ANNALES DE L'I. H. P.

JACQUES NEVEU

Sur les états d'entrée et les états fictifs d'un processus de Markov

Annales de l'I. H. P., tome 17, nº 4 (1962), p. 323-337
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1962__17_4_323_0>

Sur les états d'entrée et les états fictifs d'un processus de Markov

par

M. Jacques NEVEU,
Université de Paris.

Sommaire. — On rappelle la définition des lois d'entrée et de sortie d'un processus sous-markovien sur un espace dénombrable d'états et on étudie la structure de l'ensemble de ces lois à l'aide du théorème de représentation intégrale de G. Choquet. On définit ensuite des états fictifs pour ces processus de telle manière que ces états jouissent de propriétés analogues à celles des états donnés initialement.

1. **Lois d'entrée.** — Soit $P = \{P_t,\ t > 0\}$ un processus sous-markovien défini sur un espace d'états dénombrable A. Nous entendons par là un semi-groupe (déf. : $P_{s+t} = P_s P_t$ si s, $t > 0$) de matrices sous-markoviennes (déf. : $P_t \geqq 0$, $P_t e \leqq e$; e, fonction unité) définies sur A, tel que les fonctions de t : $P_{\cdot}(i, j)$ soient continues sur $(0, \infty)$ et convergent vers $I(i, j)$ lorsque $t \downarrow 0$ (I, matrice identique). Nous noterons

$$\hat{P}_x = \int_0^\infty dt\, e^{-xt} P_t \qquad (x > 0)$$

les matrices résolvantes du processus. Introduisons ensuite la fonction $r = \hat{P}_1 e$ qui est strictement positive et majorée par e sur A; le processus P sera markovien [déf. : $P_t e = e$ $(t > 0)$] si et seulement si $r = e$. Nous désignerons par L l'espace de Banach des mesures u sur A telles que

$$\| u \| \doteq \sum_A | u(i) | \, r(i) < \infty .$$

Il est facile de déduire des propriétés de continuité de P et de l'inégalité $e^{-t} P_t r \leqq r$ $(t > 0)$ que pour tout $u \in L$, l'application $t \to u P_t$ applique continûment $(0, \infty)$ dans L et que $\lim_{t \to 0} u P_t = u$ dans L.

Nous appellerons *loi d'entrée* une famille $f = \{ f_t,\ t > 0 \}$ de mesures positives sur A telle que : 1° $f_{s+t} = f_s P_t$ si $s, t > 0$; 2° $\sup_t \| f_t \| < \infty$. Manifestement $\{ u P_t,\ t > 0 \}$ est une loi d'entrée, pour tout $u \in L$. L'objet du présent paragraphe est de montrer que inversement toute loi d'entrée est de la forme $\{ u P_t \}$ pourvu qu'on ait au préalable convenablement agrandi l'espace des états. Plus précisément nous déduisons d'un théorème de Choquet (améliorant le théorème de Krein-Milman) que l'ensemble des lois d'entrée est isomorphe au cône des mesures positives bornées sur un espace polonais contenant A.

Un argument classique (*cf.* [5], théorème 1.1.1) permet de montrer que les fonctions de $t : f_{.}(i)$ sont continues sur $(0, \infty)$ et possèdent des limites $f_0(i) = \lim_{t \to 0} f_t(i)$ telles que $f_0 P_t \leqq f_t$ pour tout $t > 0$. La première partie de la proposition suivante a été démontrée dans [5] :

PROPOSITION 1. — *La transformée de Laplace :* $\hat{f}_x = \int_0^\infty dt\, e^{-xt} f_t$ *d'une loi d'entrée définit une famille* $\{ \hat{f}_x,\ x > 0 \}$ *de mesures positives bornées sur* A *jouissant des propriétés suivantes :*

$$(a) \qquad \hat{f}_y = \hat{f}_x [\mathrm{I} + (x - y) \hat{\mathrm{P}}_y] \qquad si \quad x, y > 0;$$

$$(b) \qquad \hat{f}_x (e^{-xs} P_s) \leqq \hat{f}_x \qquad si \quad x > 0,\ s > 0.$$

Réciproquement : 1° *toute famille* $\{ \hat{f}_x,\ x > 0 \}$ *de mesures positives bornées sur* A *vérifiant* (*a*) *est la transformée de Laplace d'une loi d'entrée unique;* 2° *à toute mesure positive bornée u sur* A *qui vérifie* $u(e^{-xs} P_s) \leqq u$ *pour un* $x > 0$ *fixé et tout* $s > 0$, *correspond une loi d'entrée unique* $\{ f_t,\ t > 0 \}$ *telle que* $u = \int_0^\infty dt\, e^{-xt} f_t$.

