 1° et 2° seront évidemment satisfaites. Quant à 3°, démontré plus haut à la limite, on peut le prouver directement ainsi. On a pour $\varepsilon > 0$

$$\Big\{ \text{Prob}\Big((X, Z) \leqq [\text{Max. gén.}(X, Z)] + \varepsilon\Big) \Big\} = 1,$$
$$\Big\{ \text{Prob}\Big((Y, Z) \leqq [\text{Max. gén.}(Y, Z)] + \varepsilon\Big) \Big\} = 1.$$

Or, si les conditions entre parenthèses sont vérifiées, on aura

$$(X, Y) \leqq [\text{Max. gén.}(X, Z)] + [\text{Max. gén.}(Y, Z)] + 2\varepsilon.$$

Donc cet événement, qui a lieu, entre autres, lors du concours de deux événements presque certains, sera aussi presque certain et l'on aura, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\text{Prob}\Big((X, Y) < [\text{Max. gén.}(X, Z)] + [\text{Max. gén.}(Y, Z)] + 2\varepsilon\Big) = 1$$

et, par suite,

$$\boxed{\text{Max. gén.}(X, Y) \leqq \text{Max. gén.}(X, Z) + \text{Max. gén.}(Y, Z).} \tag{11}$$

Cette inégalité constitue l'*une* (correspondant comme nous l'avons vu, p. 5, à $\alpha \to +\infty$) *des deux formes limites annoncées de l'inégalité généralisée de Minkowski* (1).

Ceci étant, les définitions de l'écart typique de X et d'une position typique de X correspondant à la définition (10) conduiront à des définitions analogues à celles qui ont été déduites de la formule (8). Sauf que ρ_a sera remplacé par ρ'_a borne inférieure des rayons des sphéroïdes de centre a qui contiennent X dans toute épreuve, *sauf peut-être dans un cas de probabilité nulle*. Alors l'écart typique de X correspondant à la définition (10) de la distance globale ([X], [Y]) sera la borne inférieure de ρ'_a quand a varie, c'est-à-dire ce que nous avons appelé ailleurs ([6]) le « *rayon de variation* » de X. Et si $\rho' = \rho'_{\gamma'}$, la position typique γ' de X, correspondant encore à la formule (10) sera ce que nous avons appelé ailleurs ([6]), un « centre de variation » de X.

DOMINANTE.

Considérons maintenant deux éléments aléatoires X, Y restant dans un ensemble E, distancié *ou non*, d'éléments de nature quelconque, et encore déterminés simultanément à chacune des épreuves considérées.

Nous conviendrons de prendre maintenant pour distance globale de [X] et [Y]

$$([X], [Y]) = \text{Prob}(X \neq Y). \tag{12}$$

En gardant la même convention définissant les éléments globaux [X], [Y] presque certainement identiques comme non distincts, il est clair que cette quantité vérifie les conditions 1°, 2° en note de la page 1.

Quant à 3° (qui a été établie indirectement, p. 7), pour la prouver directement, notons que

$$\begin{aligned}
\text{Prob}(X \neq Z) &= [\text{Prob}(X, Y, Z \text{ diff.})] + [\text{Prob}(Y = X \neq Z)] + [\text{Prob}(Y = Z \neq X)],\\
\text{Prob}(Y \neq Z) &= [\text{Prob}(X, Y, Z \text{ diff.})] + [\text{Prob}(Y = X \neq Z)] + [\text{Prob}(X = Z \neq Y)],\\
\text{Prob}(X \neq Y) &= [\text{Prob}(X, Y, Z \text{ diff.})] + [\text{Prob}(Z = Y \neq X)] + [\text{Prob}(Z = X \neq Y)].
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\begin{aligned}&[\text{Prob}(X \neq Z)] + [\text{Prob}(Y \neq Z)] - [\text{Prob}(X \neq Y)]\\ &\quad = [\text{Prob}(X, Y, Z \text{ diff.})] + 2[\text{Prob}(Y = X \neq Z)] \geqq 0,\end{aligned}} \tag{13}$$

([6]) *Loc. cit.*, en note de la page 3.

d'où

$$([X], [Y]) \leqq ([X], [Z]) + ([Y]), [Z]),$$

c'est-à-dire

$$(13\ bis) \qquad \{ \text{Prob}(X \neq Y) \} \leqq \{ \text{Prob}(X \neq Z) \} + \{ \text{Prob}(Y \neq Z) \}.$$

L'inégalité (13 *bis*) est la *seconde forme limite* (correspondant à $\alpha = 0$) *de l'inégalité de Minkowski généralisée* (2) et c'est même une forme précisée par l'égalité figurant dans (13) ([7]).

Définissons encore l'écart typique de $[X]$ à l'élément certain $[a]$, comme égal à

$$([X], [a]) = \text{Prob}(X \neq a).$$

Supposons d'abord que X soit ce que nous appellerons *provisoirement* un élément aléatoire *discret*, c'est-à-dire tel qu'il y ait au moins une position ξ dans $\mathcal{O}$ telle que $\text{Prob}(X \equiv \xi)$ soit $\neq 0$. Alors, on voit facilement que l'ensemble de tels ξ est dénombrable; c'est une suite finie ou non de points $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de l'espace $\mathcal{O}$, dont les probabilités, toutes > 0, que X y passe, sont $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$.

Comme nous l'avons déjà observé ailleurs, il y a une borne supérieure p, des p_n qui est atteinte pour au moins un et en tout cas un nombre fini de points x_k. Soient $p_{r_1} = p_{r_2} = \ldots = p_{r_s} = p$. Les éléments $x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_s}$ sont les « *positions dominantes* » de X.

Or si a est distinct des points x_k, $X \neq a$ a une probabilité égale à 1. Si a coïncide avec x_k, $X \neq a$, c'est-à-dire $X \neq x_k$ a une probabilité égale à $1 - p_k$. Donc $([X], [a])$ a, quand a varie, un minimum égal à $1 - p$, et qui est atteint aux points x_{r_n}.

Ainsi : 1° l'écart typique de X [correspondant à la définition (12)] est égal à $1 - p$; 2° il y a au moins une position typique de X et l'*ensemble des positions typiques de* X [correspondant à la définition (12)] *coïncide avec l'ensemble des « positions dominantes » de* X.

Il reste à traiter le cas des éléments aléatoires X non discrets. Dans ce cas, la définition actuelle perd son utilité, car la probabilité de $X \neq a$ reste égale à 1 quel que soit a et, prise littéralement, la définition générale des positions typiques, conduirait à considérer toute position a

---

([7]) Nous avons ainsi démontré directement que les deux expressions (10) et (12) sont bien des distances. Mais cela résultait aussi du fait, démontré plus haut, que ce sont les limites de distances globales.

dans $\mathcal{D}$ comme position typique, ce qui ne fournit aucun renseignement nouveau sur X.

CHAPITRE II.

CONVERGENCES ET DISTANCES.

D'une façon générale, quand on a à utiliser un mode de convergence déterminé, d'une suite d'éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ vers un élément a, il est fort utile, *quand on en a le droit*, de pouvoir exprimer cette convergence au moyen d'une distance. Dans ce cas, on dira que a_n tend vers a, quand la distance (a_n, a) tend vers zéro et réciproquement.

