ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

M. ÉMERY

Sur certains polynômes d'un vecteur gaussien

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 3, nº 1 (1996), p. 65-76
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1996__3_1_65_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 3, N° 1, 1996, pp.65-76

SUR CERTAINS POLYNÔMES D'UN VECTEUR GAUSSIEN

M. Émery

Soit P un polynôme homogène de degré n à d variables[1] ; étant donné un vecteur gaussien centré $X = (X_1, ..., X_d)$, on veut calculer la loi de $P(X)$. Lorsque $n = 2$, on se ramène à une combinaison linéaire de carrés de variables normales indépendantes en diagonalisant simultanément la forme quadratique P et la matrice de covariance de X, c'est-à-dire en cherchant un changement linéaire de coordonnées $y_i = \sum_i a_{ij}x_j$ qui transforme d'une part X en un processus gaussien Y de covariance diagonale et d'autre part $P(x)$ en un polynôme $Q(y)$ de la forme $\sum_i \lambda_i y_i^2$. Cette diagonalisation simultanée est toujours possible (parce que toute matrice symétrique se diagonalise dans une base orthonormée). Mais pour $n > 2$ la même méthode ne marche plus en général et il est donc intéressant de savoir reconnaître les cas où elle est utilisable : *Quand existe-t-il un changement linéaire de coordonnées $y_i = \sum_i a_{ij}x_j$ qui diagonalise la covariance du vecteur gaussien et transforme $P(x)$ en $Q(y) = \sum_i \lambda_i y_i^n$? Lorsque c'est le cas, comment effectuer cette « diagonalisation » simultanée ?*

La première question et une partie de la seconde sont traitées dans [1], sous un point de vue différent : il s'agit de décrire les sauts de certaines martingales vectorielles; c'est G. Ben Arous qui a observé que le théorème 1 de [1] répond aussi à la question gaussienne évoquée ici. Je remercie G. Ben Arous, V. Cossart et X. Fernique pour leurs remarques et questions.

Les entiers $d \geqslant 1$ et $n \geqslant 3$ sont fixés dans la suite (le cas $d = 1$ est trivial). L'espace $\mathbb{R}^d$ sera appelé E et son dual E^*.

La première de nos deux données est la matrice de covariance γ de X. C'est une forme bilinéaire (positive), non pas sur E mais sur E^* (on s'en convainc en posant $\gamma(\ell', \ell'') = \mathbb{E}[\ell'(X)\ell''(X)]$ pour ℓ' et ℓ'' dans E^*, ou en observant que $\gamma = \mathbb{E}[X \otimes X]$ est un élément (positif) de $E \otimes E$). Nous supposerons γ définie positive; on peut toujours se ramener à ce cas en se restreignant au support de la loi de X (si l'on considère $\gamma \in E \otimes E$ comme une application linéaire de E^* dans E, le support en question est le sous-espace vectoriel image de γ).

L'autre donnée est le polynôme P sur E, homogène et de degré n. Se donner un tel polynôme revient à se donner la forme n-linéaire symétrique T sur E telle que

---

1. On pourra s'étonner que n désigne le Degré et d le Nombre de variables. Ces notations, empruntées à [1], viennent du point de vue des formes multilinéaires, selon lequel n est le Nombre d'arguments et d la Dimension.

$P(x) = T(x, x, ..., x)$ pour tout x de E, obtenue en polarisant P. Concrètement, supposons P donné sous la forme

$$P(x_1, ..., x_d) = \sum_{\mu \in M} p_\mu x^\mu ,$$

où $M = \{\mu = (\mu_1, ..., \mu_d) \in \mathbb{N}^d : \mu_1 + ... + \mu_d = n\}$ est l'ensemble des multi-indices de longueur d et de poids n et où x^μ représente $x_1^{\mu_1} ... x_d^{\mu_d}$. À tout n-uple $(i, j, ..., k) \in \{1, 2, ..., d\}^n$, on peut associer un multi-indice $\mu(i, j, ..., k) \in M$ en prenant μ_q égal au nombre de fois que la valeur q figure dans la liste $(i, j, ..., k)$. On peut alors écrire

$$T(x, y, ..., z) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} ... \sum_{k=1}^{d} t_{ij...k}\, x_i\, y_j ... z_k ,$$

où les coefficients $t_{ij...k}$ de T sont donnés à partir de ceux de P par la formule

$$t_{ij...k} = \frac{\mu(i, j, ..., k)!}{n!} p_{\mu(i,j,...,k)} ,$$

dans laquelle le coefficient multinômial $n!/\mu!$ compte le nombre de termes du développement de T qui correspondent au même monôme $p_\mu x^\mu$.

Pour polariser P en T, les algébristes utilisent aussi la formule

$$(-1)^n n!\, T(x_1, ..., x_n) = \sum_{J \subset \{1,...,n\}} (-1)^{|J|} P\big(\textstyle\sum_{j \in J} x_j\big)$$

équivalente au procédé décrit ci-dessus; voir par exemple [2], chapitre 4, § 5, proposition 15. Attention! Dans cette formule, les symboles x_j désignent exceptionnellement n vecteurs de E, et non pas les coordonnées d'un même vecteur x. (Pour éviter toute confusion, nous notons $(x, y, ..., z)$ les n arguments de T; cette remarque est la seule exception.)

Étant données une forme r-linéaire $U(x, y, ..., z)$ sur E et une forme s-linéaire $V(x', y', ..., z')$ sur E également ($r \geqslant 1$, $s \geqslant 1$), on peut utiliser γ pour contracter ces deux formes (plus précisément, pour contracter le premier argument de U avec le premier argument de V) et définir une forme $(r+s-2)$-linéaire $U \dot{\gamma} V$ sur E par la formule

$$U \dot{\gamma} V(y, ..., z, y', ..., z') = \gamma\big(U(\cdot, y, ..., z), V(\cdot, y', ..., z')\big) .$$

(En coordonnées, si $u_{ij...k}$ sont les coefficients de U et $v_{i'j'...k'}$ ceux de V, ceux de $W = U \dot{\gamma} V$ sont donnés par

$$w_{j...kj'...k'} = \sum_{i=1}^{d} \sum_{i'=1}^{d} \gamma_{ii'}\, u_{ij...k}\, v_{i'j'...k'} .)$$

Lorsque U et V sont toutes deux symétriques, $U \dot{\gamma} V$ l'est séparément en les $r-1$ variables $y, ..., z$ d'une part et en les $s-1$ variables $y', ..., z'$ d'autre part, mais n'a aucune raison de l'être par rapport à l'ensemble des $r+s-2$ variables.