Démonstration. — La propriété (*a*) résulte de

$$e^{-yt} = e^{-xt} + (x - y)\, e^{-xt} \bigstar e^{-yt} \qquad (\bigstar, \text{ produit de convolution})$$

ainsi qu'il est démontré dans [5], théorème 1.1.4. Les inégalités (*b*) découlent de $\hat{f}_x (e^{-xs} P_s) = \int_s^\infty dt\, e^{-xt} f_t \leqq \hat{f}_x$. Le théorème de Bernstein relatif aux fonctions complètement monotones permet de démontrer aisément la réciproque (1°) (*cf.* [5]). La réciproque (2°) s'en déduit en posant $\hat{f}_y = u[\mathrm{I} + (x-y)\hat{\mathrm{P}}_y]$ si $y > 0$ et en montrant que la famille $\{\hat{f}_y, y > 0\}$ satisfait aux hypothèses de la réciproque (1°). Or, l'hypothèse sur u implique que

$$(y-x)\, u\, \hat{\mathrm{P}}_y = (y-x)\int_0^\infty ds\, e^{-(y-x)s}\, u(e^{-xs}\mathrm{P}_s) \leqq u \qquad \text{si} \quad y \geqq x$$

et par suite que $\hat{f}_y$ est pour tout $y > 0$ une mesure positive. D'autre part $\hat{f}_y$ est bornée puisque u l'est par hypothèse et puisque $y\hat{\mathrm{P}}_y$ est sous-markovienne. Enfin les égalités (a) résultent de la définition de $\{\hat{f}_y\}$ et de l'équation résolvante :

$$[\mathrm{I} + (x-y)\hat{\mathrm{P}}_y][\mathrm{I} + (y-z)\hat{\mathrm{P}}_z] = \mathrm{I} + (x-z)\hat{\mathrm{P}}_z$$

valable pour tout y, $z > 0$.

La proposition précédente montre en particulier que la formule $u = \int_0^\infty ds\, e^{-s} f_s$ définit une bijection (linéaire) du cône convexe des lois d'entrée $\{f_s, s > 0\}$, soit F, sur le cône convexe des mesures positives bornées u telles que $u(e^{-s}\mathrm{P}_s) \leqq u$ pour tout $s > 0$. Comme $\|f_s\| = \sum_{\mathrm{A}} f_s(i)\, \hat{\mathrm{P}}_1 e(i) = \sum_{\mathrm{A}} u(i)\, \mathrm{P}_s e(i) \uparrow \sum_{\mathrm{A}} u(i)$ lorsque $s \downarrow 0$, la bijection précédente applique le sous-ensemble convexe F_1 de F des lois d'entrée telles que $\|f_s\| \leqq 1$ $(s > 0)$ sur le sous-ensemble convexe $\mathcal{F}_1$ de $\mathcal{F}$ des mesures de masse totale $\leqq 1$. Pour la topologie de la convergence simple [$u^{(n)} \to u$ si par déf. $u^{(n)}(i) \to u(i)$ pour tout $i \in \mathrm{A}$], $\mathcal{F}_1$ est un ensemble compact et métrisable; il suffira pour le voir de remarquer que toute limite simple d'éléments de $\mathcal{F}_1$ appartient encore à $\mathcal{F}_1$.

En ce qui concerne les points extrémaux du convexe $\mathcal{F}_1$, remarquons d'abord que 0 est extrémal et que tout autre élement extrémal u de $\mathcal{F}_1$ est de masse totale 1 [sinon $cu \in \mathcal{F}_1$ pour une constante $c > 1$ et u appartiendrait au segment ouvert $(0, cu)$ contenu dans $\mathcal{F}_1$]. Comme les éléments extrémaux de $\mathcal{F}_1$ distincts de 0 correspondent biunivoquement aux génératrices extrémales du cône convexe $\mathcal{F}$, on déduit du théorème 1.1.1 de [5] et de ce qui précède, que pour tout $i \in \mathrm{A}$, la mesure $\mathrm{R}(i, .) \doteq \frac{1}{r(i)}\hat{\mathrm{P}}_1(i, .)$ est extrémale dans $\mathcal{F}_1$. Désignons ensuite par $R(\alpha, .)$ $(\alpha \in A_e)$ les points extrémaux de $\mathcal{F}_1$ distincts de o et de $R(i, .)$ $(i \in A)$; soient $\{P_t(\alpha, .), t > 0\}$ $(\alpha \in A_e)$ les lois d'entrée correspondantes, de telle sorte que

$$R(i, .) = \frac{1}{r(i)} \int_0^\infty dt\, e^{-t} P_t(i, .) \qquad (i \in A),$$

$$R(\alpha, .) = \int_0^\infty dt\, e^{-t} P_t(\alpha, .) \qquad (\alpha \in A_e).$$

Nous conviendrons d'appeler *états d'entrée* les points α de A_e.

L'ensemble $A + A_e$ est isomorphe à un sous-ensemble de $\mathcal{F}_1$ par l'application $\alpha \to R(\alpha, .)$; nous le munissons de la topologie induite, c'est-à-dire de la moins fine des topologies rendant continue chacune des fonctions $R(., i)$ où $i \in A$. Comme la masse totale des mesures positives $R(\alpha, .)$ vaut l'unité $(\alpha \in A + A_e)$, l'application $\alpha \to R(\alpha, .)$ de $A + A_e$ dans l'espace de Banach $l^{(1)}(A)$ des mesures bornées sur A est même continue. De la proposition suivante, il résulte alors que *l'application de* $(0, \infty) \times (A + A_e)$ *dans* L *qui à* $t > 0$ *et à* $i \in A$ (resp. $\alpha \in A_e$) *fait correspondre* $\frac{1}{r(i)} P_t(i, .)$ [resp. $P_t(\alpha, .)$], *est continue. En particulier si* P *est markovien, l'application* $(t, \alpha) \to P_t(\alpha, .)$ *de* $(0, \infty) \times (A + A_e)$ *dans* $l^{(1)}(A)$ *est continue.*

Proposition 2. — *Soit* $\{f^n\}$ *un filtre de lois d'entrée et soit* f^∞ *une loi d'entrée. Pour que* $f_t^n \to f_t^\infty$ *au sens de la norme dans* L, *pour tout* $t > 0$, *il suffit que* $\hat{f}_1^n \to \hat{f}_1^\infty$ *au sens de la norme dans* $l^{(1)}$. *La convergence* $f_t^n \to f_t^\infty$ *est alors uniforme en t sur tout intervalle compact de* $(0, \infty)$.