Mais ce n'est toujours possible *ni en Analyse* [convergence presque partout (8)], *ni en Calcul des Probabilités* [convergence presque certaine (9)] comme nous l'avons démontré ailleurs.

Il est donc utile de chercher pour chaque mode de convergence s'il est exprimable au moyen d'une distance (vérifiant les conditions 1°, 2°, 3° de la page 1).

Convergences stocastiques. — Les convergences stocastiques les plus utilisées étaient, jusqu'à présent :

1° la convergence « en moyenne quadratique », et plus généralement « en moyenne d'ordre $\alpha > 0$ »;

2° la convergence « en probabilité »;

3° la convergence « presque certaine »;

4° la convergence « légale ».

La première s'exprime évidemment, d'après ce qui précède, au moyen de la distance, $\sqrt[\alpha]{\mathcal{M}(X, Y)^\alpha}$, pour $\alpha \geqq 1$, $\mathcal{M}(X, Y)^\alpha$ pour $\alpha < 1$, entre X et Y.

Convergence en probabilité. — Nous avons montré (10) que la conver-

---

(8) *Sur divers modes de convergence d'une suite de fonctions d'une variable* (*Bull. Calcutta Math. Soc.*, t. II, 1921, p. 187-206).

(9) *Recherches théoriques modernes sur le Calcul des Probabilités*, livre I, 2e éd., 1950, p. 250-253.

(10) *Loc. cit.*, en note (9).

gence en probabilité d'un *nombre* aléatoire X_n vers X peut s'exprimer par l'intermédiaire d'une distance globale et ceci de plusieurs façons très différentes.

Soient plus généralement, X, Y, Z trois éléments aléatoires appartenant à un espace distancié $\mathcal{D}$. Les définitions généralisées qui suivent se déduisent immédiatement de celles qui concernent les *nombres* aléatoires en remplaçant les quantités telles que $|X - Y|$ par (X, Y). On peut adopter comme distance des éléments globaux $[X]$, $[Y]$, la quantité

$$(14) \quad ([X], [Y]) = \text{borne inférieure, quand } \varepsilon \geqq 0 \text{ varie, de } [\varepsilon + \operatorname{Prob}(X, Y) > \varepsilon].$$

Pour éviter l'hétérogénéité des deux termes du crochet, M. Ky-Fan a proposé de prendre

$$(15) \qquad ([X], [Y]) = \text{borne inférieure de } \varepsilon \geqq 0$$

tel que

$$\{\operatorname{Prob}[(X, Y) \geqq \varepsilon]\} \leqq \varepsilon.$$

La seconde définition a, en outre, sur la première, l'avantage qu'on a bien $([X], [Y]) = a$ quand (X, Y) reste constamment égal à a (pourvu que $a \leqq 1$).

Nous ne referons pas ici les démonstrations qui sont les mêmes que pour des nombres aléatoires.

Nous les referons, au contraire, pour le cas où l'on adopte la généralisation suivante de la seconde définition de la distance proposée dans mon livre,

$$(16) \qquad ([X], [Y]) = \mathfrak{M} f((X, Y)).$$

Car nous supposerons ici — plus généralement qu'auparavant — que $f(t)$ est une quelconque des fonctions possédant les propriétés suivantes : $f(t)$ est une fonction $\geqq 0$, définie pour $t \geqq 0$, non décroissante et bornée; de plus, $f(t) = 0$ équivaut à $t = 0$ et $f(t) \to 0$, avec t [11], enfin

$$f(a + b) \leqq f(a) + f(b) \qquad \text{pour} \quad a \geqq 0, \quad b \geqq 0.$$

Ceci étant, soit M la borne supérieure de $f(t)$. On a

$$(17) \quad f(\varepsilon)\{\operatorname{Prob}[(X, X_n) \geqq \varepsilon]\} \leqq \mathfrak{M} f((X, X_n)) \leqq f(\varepsilon) + \mathrm{M}\operatorname{Prob}[(X, X_n) \geqq \varepsilon].$$

(11) Précédemment, nous avions imposé la condition supplémentaire que $f(t)$ soit continue et croissante pour tout $t \geqq 0$.

Si donc X_n converge en probabilité vers X quand $n \to \infty$, c'est-à-dire si

$$\lim_{n \to \infty} \{ \text{Prob}[(X_n, X) \geqq \varepsilon] \} = 0, \tag{18}$$

alors, quel que soit $\eta > 0$, on peut prendre ε assez petit, puis trouver n assez grand $(n > \nu)$ pour que les deux termes du dernier membre de (17) soient $< \frac{\eta}{2}$.

Donc

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M} f(X, X_n) = 0.$$

Inversement, si ceci a lieu, alors, d'après la première des inégalités (17), pour tout $\varepsilon > 0$, on a (18). En résumé, *pour que* X_n *converge en probabilité vers* X, *il faut et il suffit que la distance globale*

$$([X], [X_n]) = \mathfrak{M} f(X, X_n)$$

tende vers zéro, avec $\frac{1}{n}$.

D'autre part, $\mathfrak{M} f((X, Y))$ est bien une distance : 1° on a

$$\mathfrak{M} f((X, Y)) = \mathfrak{M} f((Y, X)) \geqq 0;$$

2° pour que $\mathfrak{M} f((X, Y)) = 0$, il faut et il suffit que $X \equiv Y$ presque certainement;

3° on a, d'après les propriétés de f,

$$\mathfrak{M} f((X, Y)) \leqq \mathfrak{M}[f((X, Z) + (Y, Z))] \leqq \mathfrak{M} f((X, Z)) + \mathfrak{M} f((Y, Z)),$$

c'est-à-dire

$$([X], [Y]) \leqq ([X], [Z]) + ([Y], [Z]).$$

Nous avons indiqué [*voir* p. 226 de l'ouvrage cité en note (9)] comme exemples de fonctions satisfaisant à ces conditions $\frac{x}{1+x}$ (12), $1 - e^{-x}$, $\text{th}\, x$, ...

Plus généralement, *pour que* X_n *converge en probabilité vers* X, *il faut et il suffit que* $\mathfrak{M}(g(X, X_n))$ *tende vers zéro avec* $\frac{1}{n}$, *où* $g(t)$ est

(12) Plus tard et indépendamment, M. Loève a retrouvé le théorème précédent pour le cas où $f = \frac{x}{1+x}$ et l'a indiqué dans son livre.

une fonction $\geqq 0$ et bornée pour $t \geqq 0$, nulle pour $t = 0$ seulement, convergeant vers zéro avec t et telle que la borne inférieure $m(\varepsilon)$ de $g(t)$ pour $t \geqq \varepsilon$ soit positive pour tout $\varepsilon > 0$ [13]. Alors, pour $\eta > 0$, il y a un nombre $\varepsilon > 0$, tel que

$$g(t) < \eta \quad \text{pour} \quad t \leqq \varepsilon.$$

d'où

$$(19) \qquad 0 < m(\varepsilon) \leqq g(\varepsilon) < \eta.$$

L'inégalité (17) sera remplacée par

$$m(\varepsilon)\,\text{Prob}[(X, X_n) \geqq \varepsilon] \leqq \mathfrak{M}\, g((X, X_n)) \leqq \eta + M\,\text{Prob}[(X, X_n) \geqq \varepsilon].$$

Si $X_n \to X$ en probabilité, on peut prendre N tel que

$$\{\text{Prob}[(X, X_n) \geqq \varepsilon]\} < \eta \quad \text{pour} \quad n > N.$$

Alors

$$\mathfrak{M}\, g((X, X_n)) \leqq \eta(1 + M) \quad \text{pour} \quad n > N$$

et l'on a

$$(20) \qquad \lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}\, g((X, X_n)) = 0.$$

Réciproquement, si ceci a lieu, alors, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$\{\text{Prob}[(X, X_n) \geqq \varepsilon]\} \leqq \frac{1}{m(\varepsilon)} \mathfrak{M}\, g((X, X_n)),$$

où $m(\varepsilon)$, par hypothèse, est > 0; donc $X_n \to X$ en probabilité.