Remarquer toutefois que $U \dot{\gamma} U$ est toujours invariant par l'échange global des $r-1$ premières variables avec les $r-1$ autres; il en résulte que si U est une forme bilinéaire symétrique, il en va de même de $U \dot{\gamma} U$.

1. Le critère de diagonalisabilité

Avec ces notations, il est possible de répondre à la première des deux questions posées dans l'introduction par une condition algébrique nécessaire et suffisante. Cette condition est déjà établie, dans un contexte différent, par le théorème 1 de [1]. La démonstration donnée dans [1] n'est pas purement algébrique : elle utilise une inégalité; nous allons en donner ici une plus simple et plus directe.

CRITÈRE DE DIAGONALISABILITÉ. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe une base* $\{f_1, ..., f_d\}$ *de l'espace* E^**, orthonormée*[2] *pour* γ*, et des réels* $\lambda_1, ..., \lambda_d$ *tels que, pour tout* x *de* E*,*

$$P(x) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i f_i(x)^n \ ;$$

(ii) *la forme* $(2n-2)$*-linéaire* $T \dot{\gamma} T$ *est symétrique.*

Pratiquement, pour vérifier ce critère, on commence par diviser les coefficients de P par les coefficients multinômiaux pour obtenir les $t_{ij...k}$; on utilise ensuite γ pour fabriquer les coefficients $u_{j...kj'...k'} = \sum_{ii'} \gamma_{ii'} t_{ij...k} t_{i'j'...k'}$ de $T \dot{\gamma} T$, qui sont symétriques en $j, ..., k$ d'une part et en $j', ..., k'$ d'autre part; et la condition (ii) est satisfaite si ces coefficients $u_{j...kj'...k'}$ sont symétriques en j et j'.

DÉMONSTRATION DU CRITÈRE. — Si (i) a lieu, $T = \sum \lambda_i f_i^{n\otimes}$ et

$$T \dot{\gamma} T = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \, \gamma(f_i, f_j) \, f_i^{(n-1)\otimes} \otimes f_j^{(n-1)\otimes} = \sum_i \lambda_i^2 \, f_i^{(2n-2)\otimes}$$

est symétrique.

La réciproque, (ii) $\Rightarrow$ (i), va être déduite du lemme classique suivant :

LEMME 1. — *Soit* $\mathcal{A}$ *un ensemble de matrices réelles symétriques* $d \times d$*, qui commutent deux-à-deux. Il existe une base orthonormée de* $\mathbb{R}^d$ *qui diagonalise simultanément toutes les matrices de* $\mathcal{A}$*.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 1. — Par récurrence sur d. Si tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont des multiples scalaires de la matrice unité, le résultat est trivial (n'importe quelle base convient!); c'est le cas en particulier quand $d = 1$. Sinon on peut trouver dans $\mathcal{A}$ une matrice A ayant au moins deux valeurs propres différentes; soient λ une valeur propre de l'opérateur a associé à A, F le sous-espace propre correspondant et π la projection orthogonale sur F. Comme π s'écrit $Q(a)$, où Q est n'importe quel polynôme valant 1 en λ et s'annulant sur les autres valeurs propres, π commute avec tous les opérateurs associés aux éléments de $\mathcal{A}$. Ces opérateurs, auto-adjoints, respectent donc F et $F^\perp$; en travaillant séparément dans chacun de ces deux sous-espaces, on est ainsi ramené à une dimension plus petite. ∎

2. Ou seulement orthogonale; cela revient au même.

Supposant maintenant (ii) vérifiée, nous allons établir (i). On ne restreint pas la généralité en supposant que γ est la matrice identité. L'hypothèse (ii) peut dans ce cas se réénoncer ainsi : quand $(x, ..., y)$ décrit E^{n-2}, les matrices symétriques $A(x, ..., y)$ associées aux formes bilinéaires $T(x, ..., y, \cdot, \cdot)$ commutent deux-à-deux. (En effet, $A(x, ..., y)$ et $A(x', ..., y')$ commutent si et seulement si la forme bilinéaire $T_{\dot\gamma}T(x, ..., y, \cdot, x', ..., y', \cdot)$ est symétrique.) Selon le lemme 1, il existe donc une base orthonormée $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ de E^* telle que, pour tout $(x, ..., y)$, on ait $T(x, ..., y, \cdot, \cdot) = \sum_i \mu_i(x, ..., y)\, f_i \otimes f_i$. Comme les $f_i \otimes f_i$ sont linéairement indépendants, les coefficients $\mu_i(x, ..., y)$ dépendent linéairement des $T(x, ..., y, \cdot, \cdot)$ et sont donc des formes multilinéaires en $(x, ..., y)$. En fin de compte, T peut s'écrire comme $\sum_{i_1=1}^{d} \cdots \sum_{i_n=1}^{d} \lambda_{i_1 \dots i_d}\, f_{i_1} \otimes \dots \otimes f_{i_d}$, avec des coefficients $\lambda_{i_1 \dots i_d}$ nuls pour $i_{d-1} \neq i_d$. Mais en raison de la symétrie de T, ces coefficients dépendent symétriquement de leurs n indices; ils sont donc nuls dès que deux de ces n indices sont distincts, et l'on peut écrire $T = \sum_i \lambda_i\, f_i^{n \otimes}$, c'est-à-dire (i). ∎

2. Le cas bidimensionnel

Nous allons ici étudier complètement le cas $d = 2$, en redémontrant l'équivalence entre (i) et (ii) par une méthode qui peut être utilisée pratiquement pour effectuer la diagonalisation.