Démonstration. — De l'identité suivante, valable pour toute loi d'entrée :

$$\int_u^v dt\, e^{-t} f_t = \hat{f}_1 (e^{-u} P_u - e^{-v} P_v) \qquad (0 \leq u < v < \infty)$$

et de l'hypothèse $\sum_A |\hat{f}_1^n(i) - \hat{f}_1^\infty(i)| \to 0$, résulte qu'on a

$$\int_u^v dt\, e^{-t} f_t^{(n)}(i) \to \int_u^v dt\, e^{-t} f_t^\infty(i) \qquad (0 \leq u < v < \infty;\ i \in A).$$

Il résulte facilement de la définition d'une loi d'entrée que

$$f_u(i)\, P_{t-u}(i, i) \leq f_t(i) \leq f_v(i)\, [P_{v-t}(i, i)]^{-1} \qquad (0 < u < t < v;\ i \in A)$$

et par suite que, si $0 < u < v$, $i \in A$:

$$e^{-u} f_u(i) \int_0^{v-u} ds\, e^{-s} P_s(i, i) \leq \int_u^v dt\, e^{-t} f_t(i)$$
$$\leq e^{-v} f_v(i)(v-u) \Big[\inf_{s<v-u} [e^{-s} P_s(i, i)] \Big]^{-1}.$$

Il s'ensuit que, dans les mêmes conditions :

$$e^{-u} \overline{\lim_n} f_u^n(i) \frac{1}{v-u} \int_0^{v-u} ds\, e^{-s} P_s(i, i)$$
$$\leq \frac{1}{v-u} \int_u^v dt\, e^{-t} f_t(i) \leq e^{-v} \underline{\lim_n} f_v^n(i) \Big[\inf_{s<v-u} e^{-s} P_s(i, i) \Big]^{-1}.$$

Il reste à faire tendre $v \downarrow u$ dans la première inégalité et $u \uparrow v$ dans la seconde pour obtenir $\overline{\lim} f_u^n \leq f_u$ et $f_v \leq \underline{\lim_n} f_v^n$, c'est-à-dire

$$\lim_n f_u^n = f_u \qquad (u > 0).$$

Enfin l'identité

$$\sum_A f_u(i)\, r(i) = \langle \hat{f}_1, P_u e \rangle$$

et l'hypothèse $\sum_i |\hat{f}_1^n(i) - \hat{f}_1^\infty(i)| \to 0$ implique, en vertu de ce qui précède, que $f_u^n \to f_u$ dans L pour tout $u > 0$. L'uniformité de la convergence résulte alors de

$$\| f_{u+t}^n - f_{u+t}^\infty \| = \| (f_u^n - f_u^\infty) P_t \| \leq e^t \| f_u^n - f_u^\infty \| \qquad (u, t > 0).$$

PROPOSITION 3. — *L'espace* $A + A_e$ *est un espace polonais. A toute loi d'entrée* f *correspond une mesure positive et bornée* μ_f *sur* A_e *telle que*

$$f_t = f_0 P_t + \int_{A_e} \mu_f(d\alpha)\, P_t(\alpha, .) \qquad (t > 0).$$

Pour toute fonction continue et bornée ξ *sur* $A + A_e$, *soit* ξ, *on a lorsque* $t \downarrow 0$:

$$\sum_A f_t(i)\, r(i)\, \xi(i) \to \sum_A f_0(i)\, r(i)\, \xi(i) + \int_{A_e} \mu_f(d\alpha)\, \xi(\alpha);$$

par suite la mesure μ_f *est univoquement déterminée par* f.

Démonstration. — Nous allons déduire ce résultat du théorème suivant, dû à Choquet [2] : *Étant donné un espace vectoriel localement convexe* E, *soit* X *un sous-ensemble convexe de* E *qui soit compact et métrisable. L'ensemble des points extrémaux de* X, *soit* X_e, *est alors un* G_δ *de* X *et tout point de* X *est le barycentre d'au moins une mesure de probabilité sur* X, *entièrement portée par* X_e.

En prenant $X = \mathcal{F}_1$, on voit d'abord que $\{o\} + A + A_e$ est un G_δ de $\mathcal{F}_1$; il s'ensuit que $A + A_e$ est un sous-espace polonais de $\mathcal{F}_1$ ([1], § 6, n° 1, théorème 1). A tout élément $\hat{f}_1$ de $\mathcal{F}_1$, correspond au moins une mesure de probabilité λ sur $\mathcal{F}_1$, entièrement portée par $\{o\} + A + A_e$ telle que

$$\hat{f}_1 = \int_{A+A_e} \lambda(d\alpha)\, R(\alpha, .).$$

On en déduit, à l'aide de la proposition 1, que

$$f_t = \sum_A \lambda(i) \frac{1}{r(i)} P_t(i, .) + \int_{A_e} \lambda(d\alpha)\, P_t(\alpha, .) \qquad (t > o).$$

Le théorème 1.1.2 de [5] montre alors que $f_0(i) = \lambda(i)\frac{1}{r(i)}$ pour tout $i \in A$. En désignant par μ_f la restriction de λ à A_e, on obtient la première partie de la proposition.

