6589

# ANNALES

# DE MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES.

## *CONDITIONS DE LA SOUSCRIPTION.*

Depuis le premier juillet 1810, ce recueil paraît de mois en mois, par livraisons de 30 à 40 pages. La couverture de chaque livraison présente l'annonce des ouvrages nouveaux et des concours académiques.

On peut souscrire indifféremment,

Au bureau des *Annales*, rue d'Avignon, n.° 130, à Nismes, (Gard),

Chez madame *veuve Courcier*, imprimeur-libraire pour les mathématiques, quai des Augustins, n.° 57, à Paris,

Et à tous les bureaux de poste.

Les articles à insérer doivent être adressés, francs de port, au *Bureau des Annales*.

Le prix de la souscription annuelle est 21 fr. pour la France, et 24 fr. pour l'étranger. Il en coûte moitié moins pour six mois; et le prix de chacun des six premiers volumes est inférieur de 3 fr. à celui de la souscription annuelle. Les lettres et l'argent doivent être affranchis.

---

## AVIS au Relieur,

*Sur le placement des Planches.*

---

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Planche* | I. | Après la page | 60. |
| | II. | | 172. |
| | III. | | 200. |

# ANNALES
# DE
# MATHÉMATIQUES
## PURES ET APPLIQUÉES.
## RECUEIL PÉRIODIQUE,

RÉDIGÉ

Par J. D. GERGONNE, professeur de mathématiques et de philosophie, des académies de Nismes, de Nancy et de Turin.

TOME SIXIÈME.

A NISMES,

DE L'IMPRIMERIE DE P. DURAND-BELLE.

Et se trouve à PARIS, chez la dame Veuve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n.° 57.

1815 ET 1816.

ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

# ARITHMÉTIQUE POLITIQUE.

## *Quelques remarques sur les élections, les assemblées délibérantes et le système représentatif;*

Par M. GERGONNE.

Je faisais partie en 1791 de la garde nationale de Nancy, laquelle à cette époque se trouvait composée de 32 compagnies de 80 hommes chacune, formant quatre bataillons; en tout 2560 individus.

Cette institution, comme tant d'autres de la même date, était, comme l'on sait, extrêmement démocratique; tous les chefs, depuis le caporal jusqu'au colonel, étaient élus par ceux-là même qui devaient ensuite devenir leur subordonnés, et pour une année seulement, sauf réélection. Etait-ce un mal? était-ce un bien? c'est là une question tout à fait étrangère à mon sujet.

Le grade de colonel ne pouvait être postulé par beaucoup de gens; il exigeait quelques talens militaires, de l'aisance, du loisir et une sorte de crédit et de considération dans le public. Les suffrages ne roulaient donc guère, à chaque élection, que sur deux individus, entre lesquels les votans prenaient parti, souvent assez chaudement, se traitant réciproquement de mauvais citoyens, et se donnant même quelquefois des épithètes moins honnêtes encore, comme cela se pratique en pareil cas.

Le colonel en charge cette année-là ayant donné sa démission, les compagnies furent convoquées, chez leurs capitaines respectifs, pour procéder à son remplacement. J'obtins, non sans quelque peine, que le procès-verbal des opérations de la compagnie dont je faisais partie, demeurerait chargé de la totalité des votes émis, et dont la plupart étaient réputés voix perdues, par la majorité des votans.

Mais on n'avait pas pris la même précaution partout; et, lorque les 32 procès-verbaux des compagnies furent entre les mains du conseil d'administration, qui devait en faire le récensement, on s'aperçut que la plupart se bornaient à énoncer le nom du candidat qui avait réuni en sa faveur le vœu de la majorité.

Quelques membres du conseil, en fort petit nombre au surplus, proposèrent de faire recommencer les opérations; mais on était pressé d'en finir; et il fut conséquemment décidé que, dans chaque procès-verbal, on réputerait candidat élu par la compagnie celui qui aurait réuni le plus de voix en sa faveur; et que, sans égard aux suffrages tombés sur d'autres, celui qui aurait été désigné par la majorité absolue des compagnies serait définitivement élu.

On supposa donc tacitement, et on crut bonnement en effet, que la majorité absolue des suffrages de la majorité absolue des compagnies devait former la majorité absolue des suffrages des votans. Cependant, pendant qu'on procédait au récensement des procès-verbaux, je fis en moi-même le petit calcul que voici :

La majorité absolue des suffrages dans une compagnie étant 41 et la majorité absolue des compagnies étant 17, il s'ensuit que la majorité absolue des suffrages de la majorité absolue des compagnies ne s'élève qu'à $41 \times 17 = 697$ suffrages; et l'élu peut, en toute rigueur, n'en avoir pas obtenu davantage.

Mais, ajoutai-je, s'il n'y a que deux concurrens; comme il est très-possible et même très-probable, le compétiteur rejeté peut avoir eu en sa faveur d'abord 39 suffrages dans 17 compagnies et ensuite la totalité dans les 15 autres, ce qui fait d'une part 663 et de l'autre 1200; en tout 1863.

Ainsi, dans cette hypothèse, un candidat, avec 697 suffrages seulement, est admis; et un autre, avec 1863 suffrages, c'est-à dire, près du *triple*, est rejeté. Je rédigeai, sur ce sujet, une courte note que je remis au conseil d'administration; les yeux furent aussitôt désillés, et il fut décidé qu'à l'avenir on procèderait d'une manière un peu plus régulière.

Je sens qu'on aurait pu m'objecter que je supposais les choses dans une limite extrême assez peu probable; mais j'aurais pu répondre à mon tour que du nombre de 697 suffrages que je supposais à l'élu au nombre de 1281 qui lui aurait été nécessaire pour l'être régulièrement, il y avait une latitude assez raisonnable; et que, quand bien même tout ne se serait pas exactement passé comme je le supposais, toujours demeurait-il extrêmement possible que l'élu eût eu moins de voix que son adversaire.

On aurait pu m'objecter aussi que je supposais tous les suffrages partagés entre deux concurrens seulement, ce qui pouvait fort bien n'être point rigoureusement vrai; mais, outre que, comme je l'ai déjà observé, cette supposition ne devait guère s'écarter de la vérité; le cas de plus de deux candidats pouvait offrir un inconvénient beaucoup plus grave encore : celui de présenter comme candidat ayant obtenu la majorité absolue des suffrages d'une compagnie, un individu réellement repoussé par cette majorité.

Pour faire, tout d'un coup, bien ressortir cet inconvénient, poussons les choses à l'extrême; supposons que les suffrages d'une compagnie, au premier tour de scrutin, se soient répartis entre 78 candidats dont 76 aient obtenu une seule voix chacun et les deux restans chacun 2. Quand bien même ces deux derniers auraient été abhorrés par les 76 votans qui ne leur auraient pas accordé leurs suffrages, ils ne se seraient pas moins trouvé obligés de les faire porter sur eux seuls à un second tour de scrutin, et quel qu'ait été le vainqueur dans la lutte, il n'en eut pas moins eu réellement 76 suffrages contre lui; et cependant il eut dû être présenté comme ayant la majorité absolue des suffrages en sa faveur.

Faisons une seconde hypothèse, moins éloignée du train ordinaire des choses; supposons seulement trois candidats A, B, C, dont, à un premier tour de scrutin, le premier ait obtenu 27 suffrages, le second 27 aussi et le troisième 26 seulement; supposons en outre que le candidat C agrée aux votans qui se sont prononcés en faveur de A et B, mais un peu moins pourtant que ces deux derniers; supposons qu'au contraire tous ceux qui n'ont pas voté pour A ou pour B aient une extrême répugnance à les voir élus; il n'en faudra pas moins choisir entre ces deux candidats seulement à un nouveau tour de scrutin; et l'un d'eux sera alors réputé avoir obtenu la majorité absolue des suffrages: la vérité sera pourtant qu'il n'en aura eu réellement que 27 et que le candidat C qui était préféré par 26 votans, et vu sans répugnance par les 54 autres, aura été écarté dès le premier tour de scrutin.

On voit donc que le cas de plus de deux candidats, loin d'atténuer les vices du système que je viens de combattre, n'est propre le plus souvent, au contraire, qu'à en rendre les conséquences plus dangereuses. Je pourrai donc, dans ce qui va suivre, continuer à supposer qu'il n'y a que deux candidats seulement (*).

---

(*) Le peu qui précède est propre en même temps à faire entrevoir combien l'art des scrutins est difficile; et c'est pourtant sur cet art que reposent les destinées des états libres. Les géomètres ont bien trouvé des méthodes parfaites en théorie; mais ces méthodes portent sur une hypothèse malheureusement inadmissible; celle de votans tous éclairés et de bonne foi. C'est sans doute dans la vue de balancer en partie les inconvéniens que je viens de signaler en passant, qu'on a inventé, à diverses époques, les scrutins de liste, les listes de rejet, etc.; mais ces palliatifs ne sont pas eux-mêmes sans quelque danger, et veulent

Pour mieux faire sentir encore le vice de la substitution des votes par corporation aux votes par individus ; supposons toute la garde nationale d'un département distribuée en 12 régimens composés chacun comme l'était en 1791 la garde nationale de Nancy ; et supposons en outre que, pour l'élection d'un commandant en chef de ces 12 régimens, on veuille suivre un mode analogue à celui que j'ai dit avoir été suivi pour l'élection du colonel de la garde nationale de Nancy ; les suffrages de 8 régimens suffiront à l'élu ; or, nous avons vu ci-dessus que le suffrage de l'un d'eux pouvait, à la rigueur, ne représenter que 697 votes seulement ; d'où il suit que les suffrages de ces 8 régimens pourront n'en représenter que $697 \times 8 = 5576$. Mais, d'un autre côté, le nombre total des votans est $2560 \times 12 = 30720$ ; il s'ensuit donc que, dans le cas de deux concurrens seulement, le concurrent rejeté peut avoir en sa faveur un nombre de suffrages égal à $30720 - 5576 = 25144$, c'est-à-dire, près des *cinq-sixièmes* des voix.

Poussons plus loin encore, et supposons que, voulant élire un généralissime de toutes les gardes nationales de France, on désire en faire un choix conforme au vœu de la majorité absolue des départemens. Nous en comptons 87 ; il faudra donc que l'élu en réunisse 44 en sa faveur ; mais nous venons de faire voir que dans chacun d'eux 5576 suffrages seulement pouvaient former une majorité apparente : l'élu n'aura donc, à la rigueur, besoin que de $5576 \times 44 = 245344$ suffrages. Or, le nombre total des votans est ici $30720 \times 87 = 2572640$ ; d'où il suit que, dans le cas de deux concurrens seulement, son adversaire aura pu être rejeté avec $2692640 - 245344 = 222296$ suffrages, c'est-à-dire, avec près des *dix-onzièmes* des voix.

---

être employés avec ménagement. Il serait tout à fait digne, soit des gouvernemens soit des sociétés savantes, de proposer l'intéressant sujet du *meilleur mode de scrutin pratique* à l'émulation de ceux pour qui les recherches de cette nature peuvent avoir quelque attrait.

Il en serait à peu près de même si, les compagnies n'ayant que la faculté d'élire leurs capitaines, l'assemblée des capitaines élisait le colonel, celle des colonels le général, et celle des généraux le généralissime; et ceci, en supposant même que chaque capitaine devînt le fidèle interprète du vœu de sa compagnie, chaque colonel celui du vœu des capitaines, et chaque général celui du vœu des colonels. Encore ici l'opinion d'un peu plus d'un 11.$^e$ des citoyens composant la garde nationale pourrait l'emporter sur celle des dix autres 11$^{es}$. Si, au contraire, la plupart des mandataires s'écartaient plus ou moins du vœu de leurs commettans, cela pourrait tantôt ajouter encore aux inconvéniens du système mis en usage, et tantôt en atténuer l'influence.

On voit donc qu'en général les votes recueillis par corporation ou par représentans peuvent être fort différens des votes recueillis par individus. Ainsi, par exemple, le peuple romain qui murmurait de la tenue des comices par *centuries*, à raison de leur composition hétérogène, aurait pu aussi, à bon droit, réclamer contre la tenue des comices par *tribus* et même par *curies*; mais les vices de ces deux derniers modes de recueillir les suffrages n'étaient sans doute pas assez apparens pour offusquer le peuple-roi. Les suffrages recueillis par cantons, en Suisse, présentent le même inconvénient.

Faisons encore une autre supposition. Nous comptons actuellement en France 87 départemens. Au taux moyen, chacun d'eux a 3 arrondissemens, chaque arrondissement 13 cantons, chaque canton 9 communes, et enfin chaque commune 159 votans; ce qui porte le nombre total des citoyens français ayant droit de voter, à $159 \times 9 \times 13 \times 3 \times 87 = 4855383$.

Supposons ensuite qu'il soit statué qu'il y aura des assemblées primaires, des colléges électoraux de cantons, d'arrondissement et de département, subordonnés les uns aux autres, et une chambre de députés élus uniquement par ces derniers; lesquels, à leur tour, seront nommés par les colléges d'arrondissemens, ceux-ci par les colléges de cantons et ces derniers par les assemblées primaires.

La majorité absolue sera, savoir :

Pour les communes . . . . . . . . . 80 votans,

Pour les cantons . . . . . . . . . . . 5 communes,

Pour les arrondissemens. . . . . . . 7 cantons,

Pour les départemens . . . . . . . . 2 arrondissemens,

Pour la chambre des députés. . . . 44 départemens ;

D'où il suit, en raisonnant comme ci-dessus, qu'en supposant même que les mandataires de chaque ordre remplissent fidèlement le vœu de leurs commettans, une délibération prise ou une élection faite dans la chambre des représentans, à la majorité absolue des suffrages, pourra à la rigueur ne représenter que l'opinion d'un nombre des citoyens exprimé par

$$80 \times 5 \times 7 \times 2 \times 44 = 246400 \; ;$$

c'est-à-dire, l'opinion d'environ *un vingtième* des citoyens exerçant leurs droits politiques ; tandis que les dix-neuf autres vingtièmes pourraient être unanimes dans l'opinion diamétralement opposée à celle-là, et conséquemment rejetée.

Voilà donc un vice assez grave absolument inhérent au système représentatif. On a quelquefois objecté contre ce système que les mandataires pouvaient s'écarter plus ou moins du mandat formel ou tacite qu'ils avaient reçu ; mais il avait été peu remarqué jusqu'ici que, même en demeurant scrupuleusement fidèles à ce mandat, leurs déterminations pouvaient très-bien être en opposition avec ce qu'on doit appeler l'opinion publique ; je veux dire avec l'opinion de la majorité des citoyens admis à voter dans les assemblées du peuple.

Soient, en général, $2n+1$ le nombre des votans dans les asssemblées primaires, $2n'+1$ le nombre de celles de ces assemblées qui doivent nommer les électeurs d'une même assemblée du second ordre,

$2n''+1$ le nombre des assemblées du second ordre qui doivent concourir à l'élection d'une même assemblée du troisième, et ainsi de suite, jusqu'à l'assemblée centrale qui seule est supposée avoir le droit de prendre des déterminations obligatoires pour tous les votans; le nombre total de ces votans sera

$$(2n+1)(2n'+1)(2n''+1)\ldots.;$$

et une décision prise à la majorité absolue des suffrages dans l'assemblée centrale pourra, à la rigueur, ne représenter que le vœu d'un nombre de citoyens exprimé par

$$(n+1)(n'+1)(n''+1)\ldots\ldots;$$

c'est-à-dire, le vœu d'une fraction du nombre des citoyens ayant droit de suffrage exprimée par

$$\frac{n+1}{2n+1}\cdot\frac{n'+1}{2n'+1}\cdot\frac{n''+1}{2n''+1}\ldots\ldots;$$

Si $n$, $n'$, $n''$, ..... sont de très-grands nombres, on pourra, sans erreur sensible, négliger l'unité vis-à-vis de chacun d'eux, et, à plus forte raison, vis-à-vis de leurs doubles; en sorte que, $m$ exprimant le nombre des assemblées successives, subordonnées les unes aux autres, la fraction ci-dessus deviendra sensiblement

$$\frac{1}{2^m};$$

fraction d'autant plus petite que $m$ sera plus grand. Ainsi, le vœu manifesté par la puissance législative pourra être opposé à celui d'une majorité d'autant plus grande des citoyens ayant droit de concourir médiatement à la formation de la loi, qu'on aura employé un plus grand nombre d'intermédiaires dans l'élection des fonctionnaires qui composent cette puissance.

Si

Si l'état est très-étendu, on ne pourra guère se dispenser, même en prenant pour $n$, $n'$, $n''$, ..... de très-grands nombres, de prendre aussi $m$ assez grand. Ainsi, l'inconvénient que je signale ici, comme étant inévitablement attaché au système représentatif, pourra devenir de plus en plus sensible, à mesure que l'état sera plus étendu.

Le nombre total des citoyens ayant droit de voter demeurant le même, plus les nombres $n$, $n'$, $n''$,..... seront petits et plus aussi $m$ devra être grand; $m$ sera donc le plus grand possible lorsqu'on prendra pour $n$, $n'$, $n''$,...... les plus petits nombres possibles; c'est-à-dire, lorsque chacun de ces nombres sera l'unité. $3^m$ exprimera alors le nombre total des votans; et le vœu de l'assemblée législative pourra ne répondre qu'à celui d'une fraction du nombre des citoyens exprimée par

$$\left(\frac{2}{3}\right)^m.$$

En France, par exemple, le nombre des citoyens exerçant des droits politiques ne s'éloigne guère de $4782969=3^{14}$. On a donc $m=14$; au moyen de quoi la fraction ci-dessus devient

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{14}=\frac{16384}{4782969}, \quad \text{ou environ } \frac{1}{300}.$$

Supposons donc que, la France ayant à élire un chef, il soit réglé que, pour procéder à son élection, les citoyens se réuniront 3 par 3, pour élire un d'entre eux, comme électeur du premier degré; que les électeurs du premier degré se réuniront également 3 par 3 pour nommer des électeurs du second degré, et ainsi progressivement, jusqu'à ce que toute la France se trouve représentée par une assemblée unique de trois individus, laquelle nommera enfin l'un d'entre eux pour chef de l'état. Beaucoup de gens, j'en suis sûr, seraient tentés de regarder cette opération comme fort régulière; et pourtant ce qui vient d'être dit prouve évidemment que l'élu pourrait avoir, à la rigueur, les $\frac{299}{300}$ de la nation contre lui.

