ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

LHUILIER

Solution du dernier des deux problèmes proposés à la page 32 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 2 (1811-1812), p. 117-125

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1811-1812__2__117_1>

Solution du dernier des deux problèmes proposés à la page 32 de ce volume ;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

Problème. Déterminer un quadrilatère dont on connaît les quatre côtés et la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés ?

Je remarque d'abord que ce problème donne lieu à un cas indéterminé. En effet, lorsque les côtés opposés d'un quadrilatère sont égaux, deux à deux, le quadrilatère est un parallélogramme; la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés est déterminée à être égale et parallèle à chacun des deux autres côtés, et le nombre des quadrilatères assujettis aux conditions données est illimité.

Supposons donc que la double égalité qui rend le problème indéterminé n'ait pas lieu.

Soit $AA'CC'$ (fig. 5) un quadrilatère dont les côtés sont donnés de grandeur de manière qu'on n'ait pas, en même temps, $AA'=CC'$ et $AC=A'C'$; que les côtés opposés AC et $A'C'$ soient coupés en deux parties égales, en B et B', et que la droite BB' soit donnée de grandeur; on demande le quadrilatère.

L'application des propositions générales de la Polygonométrie m'a paru le moyen le plus convenable pour résoudre le problème proposé : savoir, je vais chercher, au moyen de ces propositions, les angles en B et en B' que la droite BB' fait avec les côtés du quadrilatère dont elle joint les milieux.

Que dans le quadrilatère ABB'A' les angles extérieurs soient désignés par B et par B'; dans le quadrilatère CBB'C' les angles extérieurs seront les supplémens des premiers.

Dans le quadrilatère ABB'A', on a l'équation

$$\begin{aligned}AA'^2=AB^2+BB'^2+B'A'^2&+2AB\times BB'\times Cos.B\ ,\\ &+2AB\times B'A'\times Cos.(B+B')\ ,\\ &+2BB'\times B'A'\times Cos.B'.\end{aligned}$$

Dans le quadrilatère CBB'C', en remarquant que $BC=AB$ et que $B'C'=A'B'$, on a l'équation

$$\begin{aligned}CC'^2=AB^2+BB'^2+B'A'^2&-2AB\times BB'\times Cos.B\ ,\\ &+2AB\times B'A'\times Cos.(B+B')\ ,\\ &-2BB'\times B'A'\times Cos.B'.\end{aligned}$$

Ajoutant et retranchant successivement la seconde équation à la première, il viendra, en réduisant,

$$AA'^2+CC'^2=2AB^2+2BB'^2+2B'A'^2+4AB\times B'A'\times Cos.(B+B').$$

$$AA'^2-CC'^2=4AB\times BB'\times Cos.B+4BB'\times B'A'\times Cos.B'.$$

Ce qui donne

$$Cos.(B+B')=\frac{AA'^2+CC'^2-2(AB^2+BB'^2+B'A'^2)}{4AB\times B'A'}\ ,$$

$$AB.Cos.B+A'B'.Cos.B'=\frac{\frac{AA'+CC'}{2}\times\frac{AA'-CC'}{2}}{BB'}.$$

Par la première de ces équations, on connaît la somme des angles

B et B′, par le cosinus de cette somme; par la seconde on connaît la somme des produits des cosinus des mêmes angles par les droites données AB et A′B′. Partant, le problème est ramené à cet autre : trouver deux angles dont on connaît la somme, et la somme des produits de leurs cosinus par des droites données.

Remarque I. Lorsque $AA'=CC'$ et $AB=A'B'$, on a aussi $BB'=AA'=CC'$; il vient conséquemment

$$Cos.(B+B')=-1\ ;$$

donc la somme des angles B et B′ vaut deux droites, et conséquemment les droites AC et A′C′ sont parallèles entre elles. Alors $Cos.B'=-Cos.B$, et la seconde équation devient

$$(AB-A'B')Cos.B=AA'-CC'\ ;$$

d'où $Cos.B=\frac{0}{0}$; partant, l'angle B est indéterminé, comme il doit l'être en effet.