Soit $\lambda_t (t > o)$ la mesure positive sur $\mathcal{F}_1$, entièrement portée par A et définie par $\lambda_t(\{i\}) = f_t(i)\, r(i)$. Montrons alors que pour toute mesure λ jouissant des propriétés ci-dessus, on a

$$\sum_i \lambda_t(i)\, \xi(i) \to \int_{A+A_e} \lambda(d\alpha)\, \xi(\alpha) \qquad \text{lorsque} \quad t \wedge o,$$

quelle que soit la fonction continue et bornée ξ définie sur $A + A_e$. On sait (*cf.* [7]) que pour démontrer cette convergence faible de λ_t vers λ, il suffit déjà de démontrer que $\sum_A \lambda_t(i)\, \xi(i) \to \int_{A+A_e} \lambda(d\alpha)\, \xi(\alpha)$ lorsque $t \downarrow o$, pour toute fonction ξ définie et continue sur $\mathcal{F}_1$. D'autre part, comme on a

$$\sum_A \lambda_t(i)\, \xi(i) = \sum_A \lambda(i) \frac{1}{r(i)} \left[\sum_A P_t(i, j)\, r(j)\, \xi(j) \right] + \int_{A_e} \lambda(d\alpha) \left[\sum_A P_t(\alpha, j)\, r(j)\, \xi(j) \right]$$

il suffit, en vertu du théorème de Lebesgue sur la convergence bornée, de montrer que $\sum_{A} P_t(\alpha, j)\, r(j)\, \xi(j) \to \xi(\alpha)$ lorsque $t \downarrow o$, pour tout $\alpha \in A + A_e$.

Or, si α est fixé dans $A + A_e$, si ν_t est la mesure sur $\mathcal{F}_1$ portée par A et définie par $P_t(\alpha, .).r$ et si ν est une limite faible sur $\mathcal{F}_1$ de ν_t $(t \downarrow o)$, il résulte de

$$\sum_{i \in A} \nu_t(i)\, R(i, k) = \sum_{i \in A} P_t(\alpha, i)\, \hat{P}_1(i, k)$$
$$= \sum_{i \in A} \hat{P}_1(\alpha, i)\, P_t(i, k) \to \hat{P}_1(\alpha, k)$$

lorsque $t \downarrow o$ et $k \in A$, que le barycentre de ν dans $\mathcal{F}_1$ vaut ε_α, la masse unité au point α. Comme $\alpha \in A + A_e$, cela n'est possible que si $\nu = \varepsilon_\alpha$ et par suite $\nu_t \to \varepsilon_\alpha$ au sens faible, lorsque $t \downarrow o$.

Remarques. — 1° Le fait que la mesure μ_f soit univoquement déterminée par f tient essentiellement à la structure réticulée (théorème 1.1.2 de [5]) du cône des lois d'entrée et peut être déduit d'un théorème général dû également à Choquet [2].

2° Dans l'étude de la représentation des lois d'entrée, la seconde hypothèse de définition de ces lois d'entrée, soit $\sup_t \|f_t\| < \infty$ [ou, ce qui est équivalent en vertu de la proposition 1 : $\hat{f}_1 \in l^{(1)}(A)$] n'est pas essentielle. On peut la remplacer par l'hypothèse plus large : $\hat{f}_1 < \infty$ sur A.

Pour le voir, supposons d'abord qu'il existe un état i_0 tel que pour tout $j \in A$ on ait $P_t(j, i) > o$ pour un $t > o$ ($=$ pour tout $t > o$). Il suffira daus ce cas de définir $\mathcal{F}_1$ comme le cône convexe des mesures positives u sur A telles que $u(e^{-s}P_s) \leq u$ pour tout $s > o$ et que $u(i_0) \leq 1$. La compacité de $\mathcal{F}_1$ pour la topologie de la convergence simple résultera alors de ce que $o \leq u(j) \leq [e^{-s}P_s(j, i_0)]^{-1}$ pour tout $j \in A$, $u \in \mathcal{F}_1$, et le théorème de Choquet pourra s'appliquer. Dans le cas général ce qui vient d'être dit donnera la représentation désirée sur n'importe lequel des ensembles $A_i = \{j : P.(j, i) > o\} \ni i$ où $i \in A$; il est ensuite facile de « recoller les morceaux » et d'obtenir la représentation sur A.

Enfin on pourra remarquer que la représentation obtenue ainsi ne fait plus intervenir l'hypothèse $P_t e \leq e$ $(t > o)$ et est donc valable pour tout « processus positif ».

États fictifs. — Nous appellerons *loi de sortie* une famille $g = \{g_t, t > 0\}$ de fonctions positives sur A telle que : 1° $P_t g_s = g_{s+t}$ si $s, t > 0$; 2° $\int_0^T dt g_t \in l^{(\infty)}(A)$ pour une constante $T > 0$ (pour toute constante $T > 0$). Nous avons démontré dans [5] relativement aux lois de sortie un résultat analogue à la proposition 1 pour les lois d'entrée et il n'est pas difficile d'obtenir (*cf.* remarque 2 du paragraphe précédent) un théorème de représentation des lois de sortie à partir des états de sortie, c'est-à-dire à partir des éléments extrémaux du cône convexe des lois de sortie.

Tout état $i \in A$ joue un double rôle en ce qu'il lui est associé à la fois une loi d'entrée extrémale, soit $\{P_s(i, .), s > 0\}$, et une loi de sortie extrémale, soit $\{P_s(., i), s > 0\}$. Dans ce paragraphe, nous nous proposons de montrer que certains états d'entrée sont naturellement accouplés avec un état de sortie; nous appellerons *état fictif* le couple formé par un tel état d'entrée et un tel état de sortie et nous montrerons que les états fictifs partagent avec les états de A des propriétés importantes.

