Annales de l'I. H. P.

G. Stephenson

La géométrie de Finsler et les théories du champ unifié

Annales de l'I. H. P., tome 15, nº 3 (1957), p. 205-215
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1957__15_3_205_0>

La géométrie de Finsler et les théories du champ unifié

par

G. STEPHENSON.

University of London.

Depuis le développement de la théorie générale de la Relativité il y a plus de 40 ans, on a fait beaucoup d'efforts pour la généraliser afin d'y inclure le champ électromagnétique. Cela semblait être la première chose à faire après la théorie de la gravitation pure, puisque la réfraction de la lumière par le champ attractif du Soleil montre une interaction directe entre la gravitation et l'électromagnétisme. Les lois de la Relativité générale sont invariantes par rapport au groupe général des transformations continues, tandis que les équations de Maxwell sont invariantes par rapport au groupe de Lorentz. Alors, un des moyens le plus simple pour obtenir une description de l'interaction gravitationnelle et de l'électromagnétisme est de mettre les équations de Maxwell sous une forme covariante générale et d'écrire

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = T_{ik},$$

où $T_{ik} = F_{is} F_{k}{}^{s} - \frac{1}{4} g_{ik} F_{sp} F^{sp}$ est le tenseur énergie-impulsion de l'électromagnétisme. Cela s'appelle la théorie d'Einstein et Maxwell. Les équations généralisées de Maxwell pour un espace vide en l'absence de tout courant et de toute charge deviennent alors

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (F^{ik} \sqrt{-g}) = 0, \qquad F_{[ij,k]} = 0,$$

où $[ij, k]$ désigne une permutation circulaire des indices. L'équation

$F_{[ij,k]} = 0$ implique que les variables du champ électromagnétique sont dérivées d'un potentiel quadrivecteur A_k par les relations

$$F_{ik} = A_{i,k} - A_{k,i}.$$

Ces équations peuvent aussi être déduites d'un principe variationnel, où la variation est effectuée par rapport aux variables de champ g_{ik} et A_k, et

$$\delta \int \left(R + \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik} \right) \sqrt{-g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4 = 0.$$

Plusieurs solutions de ces équations ont été trouvées et il est bien connu que des ondes électromagnétiques se propageant dans un espace-temps de Schwarzchild, subissent en raison de la gravitation, le même déplacement vers l'infrarouge et la même réfraction de la lumière par le Soleil que ceux donnés par la Relativité générale seule. Infeld et Wallace (1940) ont montré qu'en traitant une particule chargée comme singularité dans le champ, il est possible de se servir de la technique d'Einstein-Infeld-Hoffmann pour obtenir les équations correctes du mouvement à partir des équations du champ. Ces équations sont

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} k \\ mn \end{matrix} \right\} \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^n}{ds} + F_{m.}{}^{k} \frac{dx^m}{ds} = 0,$$

où le dernier terme est la force de Lorentz, et $ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$. Le problème de Cauchy de cette théorie a été résolu par M^me^ Fourès-Bruhat (1956).

Nous voyons ainsi que la théorie d'Einstein et Maxwell nous donne une description satisfaisante de l'interaction de la gravitation et du champ électromagnétique — au moins à l'échelle macroscopique.

Cependant, en dépit de ceci, beaucoup de physiciens croient possible de joindre les deux champs dans une forme plus fondamentale afin que l'électromagnétisme comme la gravitation apparaisse comme une propriété géométrique de l'espace-temps. Einstein était le plus grand interprète de ce point de vue, et il croyait qu'une telle théorie mènerait à la structure des particules élémentaires.