Tout ce que j'ai dit ci-dessus peut, entre autres choses, concourir à expliquer comment il est souvent arrivé, dans la chambre des députés de 1814, que l'opinion du rapporteur de la commission centrale se trouvait en opposition avec celle de la majorité de cette chambre. Supposons, en effet, une chambre de 369 membres divisée, comme celle-là, en 9 bureaux; chaque bureau sera composé de 41 membres, dont la majorité absolue sera 21. Pourvu donc que, dans 5 bureaux, 21 membres soient d'un même avis, 5 membres de la commission centrale, formant la majorité de cette commission, et conséquemment le rapporteur nommé par elle, partageront aussi cet avis; l'avis du rapporteur pourra donc ne représenter que celui de $5 \times 21 = 105$ membres, lequel pourra être absolument opposé à celui des 264 membres restans, et formant par conséquent la très-grande majorité de la chambre.

Il est pourtant bien loin de ma pensée que la division d'une assemblée délibérante en bureaux, formés par la voie du sort, et périodiquement renouvelés soit vicieuse; je la regarde même comme tout à fait indispensable, sur-tout lorsque l'assemblée est nombreuse. Elle régularise les conciliabules qui se formeraient inévitablement, mais qui, composés d'individus attachés aux mêmes idées, loin de s'éclairer par le choc des opinions, ne feraient au contraire que s'obstiner davantage en faveur de celles qu'ils auraient d'abord embrassées. D'ailleurs, la division en bureaux, en ébauchant les discussions, leur donne à la fois plus de décence et de maturité: elle peut mettre des hommes, d'abord peu au courant des matières auxquelles ces discussions sont relatives, mieux en état d'y prendre part; elle permet de mettre à profit les lumières de beaucoup d'hommes recommandables qui, à des connaissances très-étendues et à un esprit droit, ne joignent pas un talent oratoire très-prononcé; enfin elle neutralise les efforts que ceux qui ont ce talent en partage pourraient tenter, dans la vue de maitriser ceux de leurs collègues à qui la tactique de la tribune est peu familière. L'espèce d'opposition qui peut exister quelquefois entre l'avis de la commission centrale et celui de la majorité de la chambre est d'ailleurs sans aucune sorte d'inconvénient, puisqu'en définitif c'est l'avis de cette majorité et non celui de la commission qui est adopté.

Ceci nous montre en même temps le remède naturel à l'inconvénient que j'ai montré être inhérent au système représentatif. Nous voyons que, s'il est à la fois absurde et impraticable d'appeler directement le peuple à discuter et à delibérer sur une multitude de matières tout à fait hors de la portée moyenne de son intelligence, c'est pourtant son opinion qu'il faut en venir à consulter, lorsqu'il s'agit d'objets majeurs et simples à la fois, sur lesquels il peut s'expliquer par *oui* et *non* ; et la puissance législative ne doit plus alors se considérer à son égard que comme une simple commission centrale. C'est en particulier ce qu'on devroit toujours faire à l'égard des lois fondamentales de l'état.

15 juin 1815.

---

# GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

## *Solution de quelques problèmes ;*

Par M. Bret, professeur de mathématiques à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble.

J'ai déjà insisté plusieurs fois dans ce recueil sur l'avantage qu'il peut souvent y avoir à représenter par deux équations une ligne droite sur un plan, et par trois équations une ligne droite ou un plan dans l'espace. Je vais confirmer encore ce que j'ai dit alors, en traitant par cette voie quelques problèmes indéterminés, relatifs à la génération des lignes et des surfaces, et dont la solution, par les procédés ordinaires, exige des calculs assez compliqués.

*PROBLÈME I. Une droite se meut parallèlement, à elle-même, sur le plan de deux droites fixes. Dans chaque position de la droite mobile, on prend sur elle un point tel que la somme ou la différence des quarrés des distances de ce point aux intersections de cette droite avec les deux droites fixes soit égale à un quarré donné et constant; on demande à quelle ligne appartient l'ensemble des points ainsi déterminés?*

*Solution.* Soient prises les droites fixes pour axes des coordonnées; soit $\gamma$ l'angle qu'elles forment, et soit $q^2$ le quarré constant donné.

Soient $X$, $Y$ les coordonnées courantes sur le plan, et $x$, $y$ celles du point décrivant; l'équation du système des deux droites fixes sera

$$XY=0\ ; \qquad (1)$$

en prenant donc pour les équations de la droite mobile

$$X=x+ar\ , \quad Y=y+br\ , \qquad (2)$$

ce qui donne

$$a^2+b^2+2ab\text{Cos.}\gamma=1\ ; \qquad (3)$$

nous aurons, en substituant (2) dans (1),

$$(x+ar)(y+br)=0\ . \qquad (4)$$

Si nous représentons par $r$, $r'$ les deux racines de cette équation, nous aurons

$$r=-\frac{x}{a}\ , \quad r'=-\frac{y}{b}\ ;$$

et, par la condition du problème,

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=q^2\ ; \qquad (5)$$

équation d'une ligne du second ordre qui a son centre à l'origine, c'est-à-dire, à l'intersection des deux droites fixes.

En désignant par $A$, $B$ les moitiés des diamètres conjugués auxquels la courbe se trouve rapportée, nous aurons

$$a=\frac{A}{q}\ , \quad b=\frac{B}{q}\ ; \qquad (6)$$

ce qui donnera, en substituant dans (3),

$$q^2=A^2+B^2+2AB\mathrm{Cos}.\gamma\ ;$$

$q$ est donc la diagonale du parallélogramme construit sur les grandeurs et directions de nos deux demi-diamètres conjugués. Les équations de la droite mobile sont d'ailleurs (2) et (6)

$$X=x+\frac{A}{q}r\ , \quad Y=y+\frac{B}{q}r\ .$$

*PROBLÈME II. Une droite qui se meut dans l'espace, parallèlement à elle-même, perce perpétuellement trois plans fixes; dans chacune de ses situations, on prend sur elle un point tel que la somme ou la différence des quarrés de ses distances aux points où elle perce les plans fixes est égale à un quarré donné et constant; on demande à quelle surface appartient l'ensemble des points ainsi déterminés?*

*Solution.* Soient pris les trois plans fixes pour plans coordonnés; soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles que forment les axes, et soit $q^2$ le quarré constant donné.

Soient $X$, $Y$, $Z$ les coordonnées courantes dans l'espace, et $x$, $y$, $z$ celles du point décrivant; l'équation du système des trois plans fixes sera

$$XYZ=0\,;\qquad (1)$$

en prenant donc pour les équations de la droite mobile

$$\left.\begin{aligned} X&=x+ar\ ,\\ Y&=y+br\ ,\\ Z&=z+cr\ ;\end{aligned}\right\}(2)$$

ce qui donne

$$a^2+b^2+c^2+2bc\,\text{Cos.}\alpha+2ca\,\text{Cos.}\beta+2ab\,\text{Cos.}\gamma=1\,;\qquad (3)$$

nous aurons, en substituant (2) dans (1)

$$(x+ar)(y+br)(z+cr)=0\ .\qquad (4)$$

Si nous représentons par $r$, $r'$, $r''$ les trois racines de cette équation, nous aurons

$$r=-\frac{x}{a}\ ;\quad r'=-\frac{y}{b}\ ,\quad r''=-\frac{z}{c}\ ;$$

et, par la condition du problème,

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=q^2\ ;\qquad (5)$$

équation d'une surface du second ordre qui a son centre à l'origine des coordonnées, c'est-à-dire, à l'intersection des trois plans fixes.

En désignant par $A$, $B$, $C$ les moitiés des diamètres conjugués auxquels la surface se trouve rapportée, nous aurons

$$a=\frac{A}{q}\ ;\quad b=\frac{B}{q}\ ,\quad c=\frac{C}{q}\ ,\qquad (6)$$

ce qui donnera, en substituant dans (3),

$$q^2=A^2+B^2+C^2+2BC\text{Cos}.\alpha+2Ca\text{Cos}.\beta+2AB\text{Cos}.\gamma\ ;$$

$q$ est donc la diagonale du parallélipipède construit sur les grandeurs et directions de nos trois demi-diamètres conjugués. Les équations de la droite mobile sont d'ailleurs (2) et (6)

$$X=x+\frac{A}{q}r\,,\qquad Y=y+\frac{B}{q}r\,,\qquad Z=z+\frac{C}{q}r\,.$$

*PROBLÈME III. Quelle courbe décrit un quelconque des points d'une droite mobile, dont deux autres points sont assujettis à être perpétuellement sur deux droites fixes tracées sur un même plan?*

*Solution.* En conservant les mêmes notations et conventions que dans le *Problème I*, nous aurons comme alors

$$(x+ar)(y+br)=0\ ;$$

mais ici les racines doivent être deux constantes ; en les représensentant donc par $g$ et $h$, nous aurons

$$g=-\frac{x}{a}\ ,\quad h=-\frac{y}{b}\ ,$$

d'où

$$a=-\frac{x}{g}\ ,\quad b=-\frac{y}{h}\ ;$$

substituant donc dans

$$a^2+b^2+2ab\text{Cos}.\gamma=1\ ,$$

nous aurons, pour l'équation de la ligne cherchée,

$$\frac{x^2}{g^2}+\frac{y^2}{h^2}+2\frac{xy}{gh}\text{Cos}.\gamma=1\ ;$$

cette ligne est donc une ligne du second ordre qui a son centre à l'intersection des deux droites fixes.

*PROBLÈME IV. Quelle surface décrit dans l'espace un point quelconque d'une droite mobile, dont trois autres points sont assujettis à rester perpétuellement sur trois plans fixes ?*

*Solution.* En conservant les mêmes notations et conventions que dans le *Problème II*, nous aurons comme alors

$$(x+ar)(y+br)(z+cr)=0\ ;$$

mais ici les racines doivent être trois constantes ; en les représentant donc par $g$, $h$, $k$, nous aurons

$$g=-\frac{x}{a}\ ,\quad h=-\frac{y}{b}\ ,\quad k=-\frac{z}{c}\ ,$$

d'où

$$a=-\frac{x}{g}\ ,\quad b=-\frac{y}{h}\ ,\quad c=-\frac{z}{k}\ :$$

Substituant donc dans

$$a^2+b^2+c^2+2bc\,\text{Cos.}\alpha+2ca\,\text{Cos.}\beta+2ab\,\text{Cos.}\gamma=1\ ;$$

nous aurons, pour l'équation de la surface cherchée,

$$\frac{x^2}{g^2}+\frac{y^2}{h^2}+\frac{z^2}{k^2}+2\frac{yz}{hk}\,\text{Cos.}\alpha+2\,\frac{zx}{kg}\,\text{Cos.}\beta+2\,\frac{xy}{gh}\,\text{Cos.}\gamma=1\ ;$$

cette surface est donc une surface du second ordre ayant son centre à l'intersection des trois plans fixes.

Cette génération des surfaces du second ordre a fixé particulièrement l'attention de M. Dupin, dans ses excellens *Développemens de géométrie*, page 340.

QUESTIONS

# QUESTIONS RÉSOLUES.

## *Solution du premier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 299 du V.e volume de ce recueil ;*

Par M. J. B. Durrande.

PROBLÈME. *Construire quatre sphères telles que chacune d'elles touche les trois autres, et qui satisfassent de plus aux conditions suivantes ; savoir :* 1.° *que les points de contact des trois premières avec la quatrième soient trois points donnés ;* 2.° *que ces trois sphères soient tangentes à un même plan donné ?*

*Solution.* Soient A, B, C, D les centres des quatre sphères cherchées, $a$, $b$, $c$ les points de contact donnés des trois premières avec la quatrième, $a'$, $b'$, $c'$ les points de contact des mêmes sphères avec le plan donné. Ces trois derniers points sont inconnus, mais le plan qu'ils déterminent est connu.

Les droites AB, $ab$, $a'b'$, concourent, comme l'on sait, en un même point $\gamma$ du plan donné, lequel point n'est autre que le sommet du cône circonscrit aux deux sphères dont les centres sont A et B. Pour les mêmes raisons BC, $bc$, $b'c'$, concourront en un même point $\alpha$ et CA, $ca$, $c'a'$ en un même point $\beta$ du même plan ; et il est encore connu que ces trois points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, appartiendront à une même ligne droite, intersection du plan donné avec celui du triangle donné $abc$ ; il est évident en outre que ces points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ seront assignables, comme intersection du plan donné avec les droites données $bc$, $ca$, $ab$.

Si l'on fait de ces mêmes points les centres de trois sphères ayant respectivement leurs rayons moyens proportionnels entre $\alpha b$ et $\alpha c$, $\beta c$ et $\beta a$, $\gamma a$ et $\gamma b$, ces sphères seront aussi données ; et elles seront respectivement tangentes à celles dont les centres sont A, B, C (*). Chacune de ces dernières sera donc déterminée à toucher deux des sphères dont les centres sont $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, à toucher le plan donné et à passer par l'un des points donnés $a$, $b$, $c$, problème qu'on sait résoudre (**). Ces trois sphères étant ainsi construites, rien ne sera plus facile que de déterminer celle dont le centre est D.

Nous n'indiquons ici que le procédé théorique ; les méthodes de la géométrie descriptive feront connaître la grandeur et la situation des parties cherchées.

---

## *Solution du problème d'analise proposé à la page 299 du V.e volume de ce recueil ;*

### Par M. Servois, professeur aux écoles d'artillerie.

**Problème.** *Assigner l'intégrale finie et complète de l'équation différentielle*

$$\mathrm{d}y+y^2e^{\int X\mathrm{d}x}.\,\mathrm{d}x=e^{-\int X\mathrm{d}x}.\,X'\mathrm{d}x\,,$$

*dans laquelle* X *est supposé une fonction quelconque de* x, *dont*

---

(*) Voyez la page 296 du V.e volume de ce recueil.

(**) Voyez le traité de Fermat : *De tactionibus sphæricis* ; voyez aussi les pages 349 et 353 du IV.e volume de ce recueil.

*la différentielle est* X′dx, *et où* e *est la base des logarithmes naturels ?*

*Solution.* Soit posé

$$y=(X-t)e^{-\int X\mathrm{d}x};$$

d'où

$$\mathrm{d}y=(X'\mathrm{d}x-\mathrm{d}t)e^{-\int X\mathrm{d}x}-(X-t)e^{-\int X\mathrm{d}x}.X\mathrm{d}x;$$

en snbstituant dans la proposée, et divisant par $e^{-\int X\mathrm{d}x}$, elle devient, toutes réductions faites,

$$t^2\mathrm{d}x-tX\mathrm{d}x-\mathrm{d}t=0;$$

mais, en rétablissant ce facteur, elle peut être écrite ainsi

$$e^{-\int X\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x-\frac{tXe^{-\int X\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x-e^{-\int X\mathrm{d}x}.\mathrm{d}t}{t^2}=0;$$

ce qui revient à

$$e^{-\int X\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x+\mathrm{d}.\frac{e^{-\int X\mathrm{d}x}}{t}=0;$$

et donne conséquemment

$$\int e^{-\int X\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x+\frac{e^{-\int X\mathrm{d}x}}{t}=A;$$

d'où

$$t=\frac{e^{-\int X\mathrm{d}x}}{A-\int e^{-\int X\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x};$$

donc enfin

$$y=e^{-\int X\mathrm{d}x}.\left\{X-\frac{e^{-\int X\mathrm{d}x}}{A-\int e^{-\int X\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x}\right\};$$

$A$ étant la fonction complémentaire de l'intégration.

## *Autre solution du même problème;*

Par M. Tédénat, correspondant de l'institut, recteur de l'académie de Nismes.

Soit $Z$ une fonction de $x$ dont la différentielle soit $Z'\mathrm{d}x$, et la différentielle seconde $Z''\mathrm{d}x^2$ ; soit fait

$$y=e^{-\int X\mathrm{d}x}.\frac{Z'}{Z}; \qquad (1)$$

nous en conclurons

$$y^2=e^{-2\int X\mathrm{d}x}.\frac{Z'^2}{Z^2}, \qquad \mathrm{d}y=e^{-\int X\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x.\frac{ZZ''-Z'^2-XZZ'}{Z^2};$$

valeurs qui, étant substituées dans la proposée

$$\mathrm{d}y+y^2e^{\int X\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x-X'\mathrm{d}xe^{-\int X\mathrm{d}x}=0,$$

la réduiront à

$$Z''-XZ'-ZX'=0 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{d}.(Z'-XZ)=0,$$

dont l'intégrale est

$$Z'-XZ=a$$

celle-ci, multipliée par $e^{-\int X\mathrm{d}x}$, revient à

$$\mathrm{d}.Ze^{-\int X\mathrm{d}x}=\mathrm{d}.a\int e^{-\int X\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x$$

dont l'intégrale est

$$Ze^{-\int X\mathrm{d}x}=a\int e^{-\int X\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x+b.$$

On tire de là

$$Z=e^{\int X\mathrm{d}x}\left\{b+a\int e^{-\int X\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x\right\},$$

$$Z'=Xe^{\int X\mathrm{d}x}\left\{b+a\int e^{-\int X\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x\right\}+a\ ;$$

d'où

$$\frac{Z'}{Z}=X+\frac{ae^{-\int X\mathrm{d}x}}{b+a\int e^{-\int X\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x}\ ;$$

substituant enfin cette valeur dans la valeur (1) de $y$, et posant $b=-Aa$, il viendra

$$y=e^{-\int X\mathrm{d}x}\left\{X-\frac{e^{-\int X\mathrm{d}x}}{A-\int e^{-\int X\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}\right\}.$$

---

## *Solution du problème de combinaisons proposé à la page 328 du V.^e volume de ce recueil ;*

Par M. ARGAND.

