ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

DE MAIZIÈRE

Analise élémentaire. Considérations propres à fournir, dans un grand nombre de cas, des limites extrêmes, très-approchées, des racines des équations numériques

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 41-46
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__41_0>

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

Considérations propres à fournir, dans un grand nombre de cas, des limites extrêmes, très-approchées, des racines des équations numériques;

Voir p. [illegible]

Par M. DE MAIZIÈRE, professeur de mathématiques des Pages de LL. MM., et professeur de mathématiques spéciales au lycée de Versailles.

I. ON sait que l'emploi des dérivées successives conduit, d'une manière sure, au nombre entier immédiatement supérieur à la plus grande racine additive d'une équation; que cette méthode est très-rapide, si cette plus grande racine est un petit nombre; mais qu'elle devient très-pénible, et pour ainsi dire impraticable, lorsqu'au contraire la plus grande racine additive est un grand nombre, surtout si l'équation est d'un degré un peu élevé.

La méthode que je vais exposer pourra sembler moins générale; mais elle est beaucoup plus rapide, dans le cas où la plus grande racine additive est un grand nombre. Elle est fondée sur un théorème généralement connu; elle n'en est, en quelque sorte, que le développement; et elle est d'ailleurs si variée qu'elle peut être considérée comme satisfaisant à tous les cas.

II. Une équation quelconque $X=0$, peut être représentée comme il suit :

$$x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+\ldots\ldots-P_ix^{m-i}+\ldots\ldots-P_kx^{m-k}+\ldots\ldots+P_m=0; \quad (1)$$

$-P_i$ étant son premier coefficient soustractif; et $-P_k$ son coefficient soustractif le plus éloigné de zéro. On sait que, dans cet état de choses, on doit avoir

$$x<1+\sqrt[i]{P_k}\,. \qquad (2)$$

Quoique la démonstration de cette proposition ne soit pas difficile, et qu'elle se trouve dans plusieurs ouvrages élémentaires; comme on s'est quelquefois mépris sur le sens des mots, et sur la véritable interprétation du résultat; on ne trouvera peut-être pas mauvais que je reproduise ici cette démonstration.

On aura

$$x<L\,, \qquad (3)$$

si, L étant substituée à x, dans $X=0$, le résultat est additif, et si les résultats ultérieurs conservent le signe $+$, pour tout nombre substitué $>L$. Or, de la somme des additifs de (1), la plus petite valeur est x^m; et de la somme des soustractifs, la valeur la plus éloignée de zéro est

$$-P_k(x^{m-i}+x^{m-i-1}+x^{m-i-2}+\ldots\ldots+1)\;;$$

valeur qu'elle aurait, en effet, si chaque terme était soustractif depuis le premier soustractif $-P_i x^{m-i}$, et s'ils avaient tous pour coefficiens le coefficient $-P_k$ le plus éloigné de zéro. x sera donc $<L$, si, pour le nombre L, et pour tout nombre supérieur à L, on a

$$L^m>P_k\{L^{m-i}+L^{m-i-1}+L^{m-i-2}+\ldots\ldots+1\}\,. \qquad (4)$$

Dans cette relation, le polynôme $L^{m-i}+L^{m-i-1}+L^{m-i-2}+\ldots\ldots+1$ est le quotient de la division de $L^{m-i+1}-1$ par $L-1$; donc la condition (4) sera remplie, si la suivante est satisfaite

$$L^m>P_k\left\{\frac{L^{m-i+1}-1}{L-1}\right\}. \qquad (5)$$

Cette dernière peut être mise sous cette autre forme

$$L^m>\frac{P_kL^{m-i+1}}{L-1}-\frac{P_k}{L-1}\;; \qquad (6)$$

et l'on voit que la condition (6) sera satisfaite par L, et par tout nombre supérieur à L, si l'on a seulement

$$L^m \geqq \frac{P_k L^{m-i+1}}{L-1}\ ; \qquad (7)$$

pourvu toutefois que L soit trouvé >1 ; sans quoi la relation (7) pourrait ne pas entraîner la relation (6). La relation (7), et conséquemment toutes les précédentes seront donc satisfaites, (sauf l'exception qui vient d'être indiquée), si l'on a

$$L^m(L-1) \geqq P_k L^{m-i+1}\ , \qquad (8)$$

ou

$$L^{m-(m-i+1)}.(L-1) \geqq P_k\ , \qquad (9)$$

ou encore

$$L^{i-1}(L-1) \geqq P_k\ ; \qquad (10)$$

or, cette dernière condition sera remplie par L et, *à fortiori*, par tout nombre plus grand que L, si l'on a seulement

$$(L-1)^{i-1}(L-1) = P_k\ , \qquad (11)$$

ou

$$(L-1)^i = P_k\ , \qquad (12)$$

ou enfin

$$L = 1 + \sqrt[i]{P_k}\ . \qquad (13)$$

Maintenant, pour L et pour tout nombre $>L$, la relation (10) sera satisfaite, ainsi que chacune des précédentes, jusqu'à la relation (7) ; et, parce que (13) donne $L>1$, les mêmes nombres qui satisferont à (10) satisferont aussi à (6), et par conséquent à la relation (4) ; donc

$$x < 1 + \sqrt[i]{P_k}\ .$$

III. Voici présentement diverses observations propres à déduire de cette formule une limite très-approchée de la plus grande racine additive, même dans les cas qui paraissent les moins favorables.