Pendant ces dernières 40 années on a essayé maintes fois de construire une telle théorie. L'effort le plus important est sans doute celui d'Einstein (1945) connu sous le nom de théorie non symétrique. La dernière version de cette théorie, publiée par Einstein (1953) est fondée sur un tenseur non symétrique

$$g_{ik} = g_{\underline{ik}} + g_{\underset{\vee}{ik}}$$

et une connexion affine non symétrique

$$\Gamma^s_{ik} = \Gamma^s_{\underline{ik}} + \Gamma^s_{\underset{\vee}{ik}}.$$

Les équations du champ sont

$$g_{\underset{+-}{ik;l}} \equiv g_{ik,l} - g_{is}\,\Gamma^s_{lk} - g_{sk}\,\Gamma^s_{il} = 0,$$

$$\Gamma^s_{\underset{\vee}{is}} \equiv \Gamma_i = 0, \qquad R_{\underline{ik}} = 0, \qquad R_{[\underset{\vee}{ik};l]} = 0,$$

où

$$R_{ik} = \Gamma^s_{ik,s} - \frac{1}{2}\left(\Gamma^s_{\underline{is},k} + \Gamma^s_{\underline{ks},i}\right) - \Gamma^s_{ip}\,\Gamma^p_{sk} + \Gamma^s_{ik}\,\Gamma^p_{sp},$$

ou ; représente la différentiation covariante par rapport à Γ^s_{ik}. Ces équations peuvent être dérivées d'un principe variationnel

$$\delta \int R_{ik}\, g^{ik} \sqrt{-g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4 = 0,$$

comme l'indiquent Einstein (1953) et Schrödinger (1954), et elles constituent certainement le système le plus naturel pour la théorie non symétrique.

Pourtant, comme l'indiquent Callaway (1954) et d'autres, si l'on traite une particule d'épreuve chargée comme une singularité du champ, et si l'on applique la technique de Einstein-Infeld-Hoffmann pour déduire les équations du mouvement à partir des équations du champ, alors on ne trouve aucune force de Lorentz; ce qui est un défaut grave de la théorie, puisque la particule chargée se déplacerait comme une particule non chargée. Plusieurs efforts ont été faits par M^me^ Tonnelat, Bonnor et d'autres pour résoudre ces équations et pour supprimer cette difficulté Einstein a suggéré qu'il nous faut renoncer à l'idée d'une particule comme une singularité; nous devons chercher seulement des solutions non singulières. De telles solutions n'ont pas encore été trouvées, et depuis la mort d'Einstein l'intérêt porté à la théorie non symétrique a décliné rapidement. Le sentiment général aujourd'hui est que la théorie non symétrique n'est pas en effet le moyen correct d'unifier les deux champs.

Ce point de vue est renforcé par les travaux de Sciama (non encore publiés) qui montrent qu'on peut établir un rapport entre la partie antisymétrique $g_{\underset{\vee}{ik}}$ et le moment angulaire à six composantes d'une particule relativiste. Il suggère que le tenseur $g_{\underset{\vee}{ik}}$ n'a rien à voir avec l'électromagnétisme.

Il nous faut demander maintenant quelles généralisations de la Relativité générale restent à tenter. Moffat (1956) a suggéré qu'une théorie unifiée peut être fondée sur une géométrie complexe de Riemann avec un tenseur métrique symétrique complexe, tel que

$$g_{\underline{ik}} = s_{\underline{ik}} + i a_{\underline{ik}},$$

et une connexion affine symétrique et complexe, tel que

$$\Gamma^s_{\underline{ik}} = \overset{\star}{\Gamma}{}^s_{\underline{ik}} + i \overset{\wedge}{\Gamma}{}^s_{\underline{ik}}.$$

Les $\Gamma^s_{\underline{ik}}$ sont déterminés au moyen des $g_{\underline{ik}}$ par l'équation

$$g_{\underline{ik};l} \equiv g_{\underline{ik},l} - g_{\underline{is}} \Gamma^s_{\underline{kl}} - g_{\underline{sk}} \Gamma^s_{\underline{il}} = 0.$$

En considérant seulement des particules se déplaçant lentement et en identifiant a_{k4} avec le quadrivecteur potentiel de l'électromagnétisme A_k, Moffat obtient la force de Lorentz par la méthode d'Einsten-Infeld-Hoffmann.

Cette théorie, cependant, laisse à désirer, puisque la force de Lorentz n'est pas obtenue pour les particules se déplaçant rapidement. Aussi l'identification $a_{k4} = A_k$ n'est pas un procédé invariant.

Je voudrais maintenant discuter une méthode métrique pour introduire le champ électromagnétique qui a été discuté par Stephenson et Kilmister (1953).

