ANNALES DE L'I. H. P.

É. BOREL

Extraits d'un projet d'ouvrage

Annales de l'I. H. P., tome 16, nº 1 (1958), p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1958__16_1_1_0>

Extraits d'un projet d'ouvrage

de

É. BOREL (¹).

---

18. **La répartition de l'énergie et la Théorie des quanta.** — A la suite des résultats que nous venons d'exposer, on s'est beaucoup préoccupé, à la fin du XIXᵉ siècle, du problème de la répartition de l'énergie du rayonnement noir entre les diverses longueurs d'onde.

Il était naturel d'étudier cette question au moyen des résultats obtenus par la théorie cinétique des gaz et dont le plus important est le principe de l'équipartition de l'énergie entre les divers degrés de liberté. Ce principe avait reçu de nombreuses vérifications expérimentales dont la plus importante était la valeur des chaleurs spécifiques des corps solides, dans l'expression de laquelle figurait un facteur égal au nombre de degrés de liberté des molécules; ce nombre était égal, pour une molécule

---

(¹) Le 3 février 1956 la mort d'Émile Borel enlevait à l'Institut Henri Poincaré l'homme qui après avoir été l'un de ses fondateurs avait assuré sa direction pendant près de trente ans. Jusqu'à ses derniers jours son activité scientifique ne s'était pas ralentie. La collection qu'il dirigeait chez Albin Michel avec M. Georges Champetier, Professeur à la Faculté des Sciences contient plusieurs Ouvrages rédigés depuis la fin de la guerre et où la clarté d'exposition qui restera la marque de l'œuvre de Borel s'alliait à la profondeur et à la nouveauté (par exemple la notion de raréfaction des ensembles de mesure nulle dans ses *Éléments de la Théorie des ensembles*).

Au moment où la mort l'a frappé il travaillait à un livre qui devait faire partie de cette collection et dont le titre provisoire était :

De Prométhée aux Curie.

Dans cet Ouvrage malheureusement encore trop incomplet pour que sa publication puisse être envisagée, Émile Borel voulait retracer l'histoire de l'énergie dans laquelle il distinguait quatre époques (l'âge du feu, l'âge de la vapeur, l'âge électrique, l'âge nucléaire). Le manuscrit en sera déposé selon le désir de Mᵐᵉ Émile Borel à la Bibliothèque de l'Institut Henri Poincaré. Nous avons extrait de cette œuvre inachevée le passage suivant où l'auteur rattache les idées de Planck à ses conceptions personnelles sur la notion de probabilité.

D. Dugué.

dissymétrique, à 3 pour la translation et 3 pour la rotation et s'abaissait à 3 pour la molécule sphérique et à 5 pour l'ellipsoïde de révolution, mais ne pouvait pas prendre la valeur 4.

Or, l'application de l'équipartition de l'énergie conduisait à des résultats absurdes et contradictoires, car les radiations de haute fréquence, c'est-à-dire dont les longueurs d'onde étaient les plus courtes, arrivaient à absorber à elles seules toute l'énergie disponible, ne laissant aux radiations visibles qu'une quantité d'énergie presque nulle, contrairement à l'expérience journalière.

L'hypothèse singulière émise par Planck en décembre 1900, c'est-à-dire à l'aube du XX^e^ siècle, consiste à admettre que l'énergie de fréquence ν ne peut se propager que par quanta dont la valeur est $h\nu$, h étant une constante universelle à laquelle on a donné la valeur de la constante de Planck. Cette constante est extrêmement petite, sa valeur en unités C. G. S. étant $6,6.10^{-27}$.

Lorsque la fréquence ν augmente, il arrive un moment où la valeur $h\nu$ dépasse la valeur, elle-même très faible, du rayonnement à l'instant considéré et alors ce rayonnement ne peut être que nul, puisque l'énergie totale disponible dépasse le quantum $h\nu$; le grain d'énergie $h\nu$ étant insécable, il ne peut se former.

Planck fut lui-même étonné de la singularité de son hypothèse et n'osait affirmer sa réalité; il constatait simplement que tout se passait comme si cette hypothèse singulière était vraie; il avait soin de ne l'utiliser que lorsqu'elle apparaissait comme absolument nécessaire pour échapper à des contradictions.

19. L'analogie avec le paradoxe de Saint-Pétersbourg. — Il y a une grande analogie entre l'hypothèse des quanta et la solution que les probabilistes ont donné au problème qui fut étudié au XVIII^e^ siècle sous le nom de paradoxe de Saint-Pétersbourg. On sait en quoi consiste ce paradoxe : Pierre et Paul jouent à pile ou face et conviennent de continuer le jeu jusqu'à ce que Pierre gagne une première partie; si, avant ce gain de Pierre, Paul a gagné n parties, il devra verser à Pierre une somme égale à 2^n; on demande combien, en échange de cette promesse, Pierre doit verser à Paul avant de commencer à jouer. La réponse inattendue est que cette somme doit être infinie. Il y a en effet une probabilité égale à $\frac{1}{2^{n+1}}$ pour que Paul gagne les n premières parties et que Pierre gagne la $(n+1)^{\text{ième}}$ partie. C'est donc la probabilité qu'a Pierre de gagner 2^n ; et l'espérance mathématique est

$$2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

L'espérance mathématique totale de Pierre est donc égale à une infinité de termes égaux à $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire est infinie.

Si l'on observe que 2^{10} est égal à environ 10^3 et par suite 2^{1000} égal à environ 10^{300}, on arrive à la conclusion que la probabilité pour que Paul ne gagne aucune des 1 000 premières parties est inférieure à 10^{-300} ; on doit donc regarder ce phénomène comme rigoureusement *impossible*.