Mais dans les hypothèses actuelles, $\mathfrak{M}\, g(X, Y)$ ne sera pas nécessairement une distance.

Distances tronquées. — Soit $h(t)$ une fonction vérifiant les conditions en italiques ci-dessus, sauf qu'elle n'est pas bornée et que, par contre, elle est non décroissante. Et soit μ un nombre > 0 arbitraire. Nous appellerons *distance tronquée* de X, Y la quantité

$$(X, Y)_\mu = \begin{cases} (X, Y) & \text{si } (X, Y) < \mu, \\ \mu & \text{si } (X, Y) \geqq \mu. \end{cases}$$

---

(13) L'hypothèse sur $m(\varepsilon)$ est en particulier vérifiée, quand elle est remplacée par l'hypothèse plus stricte que $g(t)$ est non décroissante (en maintenant les autres conditions).

En posant

$$h_\mu(t) = \begin{cases} h(t) & \text{pour } t < \mu, \\ h(\mu) & \text{pour } t \geqq \mu, \end{cases}$$

on voit qu'on aura

$$(21) \qquad h((X, Y)_\mu) = h_\mu((X, Y)).$$

La fonction $h_\mu(t)$ vérifie les conditions en italiques. En particulier, elle est bornée pour μ assez petit, puisque, par hypothèse, $h(t)$ tend vers zéro avec t. Dès lors, en vertu du théorème précédent [appliqué en prenant $g(t) = h_\mu(t)$] et grâce à l'égalité (21), on pourra dire que la condition nécessaire et suffisante pour que $X_n \to X$ en probabilité est qu'on ait

$$o = \lim_{n \to \infty} h((X, X_n)_\mu)$$

pour au moins une valeur de μ [assez petite pour que $h(t)$ soit borné pour $o \leqq t \leqq \mu$].

Si, en particulier, $h(t)$ n'est pas borné quand $t \to +\infty$, mais est borné, quel que soit μ pour $t \leqq \mu$, alors on pourra supprimer la dernière condition entre parenthèse. Ce sera, par exemple, le cas où $h(t) = t^\alpha (\alpha > o)$ et, en particulier, pour $\alpha = 2$. On voit alors que la convergence en moyenne quadratique et la convergence en probabilité (dont les définitions sont si différentes) peuvent s'exprimer par deux conditions très similaires, sauf que la première faisant intervenir la distance exacte (X, Y), la seconde fait intervenir une distance tronquée $(X, Y)_\mu$. On a ainsi les conditions respectives

$$o = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}(X, X_n)^2,$$
$$o = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}[(X, X_n)_\mu]^2$$

pour au moins une valeur positive (arbitraire) de μ.

Quand la fonction $h(t)$ ci-dessus vérifie, en outre, l'inégalité triangulaire

$$h(a+b) \leqq h(a) + h(b) \qquad \text{pour} \quad a \geqq o, \quad b \geqq o,$$

il en est de même de la fonction $h_\mu(t)$. De sorte qu'on pourra prendre comme « distance » des éléments globaux [X], [Y], la quantité $\mathfrak{M} h((X, Y)_\mu)$.

L'inconvénient de l'expression (16) de la distance globale est qu'en général si (X, Y) reste constamment égal à a, on aura

$$([X], [Y]) = f(a), \quad \text{en général} \neq a.$$

Cet inconvénient se trouve, sinon supprimé, du moins *diminué* en même temps que l'*expression de la distance globale est simplifiée*, quand on profite de l'extension que nous venons de donner à la famille des fonctions f, pour *prendre pour* $f(t)$ *la fonction particulière*

$$\varphi(t) = \begin{cases} t & \text{pour } 0 \leqq t \leqq c, \\ c & \text{pour } t > c, \end{cases}$$

c étant une constante positive arbitraire fixée une fois pour toutes. Alors, il est clair que si $a \leqq c$, on aura bien

$$\mathfrak{M}\varphi(a) = \varphi(a) = a.$$

D'autre part, posons

$$q(t) = \text{Prob}[(X, Y) \geqq t],$$

on aura

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}\varphi((X, Y)) &= -\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dq(t) \\ &= -\int_0^c t\, dq(t) - \int_c^{+\infty} c\, dq(t) = -\left[[t\, q(t)]_0^c - \int_0^c q(t)\, dt \right] + cq(c), \end{aligned}$$

d'où enfin

$$([X], [Y]) = \int_0^c q(t)\, dt.$$

Ainsi : 1° *L'expression très simple*

$$\int_0^c \{ \text{Prob}[(X, Y) \geqq t] \}\, dt, \tag{22}$$

où c est une constante positive arbitraire fixe, *peut être prise comme une distance globale de* $[X]$ et de $[Y]$;

2° *Pour que* $X_n \to X$ *en probabilité quand* $n \to \infty$, *il faut et il suffit que*

$$\int_0^c \text{Prob}[(X, X_n) \geqq t]\, dt$$

tende vers zéro.

Ceci reste vrai quelle que soit la valeur arbitraire positive donnée à c.

On pourra, par exemple, prendre toujours $c = 1$. Ou, au contraire, on pourra prendre pour c la valeur positive la plus propre au calcul quand il s'agit de deux éléments aléatoires déterminés [X], [Y].

Positions typiques. — En appliquant la définition générale donnée p. 3, des positions typiques, on peut faire correspondre à chacune des expressions, (3), (6), (6 *bis*) de la distance, une définition d'une position typique.

Par exemple, en correspondance avec (22), on définit un écart moyen de X avec l'élément certain a comme égal à

$$E_a = \int_0^c [\mathrm{Prob}(X, a) \geqq t)]\, dt$$

et si cette expression atteint sa borne inférieure ($\geqq 0$) pour $a = \gamma$, γ sera une valeur typique correspondante.

Exemple. — Si, par exemple, X est un *nombre* aléatoire dont la fonction de répartition est $F(x)$, on aura

$$\psi(a) = E_a = c - \int_0^c [F(a+t) - F(a-t+0)]\, dt.$$

En supposant $F(t)$ continu avec dérivée continue, on aura

$$\begin{aligned}\psi'(a) = \frac{d}{da} E_a &= -\int_0^c F'(a+t)\, dt + \int_0^c F'(a-t)\, dt \\ &= -F(a+c) + F(a) - F(a-c) + F(a) \\ &= -[F(a+c) + F(a-c) - 2F(a)].\end{aligned}$$

Une valeur typique de X sera une valeur γ telle que $\frac{d}{da} E_a$ passe du négatif au positif quand a passe en croissant par γ.