Nous prenons une métrique du type

$$ds = A_k\, dx^k + \sqrt{g_{ik}\, dx^i\, dx^k}.$$

Les géodésiques de cet espace-temps peuvent être obtenues à partir de la variation $\delta \int ds = 0$ et ceci mène aux équations

$$\frac{d^2 x^k}{d\omega^2} + \left\{ \begin{matrix} k \\ mn \end{matrix} \right\} \frac{dx^m}{d\omega} \frac{dx^n}{d\omega} + F_m{}^k \frac{dx^m}{d\omega} = 0,$$

où

$$d\omega^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k \qquad \text{et} \qquad F_{ik} = A_{i,k} - A_{k,i}.$$

Comme nous le savons, ces équations décrivent exactement le mouvement macroscopique d'une particule d'épreuve chargée dans un champ gravitationnel et électromagnétique si A_k est associé au quadrivecteur de l'électromagnétisme.

Ces équations définissent les trajectoires des particules d'épreuve exprimées en fonction des variables de champ qui doivent être déterminées maintenant par un système d'équations de champ.

Le procédé utilisé en Relativité générale pour avoir ces équations de champ consiste à employer un principe variationnel et à adopter une densité lagrangienne $R\sqrt{-g}$, où R est la courbure scalaire de l'espace-temps.

Si nous faisons la même chose pour cet espace-temps, nous trouvons que la valeur de la courbure gaussienne en un point n'est plus unique comme en Relativité générale, mais dépend maintenant de la direction suivant laquelle nous approchons le point. Si, cependant, nous définissons la valeur principale de la courbure comme la moyenne de la valeur minimum et la valeur maximum, nous trouvons que la moyenne des valeurs principales des courbures en un point pour les six surfaces géodésiques formées par quatre directions perpendiculaires à ce point est la quantité scalaire

$$\frac{1}{12}\left(R + \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}\right).$$

Par analogie avec la Relativité générale, nous adoptons ceci dans notre lagrangien et nous savons que l'on est ainsi conduit aux équations de la théorie d'Einstein et Maxwell.

Si nous acceptons cette théorie comme une base géométrique possible de la théorie d'Einstein et Maxwell, alors, comme Horvath (1956) l'a montré, nous avons vraiment une géométrie du type de Finsler dans laquelle

$$ds^2 = \gamma_{ik}(x^s, \dot{x}^s)\, dx^i\, dx^k,$$

où

$$\dot{x}^s = \frac{dx^s}{d\tau}$$

et τ est un paramètre arbitraire.

L'idée d'utiliser la géométrie de Finsler comme base d'une théorie unifiée a été suggérée pour la première fois par Horvath (1950), et ensuite par Horvath et Moor (1952). Une théorie semblable a été faite par Schaffhauser-Graf (1953).

Si

$$ds = L(x^k, \dot{x}^k)\, d\tau,$$

où L est une fonction homogène de $\dot{x}^k$ du degré 1, alors nous trouvons

$$ds^2 = \gamma_{ik}(x^s, \dot{x}^s)\, dx^i\, dx^k,$$

où

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 L^2}{\partial \dot{x}^i\, \partial \dot{x}^k}.$$

De plus, si

$$DB^k = dB^k + \Gamma^k_{mn}\, B^m\, dx^n + C^k_{mn}\, B^m\, d\dot{x}^n,$$

où Γ^k_{mn} et C^k_{mn} sont les fonctions de $(x, \dot{x})$, puis, s'il n'y a pas de changement de longueur d'un quadrivecteur arbitraire, alors nous avons $DB^k = 0$ et ensuite

$$\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^s} - \gamma_{ip}\, \Gamma^p_{ks} - \gamma_{pk}\, \Gamma^p_{is} = 0$$

et

$$\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial \dot{x}^s} - \gamma_{ip}\, C^p_{ks} - \gamma_{pk}\, C^p_{is} = 0.$$

Si nous imposons à $C^s_{\underline{ik}}$ d'être un tenseur symétrique dans ces deux indices inférieurs, nous trouvons

$$\gamma_{sj}\, C^s_{\underline{ik}} = \frac{1}{2}(\gamma_{ij,k} + \gamma_{jk,i} - \gamma_{ik,j}).$$