Remarque II. Le problème : couper un angle donné en deux parties telles que la somme des produits de leurs cosinus par des droites données soit donnée de grandeur, peut être résolu de différentes manières, soit par l'algèbre soit par la géométrie. Le procédé suivant, fondé sur la doctrine des centres des moyennes distances, me paraît l'un des plus élégans.

Soit ACA′ (fig. 6) un angle donné, on demande de le partager en deux parties ACX; A′CX, par une droite CX, de manière que les sommes de leurs cosinus, pour les rayons donnés de grandeur CA et CA′, soient égales à une droite donnée de grandeur 2α?

Soit menée AA′, laquelle soit coupée en deux parties égales, au point Z; de ce point, comme centre, et avec un rayon égal à la moitié α de la droite donnée, soit décrite une circonférence de cercle; du sommet C soit menée (s'il est possible) une tangente à ce cercle, et du point C soit élevée à cette tangente une perpendiculaire CX; cette perpendiculaire sera la droite qui divisera l'angle proposé dans les parties cherchées.

Pour que le problème soit possible, le point C ne doit pas être au dedans de la circonférence dont Z est le centre et dont α est le rayon, c'est-à-dire, qu'on doit avoir $\alpha \leqq CZ$. Or,

$$CA^2+CA'^2=2CZ^2=2AZ^2=2CZ^2+\tfrac{1}{2}AA'^2$$
$$=2CZ^2+\frac{CA^2+CA'^2-2CA\times CA'.Cos.C}{2};$$

donc

$$2CZ^2=\frac{CA^2+CA'^2+2CA\times CA'.Cos.C}{2},$$

et

$$CZ^2=\frac{CA^2+CA'^2+2CA\times CA.Cos.C}{4};$$

on doit donc avoir

$$4\alpha^2 \leqq CA^2+2CA\times CA'.Cos.C+CA'^2.$$

Dans le cas présent, cette inégalité devient

$$\left\{\frac{\tfrac{1}{2}(AA'+CC').\tfrac{1}{2}(AA'-CC')}{BB'}\right\}^2 \leqq AB^2+A'B'^2+2AB\times A'B'$$
$$\times\frac{AA'^2+CC'^2-2(AB^2+BB'^2+A'B'^2)}{4AB\times A'B'},$$
$$\leqq AB^2+A'B'^2+\frac{AA'^2+CC'^2-2(AB^2+BB'^2+AB'^2)}{2},$$
$$\leqq \frac{AA'^2+CC'^2}{2}-BB'^2.$$

De là on tire $\left\{\begin{array}{l} BB' \geqq \tfrac{1}{2}(AA'-CC'), \\ BB' \leqq \tfrac{1}{2}(AA'+SC'); \end{array}\right.$

savoir; *Dans tout quadrilatère, la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés n'est pas plus petite que la demi-différence des deux autres côtés, et elle n'est pas plus grande que leur demi-somme.*

Remarque

Remarque III. L'équation

$$AB.Cos.B + A'B'.Cos.B' = \frac{\frac{1}{2}(AA'+CC') \times \frac{1}{2}(AA'-CC')}{BB'},$$

donne lieu à la construction suivante :

Des points A et A' soient abaissées sur BB' les perpendiculaires Ab et $A'b'$; on aura

$$Bb = AB.Cos.B, \qquad B'b' = A'B'.Cos.B' ;$$

donc

$$bb' = BB' + AB.Cos.B + A'B'.Cos. = \frac{\frac{1}{2}(AA'+CC') \times \frac{1}{2}(AA'-CC')}{BB'} + BB'.$$

Or, le rapport de AA' à bb' est le rapport du sinus total au cosinus de l'inclinaison du côté BB' au côté AA'; donc on connaît cette inclinaison ; et, par la première équation, on connaît celle des deux côtés AC et $A'C'$ l'un à l'autre.

