ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

J. B. DURRANDE

Questions résolues. Solution du premier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 92 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 5 (1814-1815), p. 295-298

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1814-1815__5__295_1>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1814-1815, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du premier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 92 de ce volume;

Par M. J. B. DURRANDE (*).

PROBLÈME. *Deux points étant donnés de position par rapport à une droite indefinie ; on propose de décrire trois cercles, de manière que deux d'entr'eux se touchent, touchent la droite donnée et touchent respectivement le troisième aux deux points donnés?*

(*) M. Durrande est un géomètre de 17 ans, qui a appris les mathématiques sans autre secours que celui des livres. *J. D. G.*

Solution. Les deux points donnés peuvent être situés d'un même côté de la droite donnée, ou bien ils peuvent être situés de différens côtés de cette droite, ce qui fait deux cas que nous allons considérer successivement.

Premier cas. Soient KHG (fig. 5, 6, 7) la droite indéfinie donnée, et A, B les deux points donnés d'un même côté de cette droite. Il s'agit de décrire trois cercles tels que deux d'entre eux se touchent, touchent la doite donnée et touchent le troisième l'un en A et l'autre en B.

Concevons que le problème soit résolu. Soient AFGPM, BFHQN deux cercles se touchant en F, touchant respectivement la droite donnée en G et H, et touchant un troisième cercle le premier en A et le second en B; soient D, E, C les centres respectifs de ces trois cercles.

Soient menées une droite MABN par les deux points donnés et une autre PDFEQ par les centres des deux premiers cercles; il est connu (*) que ces deux droites concourront en un même point K de la droite donnée; et, puisque A et B sont donnés, le point *k* le sera aussi.

Par la propriété des sécantes et par une autre propriété connue, on aura les trois proportions

$$KA : KF :: KP : KM ,$$

$$KN : KQ :: KF : KB ,$$

$$KQ : KN :: KM : KP \quad (**) ;$$

desquelles on conclura, par multiplication et réduction,

(*) Voyez l'*Apollonius Gallus* de Viète.
(**) *Ibidem*.

KA

KA : KF : : KF : KB ;

KF est donc moyenne proportionnelle entre les longueurs données KA et KB ; cette longueur KF est donc donnée, et par conséquent si l'on imagine du point K comme centre, et avec la longueur KF pour rayon un arc RFS, cet arc sera aussi donné; et, comme il touchera à la fois en F les deux cercles dont les centres sont D et E, le problème sera réduit à décrire deux cercles touchant à la fois la droite donnée et l'arc RFS, et passant de plus le premier par A et le second par B (*). Ces deux cercles étant décrits, le concours des prolongemens des rayons DA et EB déterminera le centre C du troisième.

Cette construction serait en défaut, si la droite qui joint les deux points donnés était parallèle à la droite donnée ; mais alors la perpendiculaire sur le milieu de cette droite serait une tangente commune aux deux premiers cercles ; de manière que le problème serait réduit à celui-ci : décrire un cercle qui, touchant les deux côtés d'un angle droit, passe en outre par un point donné (**).

Si l'on exigeait que les deux cercles qui doivent toucher la droite donnée fussent intérieurs l'un à l'autre, ils ne pourraient toucher cette droite qu'au même point. Alors A et B étant toujours les deux points donnés (fig. 8), et F étant le point où les cercles dont les centres sont D et E, touchent la droite donnée. Il est connu que le cercle qui touche le côté CE du triangle des centres et les prolongemens des deux autres DE et DC, passe par les trois points de contact A, B, F ; AB est donc une corde de ce cercle;

(*) Voyez, pour ces problèmes, les pages 350, 353 et 354 du IV volume de ce recueil.

(**) *Ibidem.*

J. D. G.

et, comme il doit avoir son centre sur la droite donnée, tangente commune à deux des cercles, ce centre O sera l'intersection de cette droite avec la perpendiculaire sur le milieu de AB. Décrivant donc de ce point comme centre, et avec OA=OB pour rayon, un arc; cet arc, par son intersection avec la droite donnée, déterminera le point commun de contact F; et alors le problème n'aura plus de difficulté.

Deuxième cas. Les points donnés A et B étant de différens côtés de la droite donnée OF (fig. 9, 10), les deux cercles qui doivent toucher cette droite la toucheront aussi de différens côtés; et, comme ils doivent de plus se toucher, ils ne pourront la toucher qu'au même point F qui sera aussi leur point commun; on se trouvera donc encore dans le dernier cas que nous venons d'examiner; il ne s'agira donc encore ici que d'élever sur le milieu de AB une perpendiculaire coupant la droite donnée en O, et de décrire ensuite du point O comme centre, et avec OA=OB pour rayon, un arc qui déterminera sur la droite donnée le point de contact F.

Lorsque la droite menée par les deux points donnés est perpendiculaire à la droite donnée, toutes ces constructions sont superflues, et le problème devient de la première facilité.