Puisque $\gamma_{ik} = \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 L^2}{\partial \dot{x}^i\, \partial \dot{x}^k}$, nous avons

$$\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial \dot{x}^j} = \frac{1}{2}\, \frac{\partial^3 L^2}{\partial \dot{x}^i\, d\dot{x}^j\, \partial \dot{x}^k}$$

et

$$\gamma_{sj}\, C^s_{\underline{ik}} = \frac{1}{4}\, \frac{\partial^3 L^2}{\partial \dot{x}^i\, \partial x^j\, \partial \dot{x}^k}.$$

On trouve que le tenseur de torsion est symétrique dans tous ses indices. Nous avons aussi une connexion affine symétrique que nous définissons par

$${}^*\Gamma^s_{\underline{ik}} = \Gamma^s_{ik} - C^s_{in}\, \Gamma^n_{mk}\, \dot{x}^m$$

et puis, nous trouvons

$$\Gamma^s_{\overset{ik}{\vee}} = \frac{1}{2}(C^s_{in}\, \Gamma^n_{mk} - C^s_{kn}\, \Gamma^n_{mi})\, \dot{x}^m.$$

La connexion affine non symétrique est

$$\Gamma^s_{ik} = \left\{ {s \atop ik} \right\} + \gamma^{sp}(C_{ikn}\Gamma^n_{mp} - C_{pkn}\Gamma^n_{mi})\dot{x}^m,$$

où

$$\left\{ {s \atop ik} \right\} = \frac{1}{2}\gamma^{sp}(\gamma_{pk,i} + \gamma_{pi,k} - \gamma_{ik,p}).$$

Le tenseur contracté de courbure de la géométrie de Finsler est

$$R_{ik} = {}^*\Gamma^s_{ik.s} - {}^*\Gamma^s_{is,k} - \frac{\partial^* \Gamma^s_{ik}}{\partial \dot{x}^p}\Gamma^p_{ns}\,\dot{x}^n + \frac{\partial^* \Gamma^s_{is}}{\partial \dot{x}^p}\Gamma^p_{nk}\,\dot{x}^n + {}^*\Gamma^s_{ik}\,{}^*\Gamma^p_{sp} - {}^*\Gamma^s_{ip}\,{}^*\Gamma^p_{sk}$$

et les géodésiques sont

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma^k_{mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds} = 0.$$

Pour notre espace-temps, nous trouvons

$$\begin{aligned}\gamma_{ik} = g_{ik} + A_i A_k + G^{-1}\{ A_i g_{ks} + A_s g_{ki} + A_k g_{si} \}\,\dot{x}^s\\ - G^{-3}\{ A_s g_{ip} g_{kl}\,\dot{x}^s \dot{x}^p \dot{x}^l \}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}2C_{ijk} = {} & G^{-1}(A_i g_{jk} + A_j g_{ik} + A_k g_{ij})\\ & - G^{-3}(A_i g_{sj} g_{pk} + A_k g_{is} g_{pj} + A_j g_{is} g_{kp})\,\dot{x}^s \dot{x}^p\\ & - G^{-3} A_s \dot{x}^s (g_{ip} g_{kj} + g_{ij} g_{kp} + g_{jp} g_{ik})\,\dot{x}^p\\ & + 3G^{-5} A_s \dot{x}^s g_{ip} g_{jl} g_{kn}\,\dot{x}^p \dot{x}^l \dot{x}^n,\end{aligned}$$

où

$$G = \sqrt{g_{ik}\,\dot{x}^i \dot{x}^k}.$$

Ces fonctions sont très complexes et il est certain que le calcul du tenseur de courbure contracté est un problème laborieux.