Remarque IV. De là le problème proposé est ramené au suivant : soient deux cercles donnés de grandeur et de position, et soit une droite donnée de position ; mener une droite parallèle à la droite donnée de position, de manière que sa partie comprise entre les circonférences des deux cercles soit de grandeur donnée.

En effet, les points B et B' sont à des circonférences données, dont les centres sont A et A', et dont les rayons sont AB et $A'B'$; et la droite BB', donnée de grandeur, doit être inscrite entre les circonférences de ces cercles, de manière qu'elle fasse un angle donné avec la droite AA' qui joint leurs centres.

Par le centre A soit menée une droite $A\alpha$, égale à BB' et faisant avec AA' l'angle donné. Du point α comme centre, avec le rayon AB, soit décrite une circonférence de cercle qui rencontre (s'il est possible) en B' la circonférence dont A' est le centre et $A'B'$ le rayon ; soit enfin menée $B'B$ parallèle à $A\alpha$, et terminée en B à la circonférence de l'autre cercle ; la droite $B'B$ sera la position de la droite qui joint les milieux des côtés opposés AC et $A'C'$.

Si la circonférence décrite du centre α avec le rayon AB, coupe la circonférence décrite avec le rayon $A'B'$ et le centre A', le problème proposé a deux solutions.

Si la rencontre de ces circonférences n'a pas lieu, le problème est impossible.

Si enfin la rencontre se fait par contact, il y a une limite entre les quantités données.

Pour que le problème soit possible, on doit avoir les deux conditions

$$\left.\begin{array}{l} 1.^{\circ}\ \mathrm{AB} \geqq \mathrm{A'}\alpha - \mathrm{A'B'} \\ 2.^{\circ}\ \mathrm{AB} \leqq \mathrm{A'}\alpha + \mathrm{A'B'} \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A'}\alpha \leqq \mathrm{AB} + \mathrm{A'B'} \\ \mathrm{A'}\alpha \geqq \mathrm{AB} - \mathrm{A'B'} \end{array}\right\} \text{ donc } \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A'}\alpha^2 \leqq (\mathrm{AB} + \mathrm{A'B'})^2\ , \\ \mathrm{A'}\alpha^2 \geqq (\mathrm{AB} - \mathrm{A'B'})^2\ ; \end{array}\right.$$

or,

$$\begin{aligned} \mathrm{A'}\alpha^2 &= \mathrm{AA'}^2 + \mathrm{A}\alpha^2 - 2\mathrm{AA'} \times \mathrm{A}\alpha.\mathit{Cos}.\mathrm{A'A}\alpha \\ &= \mathrm{AA'}^2 + \mathrm{A}\alpha^2 - 2\mathrm{BB'} \times bb' \\ &= \mathrm{AA'}^2 + \mathrm{BB'}^2 - 2\mathrm{BB'} \times bb' \\ &= \mathrm{AA'}^2 + \mathrm{BB'}^2 - 2\mathrm{BB'}\left\{\mathrm{BB'} + \frac{\frac{1}{2}(\mathrm{AA'} + \mathrm{CC'}) \times \frac{1}{2}(\mathrm{AA'} - \mathrm{CC})}{\mathrm{BB'}}\right\} \\ &= \mathrm{AA'}^2 - \mathrm{BB'}^2 - \tfrac{1}{2}(\mathrm{AA'}^2 - \mathrm{CC'}^2) \\ &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{AA'}^2 + \mathrm{CC'}^2) - \mathrm{BB'}^2\ ; \end{aligned}$$

on a donc les deux limites

$$\left.\begin{array}{l} (\mathrm{AB} + \mathrm{A'B'})^2 \geqq \\ (\mathrm{AB} - \mathrm{A'B'})^2 \leqq \end{array}\right\} \tfrac{1}{2}(\mathrm{AA'}^2 + \mathrm{CC'}^2) - \mathrm{BB'}^2.$$

Autre solution. Le problème proposé peut aussi être résolu, indépendamment des propositions générales de la polygonométrie, comme il suit.