Définition. — *Une loi d'entrée* $f = \{f_t, t > 0\} \neq 0$ *et une loi de sortie* $g = \{g_t, t > 0\} \neq 0$ *seront dites accouplées si elles vérifient pour tout* $x > 0$ *l'inégalité suivante* :

$$\frac{\hat{g}_x \otimes \hat{f}_x}{\hat{\eta}_x} \leq \hat{P}_x \quad \text{sur } A \times A$$

où le dénominateur $\hat{\eta}_x$ *est supposé fini.*

Dans cette définition, le produit tensoriel $\hat{g}_x \otimes \hat{f}_x$ des transformées de Laplace des deux lois désigne évidemment la matrice $\{\hat{g}_x(i)\hat{f}_x(j); i, j \in A\}$. Nous avons en outre posé

$$\eta(s+t) = \sum_A f_s(i) g_t(i); \qquad \hat{\eta}_x = \int_0^\infty dt e^{-xt} \eta(t) \qquad (s, t, x > 0).$$

On vérifie facilement que l'expression $\sum_A f_s(i) g_t(i)$ ne dépend que de $(s+t)$, justifiant ainsi la définition de la fonction η, et l'on en déduit par transformation de Laplace, l'identité

$$\hat{\eta}_x - \hat{\eta}_y + (x-y) \sum_A \hat{f}_x(i) \hat{g}_y(i) = 0 \qquad (x, y > 0).$$

On remarquera aussi que si f et g sont accouplées, il en est encore de même de cf et de dg, quelles que soient les constantes positives c, d.

Si f et g sont accouplées, nous introduirons, pour tout $x > 0$, les matrice, mesure et fonction positives

$$\hat{P}'_x = \hat{P}_x - (\hat{\eta}_{1,x})^{-1} \hat{g}_x \otimes \hat{f}_x, \qquad \hat{f}'_x = (\hat{\eta}_{1,x})^{-1} \hat{f}_x, \qquad \hat{g}'_x = (\hat{\eta}_{1,x})^{-1} \hat{g}_x.$$

Un calcul élémentaire, utilisant l'identité ci-dessus satisfaite par la fonction $\hat{\eta}$, montre que ces éléments satisfont aux équations résolvantes

$$\hat{P}'_x - \hat{P}'_y + (x - y)\, \hat{P}'_x \hat{P}'_y = 0,$$
$$\hat{f}'_y = \hat{f}'_x [1 + (x - y)\, \hat{P}'_y], \qquad \hat{g}'_y = [1 + (x - y)\, \hat{P}'_y] \hat{g}'_x$$

pour tout $x, y > 0$. Il résulte alors de : $0 \leq \hat{P}'_x \leq \hat{P}_x$ pour tout $x > 0$, qu'il existe un sous-ensemble A' de A tel que : 1° $\hat{P}'_x \doteq 0$ en dehors de $A' \times A'$; 2° Les restrictions des $\hat{P}'_x$ à $A' \times A'$ sont les résolvantes d'un processus sous-markovien sur A', qu'on désignera par $P' = \{ P'_t,\ t > 0 \}$. (La démonstration de ce résultat est entièrement analogue à la démonstration du théorème 2.3.1 de [5].) De plus la proposition 1 et les équations résolvantes ci-dessus montrent que les restrictions à A' de $\{ \hat{f}'_x,\ x > 0 \}$ et de $\{ \hat{g}'_x,\ x > 0 \}$ sont les transformées de Laplace d'une loi d'entrée $f' = \{ f'_t,\ t > 0 \}$ et d'une loi de sortie $g' = \{ g'_t,\ t > 0 \}$ définies sur A' relativement au processus P'.

Considérons d'abord le cas où $A' \neq A$. Des définitions il découle que pour tout $x > 0$ et tout $i' \notin A$, $\hat{P}_x(i, \,.\,)$ [resp. $\hat{P}_x(\,.\,, i)$] est proportionnel à $\hat{f}_x$ [resp. $\hat{g}_x$]. Cela n'est possible que si $A - A'$ ne contient qu'un seul état, soit $A' = A - \{ i' \}$, et si $\hat{f}_x = \hat{P}_x(i', \,.\,)$ $\hat{g}_x = \hat{P}_x(\,.\,, i')$ (en choisissant les constantes de proportionnalité égales à 1) ou, ce qui est équivalent, si $f_t = P_t(i', \,.\,)$, $g_t = P_t(\,.\,, i')$. Réciproquement quel que soit l'état i' de A, les lois $\{ f_t = P_t(i', \,.\,),\ t > 0 \}$ et $\{ g_t = P_t(\,.\,, i'),\ t > 0 \}$ sont accouplées. On sait en effet ([5], § 2.4) que les matrices $\hat{P}'_x$ qui valent dans le cas considéré :

$$\hat{P}'_x = \hat{P}_x - \frac{\hat{P}_x(\,.\,, i') \otimes \hat{P}_x(i', \,.\,)}{\hat{P}_x(i', i')} \qquad (x > 0)$$

ne sont autres que les matrices résolvantes du processus sous-markovien P' sur $A - \{ i' \}$ obtenu en arrêtant le processus P à l'état i'.