*PROBLÈME. Avec* m *choses, toutes différentes les unes des autres, de combien de manières peut-on faire* n *parts, avec la faculté de faire des parts nulles ?*

*Solution* 1. Désignons, en général, par $(m, n)$ l'*ensemble* de toutes les manières de faire, avec $m$ choses, $n$ parts dont aucune ne soit nulle ; et par $Z_{(m,n)}$ *le nombre* de ces manières.

Soient $c$ le nombre des choses, $p$ celui des parts, $k$ l'une de ces choses à volonté, $R$ l'ensemble des $c-1$ autres choses. On pourra, dans l'ensemble $(c, p)$, distinguer deux espèces de répartitions ; savoir : des répartitions (I) dans lesquelles la chose $k$ formera à elle seule une part, et des répartitions (II) où la chose $k$ se trouvera réunie, dans une même part, avec une ou plusieurs des choses $R$,

2. Considérons d'abord les répartitions $r$, $r'$, $r''$, ..... appartenant à l'espèce (I). Si de chacune de ses répartitions on retranche la part formée par $k$, il restera des répartitions $\rho$, $\rho'$, $\rho''$, .... de $c-1$ choses distribuées en $p-1$ parts, ou, suivant notre notation, des répartitions appartenant à l'ensemble $(c-1, p-1)$. Réciproquement si, à des répartitions $\rho$, $\rho'$, $\rho''$, ..... contenues dans ce dernier ensemble, on ajoute une part formée d'une nouvelle chose $k$, on obtiendra $r$, $r'$, $r''$, ..... de l'espèce (I). Il est de plus évident que, si $r$, $r'$, $r''$, .... ne sont pas identiques, $\rho$, $\rho'$, $\rho''$, .... ne le seront pas non plus, et réciproquement ; d'où il suit que le nombre des répartitions (I) est égal à celui des répartitions $(c-1, p-1)$, lequel est exprimé, suivant notre notation, par $Z_{(c-1,p-1)}$.

3. Retranchons la chose $k$ de chacune des répartitions de l'espèce (II); nous aurons diminué d'une unité le nombre des choses, sans changer celui des parts ; ainsi, les répartitions résultant de ce retranchement appartiendront à l'ensemble $(c-1, p)$. Réciproquement, ayant une répartition appartenant à ce dernier ensemble, si l'on ajoute la chose $k$ à l'un quelconque des parts de cette répartition, on obtiendra une répartition de l'espèce (II) ; et, comme il y a $p$ parts, et par conséquent $p$ manières de faire cette adjonction, chaque répartition de l'ensemble $(c-1, p)$ produira $p$ répartitions de l'espèce (II), lesquelles seront évidemment différentes entre elles. De plus, il est facile de voir que deux répartitions différentes de l'ensemble $(c-1, p)$ le seront encore lorsqu'on y aura ajouté $k$ d'une manière quelconque. Donc le nombre des répartitions (II) est $p$ fois celui des répartitions $(c-1, p)$ ; c'est-à-dire, qu'il est $=pZ_{(c-1,p)}$.

Ainsi, $(c, p)$ étant composé de (I) et de (II), on aura

$$Z_{(c,p)}=p.Z_{(c-1,p)}+Z_{(c-1,p-1)}. \qquad \text{(A)}$$

4. Au moyen de cette équation, nous pourrons former une table à double entrée des valeurs de $Z_{(c,p)}$, pourvu que nous en connaissions les valeurs initiales. Or, si $p=1$, on a $Z_{(c,p)}=1$ ; car, quel que soit le nombre des choses, il n'y a qu'une manière

d'en faire une seule part. Cette formule donne donc la première ligne horizontale de la table. Ensuite, si $p=c$, on a encore $Z_{(c,p)}=1$; car il n'y a de même qu'une manière de faire $n$ part avec $n$ choses. Cette formule fournit la diagonale qui part de la case qui répond à $c=1$, $p=1$. Quant au cas où on aurait $p>c$, il est clair qu'il n'y répond aucune répartition possible, de sorte que toutes les cases situées de l'un des côtés de notre diagonale doivent demeurer vides.

*Table des valeurs de* $Z_{(c,p)}$.

Nombre de choses $=c$.

Nombre de parts $=p$.

| *A* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | | 1 | 3 | 7 | 15 | 31 | 63 | 127 | 255 | 511 |
| 3 | | | 1 | 6 | 25 | 90 | 301 | 966 | 3025 | 9330 |
| 4 | | | | 1 | 10 | 65 | 350 | 1701 | 7770 | 34105 |
| 5 | | | | | 1 | 15 | 140 | 1050 | 6951 | 42525 |
| 6 | | | | | | 1 | 21 | 266 | 2646 | 22827 |
| 7 | | | | | | | 1 | 28 | 462 | 5880 |
| 8 | | | | | | | | 1 | 36 | 750 |
| 9 | | | | | | | | | 1 | 45 |
| 10 | | | | | | | | | | 1 |

5. Or, à l'inspection de cette table, on trouve, par une induction assez facile,

$$Z_{(c,p)}=\frac{1}{1.2.3.....p}\left\{p^c-\frac{p}{1}(p-1)^c+\frac{p}{1}.\frac{p-1}{2}(p-2)^c-....\right\};\qquad \text{(B)}$$

et on s'assure ensuite, par le calcul, que cette expression de $Z_{(c,p)}$ satisfait réellement à l'équation (A); mais il faut de plus que les valeurs initiales soient vérifiées. Or, si $p=1$, la formule se réduit, en effet, à l'unité, il en est de même, dans le cas de $c=p$, en vertu du théorème connu : $1.2.3..p=p^p-\frac{p}{1}(p-1)^p+\frac{p}{1}.\frac{p-1}{2}(p-2)^p-....$; ainsi, cette formule est démontrée.

6. Nous avons supposé jusqu'ici qu'aucune part ne devait être nulle. Admettons maintenant qu'un nombre quelconque de parts puissent l'être; et nommons $Y_{(c,p)}$ le nombre des répartitions possibles dans cette nouvelle hypothèse. L'ensemble de toutes ces répartitions pourra être distribué en $p$ espèces, suivant que le nombre des parts non nulles, qui ne saurait être zéro, sera $1, 2, 3....p$. Soit $q$ un quelconque de ces nombres. Le nombre des répartitions dans lesquelles $q$ parts ne sont pas nulles est, par ce qui précède, $Z_{(c,q)}$; donnant donc successivement à $q$ toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à $p$ inclusivement, on aura

$$Y_{(c,p)}=Z_{(c,1)}+Z_{(c,2)}+Z_{(c,3)}+.....+Z_{(c,p)};$$

on aurait de même

$$Y_{(c,p-1)}=Z_{(c,1)}+Z_{(c,2)}+Z_{(c,3)}+.....+Z_{(c,p-1)};$$

d'où, en retranchant et transposant

$$Y_{(c,p)}=Y_{(c,p-1)}+Z_{(c,p)}.\qquad \text{(C)}$$

Ainsi, au moyen de la table précédente, et des valeurs initiales de $Y$, savoir $Y_{(c,1)}=1$, pour toutes les valeurs de $c$, on construira facilement la table relative à la seconde hypothèse, par de simples additions.

*Table*

*Table des valeurs de* $Y_{(c,p)}$

Nombre de choses $=c$.

Nombre de parts $=p$.

| *B* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |
| 3 | 1 | 2 | 5 | 14 | 41 | 122 | 365 | 1094 | 3281 | 9842 |
| 4 | 1 | 2 | 5 | 15 | 51 | 187 | 715 | 2795 | 11051 | 43947 |
| 5 | 1 | 2 | 5 | 15 | 52 | 202 | 855 | 3845 | 18002 | 86472 |
| 6 | 1 | 2 | 5 | 15 | 52 | 203 | 876 | 4111 | 20648 | 109299 |
| 7 | 1 | 2 | 5 | 15 | 52 | 203 | 877 | 4139 | 21110 | 115179 |
| 8 | 1 | 2 | 5 | 15 | 52 | 203 | 877 | 4140 | 21146 | 115929 |
| 9 | 1 | 2 | 5 | 15 | 52 | 203 | 877 | 4140 | 21147 | 115974 |
| 10 | 1 | 2 | 5 | 15 | 52 | 203 | 877 | 4140 | 21147 | 115975 |

7. La loi des valeurs de $Y$, dans cette dernière table, ne se présente pas si facilement que dans la première. Cependant, avec de l'attention, on parvient à trouver que ces valeurs peuvent être exprimées par la formule

$$Y_{(c,p)}=\frac{1}{1.2\ldots p}\left\{p^c+0.\frac{p}{1}(p-1)^c+1.\frac{p}{1}.\frac{p-1}{1.2}(p-2)^c\right.$$
$$\left.+2.\frac{p}{1}.\frac{p-1}{2}.\frac{p-2}{3}(p-3)^c+\ldots\right\};\quad \text{(D)}$$

dans laquelle les coefficiens $0, 1, 2, 9, 44, 265, \ldots\ldots$ sont liés entre eux par les équations.

$$0=1.1-1,$$
$$1=2.0+1,$$
$$2=3.1-1,$$
$$9=4.2+1,$$
$$44=5.9-1,$$
$$\ldots\ldots\ldots;$$

ou, en général,

$$a_n=n.a_{n-1}+(-1)^n;\qquad \text{(E)}$$

le quantième $n$ du premier terme de la formule étant $0$.

On s'assure ensuite, par un calcul effectif, qu'elle satisfait à l'équation (C). De plus, en faisant $p=1$, elle se réduit à l'unité, ce qui vérifie les valeurs initiales ; d'où il suit que cette formule résout le problème proposé. L'expression générale des coefficiens $0, 1, 2, 9, 44, \ldots\ldots$, est au surplus

$$a_n = (-1)^n \{ 1 - n + n(n-1) - n(n-1)(n-2) + \dots\dots \} \,;$$

car, outre que cette expression satisfait à l'équation (E), elle donne la valeur initiale $a_0 = 1$ (*).

8. En éliminant $Z$ entre les deux équations (A), (C), on parvient facilement à la suivante

$$Y_{(c,p)} = pY_{(c-1,p)} + Y_{(c,p-1)} - (p-1)Y_{(c-1,p-1)} - Y_{(c-2,p-1)} \,;$$

qui a conséquemment pour intégrale la formule (D), tout comme (A) a pour intégrale la formule (B); mais ces intégrales, pour être complètes doivent admettre un complément arbitraire.

---

(*) Ces coefficiens peuvent encore être considérés comme liés entre eux par l'équation aux différences

$$a_n = n(a_{n-1} + a_{-1}) \,.$$

J. D. G.

# QUESTIONS PROPOSÉES.

## *Problèmes de Géométrie.*

I. CONSTRUIRE trois cercles tels que chacun d'eux touche les deux autres, et qui satisfassent de plus aux conditions suivantes, savoir : 1.° que les points de contact de deux d'entre eux avec le troisième soient deux points donnés ; 2.° que ces deux-là soient tangents à un même cercle donné ?

II. Construire quatre sphères telles que chacune touche les trois autres, et qui satisfassent de plus aux conditions suivantes : 1.° que les points de contact des trois premières avec la quatrième soient trois points donnés ; 2.° que ces trois sphères soient tangentes à une même sphère donnée ?

III. Des trois quarrés qu'on peut inscrire à un même triangle scalène, quel est le plus grand et quel est le plus petit ?

# GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

## *Théorie géométrique de la* cycloïde,

Par M. Du Bourguet, ancien capitaine de vaisseau, Chevalier de l'Ordre royal et militaire de St-Louis, professeur de mathématiques spéciales au collége de Louis-le-Grand.

Si les géomètres n'avaient jamais en vue dans leurs recherches que les applications pratiques dont elles peuvent être susceptibles, ils mettraient, sans doute, beaucoup moins de soin et de prix à obtenir, sous forme finie, une multitude d'expressions que l'on peut aisément avoir en séries très-convergentes, et propres conséquemment à fournir des résultats incomparablement plus approchés que, dans aucun cas, l'état physique des choses ne le réclame, et même ne le permet. De quelle utilité pratique, par exemple, pourrait être la solution rigoureuse du problème de la rectification de la circonférence, aujourd'hui que nos séries nous ont fourni au-delà des 150 premiers chiffres décimaux du rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre; lorsque sur-tout on considère que les 20 premiers de ces chiffres sont plus que suffisans pour déterminer, à moins de l'épaisseur d'un cheveu près, la circonférence d'un cercle qui embrasserait tout notre système planétaire. A quoi l'on peut ajouter encore que les expressions finies elles-mêmes, dès qu'elles ne sont point à la fois algébriques et rationnelles, ne sont susceptibles, tout comme les séries, que d'évaluation approchée.

Toutefois, on ne saurait disconvenir que, du moins aux yeux des théoriciens, les expressions sous forme finie ne soient plus satisfaisantes que les séries illimitées, quelque convergentes qu'on les suppose d'ailleurs. Outre que ces sortes d'expressions s'introduisent et se combinent plus facilement dans les calculs, elles sont souvent susceptibles d'un énoncé concis et élégant; et c'est sans doute ce qui les fait rechercher encore, lors même qu'elles ne sont point susceptibles d'évaluation immédiate, ainsi qu'il arrive pour la formule de Bernoulli $\varpi = \frac{\text{Log.}(-1)}{\sqrt{-1}}$. On peut remarquer enfin que la découverte de l'expression finie d'une quantité, déjà connue par les séries, est un pas de plus dans la solution de l'important et difficile problème de la sommation des suites.

Par ces motifs, nous osons espérer que les géomètres voudront bien accueillir, avec quelque intérêt et bienveillance, l'opuscule que l'on va lire. Il présente, dans un cadre peu étendu, un système complet de formules finies pour la rectification et la quadrature indéfinie des arcs et segmens de cycloïdes, pour la quadrature des surfaces et la cubature des corps engendrés par la révolution de ces arcs et segmens autour de chacune des quatre lignes les plus remarquables de la courbe, enfin pour la détermination des centres de gravité des unes et des autres. Plusieurs de ces expressions n'avaient point été données jusqu'ici, et on paraissait même incliner à penser que quelques-unes d'entre elles ne pouvaient l'être que par les séries. On va voir qu'elles sont toutes susceptibles d'une forme finie.

I. Pour éviter au lecteur l'embarras de feuilleter des traités de calcul intégral, ou de suppléer à ce qu'on n'y trouve pas, et pour lui offrir en même temps le moyen de vérifier facilement nos calculs, nous croyons convenable de présenter brièvement ici les seules formules d'intégration, peu nombreuses d'ailleurs, qui nous seront nécessaires pour parvenir à notre but. Nous sous-entendrons les constantes.

1.° On a d'abord immédiatement

$$\int dz \operatorname{Sin.}^m z \operatorname{Cos.} z = +\frac{1}{m+1}\operatorname{Sin.}^{m+1} z, \qquad (A)$$

$$\int dz \operatorname{Cos.}^m z \operatorname{Sin.} z = -\frac{1}{m+1}\operatorname{Cos.}^{m+1} z. \qquad (B)$$

2.° Si l'on a à intégrer des formules de l'une des deux formes

$$dz\operatorname{Sin.}^{2m+1} z, \qquad dz\operatorname{Cos.}^{2m+1} z,$$

on les transformera dans les suivantes

$$dz\operatorname{Sin.} z(1-\operatorname{Cos.}^2 z)^m, \qquad dz\operatorname{Cos.} z(1-\operatorname{Sin.}^2 z)^m,$$

lesquels, par leur développement, donneront une suite de termes rentrant dans le cas (1.°).

3.° Si les formules à intégrer sont de l'une des deux formes

$$dz\operatorname{Sin.}^m z\operatorname{Cos.}^{2n+1} z, \qquad dz\operatorname{Cos.}^m z\operatorname{Sin.}^{2n+1} z,$$

on les transformera en celles-ci

$$dz\operatorname{Sin.}^m z\operatorname{Cos.} z(1-\operatorname{Sin.}^2 z)^n, \qquad dz\operatorname{Cos.}^m z\operatorname{Sin.} z(1-\operatorname{Cos.}^2 z)^n,$$

lesquelles, par leur développement, donneront une suite de termes rentrant également dans le cas (1.°).

4.° Si les formules à intégrer sont

$$dz\operatorname{Sin.}^{2m} z, \qquad dz\operatorname{Cos.}^{2m} z,$$

en aura recours à l'intégration par parties, qui donne, comme l'on sait,

$$\int dz\operatorname{Sin.}^{2m} z = -\frac{1}{2m}\operatorname{Sin.}^{2m-1} z\operatorname{Cos.} z + \frac{2m-1}{2m}\int dz\operatorname{Sin.}^{2(m-1)} z, \qquad (C)$$

$$\int dz\operatorname{Cos.}^{2m} z = +\frac{1}{2m}\operatorname{Cos.}^{2m-1} z\operatorname{Sin.} z + \frac{2m-1}{2m}\int dz\operatorname{Cos.}^{2(m-1)} z; \qquad (D)$$

formules au moyen desquelles on parviendra, par degrés, à ramener les intégrales cherchées à $\int dz = z$.

5.° Si les formules à intégrer sont de l'une des deux formes

$$dz\text{Sin.}^m z\text{Cos.}^{2n} z \;, \qquad dz\text{Cos.}^m z\text{Sin.}^{2n} z \;,$$

on leur substituera leurs équivalentes

$$dz\text{Sin.}^m z(1-\text{Sin.}^2 z)^n \;, \qquad dz\text{Cos.}^m z(1-\text{Cos.}^2 z)^n \;,$$

lesquelles, par le développement, donneront une suite de termes qui rentreront dans l'un des cas (2.°) et (4.°).

On sait donc, par ce qui précède, intégrer, sous forme finie, toute formule de la forme

$$dz\text{Sin.}^m z\text{Cos.}^n z \;,$$

$m$ et $n$ étant des nombres entiers positifs quelconques ou zéro.