Les données sont la matrice de covariance définie positive $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ et le polynôme $P(x_1, x_2)$ que nous écrirons sous la forme $\sum_{\alpha=0}^{n} \binom{n}{\alpha} q_\alpha x_1^{n-\alpha} x_2^\alpha$. Appelons $\mathrm{D}(n, \alpha)$ l'ensemble des mots de n lettres formés à l'aide de l'alphabet $\{1, 2\}$, comportant $n-\alpha$ fois la lettre 1 et α fois la lettre 2. Lorsqu'on polarise P, les coefficients binômiaux disparaissent et il reste $t_{ij \dots k} = q_\alpha$ si le mot $ij \dots k$ est dans $\mathrm{D}(n, \alpha)$.

Les coefficients $u_{j \dots k j' \dots k'}$ de $T_{\dot\gamma}T$ sont faciles à expliciter : si $j \dots k$ est un mot de $\mathrm{D}(n-1, \alpha)$ et $j' \dots k'$ un mot de $\mathrm{D}(n-1, \beta)$,

$$u_{j \dots k j' \dots k'} = a\, q_\alpha q_\beta + b(q_\alpha q_{\beta+1} + q_{\alpha+1} q_\beta) + c\, q_{\alpha+1} q_{\beta+1} \cdot$$

La condition (ii) de symétrie de ce tenseur revient à dire que pour tous α et β dans $\{0, ..., n-2\}$ et tous $w \in \mathrm{D}(n-2, \alpha)$ et $w' \in \mathrm{D}(n-2, \beta)$, on a $u_{1w2w'} = u_{2w1w'}$. Elle s'écrit

$$\begin{aligned} a\, q_\alpha q_{\beta+1} &+ b\,(q_\alpha q_{\beta+2} + q_{\alpha+1} q_{\beta+1}) + c\, q_{\alpha+1} q_{\beta+2} \\ &= a\, q_{\alpha+1} q_\beta + b\,(q_{\alpha+1} q_{\beta+1} + q_{\alpha+2} q_\beta) + c\, q_{\alpha+2} q_{\beta+1} , \end{aligned}$$

ou encore

$$a\,(q_\alpha q_{\beta+1} - q_{\alpha+1} q_\beta) + b\,(q_\alpha q_{\beta+2} - q_{\alpha+2} q_\beta) + c\,(q_{\alpha+1} q_{\beta+2} - q_{\alpha+2} q_{\beta+1}) = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} c & q_\alpha & q_\beta \\ -b & q_{\alpha+1} & q_{\beta+1} \\ a & q_{\alpha+2} & q_{\beta+2} \end{vmatrix} = 0 .$$

En appelant Γ et Q_α les vecteurs $(c, -b, a)$ et $(q_\alpha, q_{\alpha+1}, q_{\alpha+2})$ de $\mathbb{R}^3$, ceci signifie que Γ, Q_α et Q_β sont dans un même plan (vectoriel) de $\mathbb{R}^3$; et *la condition* (ii) *est vérifiée si et seulement si* Γ *et tous les* Q_α *pour* $0 \leqslant \alpha \leqslant n-2$ *sont coplanaires.*

Lorsque c'est le cas, il existe un vecteur non nul $V = (u, v, w)$ orthogonal dans $\mathbb{R}^3$ à Γ et aux Q_α (facile à obtenir pratiquement comme $\Gamma \wedge Q_\alpha$). En appelant S la matrice symétrique $\binom{2w\ -v}{-v\ 2u}$, l'orthogonalité de V et Γ implique $\mathrm{Tr}(\gamma S) = 2(cu-bv+aw) = 0$; comme γ est définie positive, ceci empêche S d'être positive (S n'étant pas nulle, on aurait $\mathrm{Tr}(\gamma S) > 0$) et entraîne donc $v^2 > 4uw$. Deux cas sont à distinguer.

Si $w \neq 0$, l'équation du second degré $u+vz+wz^2 = 0$ a deux racines σ et τ, réelles et distinctes. L'orthogonalité de chaque Q_α et V, $uq_\alpha+vq_{\alpha+1}+wq_{\alpha+2} = 0$, est une relation de récurrence linéaire entre les q_α ; elle implique l'existence de deux coefficients λ et μ tels que $q_\alpha = \lambda\sigma^\alpha + \mu\tau^\alpha$ pour tout $\alpha \in \{0,...,n\}$ (pour le cas où $u = 0$, rappelons que $0^0 = 1$). Il s'ensuit aussitôt que $P(x_1, x_2)$ est de la forme $\lambda(x_1+\sigma x_2)^n + \mu(x_1+\tau x_2)^n$. Et il ne reste qu'à remarquer que, puisque $\sigma\tau = u/w$ et $\sigma+\tau = -v/w$, on a $a + b(\sigma+\tau) + c\sigma\tau = 0$ et les deux formes linéaires $x_1+\sigma x_2$ et $x_1+\tau x_2$ sont donc orthogonales pour γ.

Reste le cas où $w = 0$. Puisque $v^2 > 4uw$, v n'est pas nul. La relation de récurrence est maintenant $uq_\alpha + vq_{\alpha+1} = 0$ pour tout $\alpha \leqslant n-2$ et il existe donc λ tel que $q_\alpha = \lambda(-u/v)^\alpha$ pour tout $\alpha \neq n$. On en déduit que $P(x_1, x_2)$ est de la forme $\lambda(x_1-ux_2/v)^n + \mu x_2^n$; et c'est terminé car les formes x_1-ux_2/v et x_2 sont orthogonales pour γ puisque $\Gamma \perp V$.

Ceci redémontre, lorsque $d = 2$, l'équivalence entre (i) et (ii); dans la pratique, cette méthode fournit un algorithme utilisable pour tester la diagonabilisabilité (en vérifiant que Γ et tous les Q_α sont coplanaires) et, le cas échéant, pour effectuer la diagonalisation.