Considérons ensuite le cas où $A' = A$ et montrons que f (resp. g) est, à une constante multiplicative près, la seule loi d'entrée (resp. de sortie) telle que $\lim\limits_{y \uparrow \infty} \downarrow \hat{f}_y [I + (y - x) \hat{P}'_x] = 0$ (resp. $\lim\limits_{y \uparrow \infty} \downarrow [I + (y - x) \hat{P}'_x] \hat{g}_y = 0$) pour tout $x > 0$ (de telles limites et celles du type $\lim\limits_{u \downarrow 0} \downarrow f_u P'_{t-u}$, qui leur sont équivalentes à une transformation de Laplace près, ont été considérées dans [5]). Il suffira de le montrer dans le cas des lois d'entrées. Or, d'une part

$$\begin{aligned}\hat{f}_x = \hat{f}_y [I + (y - x) \hat{P}_x] &= \hat{f}_y [I + (y - x) \hat{P}'_x] \\ &+ \left[(y - x) \sum_A \hat{f}_y(i) \hat{g}_x(i) \right] (\hat{\eta}_x)^{-1} \hat{f}_x\end{aligned}$$

donne, en faisant tendre $y \to \infty$ et en tenant compte de $\lim\limits_{y \to \infty} \hat{\eta}_y = 0$:

$$\hat{f}_x = \lim_{y \uparrow \infty} \downarrow \hat{f}_y [I + (y - x) \hat{P}'_x] + \hat{f}_x.$$

Inversement si h est une loi d'entrée telle que

$$\lim_{y \uparrow \infty} \downarrow \hat{h}_y [I + (y - x) \hat{P}'_x] = 0,$$

les mêmes formules montrent que

$$\begin{aligned}\hat{h}_x &= \hat{h}_y [I + (y + x) \hat{P}'_x] + \left[y - x) \sum_A \hat{h}_y(i) \hat{g}_x(i) \right] (\hat{\eta}_x)^{-1} \hat{f}_x \\ &= \lim_{y \uparrow \infty} \left[(y - x) \left(\sum_A \hat{h}_y(i) \hat{g}_x(i) \right) (\hat{\eta}_x)^{-1} \right] \hat{f}_x\end{aligned}$$

c'est-à-dire (*cf.* proposition 1) que h est proportionnel à f.

Proposition 4. — *Les lois* $\{ P_t(i', .), t > 0 \}$ *et* $\{ P_t(., i'), t > 0 \}$ *sont accouplées, pour tout* $i' \in A$,

Si f et g sont des lois accouplées distinctes des précédentes, elles sont nécessairement de la forme (à une constante multiplicative près) :

$$f_t = P_t(\alpha, .), \qquad g_t = P_t(., \beta) \qquad (t > 0)$$

où α et β sont respectivement un état d'entrée et un état de sortie. De plus un état d'entrée (resp. de sortie) est accouplé au plus avec un état de sortie (resp. d'entrée). De tels couples (α, β) seront appelés : états fictifs.

Démonstration. — La première partie de la proposition a été démontrée ci-dessus; de plus si les lois, f et g sont accouplées, mais ne correspondent pas à un état $i \in \mathrm{A}$, on a nécessairement $\mathrm{A}' = \mathrm{A}$ en vertu de ce qui précède. Il résulte ensuite de

$$\mathrm{o} = \lim_{y \uparrow \infty} \downarrow \hat{f}_y [\mathrm{I} + (y - x)\, \hat{\mathrm{P}}'_x](i) \geqq \lim_{y \uparrow \infty} \hat{f}_y(i) [\mathrm{I} + (y - x)\, \hat{\mathrm{P}}'_x(i, i)] \hat{f}_0(i)\, \hat{\mathrm{P}}'_x(i, i)$$

que $f_0 = \mathrm{o}$ sur A; de même $g_0 = \mathrm{o}$ sur A. Les propriétés de f et g démontrées ci-dessus montrent que f et g sont extrémales, et par suite, en vertu de ce qui précède de la forme $f_t = \mathrm{P}_t(\alpha, .)$, $g_t = \mathrm{P}_t(., \beta)$ à une constante multiplicative près, pour un $\alpha \in \mathrm{A}_e$ et un $\beta \in \mathrm{A}_s$. En effet, si $\mathrm{o} \leqq h \leqq f$, on a

$$\lim_y \downarrow \hat{h}_y [\mathrm{I} + (y - x)\, \hat{\mathrm{P}}'_x] \leqq \lim_y \downarrow \hat{f}_y [\mathrm{I} + (y - x)\, \hat{\mathrm{P}}'_x] = \mathrm{o},$$

ce qui implique que h est proportionnelle à f.

Si f est accouplée à g_1 et à g_2, elle est encore accouplée à $g_1 + g_2$, ainsi qu'on le vérifie immédiatement sur la définition. Mais $g_1 + g_2$ étant extrémale en vertu de ce nous venons de démontrer, g_1 et g_2 sont proportionnelles. Cela prouve qu'un état d'entrée ne peut être accouplé à plus d'un état de sortie. De même un état de sortie ne peut être accouplé à plus d'un état d'entrée. Ceci justifie la définition d'un état fictif comme un état qui est à la fois d'entrée et de sortie.