6.° Soit présentement une formule de la forme

$$z^k dz\text{Sin.}^m z\text{Cos.}^n z \;;$$

l'intégration par parties donnera

$$\int z^k dz\text{Sin.}^m z\text{Cos.}^n z = z\int z^{k-1} dz\text{Sin.}^m z\text{Cos.}^n z - \int dz \int z^{k-1} dz\text{Sin.}^m z\text{Cos.}^n z \;; \quad (E)$$

au moyen de quoi on ramenera, par degrés, l'intégration demandée à $\int dz\text{Sin.}^m z\text{Cos.}^n z$, que nous avons traitée dans les numéros précédens.

II. Soient AO, AO′ respectivement (fig. 1) la demi-base et la montée d'une cycloïde, et soient menées O′A′, OA′, respectivement parallèles à ces deux droites. Par un quelconque M des points de la courbe, soient menées aux mêmes droites les parallèles QQ′, PP′ terminées aux quatre droites. Soit C le lieu du centre du cercle générateur, pour sa position où le point décrivant est en M, et soit DD′ son diamètre parallèle à AO′, coupant QQ′ en N; soient enfin menées MD, MC, MD′ et soient $CD=CM=CD'=r$.

Nous prendrons

$$OP=QM=x \;, \qquad MP=QO=y \;,$$
$$O'P'=Q'M=x' \;, \qquad MP'=Q'O'=y' \;,$$

au moyen de quoi nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} x+x'=\varpi r\ , \\ y+y'=2r\ ; \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} \mathrm{d}x+\mathrm{d}x'=0\ , \\ \mathrm{d}y+\mathrm{d}y'=0\ , \end{array}\right.$$

Nous poserons en outre

$$\text{Ang.DCM}=2z\ ; \qquad \text{Ang.D}'\text{CM}=2z'\ ,$$

ce qni donnera

$$2(z+z')=\varpi\ , \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{d}z+\mathrm{d}z'=0.$$

Cela posé, nous aurons

$$\mathit{Arc}\,\text{MD}=2rz\ , \qquad \mathit{Cord}.\text{MD}=2r\text{Sin}.z=2r\text{Cos}.z'\ ;$$
$$\mathit{Arc}.\text{MD}'=2rz'\ , \qquad \mathit{Cord}.\text{MD}'=2r\text{Sin}.z'=2r\text{Cos}.z\ .$$

Nous aurons encore

$$\text{PD}=\text{P}'\text{D}'=\text{MN}=r\text{Sin}.2z=2r\text{Sin}.z\text{Cos}.z=2r\text{Sin}.z'\text{Cos}.z'\ ,$$
$$\text{CN}=r\text{Cos}.2z=r(\text{Cos}.^2z-\text{Sin}.^2z)=r(\text{Sin}.^2z'-\text{Cos}.^2z')\ ;$$

mais, par la nature de la cycloïde,

$$\text{OP}=\text{OD}-\text{DP}=\mathit{Arc}.\text{MD}-\text{MN}\ ;$$
$$\text{MP}=\text{ND}=\text{CD}-\text{CN}\ ;$$

donc, en substituant,

$$\left.\begin{array}{l} x=2r(z-\text{Sin}.z\text{Cos}.z)\ , \\ y=2r\text{Sin}.^2z \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} x'=2r(z'+\text{Sin}.z'\text{Cos}.z')\ , \\ y'=2r\text{Sin}.^2z'\ ; \end{array}\right.$$

donc encore

$$\mathrm{d}x=4r\mathrm{d}z\text{Sin}.^2z\ , \qquad \mathrm{d}x'=4r\mathrm{d}z'\text{Cos}.^2z'\ ,$$
$$\mathrm{d}y=4r\mathrm{d}z\text{Sin}.z\text{Cos}.z\ , \qquad \mathrm{d}y'=4r\mathrm{d}z'\text{Sin}.z'\text{Cos}.z'\ .$$

De là on passerait facilement aux équations primitive et différentielle de la courbe, soit en $x$ et $y$ soit en $x'$ et $y'$ ; mais elles ne nous seront pas nécessaires.

Pour la commodité typographique, nous poserons encore

$$\text{Cos.}z=t\ ,\quad \text{Sin.}z=u\ ,\quad \text{d'où}\quad t^2+u^2=1\ ,$$
$$\text{Cos.}z'=t'\ ,\quad \text{Sin.}z'=u'\ ,\quad \text{d'où}\quad t'^2+u'^2=1\ ;$$

ce qui donnera

$$x=2r(z-tu)\ ,\quad y=2ru^2\ ,\quad dx=4ru^2dz\ ,\quad dy=4rtu\,dz\ ,$$
$$x'=2r(z'+t'u')\ ,\quad y'=2ru'^2\ ,\quad dx'=4rt'^2dz'\ ,\quad dy'=4rt'u'dz'.$$

III. *Cherchons d'abord les longueurs des arcs indéfinis* MO, MO′ ?

L'élément du premier de ces arcs est

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=4ru\,dz\ ,$$

dont l'intégrale, commençant avec $z$, est (I)

$$Arc.\text{MO}=4r(1-t)=2(\text{D'D}-\text{D'M}). \qquad (a)$$

De là

$$Arc.\text{OO'}=4r=2\text{DD'}\ ,$$

et par conséquent

$$Arc.\ \text{MO'}=4ru'=2\text{MD'}\ ; \qquad (b)$$

ce qui met en évidence la propriété de la développée. On pourra évidemment, par ce qui précède, obtenir la longueur d'un arc quelconque de la courbe.

IV. *Cherchons les surfaces engendrées par l'arc* OM, *tournant successivement autour de* OP *et* OQ ?

L'élément de la première surface est

$$2\varpi y\sqrt{dx^2+dy^2}=16\varpi r^2u^3dz\ ,$$

dont l'intégrale, commençant avec $z$, est (I)

$$\tfrac{16}{3}\varpi r^2(1-t)^2(2+t). \qquad (c)$$

De là on conclura, pour l'expression de la surface engendrée par l'arc entier OO′, autour de OA

$$\tfrac{32}{3}\varpi r^2=\tfrac{32}{3}\text{Cer.}r.$$

L'élément de la seconde surface est

$$2\varpi x\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=16\varpi r^2u\mathrm{d}z(z-tu)\ ,$$

dont l'intégrale, commençant avec $z$, est (I)

$$\tfrac{16}{3}\varpi r^2\{u(3-u^2)-3tz\}\ . \qquad (d)$$

De là on conclura, pour la surface engendrée par l'arc entier OO′, tournant autour de OA′,

$$\tfrac{32}{3}\varpi r^2=\tfrac{32}{3}\,\mathrm{Cer}.r.$$

Il est très-remarquable que la surface engendrée par l'arc OO′ est toujours de même étendue, soit que cet arc tourne autour de OA ou qu'il tourne autour de OA′. On pourra évidemment, par ce qui précède, obtenir la surface engendrée par un arc quelconque de la courbe, tournant autour de OA ou OA′

V. *Cherchons les coordonnées du centre de gravité de chacun des deux arcs indéfinis* MO *et* MO′ ?

Soient $X$, $Y$ les coordonnées, pour l'origine O, du centre de gravité du premier de ces deux arcs ; soient $X'$, $Y'$ les coordonnees, pour l'origine O′, du centre de gravité du second.

Suivant la *règle centrobarique*, $X$ et $Y$ seront les quotiens respectifs des formules ($d$) et ($c$) par la formule ($a$) multipliée par $2\varpi$; de sorte qu'on aura

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{2r\{u(3-u^2)-3tz\}}{3(1-t)}\ ,\\ Y&=\tfrac{2}{3}r(1-t)(2+t)\ . \end{aligned}\right\} \qquad (e)$$

Dans le cas où il s'agira de l'arc entier OO′, on aura

$$X=Y=\tfrac{4}{3}r.$$

Or, on a, en général

$$\mathit{Mom}.\mathrm{MO}'=\mathit{Mom}.\mathrm{OO}'-\mathit{Mom}.\mathrm{MO}\ ;$$

prenant donc successivement O′A et O′A′ pour axes des momens, il viendra

$$X'.4ru'=4r(\varpi r-\tfrac{4}{3}r)-4r(1-u')\left\{\varpi r-\frac{2r[t'(3-t'^2)-3u'z]}{3(t-u')}\right\};$$

$$Y'.4ru'=4r(2r-\tfrac{4}{3}r)-4r(1-u')\{2r-\tfrac{2}{3}r(1-u')(2+u')\};$$

d'où on tire, toutes réductions faites,

$$\left.\begin{aligned} X'&=\frac{2r\{3u'z'-(1-t')^2(2+t')\}}{3u'}, \\ Y'&=\tfrac{2}{3}ru'^2=\tfrac{1}{3}\mathrm{O'Q'}. \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

Cette dernière formule prouve que le centre de gravité de tout arc de cycloïde qui a son milieu à son sommet O′ est au tiers de sa flèche, à partir de ce sommet. D'après les précédens résultats, la recherche du centre de gravité d'un arc quelconque de cycloïde ne saurait offrir de difficulté.

VI. *Cherchons les surfaces engendrées par l'arc* MO′, *tournant autour de* O′A′ *ou* O′A ?

Suivant la *règle centrobarique*, ces surfaces seront les produits respectifs de la formule (*b*) par $2\varpi Y'$ et $2\varpi X'$, ce qui donnera

$$\tfrac{16}{3}\varpi r^2u'^3=\tfrac{4}{3}.2\varpi.\mathrm{MP}.\tfrac{1}{2}\mathit{Cord}.\mathrm{MD'}, \quad (g)$$

$$\tfrac{16}{3}\varpi r^2\{3u'z'-(1-t')^2(2+t')\}. \quad (h)$$

La première sera donc les $\frac{4}{3}$ de la surface engendrée par la tangente MD′ tournant autour du même axe.

S'il s'agit de l'arc entier OO′, on aura, pour la première surface,

$$\tfrac{16}{3}\varpi r^2=\tfrac{4}{3}\mathit{Arc}.\mathrm{OA};$$

c'est-à-dire, la moitié de la surface engendrée par le même arc autour de OA. On aura ensuite, pour la seconde

$$\tfrac{8}{3}\varpi r^2(3\varpi-4)=4\varpi r.2\varpi r-\tfrac{32}{3}\varpi r^2;$$

résultat qui prouve (IV) que la somme des surfaces engendrées par la demi-cycloïde OO′, tournant successivement autour de AO′ et OA′ est égale à la surface convexe du cylindre engendré par le rectangle circonscrit à la cycloïde entière, tournant autour de sa base.

base. Au moyen de ce qui précède, on obtiendra facilement la surface engendrée par un arc quelconque de la courbe, tournant autour de O′A′ ou O′A, ou même autour d'une droite quelconque, puisque le centre de gravité de cet arc sera assignable.

VII. *Cherchons les centres de gravité des surfaces engendrées par* OM *tournant autour de* OA *ou* OA′ ?

Nous avons déjà vu (IV) que les élémens de ces deux surfaces sont respectivement

$$2\varpi y\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}\ , \qquad 2\varpi x\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}\ ;$$

d'où il suit que leur moment commun, par rapport aux plans conduits par O, perpendiculairement aux axes de rotation, est

$$2\varpi xy\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=32\varpi r^3u^3\mathrm{d}z(z-tu)\ ,$$

dont l'intégrale, commençant avec $z$, est (I)

$$\tfrac{32}{45}\varpi r^3\{u(30+5u^2-9u^4)-15tz(2+u^2)\}\ ;$$

divisant donc cette intégrale successivement par les deux formules ($c$) et ($d$), nous aurons pour les distances du point O aux centres de gravité des deux surfaces,

$$\frac{2r\{u(30+5u^2-9u^4)-15tz(2+u^2)\}}{15(1-t)^2(2+t^2)}\ , \qquad (k)$$

$$\frac{2r\{u(30+5u^2-9u^4)-15tz(2+u^2)\}}{15\{u(3-u^2)-3tz\}}\ . \qquad (l)$$

Dans le cas où il sera question des surfaces engendrées par la révolution de l'arc entier OO′, ces deux expressions deviendront également

$$\tfrac{26}{15}r=\tfrac{13}{15}\mathrm{OA}'\ .$$

On pourra facilement, d'après ces résultats, trouver le centre de gravité de la surface engendrée par un arc quelconque de la courbe, tournant autour de OA ou OA′.

*VIII. Cherchons les centres de gravité des surfaces engendrées par l'arc* MO′, *tournant autour de* O′A′ *et* O′A ?

Ces surfaces ayant pour élémens respectifs

$$2\varpi y'\sqrt{\mathrm{d}x'^2+\mathrm{d}y'^2}\ ,\quad 2\varpi x'\sqrt{\mathrm{d}x'^2+\mathrm{d}y'^2}\ ,$$

le moment commun de ces élémens, par rapport aux plans conduits par O′, perpendiculairement aux axes, sera

$$2\varpi x'y'\sqrt{\mathrm{d}x'^2+\mathrm{d}y'^2}=32\varpi r^3t'u'^2\mathrm{d}z'(z'+t'u')\ ,$$

dont l'intégrale, commençant avec $z'$, est (I)

$$\tfrac{32}{45}\varpi r^3(1-t')\{15u'z'(1+t')-(1-t')(4-7t'-18t'^2-9t'^3)\}\ ;$$

divisant donc successivement cette intégrale par les deux formules ($g$) et ($h$), on aura, pour les distances du point O′ aux centres de gravité des deux surfaces

$$\frac{2r\{15u'z'(1+t')-(1-t')(4-7t'-18t'^2-9t'^3)\}}{15u'(1+t')}\ ,\qquad (m)$$

$$\frac{2r(1-t')\{15u'z'(1+t')-(1-t')(4-7t'-18t'^2-9t'^3)\}}{15\{3u'z'-(1-t')^2(2+t')\}}\ .\qquad (n)$$

S'il s'agit des surfaces décrites par l'arc entier O′O, ces formules deviendront respectivement,

$$\varpi r-\tfrac{8}{15}r=\mathrm{O'A'}-\tfrac{4}{15}\mathrm{A'O}\ ,\quad \tfrac{2}{15}r\cdot\frac{15\varpi-8}{3\varpi-4}\ .$$

La première prouve que la distance du point A′ au centre de gravité de la surface décrite par O′O autour de O′A′ et les $\frac{4}{15}$ de A′O, et non point les $\frac{4}{9}$ de cette droite, comme quelques auteurs l'ont écrit. On peut, d'après ce qui précède, trouver le centre de gravité de la surface engendrée par un arc quelconque de la courbe, tournant autour de O′A′ ou O′A.

IX. *Cherchons les aires des quatre segmens* OPM, OQM, O′P′M, O′Q′M?

L'élément du segment OPM est

$$y\mathrm{d}x=8r^2u^4\mathrm{d}z\ ,$$

dont l'intégrale, commençant avec $z$, est (I)

$$\mathrm{OPM}=r^2\{3z-tu(3+2u^2)\}\ .\qquad (p)$$

On aura ensuite

$$OQM = xy - OPM,$$

c'est-à-dire ;

$$OQM = r^2\{tu(3-2u^2) - z(3-4u^2)\}. \qquad (q)$$

De là on conclura

$$OAO' = \tfrac{1}{2}\varpi r^2 = \tfrac{1}{2}\,\text{Cerc}.r, \quad OA'O' = \tfrac{1}{2}\varpi r^2 = \tfrac{1}{2}\,\text{Cerc}.r\ ;$$

c'est-à-dire, que l'aire de la cycloïde entière est triple de celle du cercle générateur. On a en outre

$$O'P'M = O'A'O - OQM - QA'P'M,$$

$$O'Q'M = O'AO - OPM - Q'APM\ ;$$

c'est-à-dire ;

$$O'P'M = r^2\{z' + t'u'(1-2t'^2)\}, \qquad (r)$$

$$O'Q'M = r^2\{z'(3-4t'^2) + t'u'(3-2t'^2)\}. \qquad (s)$$

De tout cela on déduira facilement l'aire de toute surface plane terminée par des lignes droites et par des arcs de cycloïdes.

X. *Cherchons les volumes des corps engendrés par la révolution des segmens* OPM, OQM, *tournant autour de* OP *et* OQ, *respectivement ?*

L'élément du premier de ces deux corps est

$$\varpi y^2 \mathrm{d}x = 16\varpi r^3 u^6 \mathrm{d}z,$$

dont l'intégrale, commençant avec $z$, est (I)

$$\tfrac{1}{3}\varpi r^3\{15z - tu(15 + 10u^2 + 8u^4)\}. \qquad (aa)$$

D'après cela, le volume du corps engendré par la révolution du segment entier OAO', autour de OA, sera

$$\tfrac{5}{2}\varpi^2 r^3 = \tfrac{5}{8}\,OA.\,\text{Cerc}.OA'\ ;$$

c'est-à-dire, les $\frac{5}{8}$ du volume cylindre engendré par la révolution du rectangle OA'O'A autour de OA.

L'élément de l'autre corps est

$$\varpi x^2 dy = 16\varpi r^2 tu dz(z - tu)^2 ,$$

dont l'intégrale, commençant avec $z$, est (I)

$$\tfrac{2}{3}\varpi r^2\{6tuz(3 - zu^2) - 3z^2(3 - 4u^2) - u^2)9 - 9u^2 + 4u^4)\} . \qquad (bb)$$

D'après cela, le volume du corps engendré par la révolution du segment entier OA'O', autour de OA', aura pour expression

$$\tfrac{2}{6}\varpi r^3(3\varpi^2 - 16) = \tfrac{1}{4}\mathrm{OA'}.Cerc.\mathrm{OA} - 2Sph.r \;;$$

c'est-à-dire, le quart du cylindre engendré par le rectangle OAO'A' tournant autour de OA', moins deux sphères ayant même rayon que le cercle générateur. A l'aide de ces résultats on pourra toujours trouver le volume du corps engendré par un segment quelconque de la courbe, tournant autour de OA ou OA'.