On voit que si, par exemple, c est très grand, $F(a+c) + F(a-b)$ sera voisin de un, donc $\frac{d}{da} E_a$ sera voisin de $-2\left[\frac{1}{2} - F(a)\right]$ qui passe du négatif au positif quand a passe par la médiane de X.

Donc, si d'une part, la valeur typique qui vient d'être définie dépend du choix de c et est distincte des valeurs typiques classiques, du moins, elle est voisine de la médiane quand c est très grand.

Même quand c n'est pas grand, on trouvera fréquemment que la valeur typique de X qui vient d'être définie est identique à la médiane de X quel que soit c.

Supposons d'abord seulement que la loi de probabilité de X soit symétrique par rapport à l'origine, c'est-à-dire que

$$F(x)+F(-x)=1, \qquad \text{d'où} \qquad F(0)=\frac{1}{2}.$$

L'origine est donc alors une valeur équiprobable de X. Mais alors

$$\psi'(0)=-[F(c)+F(-c)-1]=0.$$

S'il y a une valeur typique, γ, de X au sens défini plus haut, on devra avoir $\psi'(\gamma)=0$.

Donc s'il y a, quel que soit c, une valeur typique et une seule de X, et une valeur équiprobable et une seule de X, ces deux valeurs coïncident, quel que soit c.

Cas particulier. — Dans le cas où X obéit à la loi de Laplace, on peut par un changement d'unité et d'origine supposer

$$F'(x)=A\,e^{-x^2} \qquad \left(A=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right).$$

On aura

$$\psi''(a)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-a^2-c^2}\{e^{2ac}+e^{-2ac}-2e^{c^2}\}.$$

On s'assure facilement que l'accolade décroît de $+\infty$ à $2(1-e^{c^2})<0$ (pour $a=0$), puis croît jusqu'à $+\infty$, donc que $\psi''(a)$ partant de 0 est d'abord négatif s'annule pour $x=a_1<0$ puis devient positif, s'annule pour $x=a_2>0$, reste ensuite négatif.

Alors $\psi'(a)$ qui part de 0 pour $a=0$ et revient à 0, a un minimum et un seul. C'est dont l'origine qui est à la fois valeur typique et valeur équiprobable de X *quel que soit c*.

Convergence presque certaine. — Nous avions démontré, dans notre Ouvrage cité plus haut, qu'il n'existe aucune définition de la distance de deux éléments globaux (satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3° de la page 1) par l'intermédiaire de laquelle puisse être définie la convergence presque certaine.

Mais le dernier mot n'était pas dit et nous allons voir qu'en rendant plus stricte la convergence presque certaine, on retrouve la possibilité de l'exprimer au moyen d'une distance.

Convergence uniforme presque certaine. — Nous avons montré plus haut que si X, Y appartiennent à un espace distancié et si l'on pose

$$([X],[Y]) = \text{Max. gén. }(X, Y),$$

le premier membre représente bien une distance satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3° de la page 1.

On aura donc un mode de convergence stocastique exprimable au moyen d'une distance, si l'on définit ce genre de convergence de X_n vers X par la condition

$$\lim_{n \to \infty} \text{Max. gén.}\,(X_n, X) = 0. \tag{23}$$

Si l'on traduit cette définition en termes indépendants de cette distance globale, on s'aperçoit qu'on retrouve un mode de convergence stocastique déjà connu quoique jusqu'ici peu utilisé.

En effet, posons

$$\varepsilon_n = \text{Max. gén.}\,(X_n, X).$$

On aura

$$\{\text{Prob}\,[(X_n, X) \leqq \varepsilon_n]\} = 1$$

quel que soit n. (On suppose implicitement que $X, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ sont définis simultanément à chaque épreuve). Les événements

$$(X_1, X) \leqq \varepsilon_1, \quad \ldots, \quad (X_n, X) \leqq \varepsilon_n, \quad \ldots$$

ont tous la probabilité 1 ; comme leur suite est dénombrable, le concours de tous ces événements a aussi la probabilité 1. On a donc

$$\text{Prob}\,[(X_1, X) < \varepsilon_1, \ldots, (X_n, X) < \varepsilon_n, \ldots] = 1.$$

Soit E l'événement entre crochets. Si X_n converge vers X au sens considéré, défini par (21), c'est-à-dire si les nombres certains ε_n tendent vers zéro, alors quand l'événement presque certain, E, a lieu, X_n converge uniformément vers X. Autrement dit, quand (23) a lieu, X_n converge « uniformément presque toujours » vers X.

Réciproquement, si Y_n converge uniformément presque toujours vers Y, c'est par définition qu'il y a un événement F de probabilité égale à 1 tel que Y_n converge uniformément au sens de l'Analyse, vers Y quand F a lieu. Autrement dit, quand F a lieu, alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, on a

$$(Y_n, Y) < \varepsilon$$

à partir d'un certain rang r (dépendant de ε). Ainsi à partir du rang r, on a

$$\text{Max. gén.}\,(Y_n, Y) \leqq \varepsilon,$$

c'est-à-dire enfin que

$$\lim_{n \to \infty} \text{Max. gén.}\,(Y_n, Y) = 0.$$

Il est clair que la convergence uniforme presque toujours implique la convergence presque certaine. Le fait établi maintenant, que la première est exprimable au moyen d'une distance et non la seconde, constitue une démonstration indirecte de ce que *la première est effectivement plus stricte* que la seconde. On retrouve ainsi un résultat que nous avions déjà établi directement au moyen d'un exemple, à la page 247 de l'Ouvrage déjà cité.

Un exemple à la fois plus simple et plus important est le suivant : soit F_n la fréquence dans n épreuves d'un événement E de probabilité p $(0 < p < 1)$.

Borel a démontré que F_n converge certainement vers p. Pourtant, puisqu'il y a une probabilité positive que F_n soit égal à 1 et une probabilité positive que F_n soit égal à 0 et enfin une probabilité égale à 1 que $0 \leqq F_n \leqq 1$, Max. gén. $|F_n - p|$ est constant (et égal au plus grand des deux nombres p et $q = 1 - p$, donc $\neq 0$), quand n croît. Ainsi, il serait inexact de dire que F_n converge « uniformément presque toujours » vers p.

Du fait que cette dernière forme de convergence s'exprime au moyen de la distance, résulte qu'il pourra être parfois commode, quand on veut démontrer la convergence presque certaine de X_n vers X, d'essayer de prouver que Max. gén. (X_n, X) tend vers zéro. Si l'on y réussit, on aura prouvé, non seulement ce qu'on désirait (et qui était souvent le maximum de ce que l'on cherchait à atteindre), mais même *un résultat plus fort* : la convergence uniforme presque certaine de X_n vers X.

CHAPITRE III.

CAS OU UNE DES INÉGALITÉS DE MINKOWSKI GÉNÉRALISÉE OU DÉGÉNÉRÉE DEVIENT UNE ÉGALITÉ.

Nous nous proposons de chercher *à quelles conditions* le signe d'inégalité ($\leqq$) dans (1), (2), (11) et (13) peut être *remplacé par le signe d'égalité* : Nous allons voir, en particulier que les résultats sont différents suivant qu'on suppose $\alpha > 1$, $\alpha = 1$, $\alpha < 1$.