3. Cas général (d quelconque)

Nous supposons dans toute la suite que la condition (ii) *est vérifiée.* Nous savons donc que P peut être diagonalisé et nous cherchons les éléments λ_i et f_i de cette diagonalisation. (Si l'on souhaite seulement calculer la loi de $P(X)$, on s'intéressera aux λ_i uniquement, sans avoir besoin des f_i; mais il est parfois utile d'avoir tous les éléments de la diagonalisation — c'est le cas pour le problème étudié dans [1].) Pour calculer les éléments diagonaux, nous aurons besoin de quelques notations concernant les formes multilinéaires sur E.

Pour $r \geqslant 2$, si U est une forme r-linéaire, on peut utiliser γ pour contracter deux arguments de U et obtenir une nouvelle forme multilinéaire à $r-2$ arguments. Lorsque U est de la forme $e_1\otimes...\otimes e_r$, où e_1, ..., e_r sont dans E^*, le résultat de la contraction des p-ième et q-ième arguments est

$$\gamma(e_p, e_q)\ e_1\otimes...\otimes\widehat{e_p}\otimes...\otimes\widehat{e_q}\otimes...\otimes e_r\ .$$

En coordonnées, si par exemple $u_{ijk\ell m}$ sont les coefficients d'une forme 5-linéaire, en contractant le troisième et le cinquième arguments on obtient la forme 3-linéaire dont les coefficients sont $v_{ij\ell} = \sum_{k=1}^d \sum_{m=1}^d \gamma_{km} u_{ijk\ell m}$. (Ainsi le produit contracté $U_{\dot\gamma}V$ défini plus haut est-il simplement un contracté de $U\otimes V$.) Lorsque la forme r-linéaire U que l'on contracte ainsi est symétrique, il n'est pas nécessaire de préciser quels arguments l'on contracte, et nous pourrons donc noter simplement $\mathrm{Tr}_\gamma U$ la forme $(r-2)$-linéaire obtenue; il est clair qu'elle est aussi symétrique, et l'on peut donc itérer l'opération et définir, pour tout entier a tel que $2a \leqslant r$, la forme $(r-2a)$-linéaire $\mathrm{Tr}_\gamma^a U$. Prenant a aussi grand que possible (égal à $[r/2]$), on obtient ainsi un nombre si r est pair ou un élément de E^* si r est impair.

Pour diagonaliser P, commençons par remarquer que non seulement T et $T\dot{\gamma}T$, mais aussi toutes les itérées $(T\dot{\gamma}T)\dot{\gamma}T$, $\big((T\dot{\gamma}T)\dot{\gamma}T\big)\dot{\gamma}T$, etc., sont des formes multilinéaires symétriques. Ceci pourrait se vérifier directement par un calcul algébrique, mais il est plus simple ici d'utiliser l'équivalence entre (i) et (ii) : la symétrie de $T\dot{\gamma}T$ entraîne l'existence d'une base $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ de E^* orthonormée pour γ et telle que

$$T = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i\, f_i\otimes\ldots\otimes f_i = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i\, f_i^{n\otimes}\ ;$$

il en résulte de proche en proche

$$T\dot{\gamma}T = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^2\, f_i^{(2n-2)\otimes}\ ,$$

$$(T\dot{\gamma}T)\dot{\gamma}T = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^3\, f_i^{(3n-4)\otimes}\ ,$$

et ainsi de suite, la formule générale étant

$$T^{m(\dot{\gamma})} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^m\, f_i^{(mn-2m+2)\otimes}\ .$$

Ces formes multilinéaires symétriques $T^{m(\dot{\gamma})}$ vont être contractées autant de fois que possible; comme on l'a vu plus haut, cela fera apparaître des questions de parité.

a) Cas où n est pair (et plus grand que 3)

Pour tout $m \geqslant 1$, la forme $T^{m(\dot{\gamma})}$ a un nombre pair $mn-2m+2$ d'arguments. On peut donc calculer le nombre

$$S_m = \mathrm{Tr}_\gamma^{\frac{mn}{2}-m+1}\left[T^{m(\dot{\gamma})}\right]\ .$$

Nous avons utilisé la diagonalisation pour établir la symétrie des $T^{m(\dot{\gamma})}$; mais le calcul de ces formes, puis de leurs traces itérées S_m ne nécessite que les coefficients de T et de γ. Bien entendu, sauf pour les petites valeurs des paramètres, le calcul pratique est rapidement inextricable : S_m est une somme de d^{mn} termes, chacun produit de m coefficients de T et de $\frac{1}{2}mn$ coefficients de γ. Même lorsque γ est la matrice unité (on peut en principe s'y ramener au prix d'un calcul préalable), il reste une combinatoire compliquée sur la façon d'apparier les coefficients de $T^{m\otimes}$.

En reportant $T^{m(\dot{\gamma})} = \sum_{i=1}^d \lambda_i^m\, f_i^{(mn-2m+2)\otimes}$ dans la définition de S_m et en utilisant $\mathrm{Tr}_\gamma^p\,(f_i^{2p\otimes}) = \gamma(f_i, f_i)^p = 1$, on obtient

$$S_m = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^m\ .$$

La connaissance des d nombres $S_1, \ldots, S_d$ permet donc de retrouver, par un calcul algébrique classique, les fonctions symétriques élémentaires des nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$, c'est-à-dire le « polynôme caractéristique » dont les d racines sont les λ_i. Ces d racines (avec leur ordre de multiplicité) sont donc intrinsèquement associés à P et γ; on les appellera, bien sûr, valeurs propres. (Jusqu'ici nous n'avons pas encore utilisé l'hypothèse $n \neq 2$; bien entendu, pour $n = 2$, on retrouve l'équation caractéristique et les valeurs propres d'une matrice symétrique.) Une fois ces valeurs propres calculées, la loi de $P(X)$ pourra être obtenue comme la convoluée des d lois

$$\mathcal{L}_i = \text{loi de } \lambda_i N^n\ ,$$

où N est une gaussienne standard.