XI. *Cherchons le centre de gravité de chacun des quatre segmens* OPM, OQM, O'P'M, O'Q'M?

Par la *règle centrobarique*, l'ordonnée du centre de gravité du segment OPM s'obtiendra en divisant la formule $(aa)$ par la formule $(p)$ multipliée par $2\varpi$; ce qui donnera

$$\frac{r\{15z - tu(15 + 10u^2 + 8u^4)\}}{6\{3z - tu(3 + 2u^2)\}} . \qquad (cc)$$

Par la même règle, l'abscisse du centre de gravité du segment OQM s'obtiendra en divisant la formule $(bb)$ par la formule $(q)$ multipliée aussi par $2\varpi$; ce qui donnera

$$\frac{r\{3z^2(3 - 4u^2) - 6tuz(3 - 2u^2) + u^2(9 - 9u^2 + 4u^4)\}}{3\{z(3 - 4u^2) - tu(3 - 2u^2)\}} . \qquad (dd)$$

Mais on a, quel que soit l'axe des momens,

$$Mom.\mathrm{OPM} = Mom.\mathrm{OQMP} - Mom.\mathrm{OQM} ,$$

$$Mom.\mathrm{OQM} = Mom.\mathrm{OQMP} - Mom.\mathrm{OPM} \;;$$

prenant donc respectivement OQ, OP pour axes des momens, on aura

$$Mom.\mathrm{OPM}=\tfrac{1}{3}r^3\{9z^2-6tuz(3+2u^2)+u^2(9+3u^2-8u^4)\}\ ,$$
$$Mom.\mathrm{OQM}=\tfrac{1}{6}r^3\{t(15+10u^2-16u^4)-3z(5-8u^4)\}\ ;$$

divisant donc respectivement ces momens par les formules ($p$) et ($q$), on aura pour l'abscisse du centre de gravité de OPM et l'ordonnée de celui de OQM

$$\frac{r\{9z^2-6tuz(3+2u^2)+u^2(9+3u^2-8u^4)\}}{3\{3z-tu(3+2u^2)\}}\ , \qquad (ee)$$
$$\frac{r\{3z(5-8u^4)-tu(15+10u^2-16u^4)\}}{6\{z(3-4u^2)-tu(3-2u^2)\}}\ . \qquad (ff)$$

Voilà donc les deux coordonnées des centres de gravité des deux segmens OPM, OQM qui se trouvent ainsi déterminées ; le point O étant pris pour origine.

On trouvera, d'après cela, pour l'ordonnée et l'abscisse du centre de gravité de l'aire OAO′ de la demi-cycloïde,

$$\tfrac{5}{6}r=\tfrac{5}{12}\mathrm{AO}'\ ,\quad r.\frac{9\varpi^2+16}{18\varpi}\ ;$$

et ensuite, pour l'ordonnée et l'abscisse du centre de gravité de l'espace OA′O′,

$$\tfrac{1}{2}r=\tfrac{1}{4}\mathrm{OA}'\ ,\quad r.\frac{3\varpi^2-16}{6\varpi}\ .$$

Il nous reste maintenant à assigner les centres de gravité des deux autres segmens MP′O′, MQ′O′. Ici nous prendrons le point O′ pour origine. Nous aurons d'abord, quel que soit l'arc,

$$Mom.\mathrm{MP'O'}=Mom.\mathrm{OA'O'}-Mom.\mathrm{QA'P'M}-Mom.\mathrm{OQM}\ ;$$

prenant donc successivement OA′ et OA pour axes des momens, cette équation deviendra

$$Mom.\mathrm{MP'O'}=\tfrac{1}{6}r^3\{3z'+t'u'(3-14t'^2+8t'^4)\}\ ,$$
$$Mom.\mathrm{MP'O'}=\tfrac{1}{3}r^3\{3z'^2+6t'u'z'(1-2t'^2)+(1-t'^2)(4+7t'^2-8t'^4)\}.$$

En divisant donc ces deux momens par la formule ($r$), on aura pour l'ordonnée et l'abscisse du centre de gravité du segment MP′O′,

$$\frac{r\{3z'+t'u'(3-14t'^2+8t'^4)\}}{6\{z'+t'u'(1-2t'^2)\}}\,, \qquad (gg)$$

$$\frac{r\{3z'^2+6t'u'z(1-2t'^2)+(1-t'^2)(4+7t'^2-8t'^4)\}}{3\{z'+t'u'(1-2t'^2)\}}\,. \qquad (hh)$$

De là on passera aisément à l'ordonnée et à l'abscisse du 4.me segment O'Q'M. On a, quel que soit l'axe des momens,

$$Mom.\mathrm{O'Q'M} = Mom.\mathrm{MP'O'Q'} - Mom.\mathrm{MP'O'}\ ;$$

prenant donc successivement OP' et OQ' pour axes des momens, on aura

$$Mom.\mathrm{O'Q'M} = \tfrac{1}{6}r^3\{t'u'(21-34t'^2+16t'^4)+3z'(7-16t'^2+8t'^4)\}\,,$$

$$Mom.\mathrm{O'Q'M} = \tfrac{1}{3}r^3\{3z'^2(3-4t'^2)+6t'uz'(3-t'^2)-(1-t'^2)(4-5t'^2+4t'^4)\}.$$

Divisant enfin ces deux momens par la formule [illegible], on aura, pour l'ordonnée et l'abscisse du centre de gravité du segment O'Q'M,

$$\frac{r\{3z'(7-16t'^2+8t'^4)+t'u'(21-34t'^2+16t'^4)\}}{6\{z'(3-4t'^2)+t'u'(3-2t'^2)\}}\,, \qquad (kk)$$

$$\frac{r\{3z'^2(3-4t'^2)+6t'u'z'(3-2t'^2)-(1-t'^2)(4-5t'^2+4t'^4)\}}{3\{z'(3-4t'^2)+t'u'(3-2t'^2)\}}\,. \qquad (ll)$$

M. Poisson a paru penser que les abscisses des centres de gravité de ces segmens ne pouvaient être exprimées que par des séries ( Voyez sa *Mécanique*, tome 1.er , page 147 ). Mais on voit, par ce qui précède, qu'on peut toujours avoir exactement, sous forme finie, les deux coordonnées du centre de gravité d'une surface plane quelconque, terminée par des lignes droites et des arcs de cycloïdes.

XII. *Cherchons les volumes des corps engendrés par la révolution des deux segmens* O'P'M, O'Q'M *autour de* O'P' *et* O'Q', *respectivement ?*

Suivant la *règle centrobarique*, le volume du premier de ces deux corps s'obtiendra en multipliant par $2\varpi$ le produit des deux formules $(r)$ et $(gg)$ ; ce volume sera donc

$$\tfrac{2}{3}\,\varpi r^3\{3z'+t'u'(3-14t'^2+8t'^4)\}. \qquad (mm)$$

Le volume de l'autre corps s'obtiendra, suivant la même règle, en multipliant par $2\varpi$ le produit des deux formules $(r)$ et $(ll)$; ce volume sera donc

$$\tfrac{2}{3}\,\varpi r^3\{3z'^2(3-4t'^2)+6t'u'z(3-2t'^2)-(1-t'^2)(4-5t'^2+4t'^4)\}. \qquad (nn)$$

On trouvera, d'après cela, pour le volume du corps engendré par O'A'O, tournant autour de O'A',

$$\tfrac{1}{2}\,\varpi^2 r^3=\tfrac{1}{8}\,\mathrm{O'A'}\,.\,\mathit{Cerc.}\mathrm{A'O}\ ;$$

c'est-à-dire, le 8.$^{me}$ du cylindre circonscrit; et pour le volume du corps engendré par O'AO, tournant autour de O'A,

$$\tfrac{1}{6}\,\varpi r^3(9\varpi^2-16)=\tfrac{3}{4}\,\mathrm{AO'}\,.\,\mathit{Cerc.}\mathrm{AO}-2\mathit{Sph.r}\ ;$$

c'est-à-dire, les $\frac{3}{4}$ du cylindre circonscrit, moins deux sphères ayant même rayon que le cercle générateur. On obtiendra facilement, d'après cela, les volumes des corps engendrés par des segmens quelconques de cycloïdes, tournant autour de O'A' ou O'A, ou même autour d'une droite quelconque, puisque (XI) le centre de gravité de l'aire de ce segment sera assignable.

XIII. *Cherchons les centres de gravité des corps engendrés par la révolution des deux segmens* OPM, OQM, *tournant autour de* OP *et* OQ *respectivement?*

L'élément du premier de ces deux corps étant $\varpi y^2\mathrm{d}x$, le moment de cet élément, par rapport au plan conduit par O, perpendiculairement à l'axe, sera

$$\varpi xy^2\mathrm{d}x=32\varpi r^4u^6\mathrm{d}z(z-tu)\ ,$$

dont l'intégrale, commençant avec $z$, est (I)

$$\tfrac{1}{9}\,\varpi r^4\{45z^2-6tuz(15+10u^2+8u^4)+u^2(45+15u^2+8u^4-36u^6)\}\ ;$$

divisant donc par la formule $(aa)$, on aura, pour la distance du point O au centre de gravité de ce volume,

$$\frac{r\{45z^2-6tuz(15+10u^2+8u^4)+u^2(45+15u^2+8u^4-36u^6)\}}{3\{15z-tu(15+10u^2+8u^4)\}}\ . \qquad (pp)$$

En conséquence, s'il s'agit de la distance du point O au centre de gravité du corps engendré par OAO', on trouvera pour son expression

$$r\,.\frac{45\varpi^2+128}{180\varpi}\ .$$

L'élément du second de ces deux corps étant $\varpi x^2 dy$, le moment de cet élément, par rapport au plan conduit par O perpendiculairement à l'axe, sera

$$\varpi x^2 y dy = 32\varpi r^2 tu^3 (z-tu)^2\ ,$$

dont l'intégrale, commençant avec $z$, est (I)

$$\tfrac{1}{9}\varpi r^4\{6tuz(15+10u^2-16u^4)-9z^2(5-8u^4)-u^2(45+15u^2-64u^4+36u^6)\}\ ;$$

divisant donc par la formule $(bb)$, on aura, pour la distance du point O au centre de gravité de ce volume

$$\frac{r\{9z^2(5-8u^4)-6tuz(15+10u^2-16u^4)+u^2(45+15u^2-64u^4+36u^6)\}}{6\{3z^2(3-4u^2)-6tuz(3-2u^2)+u^2(9-9u^2+4u^4)\}}\ . \qquad (qq)$$

En conséquence, s'il s'agit de la distance du point O au centre de gravité du corps engendré par OA'O', on trouvera pour son expression

$$\frac{r}{6}\,.\frac{27\varpi^2-128}{3\varpi^2-16}\ .$$

On voit, d'après ce qui précède, qu'il sera toujours facile de déterminer le centre de gravité du corps engendré par un segment quelconque de la courbe, tournant autour de OA ou OA'.

XIV. *Cherchons enfin les centres de gravité des corps engendrés par la révolution des deux segmens* O'MP', O'MQ', *tournant autour de* O'P' *et* O'Q', *respectivement?*

L'élément du premier de ces deux corps étant $\varpi y'^2 dx'$ le moment de cet élément, par rapport au plan conduit par O' perpendiculairement à l'axe, sera

$\varpi x' y'^2$

$$\varpi x'y'^2 dx' = 32\pi r^4 t'^2 u'^4 dz'(z'+t'u')\,;$$

dont l'intégrale, commençant avec $z'$, est (I)

$$\tfrac{1}{9}\varpi r^4\{9z'^2+6t'u'z'(3-14t'^2+8t'^4)+(1-t'^2)(16+25t'^2-68t'^4+36t'^6)\}\,;$$

divisant donc par la formule $(mm)$, on aura, pour la distance du point O′ au centre de gravité de ce corps,

$$\frac{r\{9z'^2+6t'u'z'(3-14t'^2+8t'^4)+(1-t'^2)(16+25t'^2-68t'^4+36t'^6)\}}{3\{3z'+t'u'(3-14t'^2+8t'^4)\}}. \qquad (rr')$$

En conséquence, s'il s'agit de la distance du point O′ au centre de gravité du corps engendré par OO′A′, tournant autour de O′A′, on trouvera pour son expression

$$r\,.\frac{\varpi^2+4}{2\varpi}\,.$$

L'élément du second de ces deux corps étant $\varpi x'^2 dy'$, le moment de cet elément, par rapport au plan perpendiculaire à l'axe, passant par O′, sera

$$\varpi x'^2 y' dy' = 32\varpi r^4 t'u'^3(z'+t'u')^2\,,$$

dont l'intégrale, commençant avec $z'$, est (I)

$$\tfrac{1}{9}\varpi r^4\{9z'^2(7-16t'^2+8t'^4)+6t'u'z'(21-34t'^2+16t'^4)-(1-t'^2)(16-47t'^2+76t'^4-36t'^6)\}\,;$$

divisant donc par la formule $(nn)$, on aura, pour la distance du point O′ au centre de gravité de ce corps,

$$\frac{r\{9z'^2(7-16t'^2+8t'^4)+6t'u'z'(21-34t'^2+16t'^4)-(1-t'^2)(16-47t'^2+76t'^4-36t'^6)\}}{6\{3z'^2(3-4t'^2)+6t'u'z'(3-2t'^2)-(1-t'^2)(4-5t'^2+4t'^4)\}}. \qquad (ss)$$

En conséquence, s'il s'agit de la distance du point O′ au centre de gravité du corps engendré par O′OA, tournant autour de O′A, on trouvera pour son expression

$$\tfrac{1}{2}r\,.\frac{7\varpi^2-4}{3\varpi^2-4}\,.$$

On voit, d'après ce qui précède, qu'il sera toujours facile de déterminer le centre de gravité du corps engendre par un segment quelconque du cycloïde, tournant autour de OA′ ou OA.

Paris, 17 janvier 1815.

# TRIGONOMÉTRIE.

## *Sur l'aire du triangle sphérique;*

Par M. Tédénat, correspondant de l'institut, recteur de l'académie de Nismes.

Tout le monde connaît le beau théorème de Cavalleri, sur l'aire du triangle sphérique, et on le trouve démontré très-simplement dans la plupart des traités élémentaires; mais les jeunes-gens qui étudient le calcul différentiel ne seront peut-être pas fâchés d'en trouver ici la démonstration suivante, fondée sur les principes de ce calcul.

Soient $a$, $b$, $c$ (fig. 2) les trois côtés d'un triangle sphérique $A$, $B$, $C$ les trois angles respectivement opposés, et $S$ son aire.

Si le côté $c$ et l'angle $B$ restant fixes, l'angle $A$ vient à croître de la quantité arbitraire $i$, de manière que le côté $b$ devienne $b'$, que $AC$ devienne $AC'$, et l'aire du triangle $S'$; on aura, par la *Série de Taylor*,

$$S'=S+\frac{dS}{dA}\frac{i}{1}+\frac{d^2S}{dA^2}\frac{i^2}{1.2}+\ldots\,,$$

$$b'=b+\frac{db}{dA}\frac{i}{1}+\frac{d^2b}{dA^2}\frac{i^2}{1.2}+\ldots=b+Mi\,.$$

Du sommet $A$ comme pôle, soient décrits, entre les côtés de l'angle $i$, les arcs de parallèles $Cm$, $C'm'$, et des points $C$ et $m'$ soient abaissées sur le rayon $OA$ de la sphère les perpendiculaires $CD$, $m'D'$; on pourra toujours prendre $i$ assez petit, sans être nul, pour avoir

$$S' > S + C'Am' \quad \text{et} \quad S' < S + CAm \;;$$

mais, en prenant le rayon de la sphère pour unité, et remarquant que $AD$, $AD'$ sont respectivement les flèches des calotes dont les portions de fuseaux $CAm$ et $C'Am'$ font partie, nous aurons

$$C\,Am = i(1 - \text{Cos.}b)\,,$$

$$C'Am' = i(1 - \text{Cos.}b') = i\{1 - \text{Cos.}b\,\text{Cos.}Mi + \text{Sin}\,b\,\text{Sin.}Mi\}\;;$$

mais, on a d'ailleurs

$$\text{Cos.}Mi = 1 - \frac{M^2i^2}{1.2} + \ldots \quad \text{Sin.}Mi = \frac{Mi}{1} - \frac{M^3i^3}{1.2.3}\;;$$

d'où l'on voit qu'en substituant, $C'Am'$ prendra cette forme

$$C'Am' = i(1 - \text{Cos.}b + Ni)\;.$$

Ainsi, en résumé, l'on aura

$$S' < S + (1 - \text{Cos.}b)\frac{i}{1}\,,$$

$$S' = S + \frac{\text{d}S}{\text{d}A}\,\frac{i}{1} + \frac{\text{d}^2S}{\text{d}A^2}\,\frac{i^2}{1.2} + \ldots\;,$$

$$S' > S + (1 - \text{Cos.}b)\,\frac{i}{1} + 2N\,\frac{i^2}{1.2} + \ldots$$

d'où on conclura, par le *Théorème* d'Arbogast,

$$\frac{\text{d}S}{\text{d}A} = 1 - \text{Cos.}b\,. \qquad (1)$$

Présentement on a, par les formules connues

$$\text{Cos.}c = \frac{\text{Cos}\,C + \text{Cos.}A\,\text{Cos}\,B}{\text{Sin}\,.A\,\text{Sin.}B}\,,$$

ce qui donne, à cause de $B$ et $c$ constans et de $C$ fonction de $A$

$$\frac{\text{d}C}{\text{d}A}\,\text{Sin.}C\,\text{Sin.}A + (\text{Cos.}B + \text{Cos.}A\,\text{Cos.}C) = 0\;.$$

Mais on a aussi

$$\text{Cos.}B + \text{Cos.}A\,\text{Cos.}C = \text{Sin.}A\,\text{Sin.}C\,\text{Cos}\,b\;;$$

donc, en substituant et divisant par $\text{Sin.}C$,

$$\frac{dC}{dA}+\text{Cos.}b=0\;; \qquad (2)$$

éliminant donc Cos.$b$ entre cette équation et l'équation (1), il viendra

$$dS=dA+dC\;,$$

d'où, en intégrant,

$$S=A+C+Const.$$

Pour déterminer la constante, on remarquera que, si l'on a $A=\varpi$, on aura $C=B$ et $S=2B$; d'où

$$Const.=B-\varpi\;,$$

et conséquemment

$$S=A+B+C-\varpi\;.$$

On aurait pu parvenir plus brièvement au but en employant le langage des infiniment petits. On aurait d'abord substitué d$A$ à $i$; on aurait remarqué que d$S$, c'est-à-dire, le triangle sphérique $CAC'$ étant infiniment petit, le triangle curviligne $CC'm$ était infiniment petit du second ordre; qu'ainsi l'on pouvait poser simplement

$$dS=CAm=dA(1-\text{Cos.}b)\;;$$

mais, dans le petit triangle sphérique $CAC'$ où l'angle $C$ est le supplément du même angle de $BAC$, on a

$$\text{Cos.}b=\frac{\text{Cos.}C'-\text{Cos.d}A\text{Cos.}C}{\text{Sin.d}A\text{Sin.}C}\;.$$

Or, on a Sin.d$A$=d$A$, Cos.d$A=1$, et $C'=C+dC$ d'où Cos.$C'$ =Cos.$C$Cos.d$C$—Sin.$C$Sin.d$C$=Cos.$C$—d$C$Sin.$C$; donc enfin

$$\text{Cos.}b=-\frac{dC}{dA}\;,$$

ou, en substituant,

$$dS=dA+dC\,,$$

comme ci-dessus.