I. $\alpha \geqq 1$. — Pour discerner le cas d'égalité dans (1), il suffit de reprendre à l'envers, de façon appropriée, le raisonnement qui nous a donné cette formule et qui suivait dans ses grandes lignes celui utilisé par F. Riesz dans un cas moins général.

En appelant L et M deux *nombres* aléatoires et en prenant dans (1) $X \equiv L$, $Y \equiv -M$, $Z \equiv 0$, dans l'espace des nombres réels, on a

$$\sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}\,|\,L+M\,|^\alpha} \leqq \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}\,|\,L\,|^\alpha} + \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}\,|\,M\,|^\alpha}.$$

On peut donc écrire :

$$\sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(X, Y)^\alpha} \leqq \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}[(X, Z)+(Y, Z)]^\alpha} \leqq \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(X, Z)^\alpha} + \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(Y, Z)^\alpha}. \tag{24}$$

Nous cherchons à quelle condition les membres extrêmes de ces inégalités sont égaux. Il faut alors qu'ils soient égaux au membre moyen. Donc, on doit d'abord avoir

$$\mathfrak{M}\,\{[(X, Z)+(Z, Y)]^\alpha - (X, Y)^\alpha\} = 0.$$

Or l'accolade est $\geqq 0$, elle doit donc être « presque certainement » nulle. Dès lors, on doit avoir presque certainement

$$\boxed{(X, Y) = (X, Z) + (Z, Y).} \tag{25}$$

Nous exprimerons cette égalité en disant que Z *doit être « entre » X et* Y.

1° Pour le cas où $\alpha = 1$, *cette condition nécessaire est évidemment suffisante;*

2° Supposons donc $\alpha > 1$. En posant

$$Q = (X, Z), \qquad R = (Y, Z),$$

on voit que pour obtenir l'égalité dans (1), il faut encore que

$$\sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(Q+R)^\alpha} = \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}Q^\alpha} + \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}R^\alpha}, \tag{26}$$

où

$$Q \geqq 0, \qquad R \geqq 0, \qquad \alpha > 1.$$

D'où, en multipliant par $\sqrt[\frac{\alpha}{\alpha-1}]{\mathfrak{M}(Q+R)^\alpha}$,

$$\mathfrak{M}(Q+R)^\alpha = \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}Q^\alpha}\,\sqrt[\frac{\alpha}{\alpha-1}]{\mathfrak{M}(Q+R)^\alpha} + \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}R^\alpha}\,\sqrt[\frac{\alpha}{\alpha-1}]{\mathfrak{M}(Q+R)^\alpha},$$

ou

$$\left[\sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}Q^\alpha}\sqrt[\frac{\alpha}{\alpha-1}]{\mathfrak{M}(Q+R)^\alpha}-\mathfrak{M}Q(Q+R)^{\alpha-1}\right]$$
$$+\left[\sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}R^\alpha}\sqrt[\frac{\alpha}{\alpha-1}]{\mathfrak{M}(Q+R)^\alpha}-\mathfrak{M}R(Q+R)^{\alpha-1}\right]=0.$$

Or, en remplaçant dans l'inégalité de Schwarz généralisée

$$(27)\qquad |\mathfrak{M}LN|\leqq\sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}|L|^\alpha}\sqrt[\frac{\alpha}{\alpha-1}]{\mathfrak{M}|N|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\qquad(\alpha>1)$$

donnée page 2, L par Q et N par $(Q+R)^{\alpha-1}$, on voit que le premier crochet est $\geqq 0$. De même, pour le second. Donc chacun d'eux est nul. Par exemple,

$$(28)\qquad \mathfrak{M}Q(Q+R)^{\alpha-1}=\sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}Q^\alpha}\sqrt[\frac{\alpha}{\alpha-1}]{\mathfrak{M}(Q+R)^\alpha}$$

ou, en supposant $\mathfrak{M}Q^\alpha\neq 0$ (donc $\mathfrak{M}(Q+R)^\alpha\neq 0$,

$$\mathfrak{M}VW^{\alpha-1}=1$$

en posant

$$V=\frac{Q}{\sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}Q^\alpha}},\qquad W=\frac{(Q+R)}{\sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(Q+R)^\alpha}}.$$

On a donc

$$0=1-\mathfrak{M}VW^{\alpha-1}=\mathfrak{M}\left\{\frac{1}{\alpha}V^\alpha+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)W^\alpha-VW^{\alpha-1}\right\}.$$

Or, quand $W\neq 0$, on voit en posant

$$x=\frac{V}{W}\geqq 0$$

que le crochet peut s'écrire

$$W^\alpha\left[\frac{1}{\alpha}x^\alpha+1-\frac{1}{\alpha}-x\right]$$

qui reste $\geqq 0$ pour $x\geqq 0$ et ne s'annule que pour $x=1$. L'accolade reste $\geqq 0$ pour $W=0$. Donc

$$\frac{1}{\alpha}V^\alpha+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)W^\alpha-VW^{\alpha-1}=0$$

presque certainement et le premier membre ne s'annule que pour

$V = W$ ou

$$\frac{Q}{\sqrt[\alpha]{\mathfrak{M} Q^\alpha}} = \frac{Q + R}{\sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(Q + R)^\alpha}} \quad ({}^{14}).$$

En représentant par a, b, c les quantités $\sqrt[\alpha]{\mathfrak{M} Q^\alpha}$, $\sqrt[\alpha]{\mathfrak{M} R^\alpha}$, $\sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(Q + R)^\alpha}$, on voit que, si $\mathfrak{M} Q^\alpha$, $\mathfrak{M} R^\alpha$ sont finis et $\neq 0$, donc aussi $\sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(Q + R)^\alpha}$, on aura presque certainement

$$\frac{Q}{a} = \frac{R}{b} = \frac{Q + R}{c}$$

[d'où $c = a + b$, comme résulte aussi de (26)] ou encore

$$(29) \qquad \frac{(X, Z)}{a} = \frac{(Y, Z)}{b} = \frac{(X, Y)}{a + b}$$

presque certainement, avec a, b, tous deux > 0.

Réciproquement, si les relations (29) avec $ab > 0$ ont lieu presque certainement, l'inégalité généralisée de Minkowski (1) devient bien une égalité.

Si $\mathfrak{M} Q^\alpha$ était nul, $Q = (X, Z)$ serait nul presque certainement, donc Z serait identique à X presque certainement. Alors, d'une part, on aurait encore les relations (29) presque certainement en prenant $a = 0$. D'autre part, si Z est identique presque certainement à X, la même inégalité (1) reste encore une égalité.

Finalement, puisque (29) entraîne (25), les relations (29) donnent la condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité (1) soit une égalité.

II. $\alpha < 1$. — On voit facilement qu'alors

$$(1 + x)^\alpha \leqq 1 + x^\alpha \qquad \text{pour} \quad x \geqq 0$$

et que l'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.

Donc

$$(30) \qquad [(X, Z) + (Y, Z)]^\alpha \leqq (X, Z)^\alpha + (Y, Z)^\alpha$$

et l'égalité n'a lieu que pour $Z = X$ ou $Z = Y$.