On a espéré que la courbure scalaire $R = \gamma^{ik} R_{ik}$ contiendrait un terme $R(g_{ik}) + \frac{1}{2}F_{ik}F^{ik}$ afin qu'on puisse l'utiliser comme lagrangien pour l'espace-temps de Finsler. Cependant, aucun terme tel que celui-ci n'apparaît, et il n'y a pas de système évident des équations de champ pour inclure la théorie unifiée fondée sur une géométrie de Finsler. Nous voyons que cette géométrie de Finsler ne mène pas à une théorie unifiée utile. Nous avons essayé aussi d'autres espaces-temps de Finsler — par exemple, $ds^4 = g_{ikmn}\,dx^i\,dx^k\,dx^m\,dx^n$ suggéré par Eddington (1923) — mais rien d'intéressant n'est apparu. Il semble alors que cette généralisation particulière de la géométrie de Riemann n'est pas un procédé correct pour introduire le champ électromagnétique.

Le problème de construire une théorie unifiée de la gravitation et de l'électromagnétisme à partir de considérations géométriques fondamentales reste encore à accomplir, et nous ne semblons pas plus près de la solution que nous n'en étions il y a une quarantaine d'années. La meilleure théorie que nous possédons est celle d'Einstein et Maxwell, mais elle n'est guère une vraie théorie unifiée et même les solutions « Géon » non singulières de cette théorie trouvées par Wheeler (1954) ne semblent pas se rattacher aux particules élémentaires.

Il est possible que nous ne posions pas les problèmes correctement et que nous devions considérer d'abord la relation entre la gravitation et la théorie des quanta; celle-ci est un problème aussi difficile et on le prend de plus en plus en considération.

En outre, dans toutes les théories unifiées, nous n'avons pas de champ scalaire. Il semble qu'il soit nécessaire d'obtenir un champ scalaire (ou peut-être pseudo-scalaire) pour une description classique des forces nucléaires. Maintenant, nous allons considérer des propriétés d'une particule classique relativiste dans un champ scalaire.

Si nous prenons l'équation du mouvement

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\frac{dx^i}{d\tau}\right)=-\frac{\partial V}{\partial x^i},$$

où

$$\frac{dx^i}{d\tau}=u^i \qquad \text{et} \qquad u^i u_i=-c^2 \qquad \text{et} \qquad x^4=ict,$$

alors, nous avons

$$\frac{dm}{d\tau}\frac{dx^i}{d\tau}+m\frac{d^2x^i}{d\tau^2}=-\frac{\partial V}{\partial x^i}$$

et

$$\frac{dm}{d\tau}=\frac{1}{c^2}\frac{dV}{d\tau}.$$

Ainsi, nous avons

$$m=\frac{V}{c^2}+m_0,$$

où m_0 est la masse de la particule dans l'absence du champ. Ensuite,

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\left(m_0+\frac{V}{c^2}\right)u^i\right\}=-\frac{\partial V}{\partial x^i}$$

et ceci donne

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\left(m_0+\frac{V}{c^2}\right)\omega}{\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c^2}}}\right\}=-\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c^2}}\operatorname{grad} V$$

et

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c^2+V}{\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c^2}}}\right)=\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c^2}}\,\frac{\partial V}{\partial t},\qquad \text{où}\quad \omega=\frac{dx}{dt}.$$

Si V n'est pas une fonction de temps t, nous avons

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c^2+V}{\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c^2}}}\right)=\frac{dE}{dt}=0,$$

où E est est l'énergie totale de la particule.

Nous voyons que $E=\text{const.}$ Alors

$$m_0\frac{d\omega}{dt}=-\frac{\left(1-\frac{\omega^2}{c^2}\right)}{1+\frac{V}{m_0 c^2}}\operatorname{grad} V.$$

Cette théorie a été discutée par Marx et Szamosi (1954).

Nous voyons que le signe de l'accélération $\frac{d\omega}{dt}$ est changé quand $V>-m_0 c^2$. Si $V=-g^2\frac{e^{-\mu\nu}}{\nu}$, où g est la charge nucléaire et $\mu=\frac{m'c}{\hbar}$, où m' est la masse du π-méson, nous voyons que la particule rencontre une barrière répulsive à une distance certaine de ν_0 qui dépend de la valeur g. Nous trouvons que $\nu_0=0,5.10^{-13}$ cm pour $\frac{g^2}{\hbar c}=13$. Ceci est en accord avec l'expérience obtenue par la théorie de collision des particules nucléaires. Ce simple calcul relativiste classique donne une approximation à la valeur pour $\frac{g^2}{\hbar c}$ la constante de couplage du champ mésique avec le nucléon.