# QUESTIONS RÉSOLUES.

## *Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la page 384 du V.e volume de ce recueil ;*

Par M. J. B. Durrande.

*Théorème. Tout quadrilatère, plan ou gauche, rectiligne ou sphérique, dans lequel la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres côtés, est circonscriptible au cercle.*

*Démonstration I.* Soit le quadrilatère plan ABCD (fig. 3) dans lequel on suppose

$$AB+CD=BC+AD\,. \qquad (1)$$

Soient divisés les angles A, B en deux parties égales, par des droites concourant en O. Soit joint ce point O aux sommets C et D ; et du même point soient abaissées sur les directions des côtés les perpendiculaires OE, OF, OG, OH ; l'équation (1) deviendra d'après cela

$$AE+BE+CG+DG=BF+CF+AH+DH\,. \qquad (2)$$

Les triangles-rectangles OEA, OHA qui ont l'hypothénuse commune et un angle oblique égal, par construction, sont égaux ; et il en est de même, pour de semblables raisons, des triangles rectangles OEB, OFB ; donc d'abord

$$OH=OE=OF\,; \qquad (3)$$

et ensuite

$$AH=AE\,, \qquad BE=BF\,. \tag{4}$$

Au moyen des équations (4), l'équation (2) se réduit à

$$CG+DG=CF+DH\,. \tag{5}$$

Présentement $OC$, $OD$ étant l'une et l'autre hypothénuses communes de deux triangles rectangles, on doit avoir

$$\overline{OF}^2+\overline{CF}^2=\overline{OG}^2+\overline{CG}^2\,,$$

$$\overline{OH}^2+\overline{DH}^2=\overline{OG}^2+\overline{DG}^2\,,$$

retranchant donc, et ayant égard à l'équation (3), il viendra

$$\overline{CF}^2-\overline{DH}^2=\overline{CG}^2-\overline{DG}^2\,,$$

ou

$$(CF+DH)(CF-DH)=(CG+DG)(CG-DG)\,,$$

ou simplement, en vertu de (5),

$$CF-DH=CG-DG\,,$$

ou encore en ajoutant et retranchant cette dernière à l'équation (5), transposant, réduisant et divisant par 2,

$$DG=DH\,, \qquad CG=CF\,;$$

les deux triangles rectangles $OFC$, $OGC$ sont donc égaux, ainsi que les deux triangles rectangles $OHD$, $OGD$; on a donc

$$OG=OF=OH=OE\,,$$

et par conséquent le cercle décrit du point $O$ comme centre, et avec l'une quelconque de ces quatre droites pour rayon, touchera les cotés du quadrilatère aux points $E$, $F$, $G$, $H$, et lui sera en effet circonscrit. (*)

---

(*) On aurait pu ne point mener d'abord $OG$, démontrer, comme ci-dessus, que $CD=CF+DH$, déterminer le point $G$ par la condition $CG=CF$, d'où $DG=DF$ et mener alors $OG$. On aurait remarqué ensuite que d'après cette construction les cercles décrits des points $A$, $B$, $C$, $D$ comme centres et avec les rayons respectifs $AE$ ou $AH$, $BE$ ou $BF$, $CF$ ou $CG$, $DG$ ou $DH$ se touchent deux à -

II. Si le quadrilatère est sphérique, après avoir fait une construction analogue et démontré comme ci-dessus que

$$Arc.OH=Arc.OF=Arc.OE\,, \qquad (6)$$

et que

$$Arc.CF+Arc.DH=Arc.CG+Arc.DG\,, \qquad (7)$$

les couples de triangle sphériques dont les hypothénuses communes sont $Arc.OC$ et $Arc.OD$ donneront

$$Cos.OF\,Cos.CF=Cos.OG\,Cos.CG\,,$$

$$Cos.OH\,Cos.DH=Cos.OG\,Cos.DG\,:$$

prenant successivement la somme et la difference de ces deux équations, en ayant égard à l'équation (6), on aura

$$Cos.OE(Cos\,CF\pm Cos.DH)=Cos.OG(Cos.CG\pm Cos.DG)\,;$$

ou, en dédoublant et divisant,

$$\frac{Cos.CF-Cos.DH}{Cos.CF+Cos.DH}=\frac{Cos.CG-Cos.DG}{Cos.CG+Cos.DG}\,;$$

ou, en décomposant, par les formules connues,

$$Tang.\tfrac{1}{2}(DH+CF)Tang.\tfrac{1}{2}(DH-CF)=Tang.\tfrac{1}{2}(DG+CG)Tang.\tfrac{1}{2}(DG-CG)\,;$$

ou, en simplifiant, au moyen de l'équation (7), et passant ensuite des tangentes aux doubles des arcs

$$Arc.DH-Arc.CF=Arc.DG-Arc.CG\,,$$

en combinant cette dernière équation, par addition et soustraction avec l'équation (7), ou en tirera, en transposant et réduisant,

---

deux aux points E, F, G, H, qui sont conséquemment sur une même circonférence; on en aurait conclu OG=OF=OH=OE. De là serait résulté l'égalité soit entre les triangles OFC, OGC, soit entre les triangles OHD, OGD; et, par suite, la perpendicularité de OG sur CD; ce qui aurait établi que le cercle touchant les trois premiers côtés en H, E, F, touchait aussi le quatrième en G.

( *Note de l'auteur.* )

$$Arc.CG=Arc.CF\ ,\quad Arc.DG=Arc.DF\ ;$$

et l'on achèvera comme ci-dessus. (*)

III. Soit enfin le quadrilatère gauche ADBD′ (fig. 4), dont une des diagonales soit AB ; et concevons d'abord qu'on ait fait tourner autour de cette diagonale l'un des triangles qu'elle determine pour l'amener dans le plan de l'autre, de manière que le quadrilatère devienne plan.

Soient inscrits aux deux triangles ADB, AD′B des cercles, dont C, C′ soient les centres E, E′ les points de contact avec la diagonale, G, H les points de contact du premier avec les côtes DA, DB, et enfin G′, H′ les points de contact du second avec les côtés D′A, D′B.

Si, comme nous le supposons, on a la relation

$$AD+BD'=BD+AD'\ , \qquad (1)$$

On pourra la transformer en celle-ci :

$$AG+DG+BH'+D'H'=BH+DH+AG'+D'G'\ ; \qquad (2)$$

mais on a, par la propriété des tangentes,

$$DH=DG\ ,$$
$$D'G'=D'H'\ ,$$
$$AE=AG\ ,$$
$$BH=BE\ ,$$
$$AG'=AE'\ ,$$
$$BE'=BH'\ ;$$

ajoutant donc toutes ces équations à l'équation (2), il viendra, en reduisant

---

(*) Ceci démontre que, sur une sphère comme sur un plan, lorsque quatre cercles se touchent deux à deux, leurs quatre points de contact sont situés sur une même circonférence, et conséquemment dans un même plan.

(*Note de l'auteur*).

AE

$$AE+BE'=BE+AE' ;$$

mais, on a aussi

$$AE+BE=AE'+BE' ;$$

ajoutant donc ou retranchant, on tirera de ces deux dernières

$$AE=AE' \quad \text{ou} \quad BE=BE' ;$$

ainsi, les points de contact E, E' se confondent en un seul qu'à l'avenir nous désignerons simplement par E, et qui se trouve conséquemment avec C et C' sur une même droite perpendiculaire à AB.

Concevons que des points A, B pris successivement pour centres, et avec des rayons respectifs $AE=AG=AG'$, $BE=BH=BH'$, on décrive deux cercles, leurs tangentes extérieures concourront en quelque point F du prolongement de la droite AB qui joint leurs centres. Soient encore décrits des points D, D' comme centres et avec les rayons $DG=DH$, $D'G'=D'H'$, ils toucheront les deux autres, le premier en G, H et le second en G', H'; donc, par les théories connues, les droites GH, G'H' iront concourir en F, sur le prolongement de la diagonale AB.

Concevons présentement que l'on relève le plan de l'un des deux triangles ADB, AD'B, en le faisant tourner autour de AB, de manière à reconstruire le quadrilatère gauche; les droites GH, G'H' ne cesseront pas, dans ce mouvement, de concourir en F et d'être conséquemment dans un même plan, lequel contiendra aussi les quatre points G, H, G', H'; EC et EC' ne cesseront pas pareillement d'être dans un même plan perpendiculaire à AB.

Les axes de ces deux cercles, c'est-à-dire, les perpendiculaires menées à leurs plans par leurs centres, seront aussi dans ce dernier plan, et se couperont conséquemment en un certain point O, lequel, appartenant à ces deux axes, sera également distant des points G, H, G′, H′; puis donc que ces points sont sur un même plan; ils appartiennent à une même circonférence à laquelle conséquemment notre quadrilatère est circonscrit (*).

Si les deux diagonales étaient telles que leur somme fût égale à celle des côtés opposés, ces côtés et les deux diagonales ne seraient autres que les six arêtes du tétraèdre dont il a été question à la page 304 du V.e volume de ce recueil (**).

---

(*) Dans le vrai, si l'on veut appeler polygone *circonscrit* à un cercle, comme on le fait communément, un polygone dont tous les côtés sont des tangentes à ce cercle, notre quadrilatère gauche ne sera point proprement circonscriptible au cercle, mais à une sphère ayant le point O pour centre et OE pour rayon.

*J. D. G.*

(**) Le théorème étant ainsi démontré pour le quadrilatère gauche, se trouve l'être aussi pour le quadrilatère plan, qui n'en est qu'un cas particulier. Il n'est pas même difficile d'en conclure aussi la démonstration pour le quadrilatere sphérique. En y faisant, en effet, une semblable construction, on s'assurera, par les mêmes moyens, que les points E, E′ se confondent. Imaginant alors par les points G, H, G′, H′ des tangentes aux cercles, ces tangentes formeront par leurs concours un quadrilatère gauche dans lequel les sommes de côtés opposés seront égales; il sera donc circonscriptible au cercle, et le cercle qu'on lui inscrira sera aussi inscrit au quadrilatère sphérique.

( *Note de l'auteur.* )

## *Solution du premier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 328 du V.e volume des* Annales ;

Par M. Zindrini, professeur de mathématiques au lycée, et secrétaire perpétuel de l'institut royal à Venise (*).

*Problème. Diviser graphiquement l'aire d'un triangle en parties égales, par des parallèles à sa base?*

*Construction.* Soit le triangle ASB (fig. 5) qu'il faille, par exemple, diviser en cinq parties égales, par des parallèles à sa base.

Par son sommet S, soit menée une droite SD, parallèle à sa base AB et égale à sa hauteur SH. Soit $c_0$ le milieu de cette parallèle, et soit divisée $c_0$S en cinq parties égales, aux points $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$. De ces points, pris successivement pour centres, et avec leurs distances au point D pour rayon, soient décrits des arcs coupant respectivement la hauteur en $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$; les parallèles menées à la base par ces derniers points seront les droites cherchées.

Il ne serait pas difficile, d'après cela, de diviser la surface convexe d'une pyramide ou d'un cône en parties égales, par des plans parallèles à sa base.

(*) Ce problème, de première facilité, ne pouvant offrir d'intérêt qu'à raison de l'élégance de la construction, nous avons cru pouvoir passer sous silence une multitude d'autres solutions qu'on en a données.

J. D. G.

Si, au lieu de diviser $c_0S$ en parties égales, on l'eût divisée en parties proportionnelles à des nombres donnés quelconques, les parallèles à la base, au lieu de diviser l'aire du triangle en parties égales, l'auraient divisée en parties proportionnelles à ces mêmes nombres.

Le premier cas n'étant même qu'un cas particulier de ce dernier, c'est celui-ci qu'il suffira de démontrer. Il est évident d'ailleurs que tout se réduit à savoir diviser l'aire d'un triangle, par une parallèle à sa base en *deux* parties qui aient entre elles un rapport donné, celui de $m$ à $n$, par exemple.

*Démonstration.* Tout étant dans la figure 6 comme dans la figure 5, si ce n'est que C est le milieu de SD=SH, que SC est partagée en E en deux parties SE, EC proportionnelles à $m$ et $n$, que E est le centre d'un demi-cercle DLK coupant la hauteur en L, et qu'enfin FG est la parallèle à AB conduite par L; soient M, N les deux segmens du triangle.

Nous aurons

$$M+N=ASB=\tfrac{1}{2}AB\times SH\ ;$$

$$N=FSG=ASB\,.\,\frac{\overline{SL}^2}{\overline{SH}^2}=\tfrac{1}{2}AB\,.\,\frac{\overline{SL}^2}{SH}=\tfrac{1}{2}AB\,.\,\frac{SD\times SK}{SH}$$

$$=\tfrac{1}{2}AB\,.\,SK=\tfrac{1}{2}AB(DK-SD)$$

c'est-à-dire,

$$M+N=AB\times SC\ ,$$

$$N=AB\times(DE-SC)=AB\times(DE-DC)=AB\times CE\ ;$$

donc, en retranchant,

$$M = AB \times (SC - CE) = AB \times SE\;;$$

donc enfin

$$\frac{M}{N} = \frac{SE}{EC} = \frac{m}{n} \quad (*).$$

## *De la division du cercle en portions de même périmètre ayant entre elles un rapport donné ;*

Par M. GERGONNE.

Dans le I.er volume de ce recueil, page 240, M. Lhuilier a donné une très-élégante et très-curieuse construction du problème où il s'agit de diviser un cercle en parties égales à la fois en contour et en surface.

Ce qu'on vient de lire m'a fait penser que la méthode de M. Lhuilier devait s'appliquer au problème plus général où il s'agit de partager un cercle en parties de même contour, ayant entre elles

(*) M. Tédenat observe qu'en divisant la hauteur du triangle à partir du sommet dans le rapport de $n$ à $m$ désignant par $x$ le premier des deux segmens, par $h$ la hauteur du triangle total, et enfin par $y$ celle du triangle à retrancher, on a l'équation $y^2 = hx$, qui appartient à la parabole et peut fournir une construction.

A la vérité, cette construction n'est point élémentaire, mais M. Tédenat remarque que son analogue est peut-être la plus simple qu'on puisse appliquer au second problème de géométrie de la page 328 du V.e volume, relatif à la pyramide ; problème non susceptible de solution élémentaire et qui conduit à l'équation $y^3 = h^2x$ de la première parabole cubique.

*J. D. G.*

des rapports donnés. Non seulement l'épreuve a justifié mon attente; mais j'ai vu que la construction pouvait être démontrée très-brièvement, sans rien emprunter de la théorie des suites dont les termes sont des puissances semblables des termes d'une progression par différences.

Soit en effet divisé le diamètre $2r$ d'un cercle ( fig. 7 ) en deux segmens, proportionnels à $m$ et $n$; en sorte que ces deux segmens soient

$$\frac{2mr}{m+n}\,,\qquad \frac{2nr}{m+n}\,;$$

sur ces deux segmens comme diamètres soient décrits, de part et d'autre du diamètre total $2r$, deux demi-circonférences dont les longueurs seront conséquemment

$$\frac{\varpi mr}{m+n}\,,\qquad \frac{\varpi nr}{m+n}\,;$$

leur somme sera ainsi $\varpi r$; c'est-à-dire que, quel que soit le rapport de $m$ à $n$, la courbe continue formée par les deux demi-circonférences intérieures et se terminant aux deux extrémités du diamètre $2r$ est constamment égale à la demi-circonférence extérieure.

Cette courbe et le diamètre $2r$ divisent le cercle extérieur en quatre segmens $M$, $N$, $M'$, $N'$; et l'on a évidemment, par ce qui précède,

$$M=\frac{1}{2}\varpi\frac{m^2r^2}{(m+n)^2}\,,\quad M'=\frac{1}{2}\varpi r^2-N=\frac{1}{2}\varpi r^2-\frac{1}{2}\varpi\frac{n^2r^2}{(m+n)^2}\,,$$

$$N=\frac{1}{2}\varpi\frac{n^2r^2}{(m+n)^2}\,;\quad N'=\frac{1}{2}\varpi r^2-M=\frac{1}{2}\varpi r-\frac{1}{2}\varpi\frac{m^2r^2}{(m+n)^2}\,;$$

ou, en réduisant,

$$M' = \tfrac{1}{2}\varpi r^2 m \cdot \frac{m+2n}{(m-n)^2},$$

$$N' = \tfrac{1}{2}\varpi r^2 n \cdot \frac{n+2m}{(m+n)^2};$$

donc

$$M+M' = \varpi r^2 \frac{m}{m+n}; \qquad N+N' = \varpi r^2 \frac{n}{m+n};$$

et par conséquent

$$\frac{M+M'}{N+N'} = \frac{m}{n};$$

c'est-à-dire, que la courbe continue partage le cercle en deux segmens proportionnels aux segmens correspondans du diamètre.