Pour des raisons d'homogénéité, la m-ième fonction symétrique élémentaire des λ_i doit être une combinaison linéaire de produits de m coefficients de T et de $\frac{1}{2}mn$ coefficients de γ. Il existe certainement une manière algébrique de construire directement ces fonctions symétriques sans passer par les S_m.

Toujours pour n pair, nous allons rechercher les directions propres associées aux λ_i. Nous verrons apparaître deux différences avec le cas de la diagonalisation des matrices symétriques (correspondant à $n = 2$). Tout d'abord les valeurs propres non nulles correspondent chacune à une direction propre de dimension 1 ; en cas de valeur propre de multiplicité m, il y aura m sous-espaces de dimension 1 et non pas un sous-espace de dimension m (par exemple le polynôme $x^n + y^n$ sur $\mathbb{R}^2$ a les deux axes pour directions propres associées toutes deux à la même valeur propre 1 ; mais ce polynôme n'est pas invariant par rotations et les axes jouent à son égard un rôle priviligié). L'autre différence est qu'il existe un système d'équations algébriques, n'ayant qu'un nombre fini de solutions, qui fournit à la fois ces directions propres et les valeurs propres sans avoir besoin de connaître préalablement ces dernières. On dispose ainsi, en théorie, d'une seconde méthode pour calculer ces λ_i.

Si ℓ est une forme linéaire, on peut définir à partir de T la forme $(n-1)$-linéaire $\ell_{\dot\gamma}T$, puis la forme $(n-2)$-linéaire $\ell_{\dot\gamma}(\ell_{\dot\gamma}T)$, etc. Pour $r \leqslant n$, nous noterons $(\ell_{\dot\gamma})^r T$ la forme $(n-r)$-linéaire obtenue de cette façon après r itérations. Elle est bien sûr égale à $T(\ell_\gamma, ..., \ell_\gamma, \cdot, ..., \cdot)$, où ℓ_γ est le vecteur de E qui correspond à ℓ lorsqu'on identifie E et E^* à l'aide de la structure euclidienne associée à γ (en d'autres termes, ℓ_γ est l'unique élément de E tel que $\gamma(\ell, \ell') = \ell'(\ell_\gamma)$ pour tout $\ell' \in E^*$). L'utilité de cette opération pour la diagonalisation de P vient du lemme suivant, qui servira aussi pour n impair ; nous nous affranchissons donc de l'hypothèse de parité le temps de l'énoncer et de le démontrer.

LEMME 2. — (Rappelons que γ, P et son polarisé T sont donnés et que la condition (ii) est en vigueur. Le degré $n \geqslant 3$ est pair ou impair.) *Soient $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ une base de E^* orthonormée pour γ et $\lambda_1, ..., \lambda_d$ des réels tels que $P(x) = \sum_i \lambda_i f_i(x)^n$. Soient $h \in \mathbb{R}$, $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 2$ tels que $p+q = n$. Cherchons les $\ell \in E^*$ vérifiant l'équation*

$$(\ell_{\dot\gamma})^p T = h\, \ell^{q\otimes} .$$

Si $h = 0$, les solutions forment l'espace vectoriel engendré par les f_i pour les indices i tels que $\lambda_i = 0$.

Si $h \neq 0$, les solutions sont la forme nulle 0 et les ξf_i, où i est tel que $\lambda_i \neq 0$ et le réel $\xi \neq 0$ est solution de l'équation $\lambda_i \xi^{p-q} = h$.

DÉMONSTRATION. — Puisque les f_i sont une base de E^*, nous chercherons l'inconnue ℓ sous la forme $\sum_i \xi_i f_i$. On a

$$\begin{aligned}(\ell_{\dot\gamma})^p T &= \big((\textstyle\sum \xi_i f_i)_{\dot\gamma}\big)^p \,(\textstyle\sum \lambda_j f_j^{n\otimes})\\ &= \sum_{i_1,...,i_p,j} \xi_{i_1}...\xi_{i_p}\, \gamma(f_{i_1}, f_j)...\gamma(f_{i_p}, f_j)\, \lambda_j\, f_j^{(n-p)\otimes} = \sum_i \xi_i^p \lambda_i f_i^{q\otimes}\end{aligned}$$

et l'équation devient

$$\sum_i \xi_i^p \lambda_i f_i^{q\otimes} = h\big(\textstyle\sum_i \xi_i f_i\big)^{q\otimes} .$$

Comme les $f_i^{q\otimes}$ sont linéairement indépendants, pour $h = 0$ les solutions forment l'espace vectoriel engendré par les f_i pour les i tels que $\lambda_i = 0$.

Pour $h \neq 0$, puisque les tenseurs de la forme $f_{i_1} \otimes ... \otimes f_{i_q}$ sont une base de l'espace $(E^*)^{q\otimes}$ et que tous les termes mixtes du membre de gauche sont nuls, il en va de même à droite, et l'un au plus des ξ_i est non nul. (C'est ici qu'est utilisée l'hypothèse $q \geqslant 2$.) Toute solution non nulle doit donc être de la forme ξf_i, pour un ξ réel non nul et un i tel que $\lambda_i \neq 0$; et l'équation se réécrit

$$\xi^p \lambda_i f_i^{q\otimes} = h \xi^q f_i^{q\otimes} . \qquad \blacksquare$$

Revenant à la diagonalisation pour n pair, nous commençons par une construction des directions propres qui suppose connues les valeurs propres; c'est une extension directe du cas $n = 2$ des matrices symétriques.