Que les côtés AC, A'C' se rencontrent (s'il y a lieu) en S, (fig. 7) on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{CC'}^2 &= \mathrm{CS}^2 + \mathrm{C'S}^2 - 2\mathrm{CS} \times \mathrm{C'S}.\mathit{Cos}.\mathrm{S}\ , \\ &= (\mathrm{BS} - \mathrm{BC})^2 + (\mathrm{B'S} - \mathrm{B'C})^2 - 2(\mathrm{BS} - \mathrm{BC})(\mathrm{B'S} - \mathrm{B'C'}).\mathit{Cos}.\mathrm{S}\ , \\ &= \mathrm{BB'}^2 - 2\mathrm{BS} \times \mathrm{BC} + 2\mathrm{BS} \times \mathrm{B'C'}.\mathit{Cos}\ \mathrm{S} + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{B'C'}^2 - 2\mathrm{BC} \times \mathrm{B'C'}.\mathit{Cos}.\mathrm{S}. \\ &\quad - 2\mathrm{B'S} \times \mathrm{B'C'} + 2\mathrm{B'S} \times \mathrm{BC}.\mathit{Cos}.\mathrm{S}. \end{aligned}$$

On trouvera par un calcul à peu près semblable,

$$\begin{aligned} \mathrm{AA'}^2 = \mathrm{BB'}^2 &+ 2\mathrm{BS} \times \mathrm{BC} - 2\mathrm{BS} \times \mathrm{B'C'}.\mathit{Cos}.\mathrm{S} + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{B'C'}^2 - 2\mathrm{BC} \times \mathrm{B'C'}.\mathit{Cos}.\mathrm{S}. \\ &+ 2\mathrm{B'S} \times \mathrm{B'C'} - 2\mathrm{B'S} \times \mathrm{BC}.\mathit{Cos}.\mathrm{S}. \end{aligned}$$

de là

$$\begin{aligned} \mathrm{AA'}^2 + \mathrm{CC'}^2 &= 2\mathrm{BB'}^2 + 2\mathrm{BC}^2 + 2\mathrm{B'C'}^2 - 4\mathrm{BC} \times \mathrm{B'C'}.\mathit{Cos}.\mathrm{S}\ , \\ \mathrm{AA'}^2 - \mathrm{CC'}^2 &= 4\mathrm{BS} \times \mathrm{BC} - 4\mathrm{BS} \times \mathrm{B'C'}.\mathit{Cos}.\mathrm{S}\ , \\ &\quad + 4\mathrm{B'S} \times \mathrm{B'C'} - 4\mathrm{B'S} \times \mathrm{BC}.\mathit{Cos}.\mathrm{S}. \end{aligned}$$

La première des ces équations donne

$$Cos.S=\frac{2(BB'^2+BC^2+B'C'^2)-(AA'^2+CC'^2)}{AC\times A'C'};$$

et de la seconde on tire

$$4BS(BC-B'C'.Cos.S)+4B'S(B'C'-BC.Cos.S)=AA'^2-CC'^2.$$

Partant, dans le triangle BSB′, on connaît la base BB′, l'angle S au sommet, et la somme $AA'^2-CC'^2$ des rectangles des deux côtés BS et B′S′ par les quantités données $BC-B'C'.Cos.S$ et $B'C'-BC.Cos.S$; lesquelles quantités données reviennent respectivement à

$$\frac{AA'^2+CC'^2-2BB'^2+2BC^2-2B'C'^2}{4BC},\quad\frac{AA'^2+CC'^2-2BB'^2-2BC^2+2B'C'^2}{4B'C'}.$$

Ainsi, le problème proposé, sur le quadrilatère, est ramené au problème suivant, sur un triangle : on demande un triangle BSB′ dont on connaît la base BB′, l'angle au sommet S, et la somme des rectangles des côtés BS et B′S par des droites données ?