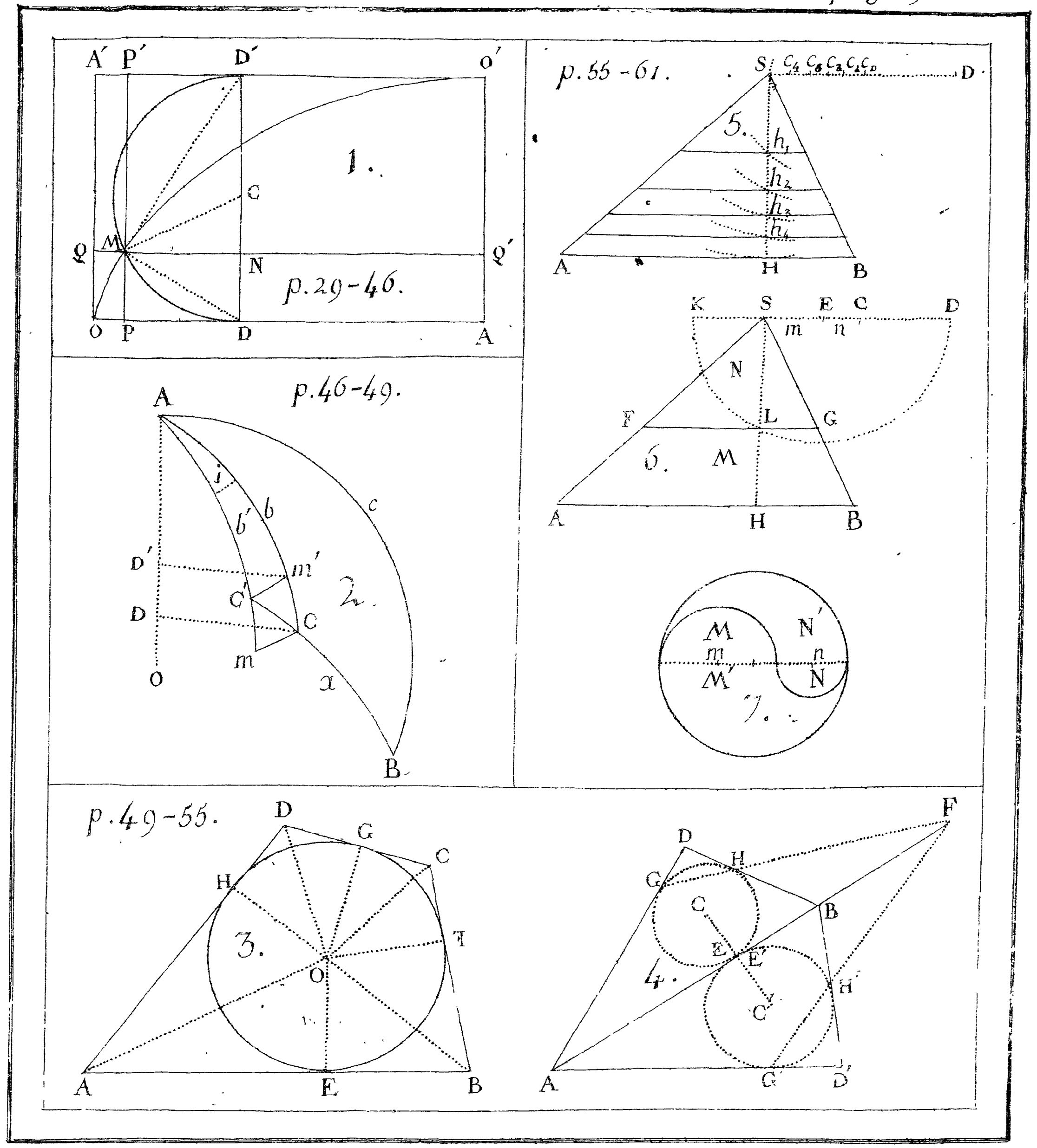
# QUESTIONS PROPOSÉES.

## *Problèmes de Géométrie.*

I. DÉTERMINER, en fonction des trois côtés d'un triangle sphérique, 1.° le rayon sphérique du cercle inscrit; 2.° le rayon sphérique du cercle circonscrit; 3.° la distance sphérique entre leurs centres sphériques (*)?

II. Déterminer, en fonction des six arêtes d'un tétraèdre, 1.° le rayon de la sphère inscrite; 2.° le rayon de la sphère circonscrite; 3.° la distance entre leurs centres?

(*) J'entends ici par *distance sphérique* entre deux points d'une sphère, l'arc de grand cercle qui joint ces deux points. J'appelle *centre sphérique* d'un cercle d'une sphère, ce qu'on appelle ordinairement son *pôle*. Enfin, j'appelle *rayon sphérique* de ce cercle l'arc de grand cercle qui joint son centre sphérique à l'un quelconque des points de sa circonférence.




J. D. G. fecit.

# ANALISE TRANSCENDANTE.

## *Du calcul des dérivations, ramené à ses véritables principes, ou théorie du développement des fonctions, et du retour des suites;*

Par M. J. F. Français, professeur à l'école royale de l'artillerie et du génie.

Depuis l'invention du *Théorème de Taylor*, sur le développement des fonctions d'un binome, et du *Théorème de Lagrange*, sur le retour des fonctions et des séries, bien des géomètres se sont occupés d'étendre et de généraliser les découvertes de ces deux géomètres célèbres; et, sous le rapport de la théorie générale, on peut dire que les résultats auxquels ils sont parvenus ne laissent plus rien à désirer; mais les formules qui les contiennent, quelques précieuses qu'elles soient comme solutions générales, ne font qu'indiquer une suite d'opérations ultérieures, souvent si compliquées qu'elles découragent le calculateur le plus intrépide. Il restait donc à trouver une méthode simple, facile et uniforme, pour exécuter complètement et immédiatement tous ces développemens, tant directs que de retour. Les géomètres allemands sont les premiers qui ont réussi dans cette recherche : leurs travaux ont donné naissance à un nouveau calcul, appelé *Analise combinatoire* par son inventeur *Hindenburg*. Ce calcul résout à la vérité la question, mais d'une manière trop disparate avec les procedés ordinaires de l'analise : il oblige à former d'abord séparément les groupes de lettres, et ensuite leurs coefficiens numériques, pour lesquels on a besoin de tables de combinaisons calculées d'avance. Il etait réservé à *Arbogast* de donner la solution generale, complète et analitique de cette question difficile, dans son *Calcul des dérivations*. Malheureusement cet ouvrage est entaché de plusieurs defauts très-graves, qui ont dégoûté les géomètres de sa lecture, et ont empêché qu'il ne fût étudié et connu autant qu'il le mérite. Ces défauts sont 1.° de n'avoir pas assez justifié l'introduction de ses nouvelles notations; 2.° de n'avoir pas défini assez nettement ses *dérivées* et ses *dérivations*; 3.° de déduire sa théorie d'un principe qui n'est ni assez clair ni assez évident (n.° 6); 4.° de l'exposer d'une manière trop longue et trop embarrassée; 5.° enfin d'avoir noyé des résultats vraiment remarquables dans une foule de choses qui sont, pour ainsi dire, hors d'œuvre, et sans liaison avec l'objet principal de son ouvrage; de sorte que ce qui pouvait être présenté dans quelques feuilles d'impression est devenu un gros in-4.°.

Je me propose, dans ce petit écrit, de remédier, le mieux que je pourrai, à ces défauts de l'ouvrage d'Arbogast, en déduisant la véritable théorie du calcul des dérivations du seul théorème de Taylor, sans l'emploi d'aucun principe nouveau; de sorte que ce calcul ne sera, à proprement parler, qu'une extension de ce théorème.

Afin de rendre l'exposition de cette théorie plus rapide, et de présenter de suite aux géomètres toute la partie usuelle de ce calcul, je me contenterai quelquefois de généraliser les résultats par des conclusions d'induction; sauf à démontrer ces conclusions dans un article à part. Pour la même raison, je réléguerai dans des *remarques* toutes les observations, soit sur les notations, soit sur le fond même de la théorie.

## Article premier.

### *Développement des fonctions selon les puissances ascendantes de la variable.*

1. On sait, par le théorème de Taylor, que toute fonction d'un binôme $\alpha+x$ ( $x$ étant une variable qui reste indéterminée ), peut être développée en une série de cette forme

$$(1)\qquad \mathrm{f}(\alpha+x)=a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots;$$

les coefficiens $a$, $a_1$, $a_2$, $a_3$,.... étant déterminés par les valeurs que prennent la fonction $\mathrm{f}(\alpha+x)$ et ses coefficiens différentiels $\frac{\mathrm{d.f}(\alpha+x)}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d^2.f}(\alpha+x)}{1.2\mathrm{d}x^2}$, $\frac{\mathrm{d^3f}(\alpha+x)}{1.2.3\mathrm{d}x^3}$,....., lorsqu'après la différentiation on y fait $x=0$.

Nous représenterons ces valeurs particulières des coefficiens différentiels par $\mathrm{Df}\alpha$, $\frac{1}{1.2}\mathrm{D^2f}\alpha$, $\frac{1}{1.2.3}$, $\mathrm{D^3f}\alpha$....; et nous appellerons, avec Arbogast, les quantités $\mathrm{Df}\alpha$, $\mathrm{D^2f}\alpha$, $\mathrm{D^3f}\alpha$,...., *dérivées, première, seconde, troisième*,..... de $\mathrm{f}\alpha$. Ainsi la dérivée $\mathrm{D}^n\mathrm{f}\alpha$, d'un ordre quelconque $n$, n'est autre chose que ce que devient le coefficient differentiel $\frac{\mathrm{d}^n.\mathrm{f}(\alpha+x)}{\mathrm{d}x^n}$, lorsqu'on y fait $x=0$.

Nous aurons donc

$$(2)\left\{\begin{array}{l} a_1=\frac{1}{1}\mathrm{Df}\alpha=\frac{1}{1}\mathrm{D}a\,,\\ a_2=\frac{1}{1.2}\mathrm{D^2f}\alpha=\frac{1}{1.2}\mathrm{D}^2a\,,\\ a_3=\frac{1}{1.2.3}\mathrm{D^3f}\alpha=\frac{1}{1.2.3}\mathrm{D}^3a\,,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_n=\frac{1}{1.2....n}\mathrm{D}^n\mathrm{f}\alpha=\frac{1}{1.2....n}\mathrm{D}^na\,; \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{d'où l'on tire}\\ \text{réciproquement}\end{array} \left\{\begin{array}{l} \mathrm{D}a=a_1\,,\\ \mathrm{D}^2a=1.2a_2\,,\\ \mathrm{D}^3=1.2.3a_3\,,\\ \ldots\ldots\ldots\\ \mathrm{D}^na=1.2....na_n\,. \end{array}\right\}(3)$$

Les valeurs (2) étant substituées dans l'équation (1) donnent

$$(4)\qquad f(\alpha+x)=f\alpha+Df\alpha.x+\frac{1}{1.2}D^2f\alpha.x^2+\frac{1}{1.2.3}D^3f\alpha.x^3+\ldots$$

$$=a+Da.x+\frac{1}{1.2}D^2a.x^2+\frac{1}{1.2.3}D^3a.x^3+\ldots$$

Mais ici il faut observer que ce développement peut devenir impossible ; ce qui arrive toutes les fois que $f\alpha$ et ses dérivées deviennent infinies : ce cas a lieu pour la fonction $\mathrm{Log}.x$, par exemple.

2. *Remarque.* La loi des *Dérivations*, ou de la formation des dérivées successives, est évidemment la même que celle des différentiations, à la seule exception près que nous supprimons les dénominateurs inutiles $D\alpha$, $D\alpha^2$, $D\alpha^3$, .....; ce qui revient à supposer $D\alpha=1$. En effet, on sait, et il est d'ailleurs évident que le coefficient différentiel d'un ordre quelconque de la fonction d'un binôme $\alpha+x$ est le même, soit qu'on la différencie en regardant $x$ comme variable et $\alpha$ comme constant, soit qu'on la différencie en regardant $\alpha$ comme variable, et $x$ comme constant ; on a donc $\frac{d^n.f(\alpha+x)}{dx^n}=\frac{d^n.f(\alpha+x)}{d\alpha^n}$; or, en faisant $x=0$, dans $\frac{d^n.f(\alpha+x)}{d\alpha^n}$, on obtient $\frac{d^n.f\alpha}{d\alpha^n}=D^nf\alpha$. Il est donc démontré que la loi des dérivations est la même que celle des différentiations ; et il s'ensuit ausssi que *les dérivées d'un ordre quelconque ne sont autre chose que les coefficiens différentiels du même ordre, pris relativement à la quantité constante $\alpha$, que l'on feint être variable.*

Il se présente ici naturellement une objection que l'on a faite, dès l'origine, contre la notation du calcul des dérivations : c'est que les opérations dérivatives étant les mêmes que celles du calcul différentiel, il fallait les indiquer par les mêmes notations. Je réponds d'abord qu'absolument parlant la chose eût été possible ; mais que, pour l'ordre et la précision, et d'après les règles d'une saine logique, des opérations qui, bien qu'identiques pour la forme, diffèrent entièrement pour le fond, doivent être représentées par des signes différens. Je dis que ces opérations diffèrent entièrement pour le fond ; car les signes différentiels se rapportent aux variables et à leurs variabilité de grandeur, tandis que les signes dérivatifs ne se rapportent qu'aux seules constantes, et que les dérivées successives n'indiquent qu'une dépendance d'ordre et de succession dans les termes d'un développement. Si Lagrange a été autorisé à introduire une notation nouvelle, dans le calcul des variations, pour indiquer une opération entièrement identique avec la différentiation, et qui se rapporte aux variables même, seulement parce qu'elle ne se rapporte pas à leur variabilité de grandeur, mais à leur variabilité de forme ; à plus forte raison sera-t-il permis, ou plutôt nécessaire, de représenter par une notation particulière une opération qui ne se rapporte pas même aux variables, ni à aucune espèce de variabilité.

Une autre raison, qui suffirait à elle seule pour justifier l'introduction d'une notation particulière pour les dérivations, c'est qu'elles peuvent se trouver, et se trouvent réellement souvent combinées avec les différentielles, dans une même formule; il faut donc qu'on ne puisse pas les confondre : ce qui arriverait infailliblement, si elles étaient représentées par une même notation.

Quant à la suppression des dénominateurs $\mathrm{D}\alpha$, $\mathrm{D}\alpha^2$, $\mathrm{D}\alpha^3$, ..... ; leur inutilité seule suffit pour la justifier. Si des personnes habituées aux considérations d'infiniment petits tiennent à conserver ces dénominateurs, dans le calcul différentiel, où leur considération abrège quelquefois les raisonnemens dans des questions de géométrie et de mécanique, mais où elle peut aussi égarer ; il n'y a pas la moindre raison de les conserver dans l'analise pure, ni, à plus forte raison, dans les dérivations où toute idée d'infiniment petit serait plus que déplacée.

3. Réciproquement, tout polynôme de la forme $a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots.$ (terminé ou non), peut être représenté par $a+\mathrm{D}a.x+\frac{1}{1.2}\mathrm{D}^2a.x^2+\frac{1}{1.2.3}\mathrm{D}^3a.x^3+\ldots.$, où, entre les coefficiens $a$, $a_1$ ;

$a_2$, $a_3$, ......... et les dérivées successives de $a$; on a les relations (3).

En effet, en supposant, ce qui est toujours permis,

$$(5) \qquad a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots=\mathrm{f}(\alpha+x);$$

on a, d'après la définition des dérivées (n.° 1),

$$a=\mathrm{f}\alpha,\ a_1=\mathrm{Df}\alpha=\mathrm{D}a,\ a_2=\frac{1}{1.2}\mathrm{D}^2\mathrm{f}\alpha=\frac{1}{1.2}\mathrm{D}^2a,\ a_3=\frac{1}{1.2.3}\mathrm{D}^3\mathrm{f}\alpha=\frac{1}{1.2.3}\mathrm{D}^3a,\ldots;$$

d'où l'on tire les relations (3).

Si le polynôme est terminé, et n'a qu'un nombre $n$ de termes, $a_{n-1}$ sera le dernier des coefficiens; et tous les suivans $a_n$, $a_{n+1}$, $a_{n+2}$, ......, ainsi que leurs valeurs correspondantes, en dérivées de $a$, seront égaux à zéro.

4. *Remarque.* Il est bon d'observer que l'équation (5) peut être satisfaite d'une infinité de manières, et que $\alpha$ est entièrement indéterminé. En supposant $\alpha=0$, on a

$$a=\mathrm{f}0,\ a_1=\mathrm{Df}0=\mathrm{D}a,\ a_2=\frac{1}{1.2}\mathrm{D}^2\mathrm{f}0=\frac{1}{1.2}\mathrm{D}^2a,\ a_3=\frac{1}{1.2.3}\mathrm{D}^3\mathrm{f}0=\frac{1}{1.2.3}\mathrm{D}^3a,\ldots;$$

ce qui donne encore les relations (3).