PROPOSITION 1. — (Sous la condition (ii), pour n pair.) *Pour tout réel λ, notons S_λ l'ensemble des solutions $\ell \in E^*$ de l'équation*

$$(\ell_\gamma)^{\frac{n}{2}} T = \lambda\, \ell^{\frac{n}{2}\otimes} .$$

a) *Si $\lambda \neq \lambda'$, les ensembles S_λ et $S_{\lambda'}$ sont orthogonaux. L'ensemble $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} S_\lambda$ engendre l'espace vectoriel E^*.*

b) *Si λ n'est pas valeur propre, $S_\lambda = \{0\}$. Si λ est une valeur propre non nulle, de multiplicité $m(\lambda)$, S_λ est la réunion de $m(\lambda)$ droites deux-à-deux orthogonales. Pour $\lambda = 0$, S_0 est un sous-espace de E^* ayant pour dimension l'ordre de multiplicité de la valeur propre* 0.

c) *Appelons F un ensemble obtenu en choisissant un vecteur unitaire pour γ sur chacune des droites associées aux valeurs propres non nulles; pour $f \in F$ soit $\lambda(f)$ la valeur propre correspondante. La diagonalisation de P est donnée par*

$$P(x) = \sum_{f \in F} \lambda(f)\, f(x)^n .$$

On peut considérer T comme un opérateur symétrique sur les tenseurs symétriques à $\frac{n}{2}$ arguments. Les éléments de S_λ correspondent à ceux des vecteurs propres de cet opérateur qui sont des tenseurs purs, c'est-à-dire de la forme $v \otimes v \otimes ... \otimes v$. Adopter ce point de vue augmente énormément la dimension dans laquelle on travaille, en ramenant toutefois à un problème linéaire, pour lequel des algorithmes efficaces sont connus. Mais comment reconnaître les tenseurs purs parmi les vecteurs propres de cet opérateur?

DÉMONSTRATION. — Le a) et le b) résultent immédiatement du lemme 2. Pour le c), il suffit de remarquer que les éléments de F valent $\pm f_i$ pour les i tels que $\lambda_i \neq 0$; comme n est pair, on en tire

$$P(x) = \sum_i \lambda_i f_i(x)^n = \sum_{i : \lambda_i \neq 0} \lambda_i f_i(x)^n = \sum_{f \in F} \lambda(f)\, f(x)^n . \qquad \blacksquare$$

Soient $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 2$ des entiers tels que $p + q = n$. L'ensemble S_λ des solutions de $(\ell_\gamma)^{n/2} T = \lambda\, \ell^{(n/2)\otimes}$ peut aussi être défini par l'équation $(\ell_\gamma)^p T = \lambda\, \gamma(\ell, \ell)^{(p-q)/2} \ell^{q\otimes}$, comme le montre la même démonstration. La proposition 1, qui correspond à $p = n/2$, minimise le degré du système d'équations; en prenant $q = 2$ on minimiserait le nombre d'équations du système.

Le procédé de diagonalisation décrit par la proposition 1 est aussi semblable que possible au cas classique $n = 2$. Il existe aussi une autre méthode, dans laquelle l'équation $(\ell_{\dot{\gamma}})^{n/2}T = \lambda\,\ell^{n/2\otimes}$ de la proposition 1 est remplacée par une équation non homogène où λ ne figure plus explicitement; on obtient simultanément valeurs propres et directions propres. C'est une équation en ℓ de degré $\frac{n}{2}+1$: par rapport à la proposition précédente, on a un degré de plus.

Proposition 2. — (Sous la condition (ii), pour n pair.) *L'ensemble S des solutions $(\ell,\varepsilon) \in (E^*-\{0\})\times\{-1,1\}$ de l'équation*

$$(\ell_{\dot{\gamma}})^{\frac{n}{2}-1}T = \varepsilon\,\ell^{(\frac{n}{2}+1)\otimes}$$

est fini et stable par la symétrie σ : $(\ell,\varepsilon)\mapsto(-\ell,\varepsilon)$.

Soit S' un ensemble moitié moins gros que S, obtenu en ne gardant qu'un élément de chaque couple symétrique pour σ. Si (ℓ',ε') et (ℓ'',ε'') sont deux éléments distincts de S', ℓ' et ℓ'' sont orthogonaux pour γ. Lorsque (ℓ,ε) parcourt S', le nombre $\varepsilon\gamma(\ell,\ell)$ décrit les valeurs propres non nulles (comptées avec leur ordre de multiplicité). Enfin P se diagonalise en

$$P(x) = \sum_{(\ell,\varepsilon)\in S'} \frac{\varepsilon}{\gamma(\ell,\ell)^{\frac{n}{2}-1}}\,\ell(x)^n\,.$$

Concrètement, chacune de ces équations se présente sous forme d'un système d'équations algébriques à d inconnues réelles, chacune de degré total $\frac{n}{2}+1$. On est donc conduit à rechercher l'intersection d'hypersurfaces de degré $\frac{n}{2}+1$. Déjà pour $n = 4$, la plus petite valeur autorisée, il s'agit d'hypercubiques, et j'abandonne volontiers ce problème à quiconque possède des compétences algébriques moins rudimentaires que les miennes...

Démonstration de la proposition 2. — On écrit $T = \sum_{i=1}^d \lambda_i f_i^{n\otimes}$: le lemme 2 entraîne que les éléments de S sont exactement les couples $(\pm\sqrt{|\lambda_i|}\,f_i, \operatorname{sgn}\lambda_i)$ où i parcourt les indices tels que $\lambda_i \neq 0$. Le début de la proposition en résulte et l'expression de P vient de

$$\frac{\varepsilon}{\gamma(\ell,\ell)^{\frac{n}{2}-1}}\,\ell^{n\otimes} = \frac{\varepsilon}{|\lambda_i|^{\frac{n}{2}-1}}\,\sqrt{|\lambda_i|}^{\,n} f_i^{n\otimes} = \varepsilon|\lambda_i|\,f_i^{n\otimes} = \lambda_i\,f_i^{n\otimes}\,. \quad \blacksquare$$