La valeur de 10^{-300} est inférieure à 25^{-200} ; la probabilité considérée est donc inférieure à la probabilité pour que, en tirant au sort 200 fois de suite entre les 25 lettres de l'alphabet, on obtienne un texte français de 200 lettres désigné à l'avance, c'est-à-dire les quatre premiers vers d'un sonnet célèbre. Tout le monde sera d'accord pour penser qu'il est impossible d'obtenir un tel résultat.

Par conséquent Paul ne doit tenir aucun compte de la série dont le rang dépasse 1 000 ou même un rang bien moins élevé, mais qu'on ne peut évidemment préciser rigoureusement. Si donc Pierre verse à Paul 500 F avant de commencer le jeu, celui-ci fera une excellente affaire, à condition toutefois qu'il soit assez riche pour supporter accidentellement une perte un peu forte qui lui sera rapidement remboursée.

On peut présenter le paradoxe de Saint-Pétersbourg sous une autre forme, à laquelle j'ai donné le nom de martingale de Saint-Pétersbourg. Nous admettons ici que Pierre et Paul jouent à pile ou face aux conditions ordinaires, mais que Paul se réserve le « droit » de fixer les enjeux. Il pourra les choisir de manière que son gain soit 2^{n+1} si la première des parties qu'il gagne est la $(n+1)^{\text{ième}}$. L'enjeu de Paul sera 2 F à la première partie, s'il la perd son enjeu à la seconde sera 6 F, de manière que son gain net soit 4 F s'il gagne cette seconde partie ; s'il la perd son enjeu devra être 16 F pour que son gain net soit 8 F ; s'il perd encore il aura perdu en tout 24 F et son enjeu devra être 40 F pour que son gain net soit 16 F. D'une manière générale, son enjeu à la $n^{\text{ième}}$ partie devra être $(n+1).2^{n-1}$; on a, en effet,

$$2+3.2+4.2^2+\ldots+(n+1)2^{n-1}+2^{n+1}=(n+2)2^n.$$

Si Paul joue cette martingale, il est assuré, quoi qu'il arrive, de gagner, car il est impossible qu'il perde *toutes* les parties successives, c'est-à-dire une *infinité* de parties. On peut même assurer que son gain sera d'autant plus élevé qu'il sera plus tardif, car il sera égal à 2^{n+1} s'il se produit seulement à la $(n+1)^{\text{ième}}$ partie.

Cependant, tout homme raisonnable devra hésiter sérieusement avant de jouer cette martingale. Nous devons, en effet, admettre que sa fortune, même si l'on ajoute son crédit, n'est pas infinie. Il ne lui sera donc pas possible de jouer la martingale indéfiniment et il devra s'arrêter lorsqu'il sera définitivement ruiné et n'aura plus de crédit. Si sa fortune est d'un milliard de francs, c'est-à-dire d'environ 2^{30}, cela se produira après en moyenne 25 parties, car 27 ne diffère pas beaucoup de 32 qui est égal à 2^5, de sorte que 27.2^{25} est voisin de 2^{30}. Si donc Paul joue tous les jours, pendant plusieurs heures, la martingale de Saint-Péterbourg, il fera généralement des gains relativement assez faibles, égaux à 2, 4, 8, 16, 32 suivant qu'il aura, avant de gagner, perdu 0, 1, 2, 3, 4 parties. Mais il risque de voir, un jour malheureux, tous ces gains brutalement détruits par la perte de toute sa fortune. Ceci se produira, en moyenne, une fois toutes les 2^{25} parties, c'est-à-dire environ 30 millions de parties. S'il joue ainsi tous les jours pendant 81 ans, c'est-à-dire 30 000 jours, c'est seulement s'il joue en moyenne 1 000 parties par jour, soit 100 à l'heure en une journée de 10 heures, qu'il aura en moyenne la probabilité de perdre une fois. Ceci veut dire, d'après la loi de Poisson, que si 100 personnes procèdent comme Paul, 36 ne perdront pas, 36 perdront une fois, 18 perdront 2 fois, etc.

Le bon sens reprend donc ses droits, et la martingale de Saint-Pétersbourg, séduisante au premier abord, ne vaut pas mieux que les autres martingales. Tout ce qu'elle peut promettre, c'est un gain quotidien médiocre à peu près certain, qui peut être compensé, si l'on n'a pas eu la sagesse de se fixer une limite, par la ruine complète. C'est seulement un milliardaire en dollars, qui limiterait son enjeu initial à 1 F, qui serait à peu près certain de ne pas voir sa ruine; mais il faut encore observer que, dans tous les jeux publics, le tenancier se réserve un bénéfice certain grâce au zéro ou à toute autre combinaison. Même si ce bénéfice est relativement faible, il suffit pour augmenter considérablement la probabilité de la ruine du joueur acharné, quelle que soit la martingale qu'il utilise.

Mais revenons à la forme primitive du paradoxe de Saint-Pétersbourg. L'infini s'y introduit sous la forme d'infinité de termes égaux correspondant à des circonstances de moins en moins probables et la réponse consiste à négliger comme impossible les termes dont la probabilité est extrêmement petite. De même, la théorie de la répartition de l'énergie entre les diverses fréquences possibles dans le rayonnement noir exigerait une énergie infinie pour satisfaire les fréquences les plus élevées, mais la théorie des quanta conduit à ne pas dépasser la valeur ν de la fréquence pour laquelle le produit achevé dépasse l'énergie totale disponible. Cette énergie totale disponible, dont on doit admettre qu'elle est finie, même si elle a une valeur élevée, joue ici le rôle que joue dans le paradoxe de Saint-Pétersbourg, la fortune totale des joueurs, sur laquelle on n'a aucun renseignement précis, mais dont on doit cependant admettre qu'elle a une valeur déterminée, donc finie.