Il y a un autre exemple de champ scalaire relativiste. Le potentiel d'un nucléon ponctuel stationnaire est décrit par le champ de méson scalaire

$$\square^2 V-\mu^2 V=0,$$

où

$$\mu = \frac{m'c}{\hbar} \qquad \text{et} \qquad V = g^2 \frac{e^{-\mu\nu}}{\nu}.$$

De même, le potentiel de l'électron ponctuel stationnaire est décrit par le champ électromagnétique

$$\Box^2 A_k = 0,$$

où

$$A_k = (\underline{A}, \Phi) \qquad \text{et} \qquad \Phi = \frac{e^2}{\nu},$$

où e est la charge électrique.

Maintenant si nous considérons les masses de ces particules comme les énergies propres des champs, nous avons la proportion

$$\frac{M_n}{m_e} = \underset{a \to 0}{\mathrm{L}t} \left\{ \frac{\displaystyle\int_a^\infty T_{44} 4\pi\nu^2 \, d\nu}{\displaystyle\int_a^\infty E_{44} 4\pi\nu^2 \, d\nu} \right\},$$

où T_{44} et E_{44} sont les composantes 44 des tenseurs d'énergie-impulsions pour le champ de méson et le champ électromagnétique..

Nous trouvons que

$$\frac{M_n}{m_e} = \frac{g^2}{e^2} \underset{a \to 0}{\mathrm{L}t} \{ (\mu a + 1) e^{-2\mu a} \} = \frac{g^2}{e^2}.$$

La valeur de $\frac{g^2}{\hbar c} = 13$ et $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$. Donc, $\frac{M_n}{m_e} = 1836$, en accord avec l'expérience.

Ce calcul simple classique a été discuté par Stephenson (1957), et il indique que les masses des particules sont peut-être liées aux énergies propres des champs. Ces deux calculs classiques suggèrent qu'il est nécessaire peut-être d'inclure un champ scalaire dans une théorie unifiée pour une description classique des forces nucléaires. Il semble qu'il faut introduire les variables g_{ik}, A_k et V. Une théorie analogue a été discutée par Bergmann (1948) avec une géométrie à cinq dimensions. A cause de la faillite des théories à quatre dimensions, il semblerait utile de reconsidérer les théories à un nombre de dimensions supérieur.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] L. INFELD et P. R. WALLACE, *Phys. Rev.*, t. 57, 1940, p. 797.
[2] Y. FOURÈS-BRUHAT, Suppl. *Helv. Phys. Acta*, n° 4, 1956, p. 76.
[3[A. EINSTEIN, *Ann. Math.*, t. 46, 1945, p. 578.
[4] A. EINSTEIN, *The meaning of Relativity*, Princeton, 1953, Appendix 2.
[5] E. SCHRÖDINGER, *Space-time structure*, Cambridge University Press, 1954.
[6] J. CALLAWAY, *Phys. Rev.*, t. 92, 1954, p. 1567.
[7] J. MOFFAT, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. 52, 1956, p. 623.
[8] G. STEPHENSON et C. W. KILMISTER, *Nuovo Cimento*, t. 10, 1953, p. 230.
[9] J. I. HORVATH, *Nuovo Cimento*, t. 4, 1956, p. 571.
[10] J. I. HORVATH, *Phys. Rev.*, t. 80, 1950, p. 901.
[11] J. I. HORVATH et A. MOOR, *Z. Physik*, t. 131, 1952, p. 544.
[12] E. SCHAFFHAUSER-GRAF, *J. Rat. Mech. Anal.*, t. 2, 1953, p. 743.
[13] A. S. EDDINGTON, *The mathematical theory of Relativity*, Cambridge University Press, 1923.
[14] J. A. WHEELER, *Phys. Rev.*, t. 97, 1954, p. 511.
[15] G. MARX et G. SZAMOSI, *Bull. Acad. Pol. des Sciences*, t. 2, 1954, p. 475.
[16] G. STEPHENSON, *Nuovo Cimento*, t. 5, 1957, p. 1009.
[17] P. G. BERGMANN, *Ann. Math.*, t. 49, 1948, p. 255.