---

(14) Du même coup, nous venons de démontrer que l'inégalité généralisée de Schwarz de la page 2 ne devient une égalité que s'il existe deux nombres certains λ, μ non tous nuls, tels que $\lambda \,|\, L \,| + \mu \,|\, N \,|^{\frac{1}{\alpha - 1}} = 0$, presque certainement.

Dès lors

$$\mathfrak{M}(X, Y)^\alpha \leqq \mathfrak{M}[(X, Z)+(Y, Z)]^\alpha \leqq \mathfrak{M}(X, Z)^\alpha + \mathfrak{M}(Y, Z)^\alpha.$$

On veut déterminer les cas où les membres extrêmes de ces inégalités sont égaux.

Il faudra donc, d'abord, que

$$\mathfrak{M}\{[(X, Z)+(Y, Z)]^\alpha - (X, Y)^\alpha\} = 0$$

et comme l'accolade est toujours $\geqq 0$, elle devrait être nulle presque certainement. Et alors, on aura, comme plus haut,

$$(X, Y) = (X, Z) + (Y, Z) \tag{25}$$

presque certainement.

Il faut, de plus, que

$$\mathfrak{M}\{(X, Z)^\alpha + (Y, Z)^\alpha - [(X, Z)+(Y, Z)]^\alpha\} = 0,$$

donc, puisque, d'après (30), l'accolade est $\geqq 0$, que

$$[(X, Z)+(Y, Z)]^\alpha = (X, Z)^\alpha + (Y, Z)^\alpha \tag{31}$$

ait lieu presque certainement.

Or, ceci ne peut avoir lieu, comme nous l'avons vu plus haut pour (30), que si, presque certainement, Z est, à chaque épreuve, identique soit à X, soit à Y (c'est-à-dire tantôt à X, tantôt à Y). Et réciproquement, on aura bien, dans ce cas, presque certainement, à la fois (25) et (31), par suite

$$(X, Y)^\alpha = (X, Z)^\alpha + (Y, Z)^\alpha,$$

d'où l'égalité dans (2).

En résumé :

I. $\alpha \geqq 1$. *Pour que l'inégalité généralisée* (1), *de Minkowski*

$$\sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(X, Y)^\alpha} \leqq \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(X, Z)^\alpha} + \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(Y, Z)^\alpha},$$

valable pour $\alpha \geqq 1$, *devienne une égalité, il faut que* Z *reste « entre »* X *et* Y, presque certainement, entendant par là qu'on ait

$$(X, Y) = (X, Z) + (Y, Z), \tag{25}$$

sauf dans un cas de probabilité nulle. *Cette condition est suffisante* *pour* $\alpha = 1$; *pour* $\alpha > 1$, *il faut, en outre, que le rapport des distances* (Z, X), (Z, Y) *de* Z *à* X *et à* Y *reste constant presque certainement.* Et l'ensemble des deux conditions indiquées *est suffisant.*

II. $\alpha < 1$. — Pour que l'inégalité *analogue* (2)

$$\mathfrak{M}(X, Y)^{\alpha} \leqq \mathfrak{M}(X, Z)^{\alpha} + \mathfrak{M}(Y, Z)^{\alpha},$$

valide pour $\alpha < 1$, *devienne une égalité, il faut et il suffit que, presque certainement,* Z *reste identique tantôt à* X, *tantôt à* Y (*ou en particulier toujours à* X *ou toujours à* Y).

En posant

$$p = \text{Prob}(Z = X \neq Y), \qquad q = \text{Prob}(Z = Y \neq X),$$
$$r = \text{Prob}(Z = X = Y),$$

cette condition s'exprime par

$$p + q + r = 1. \tag{32}$$

CAS DES INÉGALITÉS DÉGÉNÉRÉES.

$\alpha \to 0$. — Considérons d'abord l'inégalité de Minkowski dégénérée :

$$[\text{Prob}\, X \neq Y] \leqq [\text{Prob}\, X \neq Z] + [\text{Prob}\, Y \neq Z]. \tag{13}$$

D'après l'égalité (13 *bis*), pour que l'inégalité (13) devienne une égalité, il faut et il suffit que

$$[\text{Prob}\, X,\ Y,\ Z \text{ diff.}] + 2[\text{Prob}\, X = Y \neq Z] = 0,$$

donc que les deux crochets soient nuls. Pour que le premier soit nul, il faut qu'on ait presque certainement

$$X = Y \neq Z \quad \text{ou} \quad Y = Z \neq X \quad \text{ou} \quad X = Z \neq Y \quad \text{ou} \quad X = Y = Z.$$

Mais le premier événement est « presque » impossible en raison de la nullité du second crochet. Finalement, comme pour (2), *il faut* (*et il suffit*) *que presque certainement,* Z *soit tantôt identique à* X, *tantôt identique à* Y (ou identique aux deux à la fois).

$\alpha \to \infty$. — Nous allons chercher de même à quelle condition l'inégalité de Minkowski dégénérée

(11) $$\text{Max. gén.}(X, Y) \leqq \text{Max. gén.}(X, Z) + \text{Max. gén.}(Y, Z)$$

peut devenir une égalité.

Mais, pour aller par degrés, posons-nous d'abord le même problème pour l'inégalité plus simple

(9) $$\text{Max}(X, Y) \leqq \text{Max}(X, Z) + \text{Max}(Z, Y).$$

Et, même, supposons pour commencer que la borne supérieure, $\text{Max}(X, Y)$, de (X, Y) soit atteinte pour un certain couple x, y. Le système X, Y, Z déterminé à chaque épreuve devient pour une épreuve particulière au moins, x, y, z et l'on veut avoir

$$(x, z) + (y, z) \leqq \text{Max}(X, Z) + \text{Max}(Y, Z) = \text{Max}(X, Y) = (x, y) \leqq (x, z) + (y, z).$$

Les membres extrêmes étant égaux, il en est de même des autres. On a donc, d'abord

$$[\text{Max}(X, Z) - (x, z)] + [\text{Max}(Y, Z) - (y, z)] = 0$$

et puisque les deux crochets sont $\geqq 0$, chacun est nul et l'on a non seulement

$$\text{Max}(X, Y) = (x, y) \quad \text{par hypothèse,}$$

mais aussi

$$\text{Max}(X, Z) = (x, z), \qquad \text{Max}(Y, Z) = (y, z),$$

par conséquence et enfin

(33) $$(x, y) = (x, z) + (y, z).$$

Donc, si $\text{Max}(X, Y)$ est atteint par (x, y) dans l'une (x, y, z) des positions du système X, Y, Z, les maxima de (X, Z) et de (Y, Z) sont aussi atteints et dans le même système x, y, z, soit, donc par (x, z) et (y, z). De plus, dans ce système x, y, z, maximisant à la fois les trois distances, le point z est « entre » x et y.

Dans le cas général, quel que soit $\varepsilon > 0$, il y a toujours un système x, y, z de positions X, Y, Z tel que

(34) $$\text{Max}(X, Y) - \varepsilon < (x, y) \leqq \text{Max}(X, Y).$$

On aura alors

$$(x, z) + (y, z) \leqq \text{Max}(X, Z) + \text{Max}(Y, Z) = \text{Max}(X, Y) < (x, y) + \varepsilon$$
$$\leqq (x, z) + (y, z) + \varepsilon.$$

La différence des membres extrêmes étant égale à ε, les différences des membres intermédiaires sont au plus égales à ε.