Solution analitique du même problème ;

Par M. Rochat, professeur de mathématiques et de navigation à St-Brieux.

Soit le quadrilatère BCDE (fig. 8), dont les milieux des côtés BC et DE sont respectivement A et K, et dans lequel on connaît $AK=a$, $BC=b$, $DE=c$, $CE=d$, $BD=e$. Soient pris AK pour axe des x, et le point A pour origine ; et soient les coordonnées des sommets ainsi qu'il suit :

$$\text{pour B}\begin{cases}+m,\\+n;\end{cases}\quad\text{pour C}\begin{cases}-m,\\-n;\end{cases}\quad\text{pour D}\begin{cases}a-p,\\+q;\end{cases}\quad\text{pour E}\begin{cases}a+p,\\-q;\end{cases}$$

les coordonnées des milieux respectifs G, H de BD, CE seront

$$\text{pour G}\begin{cases}\tfrac{1}{2}(a-p+m),\\\tfrac{1}{2}(q+n);\end{cases}\quad\text{pour H}\begin{cases}\tfrac{1}{2}(a+p-m),\\-\tfrac{1}{2}(q+n);\end{cases}$$

soit fait enfin $GH=Z$; on aura les équations de condition

$$4(m^2+n^2)=b^2 \ , \quad (a-p-m)^2+(q-n)^2=e \ ,$$

$$(p-m)^2+(q+n)^2=Z^2.$$

$$4(p^2+q^2)=c^2 \ , \quad (a+p+m)^2+(q-n)^2=d \ ,$$

En traitant $p+m$ et $q-n$ comme inconnues dans celles de la seconde colonne, et quarrant il viendra

$$(p+m)^2=\left\{\frac{d^2-e^2}{4a}\right\}^2 \ , \quad (q-n)^2=\frac{8a^2(d^2+e^2-2a^2)-(d^2-e^2)^2}{16a^2} \ ;$$

ajoutant ces équations à l'équation en Z, il viendra, en doublant et retranchant les équations de la première colonne,

$$2Z^2+d^2+e^2=2a^2+b^2+c^2 \ ;$$

au moyen de quoi Z peut être regardé comme connu.

Cela posé, les coordonnées des points M et P, milieux respectifs des diagonales BE et CD, sont

$$\text{pour M}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}(a+p+m) \ , \\ -\frac{1}{2}(q-n) \ ;\end{array}\right. \qquad \text{pour P}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}(a-p-m) \ , \\ \frac{1}{2}(q-n) \ ;\end{array}\right.$$

d'où il suit que la droite PM, passant par l'intersection O des droites AK et GH, aura pour équation

$$y+\tfrac{1}{2}(q-n)=-\frac{q-n}{p+m}\left\{x-\tfrac{1}{2}(a+p+m)\right\} \ ;$$

ainsi AK forme avec PM un angle dont la tangente tabulaire est

$$-\frac{p-n}{q+m}=-\frac{\sqrt{8a^2(d^2+e^2-2a^2)-(d^2-e^2)^2}}{d^2-e^2} \ ;$$

on trouvera de même que GH forme avec la même droite un angle dont la tangente est

$$-\frac{\sqrt{8z^2(b^2+c^2-2z^2)-(b^2-c^2)^2}}{b^2-c^2} \ ;$$

l'angle formé par les droites AK et GH; angle qui est la somme ou la différence de ces deux-là, pourra donc être déterminé; et, comme les grandeurs de ces droites sont connues, et que d'ailleurs leur intersection O est leur milieu commun, on aura tout ce qui sera nécessaire pour construire le quadrilatère demandé.

Cette analise s'applique également aux trois sortes de quadrilatères, et les limites du problème sont données par celles de la réalité du radical (*).