ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Correspondance. Lettre au rédacteur des Annales, contenant une démonstration élémentaire du lemme énoncé à la page 345 du 4.me volume de ce recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 186-188
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__186_1>

CORRESPONDANCE.

Lettre au Rédacteur des Annales , *contenant une démonstration élémentaire du* Lemme *énoncé à la page* 345 *du* 4.^{me} *volume de ce recueil.*

MONSIEUR,

J'AURAIS bien désiré pouvoir répondre complètement à l'appel que vous faites aux géomètres, dans la note de la page 348 du 4.^{me}

volume des *Annales* ; et rendre ainsi tout à fait élémentaire la belle théorie développée à la page 138 du même volume. En attendant que quelqu'un de plus adroit que moi y soit parvenu, je vais au moins donner du *Lemme* de la page 345 une démonstration, toujours algébrique, mais délivrée du moins de l'emploi du calcul différentiel.

La question dont il s'agit (pag. 346) est de rendre *minimum* l'expression

$$z=a\sqrt{k^2+x^2\text{Sin.}^2\alpha}+b\sqrt{k^2+y^2\text{Sin.}^2\beta}\,, \qquad (1)$$

sous les conditions

$$x+y=A\,, \qquad (2)$$

$$a\text{Sin.}\alpha=b\text{Sin.}\beta=\lambda k\,; \qquad (3)$$

A et λ étant deux constantes.

Soient fait d'abord passer sous les radicaux, dans (1), les coefficiens qui les affectent ; en ayant égard à (3), cette équation deviendra

$$z=k\{\sqrt{a^2+\lambda^2x^2}+\sqrt{b^2+\lambda^2+y^2}\}\,;$$

d'où en quarrant et extrayant ensuite la racine quarrée,

$$z=k\sqrt{(a^2+b^2)+\lambda^2(x^2+y^2)+2\sqrt{a^2b^2+\lambda^2(a^2y^2+b^2x^2)+\lambda^4x^2y^2}}\,;$$

équation qui, à l'aide de (2), et en posant, pour abréger,

$$(a+b)^2+\lambda^2A^2=C^2\,,\quad ab+\lambda^2xy=Z\,,$$

peut facilement être mise sous cette forme

$$z=k\sqrt{C^2+2\{\sqrt{Z^2+\lambda^2(ay-bx)^2}-Z\}}\,. \qquad (4)$$

Or, on voit évidemment que, C étant une constante, z ne peut devenir *minimum*, qu'autant que la fonction

$$\sqrt{Z^2+\lambda^2(ay-bx)^2}-Z$$

sera la plus petite possible ; et, comme d'ailleurs elle ne peut jamais devenir négative, on ne peut parvenir au but qu'en la rendant absolument nulle, c'est-à-dire, en posant

$$Z=\sqrt{Z^2+\lambda^2(ay-bx)^2}\ ;$$

ce qui donne, en quarrant, réduisant, divisant par λ^2, extrayant la racine quarrée et transposant,

$$bx=ay\ ,$$

En combinant cette équation avec (3), il vient

$$x\text{Sin.}\alpha=y\text{Sin.}\beta\ ,$$

d'où

$$k^2x^2\text{Sin.}^2\alpha=k^2y^2\text{Sin.}^2\beta\ ,$$

et

$$k^2x^2\text{Sin.}^2\alpha+x^2y^2\text{Sin.}^2\alpha\text{Sin.}^2\beta=k^2y^2\text{Sin.}^2\beta+x^2y^2\text{Sin.}^2\alpha\text{Sin.}^2\beta\ ,$$

ou encore

$$x^2\text{Sin.}^2\alpha(k^2+y^2\text{Sin.}^2\beta)=y^2\text{Sin.}^2\beta(k^2+x^2\text{Sin.}^2\alpha)\ ,$$

ou enfin

$$\frac{x\text{Sin.}\alpha}{\sqrt{k^2+x^2\text{Sin.}^2\alpha}}=\frac{y\text{Sin.}\beta}{\sqrt{k^2+y^2\text{Sin.}^2\beta}}\ ,$$

qui est précisément l'équation (6) de l'endroit cité.

Agréez, etc.

21 août 1814.

QUESTIONS