On a donc

$$[\mathrm{Max}(X, Z) - (x, z)] + [\mathrm{Max}(Y, Z) - (y, z)] < \varepsilon$$

et, comme chaque crochet est $\geqq 0$,

$$(35) \qquad \begin{cases} \mathrm{Max}(X, Z) - \varepsilon < (x, z)[\leqq \mathrm{Max}(X, Z)], \\ \mathrm{Max}(Y, Z) - \varepsilon < (y, z)[\leqq \mathrm{Max}(Y, Z)] \end{cases}$$

et

$$(33\ bis) \qquad (x, z) + (y, z) - (x, y) < \varepsilon.$$

Les inégalités (34), (35) expriment qu'*il y a des épreuves où les distances mutuelles des positions correspondantes* x, y, z de X, Y, Z sont *aussi voisines que l'on veut de leur maxima correspondant* (X, Y), (X, Z), (Y, Z). Et l'inégalité (33 *bis*) montre que, *dans ces positions*, z *est presque* (avec autant d'approximation que l'on veut) « *entre* » x *et* y.

Il est clair que l'ensemble nécessaire de ces conditions pour que l'inégalité (19) devienne une égalité *est suffisant*.

Passons à l'inégalité (11). On a presque certainement

$$(36) \qquad (X, Z) \leqq \text{Max. gén. } (X, Z)$$

et presque certainement

$$(37) \qquad (Y, Z) \leqq \text{Max. gén. } (Y, Z).$$

Il y a donc aussi une probabilité égale à un, que ces deux inégalités aient lieu en même temps et que, par suite, si (11) devient une égalité, on ait

$$(X, Z) + (Y, Z) \leqq [\text{Max. gén.}(X, Z)] + [\text{Max. gén.}(Y, Z)] = \text{Max. gén.}(X, Y).$$

Or, pour tout $\varepsilon > 0$, il y a une probabilité positive que

$$(38) \qquad \text{Max. gén.}(X, Y) \leqq (X, Y) + \varepsilon.$$

Il y a donc une probabilité positive pour qu'on ait *à la fois* (36), (37) et (38) et, par suite, que

$$\begin{aligned}(X, Z) + (Y, Z) &\leqq \text{Max. gén. } (X, Z) + \text{Max. gén. } (Y, Z) = \text{Max. gén.}(X, Y) \\ &\leqq (X, Y) + \varepsilon \leqq (X, Z) + (Y, Z) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Les membres extrêmes diffèrent de ε au plus, il en sera encore de même des membres intermédiaires et l'on aura

$$[\text{Max. gén.}(X, Z) - (X, Z)] + [\text{Max. gén.}(Y, Z) - (Y, Z)] \leqq \varepsilon, \tag{39}$$

avec une probabilité positive. Et comme les deux crochets sont presque certainement $\geqq 0$, il y a une probabilité positive que ces deux crochets soient $\leqq \varepsilon$ en même temps qu'a lieu (38).

Ainsi, pour que (11) devienne une égalité, il faut que quel que soit $\varepsilon > 0$, il y ait une probabilité positive (variant avec ε) telle que *simultanément*

$$\begin{aligned}
\text{Max. gén.}(X, Z) - \varepsilon &\leqq (X, Z) \leqq \text{Max. gén.}(X, Z),\\
\text{Max. gén.}(Y, Z) - \varepsilon &\leqq (Y, Z) \leqq \text{Max. gén.}(Y, Z),\\
\text{Max. gén.}(X, Y) - \varepsilon &\leqq (X, Y) \leqq \text{Max. gén.}(X, Y)
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}
&(X, Z) + (Y, Z) - (X, Y)\\
&\quad < [\text{Max. gén.}(X, Z) + \text{Max. gén.}(Y, Z) - \text{Max. gén.}(X, Y) + \varepsilon = \varepsilon,
\end{aligned}$$

d'où

$$0 \leqq (X, Z) + (Y, Z) - (X, Y) < \varepsilon.$$

Autrement dit, pour que (11) devienne une égalité, *il faut qu'avec une probabilité positive*, les distances (X, Z), (Y, Z), (X, Y) *soient simultanément aussi voisines que* l'on veut des Max. gén. correspondants et que, dans ces mêmes épreuves, Z soit presque « entre » X et Y, avec autant d'approximation que l'on veut.

L'ensemble nécessaire de ces conditions *est évidemment suffisant.*

APPLICATIONS.

Nous allons signaler les quelques particularités que l'on rencontre en appliquant ce qui précède à des éléments aléatoires d'une nature simple déterminée.

Le lecteur pourrait déduire lui-même immédiatement ces applications. Mais il nous a semblé utile de les expliciter pour ceux qui s'intéresseraient plus aux cas particuliers qu'à la théorie générale.

I. — Cas des nombres aléatoires.

Quand X, Y, Z deviennent des *nombres* aléatoires, les distances globales (3), (10), (12) s'écrivent en y remplaçant (X, Y) par $|X - Y|$.

La condition (25) devient

$$|X - Y| = |Z - X| + |Z - Y|$$

qui équivaut à dire que le point d'abscisse Z doit presque certainement rester entre les deux points d'abscisses X et Y ou encore que

$$(Z - X)(Z - Y) \leqq 0.$$

II. — Cas des points aléatoires dans un espace euclidien.

Supposons que X, Y, Z soient des points aléatoires appartenant à un même espace euclidien à r dimensions. Par exemple, X aura les coordonnées $X_1, \ldots, X_r$ et

$$(X, Y) = \sqrt{\sum_1^r (X_h - Y_h)^2}.$$

On aura pour $\alpha \geqq 1$

$$(40) \qquad \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}[\Sigma(X_h - Y_h)^2]^{\frac{\alpha}{2}}} \leqq \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}[\Sigma(X_h - Z_h)^2]^{\frac{\alpha}{2}}} + \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}[\Sigma(Y_h - Z_h)^2]^{\frac{\alpha}{2}}}$$

et pour $\alpha < 1$

$$(41) \qquad \mathfrak{M}[\Sigma(X_h - Y_h)^2]^{\frac{\alpha}{2}} \leqq \mathfrak{M}[\Sigma(X_h - Z_h)^2]^{\frac{\alpha}{2}} + \mathfrak{M}[\Sigma(Y_h - Z_h)^2]^{\frac{\alpha}{2}}.$$

I. $\alpha \geqq 1$. — *Pour que* (40) *devienne une égalité*, il faut d'abord que, presque certainement,

$$(X, Y) = (X, Z) + (Y, Z),$$

c'est-à-dire que les points X, Y, Z *soient* **alignés** *et même que* Z *appartienne au segment rectiligne joignant* X à Y.

1° Pour $\alpha = 1$, cette condition suffit;

2° Pour $\alpha > 1$, il faut encore que *le rapport des distances de* Z *à* X *et à* Y *soit presque certainement constant.*

L'ensemble nécessaire des deux conditions *est suffisant* et revient à dire *que le point variable* Z *reste presque certainement le centre de gravité de deux masses certaines placées aux points variables* X, Y.

II. $\alpha \leqq 1$. — Pour que (41) devienne une égalité, il faut et il suffit que le point Z coïncide tantôt avec X, tantôt avec Y (ou tantôt avec ces deux points à la fois).