Plus généralement, si $p \geqslant 1$, $q \geqslant 2$ et m sont des entiers tels que $p+q = n$ et $p \neq 2m+q$ (m pouvant être négatif), on a un énoncé analogue concernant l'équation $(\ell_{\dot{\gamma}})^p = \varepsilon\gamma(\ell,\ell)^m\ell^{q\times}$; les valeurs propres sont $\lambda = \varepsilon\,\gamma(\ell,\ell)^{m+(q-p)/2}$ et le polynôme $P(x) = \sum \varepsilon\,\gamma(\ell,\ell)^{m-p}\ell(x)^n$. La proposition 2 correspond à un choix de p, q et m qui minimise le degré du système d'equations; un autre choix (possible seulement pour $n \geqslant 6$) serait $p = \frac{n}{2}+1$, $q = \frac{n}{2}-1$ et $m = 0$. En prenant $p = 1$ et $m = 0$, on obtiendrait un système d'équations n'ayant chacune qu'un seul terme non linéaire; $q = 2$ minimiserait le nombre d'équations.

b) Cas où n est impair (et plus grand que 2)

Il y a deux différences avec le cas pair : les « valeurs propres » λ_i (qui ne méritent plus ce nom) ne sont déterminées qu'au signe près : il est clair, en effet, que $\lambda_i f_i(x)^n$ ne change pas lorsque l'on multiplie simultanément λ_i et f_i par -1. En revanche, les $\lambda_i f_i$ seront bien déterminés et orienteront les directions propres correspondantes.

Comme précédemment, commençons par chercher les λ_i. Puisqu'ils ne seront bien définis qu'au signe près, c'est en fait leurs carrés que nous allons obtenir. Les $T^{m(\dot{\gamma})} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^m f_i^{(mn-2m+2)\otimes}$ sont en principe calculables à partir des coefficients de P et γ; pour m pair, on peut calculer le nombre

$$S_m = \mathrm{Tr}_\gamma^{\frac{mn}{2}-m+1}\left[T^{m(\dot{\gamma})}\right] = \mathrm{Tr}_\gamma^{\frac{mn}{2}-m+1}\left[\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^m f_i^{(mn-2m+2)\otimes}\right] = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^m ,$$

puis, à partir de $S_2, S_4, ..., S_{2d}$, obtenir les fonctions symétriques élémentaires des d nombres λ_i^2, c'est-à-dire l'équation de degré d dont les λ_i^2 sont les solutions. Une fois cette équation résolue, la loi de $P(X)$ pourra être obtenue comme la convoluée des lois de $\lambda_i N^n$, où N est une gaussienne standard. (Puisque n est impair, le choix du signe de λ_i est sans effet sur ces lois.)

REMARQUE. — Pour m impair, en contractant autant de fois que possible $T^{m(\dot{\gamma})}$, on ne trouve pas un réel mais la forme linéaire

$$L_m = \mathrm{Tr}_\gamma^{\frac{mn-1}{2}-m+1}\left[T^{m(\dot{\gamma})}\right] = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^m f_i \in E^* .$$

Il serait intéressant de savoir si ces formes peuvent être utilisés pour la diagonalisation de P; en tout cas, toujours pour m impair, la formule $\gamma(L_m, L_m) = S_{2m}$ permet de simplifier le calcul de S_{2m}.

On pourrait chercher à imiter le cas où n est pair et construire les directions propres (orientées) à partir des «valeurs propres» correspondantes, comme dans la proposition 1. Une possibilité consisterait à se ramener au cas pair en appliquant la proposition 1 à la forme $(2n-2)$-linéaire $T\dot{\gamma}T$ au lieu de T! (Ses valeurs propres sont les λ_i^2.) Mais on augmenterait beaucoup le degré, comme on l'a déjà augmenté lors de la recherche des «valeurs propres». Une autre possibilité serait d'étudier l'équation $\sqrt{\gamma(\ell,\ell)}(\ell\dot{\gamma})^{\frac{n-1}{2}}T = |\lambda|\ell^{\frac{n+1}{2}\otimes}$, mais elle n'est pas algébrique (la méthode s'applique néanmoins et fournit des demi-droites associées aux $|\lambda_i| \neq 0$). Il est plus simple de rechercher simultanément tous les éléments de la diagonalisation à l'aide d'une équation algébrique non homogène de degré $(n+1)/2$.

PROPOSITION 3. — (Condition (ii), n impair.) *Les solutions non nulles $\ell \in E^*$ de l'équation*

$$(\ell\dot{\gamma})^{\frac{n-1}{2}}T = \ell^{\frac{n+1}{2}\otimes}$$

sont deux-à-deux orthogonales pour γ. Elles forment un ensemble fini R en bijection avec les «valeurs propres» $|\lambda_i|$ non nulles (comptées avec leur ordre de multiplicité) par la formule $|\lambda| = \sqrt{\gamma(\ell,\ell)}$.

Le polynôme P se met sous la forme diagonale

$$P(x) = \sum_{\ell \in R} \frac{1}{\gamma(\ell,\ell)^{\frac{n-1}{2}}}\, \ell(x)^n .$$

Comme les précédentes, cette proposition se déduit facilement du lemme 2.

On pourrait plus généralement considérer l'équation $(\ell\dot{\gamma})^p T = \ell^{q\otimes}$, où $p \geqslant 1$, $q \geqslant 2$ et $p+q = n$. Les $|\lambda_i|$ seraient alors donnés par $|\lambda| = \gamma(\ell,\ell)^{(q-p)/2}$ et le polynôme par $P(x) = \sum \gamma(\ell,\ell)^{-p}\ell(x)^n$. Choisir $q = 2$ minimiserait le nombre d'équations.

Le cas le plus simple est bien entendu $n = 3$. L'équation de la proposition 3 est alors $\ell \dot{_\gamma} T = \ell \otimes \ell$ et se présente comme un système de $d(d+1)/2$ équations du second degré à d inconnues réelles : on est amené à chercher l'intersection de $d(d+1)/2$ hyperquadriques. Il y a au plus $d+1$ points d'intersection, l'origine et les points de R; en général (plus précisément, quand 0 n'est pas valeur propre), il y en a exactement $d+1$. L'existence de ces solutions vient, bien sûr, de la condition de symétrie (ii), qui fait que ces hyperquadriques sont très loin d'être arbitraires.