Proposition 5. — *A tout état $i' \in \mathrm{A}$ comme à tout état fictif (α, β) correspondent un processus sous-markovien P' défini sur $\mathrm{A}' = \mathrm{A} - \{i'\}$ resp. $\mathrm{A}' = \mathrm{A}$ et des lois d'entrée f' et g' de ce processus, de telle sorte qu'on ait pour tout s, $t > \mathrm{o}$:*

$$\mathrm{P}_t = \mathrm{P}'_t + \iint_{\substack{u, v > 0 \\ u + v < t}} du\, dv\, \eta(t - u - v)\, g'_u \otimes f'_v \quad \textit{sur } \mathrm{A}' \times \mathrm{A}'.$$

$$\mathrm{P}_t\left(\frac{i'}{\alpha}, .\right) = \int_0^t dv\, \eta(t - v)\, f'_v, \qquad \mathrm{P}_t\left(., \frac{i'}{\beta}\right) = \int_0^t du\, \eta(t - u)\, g'_u \quad \textit{sur } \mathrm{A}',$$

avec

$$\eta(s) = \mathrm{P}_s(i', i')$$

ou, resp.

$$\eta(s + t) = \sum_{\mathrm{A}} \mathrm{P}_s(\alpha, k)\, \mathrm{P}_t(k, \beta).$$

De plus si l'on pose

$$\eta'(s + t) = \sum_{\mathrm{A}'} f'_s(k)\, g'_t(k),$$

on a la formule suivante, où $\varepsilon = 1$ *dans le cas d'un état* $i' \in A' = 0$, *dans le cas d'un état fictif :*

$$\int_0^\infty (1 - e^{-xt})\eta'(t)\,dt + x\varepsilon = \left(\int_0^\infty e^{-xt}\eta(t)\,dt\right)^{-1} - \left(\int_0^\infty \eta(t)\,dt\right)^{-1}.$$

L'état considéré est récurrent si et seulement si $\int_0^\infty \eta(t)\,dt < \infty$. *L'état considéré appartient à* A' *et est stable si et seulement si* $\int_0^\infty \eta'(t)\,dt < \infty$.

Démonstration. — Les premières formules de cette proposition, jusque et y compris celle concernant η, se déduisent de formules précédemment introduites par une transformation inverse de Laplace. Comme f' et g' sont des lois d'entrée et de sortie resp. pour P', l'expression $\sum_{A'} f'_s(k) g'_t(k)$ ne dépend que de $s + t$; cela justifie l'introduction de la fonction η'. On déduit ensuite de formules précédentes que

$$\sum_A \hat{f}_x(i)\hat{g}_y(i) = \hat{\eta}(x)\hat{\eta}(y)\left[\sum_{A'} \hat{f}'_x(i)\hat{g}'_y(i) + \varepsilon\right]$$

et que

$$\begin{aligned}[\hat{\eta}(x)]^{-1} - [\hat{\eta}(y)]^{-1} &= (x - y)\left[\sum_{A'} \hat{f}'_x(i)\hat{g}'_y(i) + \varepsilon\right] \\ &= \int_0^\infty (e^{-yt} - e^{-xt})\eta'(t)\,dt + \varepsilon(x - y).\end{aligned}$$

En faisant tendre $y \uparrow 0$, on obtient la formule de la proposition.

Le critère de récurrence est classique; sa signification dans le cas d'un état fictif apparaîtra mieux dans la proposition suivante. Il résulte ensuite de ce que $\lim_{x \to \infty} \hat{\eta}(x) = 0$ qu'on a dans le cas d'un état fictif :

$$\int_0^\infty dt\,\eta'(t) = \lim_{x \to \infty} \int_0^\infty dt\,(1 - e^{-xt})\eta'(t) = \infty.$$

Dans le cas d'un état $i' \in A$, on voit même que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dt\,\eta'(t) &= \lim_{x \to \infty} [\hat{\eta}(x)]^1 - x] - \left[\int_0^\infty dt\,\eta(t)\right]^{-1} \\ &= \left(\frac{-d}{dt}\right)_{t=0} P_t(i', i') - \left[\int_0^\infty dt\,P_t(i', i')\right]^{-1};\end{aligned}$$

ce qui montre que $\int_0^\infty dt\,\eta'(t) < \infty$, si et seulement si i' est stable.

Donnons en terminant l'interprétation en termes de fonctions aléatoires des résultats analytiques précédents. [Nous excluons le cas trivial d'un état $i' \in A$ tel que $P_t(i', i') \equiv 1$.]

Soit $\{T(u), 0 \leqq u < \infty\}$ la fonction aléatoire à valeurs dans $[0, \infty]$, à accroissements indépendants, positifs et stationnaires, telle que $T(0) = 0$ et que

$$\log E(\exp[-xT(u)]) = -u\left\{\int_0^\infty dt(1-e^{-xt})\eta'(t) + \varepsilon x + \left[\int_0^\infty dt\eta(t)\right]^{-1}\right\}$$
$$= -u\left[\int_0^\infty dt\, e^{-xt}\eta(t)\right]^{-1}.$$

Décomposons l'ouvert aléatoire de $[0, \infty]$, complémentaire de la fermeture de l'ensemble des valeurs $\{T(u), 0 \leqq u < \infty\}$ prises par la fonction aléatoire T, en les intervalles ouverts disjoints qui le composent. Dans le cas récurrent $\left[\int_0^\infty dt\eta(t) = \infty\right]$, nous obtenons ainsi presque sûrement une décomposition de $G = \sum_n I_n$ en une somme infinie dénombrable d'intervalles ouverts disjoints de longueur finie. Dans le cas non récurrent $\left[\int_0^\infty dt\eta(t) < \infty\right]$, nous obtenons presque sûrement une décomposition de G : $G = \sum_n I_n + I_\infty$ en une somme dénombrable d'intervalles I_n de longueur finie et d'un intervalle $I_\infty = (t_\infty, +\infty)$.