III. — Application à l'Algèbre.

A. — Considérons trois nombres aléatoires X, Y, Z qui, dans une même épreuve, ne peuvent prendre que l'un des systèmes de valeurs x_k, y_k; z_k

($k=1, 2, \ldots, n$), le $k^{\text{ième}}$ système ayant la probabilité p_k. On retrouve en appliquant ce qui précède les inégalités connues

$$(42)\qquad \sqrt[\alpha]{\Sigma p_k |x_k - y_k|^\alpha} \leqq \sqrt[\alpha]{\Sigma p_k |x_k - z_k|^\alpha} + \sqrt[\alpha]{\Sigma p_k |y_k - z_k|^\alpha}$$

pour $\alpha \geqq 1$ et

$$(43)\qquad \Sigma p_k |x_k - y_k|^\alpha \leqq \Sigma p_k |x_k - z_k|^\alpha + \Sigma p_k |y_k - z_k|^\alpha$$

pour $\alpha \leqq 1$.

Mais nous voyons de plus que, *pour que* (42) *devienne une égalité, il faut que*

$$|x_k - y_k| = |x_k - z_k| + |y_k - z_k| \qquad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, r,$$

donc que

$$(44)\qquad (x_k - z_k)(y_k - z_k) \leqq 0 \qquad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, r,$$

[et, par suite, que dans toute épreuve

$$(\mathrm{X} - \mathrm{Z})(\mathrm{Y} - \mathrm{Z}) \leqq 0].$$

Pour $\alpha = 1$, *cela suffit.*

Pour $\alpha > 1$, *il faut encore* que $|x_k - z_k|$ et $|y_k - z_k|$ restent, quand k varie, dans des rapports indépendants de k. Donc *qu'il existe deux nombres* ($\geqq 0$), l *et* m, *indépendants de* k *et de somme égale à* 1 *tels que*

$$z_k = l x_k + m y_k \qquad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

et cela suffit.

D'autre part, *quand* $\alpha < 1$, pour que l'inégalité (43) devienne une égalité, *il faut et il suffit* que, quel que soit k, z_k soit égal à x_k ou y_k, *donc que* l'inégalité (44) devienne l'égalité

$$(x_k - z_k)(y_k - z_k) = 0 \qquad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

B. — Appliquons les résultats obtenus plus haut, p. 30, quand X, Y, Z appartiennent à un espace euclidien à n dimensions, en supposant maintenant que X, Y, Z ne peuvent prendre qu'un nombre fini de systèmes de positions $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$; ...; $x^{(r)}$, $y^{(r)}$, $z^{(r)}$, avec les probabilités respectives $p_1, \ldots, p_r$.

Si, par exemple, $x^{(s)}$ a les coordonnées $x_1^{(s)}, \ldots, x_n^{(s)}$, on aura, pour $\alpha \geqq 1$

$$(45)\qquad \sqrt[\alpha]{\sum_{s=1}^{r} p_s \left[\sum_{h=1}^{r} \left(x_h^{(s)} - y_h^{(s)}\right)^2\right]^{\frac{\alpha}{2}}} \leqq \sqrt[\alpha]{\sum_{s=1}^{r} p_s \left[\sum_{h=1}^{n} \left(x_h^{(s)} - z_h^{(s)}\right)^2\right]^{\frac{\alpha}{2}}} + \sqrt[\alpha]{\sum_{s=1}^{r} p_s \left[\sum_{h=1}^{n} \left(y_h^{(s)} - z_h^{(s)}\right)^2\right]^{\frac{\alpha}{2}}},$$

inégalité algébrique *probablement nouvelle*. Et pour $\alpha < 1$, une inégalité analogue obtenue en supprimant les radicaux dans l'inégalité précédente.

Pour que dans (45), on ait le signe d'égalité, il faut que l'on puisse écrire les $z_h^{(s)}$ sous la forme

$$z_h^{(s)} = l_s x_h^{(s)} + m_s y_h^{(s)},$$

où les l_s, m_s sont des quantités $\geqq 0$, indépendantes de h avec $l_s + m_s = 1$.

Cette condition est *suffisante pour* $\alpha = 1$.

Si $\alpha > 1$, il faut encore qu'on puisse prendre l_s et m_s, indépendants de s

$$l_s = l, \qquad m_s = m,$$
$$z_h^{(s)} = l x_h^{(s)} + m y_h^{(s)},$$

et *cela suffit.*

Pour que la seconde inégalité considérée, celle relative au cas où $\alpha < 1$, soit réduite à une égalité, il faut et il suffit que

$$[x_h^{(s)} - z_h^{(s)}][y_h^{(s)} - z_h^{(s)}] = 0 \qquad \text{pour} \quad h = 1, \ldots n, \quad s = 1, \ldots, r.$$

IV. — **Application à l'Analyse.**

Soient trois fonctions $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ définies sur un intervalle (a, b).

Pour leur appliquer les résultats précédents, considérons trois *nombres* aléatoires

$$X = f(R), \qquad Y = g(R), \qquad Z = h(R),$$

où R est un *nombre* aléatoire choisi sur l'intervalle (a, b), avec une loi de probabilité uniforme. La densité de probabilité de R sera donc constante et égale à $\frac{1}{b-a}$.

Si l'on suppose finies les intégrales sur (a, b) des puissances $\alpha (> 0)$ des valeurs absolues de f, g, h, on pourra écrire

$$\mathfrak{M} | X - Y |^\alpha = \frac{1}{b-a} \int_a^b | f(x) - g(x) |^\alpha \, dx, \qquad \ldots.$$

Alors on retrouve d'abord les inégalités connues

$$\sqrt[\alpha]{\int_a^b |f(x) - g(x)|^\alpha dx} \leqq \sqrt[\alpha]{\int_a^b |f(x) - h(x)|^\alpha dx} + \sqrt[\alpha]{\int_a^b |g(x) - h(x)|^\alpha dx}$$

pour $\alpha \geqq 1$ et

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|^\alpha \, dx \leqq \int_a^b |f(x) - h(x)|^\alpha \, dx + \int_a^b |g(x) - h(x)|^\alpha \, dx$$

pour $\alpha \leqq 1$.

Mais, de plus, nous voyons que, pour que les inégalités (38), (39) deviennent des égalités :

I. $\alpha \geqq 1$. — Il faut, pour $\alpha \geqq 1$, que

$$(48) \qquad |f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$$

ou

$$[f(x) - h(x)][g(x) - h(x)] \leqq 0$$

presque partout.

1° Cela suffit pour $\alpha = 1$.

2° Si $\alpha > 1$, il faut encore que presque partout $|f(x) - h(x)|$ et $|g(x) - h(x)|$ soient dans un rapport indépendant de x, c'est-à-dire qu'il existe deux nombres fixes $\geqq 0$, p, q, tels que $p + q = 1$ et

$$\frac{f(x) - h(x)}{q} = \frac{h(x) - g(x)}{p}$$

ou

$$h(x) = pf(x) + qg(x),$$

II. $\alpha < 1$. — Il faut et il suffit que $h(x)$ soit presque partout égal soit à $f(x)$, soit à $g(x)$, c'est-à-dire que, presque partout

$$[f(x) - h(x)][g(x) - h(x)] = 0.$$