Lorsque 0 n'est pas valeur propre, les d points de R engendrent un hyperplan affine de E^*. Nous allons voir ci-dessous que, toujours pour $n = 3$, il est possible d'obtenir cet hyperplan comme la solution d'un système linéaire, ce qui permet d'abaisser d'une unité le nombre d'inconnues du problème.

La forme bilinéaire définie positive γ sur E^* induit une structure euclidienne sur E^* et aussi, par dualité, sur E : on a ainsi sur E une forme bilinéaire définie positive $g \in E^* \otimes E^*$; les matrices associées à g et γ sont inverses l'une de l'autre.

Pour $n = 3$, T est une forme trilinéaire symétrique; pour tout $x \in E$ on a donc une forme bilinéaire symétrique $T(x, \cdot, \cdot)$ sur E.

PROPOSITION 4. — (Condition (ii), $n = 3$.) *L'équation linéaire en $x \in E$*

$$T(x, \cdot, \cdot) = g$$

n'a aucune solution si 0 est valeur propre et a exactement une solution x_0 si 0 n'est pas valeur propre. Dans ce dernier cas, les d points de R engendrent l'hyperplan affine $\{\ell \in E^* : \ell(x_0) = 1\}$.

Cette équation linéaire en x est un système de $d(d+1)/2$ équations linéaires (avec second membre, c'est-à-dire affines) à d inconnues réelles. Que ce système ait en général une solution indique encore une fois combien les coefficients de T sont fortement contraints par la condition (ii).

Avec la notation L_m de la remarque qui précède la proposition 3, le vecteur x_0 correspond à la forme L_{-1}.

DÉMONSTRATION. — Nous savons que T est de la forme $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i \, f_i \otimes f_i \otimes f_i$; les λ_i sont les valeurs propres (seules leurs valeurs absolues sont intrinsèques) et les formes $\lambda_i f_i$, qui vérifient l'équation $\ell \dot{_\gamma} T = \ell \otimes \ell$, sont les éléments de R (intrinsèques).

Pour tout x dans E, $T(x, \cdot, \cdot)$ est la forme bilinéaire $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i \, f_i(x) \, f_i \otimes f_i$; comme les $f_i \otimes f_j$ forment une base de $E^* \otimes E^*$ dans laquelle g s'écrit $\sum f_i \otimes f_i$, l'équation $T(x, \cdot, \cdot) = g$ équivaut à

$$\forall i \in \{1, ..., d\} \qquad \lambda_i f_i(x) = 1 \, .$$

Il est clair que dès que l'un des λ_i est nul, cette équation n'a pas de solution. Si aucun des λ_i n'est nul, on cherche x tel que $f_i(x) = \lambda_i^{-1}$ pour tout i; comme les f_i forment une base de E^*, il existe un tel x et un seul, soit x_0. Et, puisque les d formes linéaires indépendantes $\lambda_i f_i$ prennent la même valeur 1 au point x_0, l'hyperplan affine qu'elles engendrent est constitué des formes ℓ vérifiant $\ell(x_0) = 1$. ∎

4. Remarque : Cas des polynômes non homogènes

Deux mots, pour terminer, sur le cas des polynômes non homogènes. Si P est un polynôme à d variables, nous cherchons s'il existe une base $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ de E^* orthonormée pour γ et d polynômes R_i à une variable tels que $P = \sum R_i \circ f_i$.

En décomposant P en somme de polynômes homogènes, et en négligeant les termes de degré 0 ou 1, qui ne jouent ici aucun rôle, on est ramené à la question suivante : Étant donné un ensemble $\mathcal{T}$ de formes multilinéaires symétriques sur E, ayant chacune au moins deux arguments, à quelle condition existe-t-il une base de E^* orthonormée pour γ qui diagonalise simultanément toutes les formes de $\mathcal{T}$? La réponse est une extension directe du critère de diagonalisabilité : *Une condition nécessaire et suffisante est que, pour tous U et V dans $\mathcal{T}$, la forme multilinéaire $U \dot{\gamma} V$ soit symétrique.*

La nécessité est immédiate : Si, pour une base orthonormée $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ de E^*, on a $U = \sum_i \lambda_i f_i^{m\otimes}$ et $V = \sum_i \mu_i f_i^{n\otimes}$, la forme $(m+n-2)$-linéaire

$$U \dot{\gamma} V = \sum_i \lambda_i \mu_i f_i^{(m+n-2)\otimes}$$

est symétrique.

Réciproquement, supposons la condition satisfaite; et, sans restreindre la généralité, supposons que γ est la matrice identité. La démonstration est la même que celle du critère : on sait que toutes les matrices $A(x, ..., y)$ associées aux formes bilinéaires symétriques $T(x, ..., y, \cdot, \cdot)$, où T décrit $\mathcal{T}$ et $x, ..., y$ décrivent E, commutent entre elles. On en déduit (lemme 1) l'existence d'une base orthonormée $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ qui les diagonalise simultanément. Donc $T(x, ..., y, \cdot, \cdot)$ s'écrit $\sum_i \mu_i(x, ..., y)\, f_i \otimes f_i$ et, comme dans la démonstration du critère, ceci entraîne que la forme multilinéaire symétrique T vaut $\sum_i \lambda_i f_i^{n\otimes}$.

Lorsque c'est le cas et que P se diagonalise ainsi, pour obtenir la base $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ et l'écriture de P dans cette base, on peut faire le calcul séparément pour chacune des composantes homogènes de P en procédant comme indiqué plus haut.

Références

[1] S. Attal & M. Émery. Équations de structure pour des martingales vectorielles. *Séminaire de Probabilités XXVIII*, Lecture Notes in Mathematics 1583, Springer 1994.

[2] N. Bourbaki. Algèbre. Chapitres 4 à 7. Masson, Paris, 1981.

C.N.R.S. et Université Louis Pasteur
I.R.M.A.
7 rue René Descartes
67 084 Strasbourg