Questions proposées. Théorème de géométrie

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 1 (1810-1811), p. 62-64
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1810-1811__1__62_1>

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorème de Géométrie.

Si des droites, au nombre de plus de trois, sont tracées sur un même plan, elles se couperont en divers points, et, en prenant deux à deux, de toutes les manières possibles, ceux de ces points qui n'appartiendront pas à une même droite; on pourra y faire passer de nouvelles droites qui se couperont et couperont les premières en de nouveaux points : opérant sur ces droites, considérées conjointement avec les premiers, comme on avait fait sur celles-ci, on formera une troisième série de droites et de points, et cette troisième série pourra, par un semblable procédé, donner naissance à une quatrième, puis à une cinquième, et ainsi de suite; de manière qu'en général le nombre, tant des points que des droites du système, pourra être augmenté indéfiniment.

Ces choses ainsi entendues, soit tracé sur un même plan deux systèmes (S) et (Σ) composés l'un et l'autre de m droites, m étant au moins égal à trois; soit ensuite déduit des m droites de chaque système, de la manière qui vient d'être expliquée, tant de séries de droites et de points qu'on voudra ; soit alors désigné par d, d', d'', ... toutes les droites du premier système, et par δ, δ', δ'', ... leurs correspondantes dans le second ; soit en outre désigné par p, p', p'', ... les points du premier système et par ϖ, ϖ', ϖ'', ... leurs correspondans dans le second ; soit enfin désigné par D, D$'$, D$''$, ... de nouvelles droites indéfinies qui passent par les points correspondans des deux systèmes (1).

Cela posé, on propose de démontrer 1.° que, le système (S) étant construit arbitrairement, il est toujours possible de construire le système (Σ) de telle manière que, dans la série des droites D, D$'$, D$''$, ... il s'en trouve $2m-3$ qui soient parallèles ou qui concourent en un même point ; 2.° que, s'il en est ainsi, toutes les autres droites de la série D, D$'$, D$''$, ..., lesquelles pourront se trouver en nombre infini, seront d'elles-mêmes parallèles aux premières, ou concourront au même point qu'elles ; 3.° enfin que, dans la même hypothèse, les points de concours des droites correspondantes des deux systèmes, telles que d et δ, d' et δ', d'' et δ'', ..., lesquels points pourront être aussi en nombre infini, seront tous situés sur une même droite.

---

(1) Pour se former une idée nette de ces notations et de ce qu'on entend ici par points correspondans et droites correspondantes dans les deux systèmes, on peut supposer qu'on a d'abord désigné arbitrairement par les m premières lettres d, d', d'', ... les m droites primitives du système (S), et par les m premières lettres δ, δ', δ'', ... les m droites primitives du système (Σ) ; regardant alors comme droites correspondantes, dans les deux systèmes, celles qui se trouveront désignées par d et δ affectés des mêmes accens, on considérera comme points correspondans ceux qui seront déterminés par l'intersection des droites correspondantes, et on les désignera par p et ϖ affectés d'un pareil nombre d'accens : on considérera également comme de nouvelles droites correspondantes, celles qui seront assujetties à passer par des points correspondans, et on continuera à les designer par les lettres d et δ affectées des mêmes accens ; joignant enfin, par des droites indéfinies, les points correspondans des deux systèmes, on désignera par D celle qui joindra p et ϖ, par D$'$ celle qui joindra p' et ϖ', et ainsi de suite.

Porismes.

I.

Un cercle étant donné et un point étant donné arbitrairement sur son plan et dans son intérieur, il y a toujours une longueur, et une seule longueur, laquelle étant prise pour rayon d'un nouveau cercle ayant pour centre le point donné, il arrivera qu'un même triangle pourra être à la fois inscrit au premier des deux cercles, et circonscrit au second.

II.

Un cercle étant donné et un point étant donné arbitrairement sur son plan, il y a toujours une longueur, et une seule longueur, laquelle étant prise pour rayon d'un nouveau cercle ayant pour centre le point donné, il arrivera qu'un même triangle pourra être à la fois circonscrit au premier des deux cercles, et inscrit au second.