ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

TH. BARROIS

Trigonométrie. Essai sur diverses expressions approchées de la circonférence du cercle

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 4 (1813-1814), p. 360-364
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1813-1814__4__360_0>

TRIGONOMÉTRIE.

Essai sur diverses expressions approchées de la circonférence du cercle.

Par M. Th. Barrois.

Soient m et n deux nombres entiers positifs quelconques, et soient p et P respectivement les périmètres des polygones réguliers de 2^mn côtés inscrit et circonscrit au cercle dont le rayon est l'unité, et dont conséquemment la circonférence est 2ϖ ; on aura évidemment.

$$p=2.^{m+1}n\,\text{Sin.}\frac{\varpi}{2.^mn}\;,\quad P=2.^{m+1}n\,\text{Tang.}\frac{\varpi}{2.^mn}=2.^{m+1}n\frac{\text{Sin.}\dfrac{\varpi}{2.^mn}}{\text{Cos.}\dfrac{\varpi}{2.^mn}}\;;$$

En second lieu, les équations des deux cônes C, C'' étant respectivement

$$(ax+by)+cz)^2=(x^2+y^2+z^2)\text{Cos.}^2r\;,$$

$$z^2=(x^2+y^2+z^2)\text{Cos.}^2r''\;;$$

en les multipliant en croix et extrayant la racine quarrée de l'équation-produit, l'équation résultante du premier degré, ayant lieu en même temps que ces deux-là, sera celle d'un plan contenant les droites suivant lesquelles ces deux cônes se coupent ; or cette équation est

$$(ax+by)\text{Cos.}r''=z(\text{Cos.}r-c\text{Cos.}r'')\;,$$

c'est-à-dire la première des équations (11).

$$P-p=2.^{m+1}n\left\{\text{Tang.}\,\frac{\varpi}{2.^m n}-\text{Sin.}\,\frac{\varpi}{2.^m n}\right\}.$$

Mais on sait que, x étant un arc quelconque, on a

$$\text{Sin.}x=2\text{Cos.}\,\frac{x}{2}\text{Sin.}\,\frac{x}{2}$$

$$=4\text{Cos.}\,\frac{x}{2}\text{Cos.}\,\frac{x}{4}\text{Sin.}\,\frac{x}{4}$$

$$=8\text{Cos.}\,\frac{x}{2}\text{Cos.}\,\frac{x}{4}\text{Cos.}\,\frac{x}{8}\text{Sin.}\,\frac{x}{8}$$

$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=2^m\text{Cos.}\,\frac{x}{2}\text{Cos.}\,\frac{x}{4}\text{Cos.}\,\frac{x}{8}\text{Cos.}\,\frac{x}{16}\ldots\ldots\text{Cos.}\,\frac{x}{2^m}\text{Sin.}\,\frac{x}{2^m};$$

D'où

$$2^m\text{Sin.}\,\frac{x}{2^m}=\frac{\text{Sin.}x}{\text{Cos.}\,\frac{x}{2}\text{Cos.}\,\frac{x}{4}\text{Cos.}\,\frac{x}{8}\ldots\text{Cos.}\,\frac{x}{2^m}};$$

En faisant dans cette formule $x=\frac{\varpi}{n}$, elle deviendra

$$2^m.\text{Sin.}\,\frac{\varpi}{2^m.n}=\frac{\text{Sin.}\,\frac{\varpi}{n}}{\text{Cos.}\,\frac{\varpi}{2n}\text{Cos.}\,\frac{\varpi}{4n}\text{Cos.}\,\frac{\varpi}{8n}\ldots\text{Cos.}\,\frac{\varpi}{2^m.n}};$$

valeur qui, substituée dans celles de p et P, les change en celles-ci

$$p=\frac{2n\,\text{Sin.}\,\frac{\varpi}{n}}{\text{Cos.}\,\frac{\varpi}{2n}\,\text{Cos.}\,\frac{\varpi}{4n}\,\text{Cos.}\,\frac{\varpi}{8n}\ldots\text{Cos.}\,\frac{\varpi}{2^m.n}}\,, \qquad (1)$$

$$P=\frac{2n\,\text{Sin.}\,\frac{\varpi}{n}}{\text{Cos.}\,\frac{\varpi}{2n}\,\text{Cos.}\,\frac{\varpi}{4n}\,\text{Cos.}\,\frac{\varpi}{8n}\ldots\text{Cos.}^2\,\frac{\varpi}{2^m.n}}\,. \qquad (2)$$