1.° Si le premier coefficient soustractif $-P_i$ était précédé d'un coefficient additif P_h, tel qu'on eût

$$P_h \overline{\overline{>}} P_i \ ;$$

comme alors le binôme $P_h x^{m-h} - P_i x^{m-i}$ serait additif, pour toute valeur de $x > 1$; on pourrait faire abstraction du signe — qui précède P_i, et considérer comme premier coefficient soustractif le premier $-P_{i'}$ des suivans, qui ne se trouverait précédé d'aucun coefficient additif au moins aussi éloigné de zéro.

2.° Si $-P_k$, coefficient soustractif le plus éloigné de zéro, était précédé d'un coefficient additif P_g, tel qu'on eût

$$P_g \overline{\overline{>}} P_k \ ;$$

on pourrait, à ce coefficient, substituer le premier $-P_{k'}$ des suivans, que ne précéderait pas un coefficient additif au moins aussi éloigné de zéro.

3.° Si, le second terme étant négatif, le premier trinôme $x^m - P_1 x^{m-1} + P_2 x^{m-2}$, mis sous la forme $x^{m-2}(x^2 - P_1 x + P_2)$, avait ses deux dernières racines imaginaires ; ce qui arriverait si l'on avait $P_1^2 < 4P_2$; ce trinôme resterait additif, quelque valeur réelle qu'on donnât à x ; on pourrait donc faire abstraction du signe — du second terme, et prendre tant pour premier coefficient soustractif que pour coefficient soustractif le plus éloigné de zéro, ceux des suivans qui satiferaient à ces conditions. A quoi on doit ajouter qu'on pourrait, à l'égard de ces derniers, faire usage des deux remarques précédentes.

4.° Si $-P_i x^{m-i}$ ou $-P_k x^{m-k}$ pouvaient être compris, comme seconds termes, dans des trinômes à racines imaginaires, on pourrait faire abstraction des signes — qui les affectent, et les considérer comme additifs.

5.° Si l'un ou l'autre des termes $-P_i x^{-mi}$, $-P_k x^{m-k}$ peuvent être compris dans un groupe de termes rendus additifs, par une substitution très-inférieure à celle que donne l'usage de la formule, même modifiée, $L = 1 + \sqrt[i]{P_k}$; alors ces termes devront tous être considérés comme s'ils étaient positifs, et il faudra les remplacer par des termes choisis dans les deux parties restantes du premier membre de l'équation.

6.° Enfin, si l'on pouvait décomposer le premier membre de $X=0$ en plusieurs groupes rendus respectivement additifs par L_1, L_2, L_3, ... tous $<1+\sqrt[i]{P_k}$; on serait sûr que x devrait être inférieur au plus grand de tous les nombres L_1, L_2, L_3,...

IV. *EXEMPLE I.* Soit l'équation

$$x^5+23x^4-10x^3+5x^2-400x+8500=0. \qquad (1)$$

On sait que la formule indiquée par Lacroix donnerait $L=401$. Le premier usage de la formule $1+\sqrt[i]{P_k}$ donne $L=21$. On peut modifier cette limite en écrivant l'équation (1) comme il suit

$$\begin{array}{l} x^5+10x^4-10x^3+5x^2-400x+8500=0\ ; \qquad (2) \\ \quad +13x^4 \end{array}$$

or, comme le binôme $10x^4-10x^3$ est toujours additif, pour $x>1$, la formule $1+\sqrt[i]{P_k}$ donne $L=1+\sqrt[4]{400}$ ou $L=6$.

On peut encore écrire la proposée sous la forme

$$x^5+10(x^4-x^3)+5x^2+13x(x^3-30)-10x+8500=0\ ; \qquad (3)$$

et, comme le 4.ᵉ terme est rendu additif par $x=4$, on a $L=4$.

Enfin la proposée peut être écrite comme il suit

$$x^5+10(x^4-x^3)+13x^4+5(x^2-80x+1700)=0\ ; \qquad (4)$$

et, comme le trinôme $x^2-80x+1700$ a ses racines imaginaires, on a $L=1$.

EXEMPLE II. Soit l'équation

$$x^6-30x^5+260x^4+3x^3-1000x^2-40000x-8600=0. \qquad (1)$$

Le premier emploi de la formule $1+\sqrt[i]{P_k}$ donne $L=40001$. Mais, en écrivant la proposée sous la forme

$$x^4(x^2-30x+226)+34x^4+3x^3-1000x^2-40000x-8600=0\ ; \qquad (2)$$

comme les racines du trinôme $x^2-30x+226$ sont imaginaires, on pourra prendre $L=1+\sqrt[4]{40000}$ ou $L=16$.

On peut encore écrire la proposée comme il suit :

$$x^4(x^2-30x+226)+3x^3+34x^2(x^2-\tfrac{1000}{34})-40000x-8600=0 \; ; \quad (3)$$

x, par ce qui précède, devant être >6, on peut faire abstraction du terme $34x^2(x^2-\frac{1000}{34})$, toujours additif, pour toute valeur de x au-dessus de cette limite ; on pourra donc prendre $L=1+\sqrt[5]{40000}$, pourvu que cette valeur ne soit pas inférieure à 6 ; elle peut donc être admise, car elle donne $L=10$.

EXEMPLE III. Soit l'équation

$$x^3-7x+7=0. \qquad (1)$$

Ce cas est un des plus favorables à la méthode des dérivées successives, qui donne bientôt $L=2$. Le premier usage de la formule $1+\sqrt[i]{P_k}$ donne $L=4$; mais, en mettant la proposée sous la forme

$$x(x^2-7)+7=0\;, \qquad (2)$$

on trouve $L=3$. Ainsi, dans les cas même les plus défavorables, la méthode que je viens d'exposer ne le cède guère à celle des dérivées.

Je ne dirai rien de la limite des racines soustractives, dont la recherche peut toujours, comme l'on sait, être ramenée à ce qui précède.