Associons à chacun des intervalles $I_n = (t_1^n, t_2^n)$ une fonction aléatoire $X^n = \{X_s^n, s \in I_n\}$ à valeurs dans A' dont la loi de probabilité soit

$$\Pr(X_{s_1}^n = i_1, \ldots, X_{s_p}^n = i_p)$$
$$= \frac{1}{\eta'(t_2^n - t_1^n)} f'_{s_1 - t_1^n}(i_1) P_{s_2 - s_1}(i_1, i_2) \ldots P_{s_p - s_{p-1}}(i_{p-1}, i_p) g'_{t_2^n - s_p}(i_p),$$

où $t_1^n < s_1 < \ldots < s_p < t_2^n$ et $i_1, \ldots i_p \in A'$. (L'existence de cette fonction aléatoire est assurée par un théorème classique de Kolmogorov.)

Associons enfin à $I_\infty = (t_\infty, +\infty)$ dans le cas non récurrent, une variable aléatoire τ telle que $t^\infty \leqq \tau \leqq \infty$ et une fonction aléatoire $X^\infty = \{X_s^\infty, t^\infty < s < \tau\}$ à valeurs dans A' et dont la loi de probabilité soit

$$\Pr(X_{s_1}^\infty = i_1, X_{s_p}^\infty = i_p, \tau > s_p)$$
$$= \left[\int_0^\infty du\,\eta(u)\right] f'_{s_1 - t^\infty}(i_1) P_{s_2 - s_1}(i_1, i_2) \ldots P_{s_p - s_{p-1}}(i_{p-1}, i_p)\left[1 - \int_0^\infty ds\, g'_s(i_p)\right].$$

Proposition 5'. — *Moyennant les définition ci-dessus, la fonction aléatoire* $X = \{X_t, 0 < t < \tau\}$ *définie par* $X_t = X_t^n$ *si* $t \in I_n$, $= X_t^\infty$ *si* $t \in I_\infty$, $= i'$ *ou l'état fictif si* $t \notin G$, *est une fonction aléatoire sous-markovienne de fonction de transition* P *et d'état initial : i' ou l'état fictif considéré* [*plus précisément :* $\Pr(X_t = i) = P_t(^{i'}_{\alpha}, i)$].

Démonstration. — Nous nous contenterons de vérifier que

$$\Pr(X_t = i) = P_t(^{i'}_{\alpha}, i),$$

la vérification de la propriété de Markov de X étant basée sur un calcul analogue.

Il résulte d'abord des propriétés de la fonction T qu'on a

$$\Pr(t \notin G) = \varepsilon\eta(t);$$

$$\sum_n \Pr(t \in I_n,\ u \leq t_1^n < u + du,\ v \leq t_2^n < v + dv)$$
$$= \begin{cases} \eta(u)\eta'(v)\,du\,dv & \text{si} \quad u < t < u + v, \\ 0 & \text{sinon}; \end{cases}$$

$$\Pr(t \in I^\infty,\ u \leq t^\infty < u + du) = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \eta(s)\,ds\right)^{-1} \eta(u)\,du & \text{si} \quad u < t, \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

Il s'ensuit d'abord que $\Pr(X_t = i') = \eta(t)$ dans le cas d'un état $i' \in A$ et que $\Pr(X_t = \text{état fictif}) = 0$ dans le cas d'un état fictif si bien que dans ce cas $X_t \in A$ presque sûrement pour tout $t < \tau$. Ensuite, il découle des définitions que

$$\begin{aligned} \Pr(X_t = k) &= \sum_n \iint \Pr(t \in I_n,\ u \leq t_1^n < u + du,\ v \leq t_2^n < v + dv,\ X_t^n = k) \\ &\quad + \Pr(t \in I^\infty,\ u \leq t_1^\infty < u + du,\ X_t^\infty = k,\ t < \tau) \\ &= \iint_{u < t < u + v} \eta(u)\eta'(v)\,du\,dv\, \frac{1}{\eta'(v)} f'_{t-u}(k)\, g'_{v-t}(k) \\ &\quad + \int_{u < t} \left(\int_0^\infty \eta(s)\,ds\right)^{-1} \eta(u)\,du\, f'_{t-u}(k) \left[1 - \int_0^\infty ds\, g'_s(k)\right] \\ &= \int_0^t du\, \eta(u)\, f'_{t-u}(k) = P_t(^{i'}_{\alpha}, k) \end{aligned}$$

pour tout $t > 0$ et $k \in A'$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. Bourbaki, *Utilisation des nombres réels en topologie générale*, Livre III, chap. 9, Hermann, Paris.

[2] G. Choquet, *Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes* (*Séminaire Bourbaki*, exposé 139, 1956).

[3] J. L. Doob, *Discrete potential theory and boundaries* (*J. Rat. Mech, Analysis*, vol. 8, 1959, p. 433).

[4] G. A. Hunt, *Markov chains and Martin boundaries* (*Illinois J. Math.*, vol. 4, 1960, p. 313-340).

[5] J. Neveu, *Lattice methods and submarkovian processes* (*Proc.* 4th *Berkely Symposium on Probability and Statistics*, 1961).

[6] D. Ray, *Resolvents, transition function and strongly markovian Processes* (*Ann. Math.*, vol. 70, 1959, p. 43-72).

[7] Varadarajan, *Weak convergence of measures on separable metric spaces* (*Sankhya*, vol. 19, 1958, *p.* 15-22).

(Manuscrit reçu le 26 juin 1961.)