Et tels sont les périmètres des deux polygones dont il s'agit ; on voit que leurs expressions ne diffèrent que par le facteur $\text{Cos.}\frac{\varpi}{2^m.n}$ qui n'est qu'à la première puissance dans le dénominateur de la première, tandis qu'il se trouve au quarré dans le dénominateur de la seconde.

On a évidemment $2\varpi>p$ et $2\varpi<P$; on aura donc aussi

$$\varpi>\frac{n\,\text{Sin.}\,\frac{\varpi}{n}}{\text{Cos.}\,\frac{\varpi}{2n}\,\text{Cos.}\,\frac{\varpi}{4n}\,\text{Cos.}\,\frac{\varpi}{8n}\ldots\text{Cos.}\,\frac{\varpi}{2^m.n}}\,, \qquad (3)$$

$$\varpi<\frac{n\,\text{Sin.}\,\frac{\varpi}{n}}{\text{Cos}\,\frac{\varpi}{2n}\,\text{Cos.}\,\frac{\varpi}{4n}\,\text{Cos.}\,\frac{\varpi}{8n}\ldots\text{Cos.}^2\,\frac{\varpi}{2^m.n}}\,. \qquad (4)$$

Voila donc deux limites de la valeur du nombre ϖ ; limites d'autant plus resserrées, toutes choses égales d'ailleurs, que m sera plus grand. En prenant l'une ou l'autre pour valeur approchée de ϖ, la limite de l'erreur sera

$$2^m.n\left\{\text{Tang.}\,\frac{\varpi}{2^m.n}-\text{Sin.}\,\frac{\varpi}{2^m.n}\right\}.$$

Si donc on suppose $m=\infty$, on aura exactement, quel que soit n

$$\varpi=\frac{n\,\text{Sin.}\frac{\pi}{n}}{\text{Cos.}\frac{\pi}{2n}\,\text{Cos.}\frac{\pi}{4n}\,\text{Cos.}\frac{\pi}{8n}\,\text{Cos.}\frac{\pi}{16n}\ldots\ldots 1}, \qquad (5)$$

le nombre des facteurs du dénominateur devant être infini, et conséquemment le dernier étant l'unité.

On sait que, x étant un arc quelconque, on a

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{2}\sqrt{2+2\text{Cos.}x},$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{4}x=\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+2\text{Cos.}x}},$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{8}x=\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\text{Cos.}x}}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où il résulte, pour l'équation (5), cette autre forme

$$\varpi=\frac{n\,\text{Sin.}\frac{\varpi}{n}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+2\text{Cos.}\frac{\varpi}{n}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+2\text{Cos.}\frac{\varpi}{n}}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\text{Cos.}\frac{\varpi}{n}}}}\ldots\ldots 1}; \qquad (6)$$

Ainsi, toutes les fois que n sera l'un des nombres dans lesquels la circonférence peut être géométriquement divisée, c'est-à-dire, quelqu'un des nombres de la suite 2, 3, 5, 17, 257, ..., l'expression de ϖ sera entièrement algébrique.

Si, par exemple, on suppose $n=2$, d'où $\text{Sin.}\frac{\pi}{n}=\text{Sin.}\frac{\pi}{2}=1$, et $\text{Cos.}\frac{\pi}{n}=\text{Cos.}\frac{\pi}{2}=0$, il viendra

$$\varpi=\frac{2}{\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\ldots 1}$$

Si, ensuite, on suppose $n=3$, d'où $\text{Sin.}\frac{\pi}{n}=\text{Sin.}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, et $\text{Cos.}\frac{\pi}{n}=\text{Cos.}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, il viendra

$$\varpi=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\ldots 1}$$

et ainsi de suite.

Ces diverses expressions semblent propres à mettre en évidence l'incommensurabilité du nombre ϖ et de toutes les puissances de ce nombre.