5. Proposons-nous maintenant de développer la fonction d'un polynôme quelconque, ordonné selon les puissances ascendantes de la variable, en une série qui procède selon les mêmes puissances; c'est-à-dire, de déterminer les coefficiens du second membre de l'équation suivante :

$$(6) \qquad \varphi(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)=A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots$$

D'après le n.° 3, le polynôme sous le signe de la fonction peut être représenté par $\mathrm{f}(\alpha+x)$; le premier membre de cette équation peut donc être mis sous la forme $\varphi\mathrm{f}(\alpha+x)$. Il suffit donc de substituer, dans l'équation (4), $\varphi\mathrm{f}$ au lieu de $\mathrm{f}$; ce qui donne

$$\varphi(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)=\varphi\mathrm{f}\alpha+\mathrm{D}.\varphi\mathrm{f}\alpha.x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.\varphi\mathrm{f}\alpha.x^3+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.\varphi\mathrm{f}\alpha.x^3+\ldots$$
$$=\varphi a+\mathrm{D}.\varphi a.x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.\varphi a.x^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^2.\varphi a.x^2+\ldots$$

en observant cependant que, dans ce cas, chacun des signes de dérivation indique des opérations ultérieures à exécuter, que nous expliquerons dans la remarque suivante : c'est pourquoi nous avons mis un point après chaque signe de dérivation, pour marquer cette difference.

En comparant terme à terme l'équation (7) avec celle (6), on en tire les valeurs suivantes :

$$(8) \qquad A=\varphi a,\ A_1=\text{D}.\varphi a,\ A_2=\tfrac{1}{2}\text{D}^2.\varphi a,\ A_3=\tfrac{1}{6}\text{D}^3.\varphi a,\ldots$$

et par conséquent

$$(9) \qquad \varphi a=A,\ \text{D}.\varphi a=A_1,\ \text{D}^2.\varphi a=2A_2,\ \text{D}^3.\varphi a=6A_3,\ldots;$$

6. *Remarque.* Nous avons démontré, dans la remarque du n.° 2, qu'on a, en général, $\text{D}^n\text{f}\alpha=\frac{\text{d}^n\text{f}\alpha}{\text{d}\alpha^n}$ ; on a donc aussi

$$\text{D}.\varphi\text{f}\alpha=\frac{\text{d}(\varphi\text{f}\alpha)}{\text{d}\alpha},\ \text{D}^2.\varphi\text{f}\alpha=\frac{\text{d}^2(\varphi\text{f}\alpha)}{\text{d}\alpha^2},\ \text{D}^3.\varphi\text{f}\alpha=\frac{\text{d}^3(\varphi\text{f}\alpha)}{\text{d}\alpha^3},\ldots;$$

$$\text{D}.\varphi a=\frac{\text{d}(\varphi a)}{\text{d}\alpha},\ \text{D}^2.\varphi a=\frac{\text{d}^2(\varphi a)}{\text{d}\alpha^2},\ \text{D}^3.\varphi a=\frac{\text{d}^3(\varphi a)}{\text{d}\alpha^3},\ldots.$$

Or, d'après les règles ordinaires de la différentiation des *fonctions de fonctions*, ou des fonctions de variables qui sont elles-mêmes fonctions de la variable principale, on a

$$\frac{\text{d}(\varphi\text{f}\alpha)}{\text{d}\alpha}=\frac{\text{d}(\varphi\text{f}\alpha)}{\text{d}\text{f}\alpha}\cdot\frac{\text{d}\text{f}\alpha}{\text{d}\alpha},$$

$$\frac{\text{d}^2(\varphi\text{f}\alpha)}{\text{d}\alpha^2}=\frac{\text{d}\left[\frac{\text{d}(\varphi\text{f}\alpha)}{\text{d}\text{f}\alpha}\cdot\frac{\text{d}\text{f}\alpha}{\text{d}\alpha}\right]}{\text{d}\alpha}=\frac{\text{d}(\varphi\text{f}\alpha)}{\text{d}\text{f}\alpha}\cdot\frac{\text{d}^2.\text{f}\alpha}{\text{d}\alpha^2}+\frac{\text{d}^2(\varphi\text{f}\alpha)}{(\text{d}\text{f}\alpha)^2}\cdot\left(\frac{\text{d}\text{f}\alpha}{\text{d}\alpha}\right)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

ou, en mettant $a$ au lieu de $\text{f}\alpha$,

$$\frac{\text{d}(\varphi a)}{\text{d}\alpha}=\frac{\text{d}(\varphi a)}{\text{d}a}\cdot\frac{\text{d}a}{\text{d}\alpha},$$

$$\frac{\text{d}^2(\varphi a)}{\text{d}\alpha^2}=\frac{\text{d}\left[\frac{\text{d}(\varphi a)}{\text{d}a}\cdot\frac{\text{d}a}{\text{d}\alpha}\right]}{\text{d}\alpha}=\frac{\text{d}(\varphi a)}{\text{d}\alpha}\cdot\frac{\text{d}^2a}{\text{d}\alpha^2}+\frac{\text{d}^2(\varphi a)}{\text{d}a^2}\cdot\left(\frac{\text{d}a}{\text{d}\alpha}\right)^2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

Passant donc aux notations dérivatives, en supprimant les dénominateurs, nous aurons

$$\mathrm{D}\,.\varphi f\alpha = \mathrm{D}\varphi f\alpha.\mathrm{D}\varphi f\alpha\ ,$$

$$\mathrm{D}^2.\varphi f\alpha = \mathrm{D}\varphi f\alpha.\mathrm{D}^2\varphi f\alpha + \mathrm{D}^2\varphi f\alpha.(\mathrm{D}f\alpha)^2\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et

$$\mathrm{D}\,.\varphi a = \mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}\,a\ ,$$

$$\mathrm{D}^2.\varphi a = \mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}^2 a + \mathrm{D}^2\varphi a.\mathrm{D}a^2\ ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Le développement de ces deux premières dérivées suffit pour expliquer la différence qui existe entre les dérivées sans point et celles qui sont suivies d'un point : entre $\mathrm{D}\varphi a$, $\mathrm{D}^2\varphi a$, ... et $\mathrm{D}\,.\varphi a$, $\mathrm{D}^2.\varphi a$,... Les premières sont les dérivées de $\varphi a$, en supposant $\mathrm{D}a=1$, $\mathrm{D}^2a=0$, $\mathrm{D}^3a=0$,..., et les autres sont les dérivées de $\varphi a$, en supposant que $a$ est fonction de $\alpha$, que ses dérivées successives sont $\mathrm{D}a$, $\mathrm{D}^2a$, $\mathrm{D}^3a$, ... et qu'elles ne sont pas toutes égales à zéro. En un mot, les dérivées sans point, $\mathrm{D}\varphi a$, $\mathrm{D}^2\varphi a$,...... sont les coefficiens du développement de $\phi(a+x)$ et les dérivées suivies d'un point $\mathrm{D}.\varphi a$, $\mathrm{D}^2.\phi a$,.... sont les coefficiens du développement de $\varphi(a+\mathrm{D}a.x+\frac{1}{2}\mathrm{D}^2a.x^2+\frac{1}{6}\mathrm{D}^3a.x^3+\ldots)$

7. En exécutant, d'après la remarque précédente, les opérations indiquées par les dérivées suivies d'un point, on obtient pour les six premières, en suivant les règles ordinaires de la différentiation, lorsqu'aucune différentielle n'est constante :

$$\mathrm{D}\,.\phi a = \mathrm{D}\phi a.\mathrm{D}\,a\ ,$$

$$\mathrm{D}^2.\phi a = \mathrm{D}\phi a.\mathrm{D}^2a + \mathrm{D}^2\phi a.\mathrm{D}a^2\ ,$$

$$\mathrm{D}^3.\phi a = \mathrm{D}\phi a.\mathrm{D}^3a + \mathrm{D}^2\phi a.3\mathrm{D}a\mathrm{D}^2a + \mathrm{D}^3\phi a\ \mathrm{D}a^3\ ;$$

$$\mathrm{D}^4.\phi a = \mathrm{D}\phi a.\mathrm{D}^4a + \mathrm{D}^2\phi a[4\mathrm{D}a\mathrm{D}^3a + 3(\mathrm{D}^2a)^2] + \mathrm{D}^3\phi a.6\mathrm{D}a^2\mathrm{D}^2a + \mathrm{D}^4\phi a.\mathrm{D}a^4\ ;$$

$$\mathrm{D}^5\phi a = \mathrm{D}\phi a.\mathrm{D}^5a + \mathrm{D}^2\phi a(5\mathrm{D}a\mathrm{D}^4a + 10\mathrm{D}^2a\mathrm{D}^3a) + \mathrm{D}^3\phi a[10\mathrm{D}a^2\mathrm{D}^3a + 15\mathrm{D}a(\mathrm{D}^2a)^2]$$
$$+ \mathrm{D}^4\phi a.10\mathrm{D}a^3\mathrm{D}^2a + \mathrm{D}^5\phi a.\mathrm{D}a^5\ ,$$

$\mathrm{D}^6.\varphi a$

$$\begin{aligned} D^6.\varphi a = {} & D\varphi a.D^6a + D^2\varphi a[6DaD^5a + 15D^2aD^4a + 10(D^3a)^2] \\ & + D^3\varphi a[15Da^2D^4a + 60DaD^2aD^3a + 15(D^2a)^3] \\ & + D^4\varphi a[20Da^3D^3a + 45Da^2(D^2a)^2] + D^5\varphi a.15Da^4D^2a + D^6\varphi a.Da^6\,, \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

En substituant ces valeurs dans les équations (8), et remplaçant les dérivées de $a$ par leurs valeurs (3), on obtient

$$\tag{10} \left\{ \begin{aligned} & A = \varphi a\,, \\ & A_1 = D.\varphi a = D\varphi a.a_1\,, \\ & A_2 = \tfrac{1}{2}D^2.\varphi a = D\varphi a.a_2 + \tfrac{1}{2}D^2\varphi a.a_1^2\,, \\ & A_3 = \tfrac{1}{6}D^3.\varphi a = D\varphi a.a_3 + \tfrac{1}{2}D^2\varphi a.2a_1a_2 + \tfrac{1}{6}D^3\varphi a.a_1^3\,, \\ & A_4 = \tfrac{1}{24}D^4.\varphi a = D\varphi a.a_4 + \tfrac{1}{2}D^2\varphi a(2a_1a_3 + a_2^2) + \tfrac{1}{6}D^3\varphi a.3a_1^2a_2 + \tfrac{1}{24}D^4\varphi a.a_1^4\,, \\ & A_5 = \tfrac{1}{120}D^5.\varphi a = D\varphi a.a_5 + \tfrac{1}{2}D^2\varphi a(2a_1a_4 + 2a_2) + \tfrac{1}{6}D^3\varphi a(3a_1^2a_3 + 3a_1a_2^2) \\ & \qquad\qquad + \tfrac{1}{24}D^4\varphi a.4a_1^3a_2 + \tfrac{1}{120}D^5\varphi a.a_1^5\,, \\ & A_6 = \tfrac{1}{720}D^6.\varphi a = D\varphi a.a_6 + \tfrac{1}{2}D^2\varphi a(2a_1a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2) + \tfrac{1}{6}D^3\varphi a(3a_1^2a_4 + 2.3a_1a_3 + a_3^2) \\ & \qquad + \tfrac{1}{24}D^4\varphi.4a_1^3a_3 + \tfrac{4.3}{2}a_1^2a_2^2) + \tfrac{1}{120}D^5\varphi a.5a_1^4a_2 + \tfrac{1}{720}D^6\varphi a.a_1^6\,, \end{aligned} \right.$$

et ainsi de suite.

Nous voici donc parvenus au développement complet des sept premiers termes de la série (6), qui est l'objet fondamental du calcul des dérivations, sans supposer autre chose que le théorème de Taylor, et les règles ordinaires de la différentiation. En examinant de près la composition successive de ces termes, on en conclut aisément la règle pratique suivante, pour déduire immédiatement un terme quelconque de celui qui le précède.

## RÈGLE FONDAMENTALE.

8. *Pour déduire le développement de* $A_{n+1}$ *de celui de* $A_n$, *les lettres étant disposées d'après leur ordre de succession ;*

1.° *On ne fera varier, dans chaque terme, que la dernière* *lettre ou sa puissance, en suivant les règles ordinaires de la différentiation, et en mettant simplement* $a_1$ *pour* $Da$, $a_2$ *pour* $Da_1$, $a_3$ *pour* $Da_2$,...., *sans autre coefficient que l'unité ;*

2.° *On fera varier de plus (d'après les mêmes règles de la différentiation) l'avant-dernière lettre, sa puissance ou sa fonction, si elle se trouve être la lettre qui, dans l'ordre numérique des indices, précède immédiatement la dernière du terme ; et comme la puissance de la dernière lettre augmente alors d'une unité, on divisera par son exposant ainsi augmenté.*

Pour faire une application de cette règle, et pour mieux en faire comprendre l'usage, nous allons déduire le développement de $A_6$ de celui de $A_5$ [ formules (10) ].

Le premier terme $D\varphi a.a_5$ donne, d'après la première partie de la règle, qui seule y est applicable, $D\varphi a\, a_6$. Le second terme $\frac{1}{2}D^2\varphi a(2a_1a_4+2a_2a_3)$ donne $\frac{1}{2}D^2\varphi a(2a_1a_5+a_2a_4+a_3{}^2)$, dont les deux premiers termes sont dûs à la première partie de la règle, et le dernier à la seconde partie. Le troisième terme $\frac{1}{6}D^3\varphi a(3a_1{}^2a_3+3a_1a_2{}^2)$ donne $\frac{1}{6}D^3\varphi a(3a_1{}^2a_4+2.3a_1a_2a_3+a_2{}^3)$, dont les deux premiers termes d'après la première partie de la règle et le dernier d'après la seconde. Le quatrième terme $\frac{1}{24}D^4\varphi a.4a_1{}^3a_2$ donne $\frac{1}{24}D^4\varphi a(4a_1{}^3a_3+\frac{4.3}{2}a_1{}^2a_2{}^2)$, dont le premier terme d'après la première partie de la règle et le suivant d'après la seconde. Enfin, le terme $\frac{1}{120}D^5\varphi a.a_1{}^5$ donne $\frac{1}{120}D^5\varphi a.5a_1{}^4a_2$, d'après la première partie de la règle et $\frac{1}{720}D^6\varphi a.a_1{}^6$, d'après la seconde. En rassemblant tous ces différens termes, on obtient exactement le développement de $A_6$, tel que nous l'avons donné [ formules (10) ].

On voit, d'après cet exemple, que la règle est d'une exécution très-facile, et qu'elle fournit immédiatement les termes successifs du développement, tout ordonnés et réduits à leur plus simple expression, sans qu'on ait, pour ainsi dire, d'autre peine que celle de les écrire. Il est vrai que, jusqu'à présent, cette règle n'est qu'une conclusion d'induction ; mais nous nous proposons de la démontrer dans un des articles suivans. Nous réservons pour le même article la règle pour former immédiatement un terme quelconque du développement, indépendamment de ceux qui le précèdent.

9. *Remarque I.* On a pu remarquer, en examinant la composition des formules (10), que le signe de fonction, ainsi que les signes de dérivation, n'affectent que la première lettre du polynôme dont il s'agit de développer la fonction. Arbogast appelle cette première lettre *origine de dérivations* ou *premier terme de polynôme*, et toutes les suivantes *quantités polynômiales*. Il résulte de cette observation que la composition des termes successifs du développement, en quantités polynômiales, reste la même, quelle que soit la fonction à développer ; et que toute la différence, dans le développement des diverses sortes de fonctions, consiste dans les valeurs des dérivées $\mathrm{D}\varphi a$, $\mathrm{D}^2\varphi a$, $\mathrm{D}^3\varphi a, \ldots$, qui n'affectent que la première lettre du polynôme. Ainsi on a, pour $(a+a_1x+a_2x^2+\ldots)^m$

$$\mathrm{D}\varphi a = ma^{m-1}, \quad \mathrm{D}^2\varphi a = m(m-1)a^{m-2}, \quad \mathrm{D}^3\varphi a = m(m-1)(m-2)a^{m-3}, \ldots;$$

pour $e^{(a+a_1x+a_2x^2+\ldots)}$

$$\mathrm{D}\varphi a = e^a, \quad \mathrm{D}^2\varphi a = e^a, \quad \mathrm{D}^3\varphi a = e^a, \ldots;$$

pour $\mathrm{Cos.}(a+a_1x+a_2x^2+\ldots)$

$$\mathrm{D}\varphi a = -\mathrm{Sin.}a, \quad \mathrm{D}^2\varphi a = -\mathrm{Cos.}a, \quad \mathrm{D}^3\varphi a = +\mathrm{Sin.}a, \ldots;$$

et ainsi de suite, pour d'autres formes de fonctions.

Si le polynôme sous le signe de fonction était terminé, et composé de $n$ termes, on aurait $a_n=0$, $a_{n+1}=0$, $a_{n+2}=0, \ldots$; il suffirait donc alors de rejeter, dans les formules (10), tous les termes où il entrerait, comme facteur, une des quantités polynômiales dont l'indice serait supérieur à $n-1$ ; et, dans l'application de la règle du n.° précédent, on s'arrêterait, dans chaque coefficient au terme affecté de $a_{n-1}$.

10. *Remarque II.* L'inspection des termes successifs (10) du développement de l'équation (6) fait aisément découvrir la loi re-

marquable qui y règne. Elle consiste en ce que $A_n$ est composé de $n$ termes, formés des dérivées successives

$$\frac{\mathrm{D}\phi a}{1}, \frac{\mathrm{D}^2\phi a}{1.2}, \frac{\mathrm{D}^3\phi a}{1.2.3}, \ldots \frac{\mathrm{D}^n\phi a}{1.2.3\ldots n},$$

dont les coefficiens se composent de la manière suivante : 1.° le coefficient de $\frac{\mathrm{D}^r\phi a}{1.2.3\ldots r}$ est composé de tous les produits de $r$ lettres qu'on peut former avec les quantités polynômiales $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, de manière que la somme des indices de chaque produit soit $n$ : chaque lettre étant supposée écrite autant de fois qu'il y a d'unités dans son exposant; 2.° les coefficiens numériques de chaque produit indiquent le nombre de permutations dont les lettres de ce produit sont susceptibles. Ainsi, le coefficient de $\frac{\mathrm{D}^3\phi a}{1.2.3}$ dans $A_6$ est composé des trois produits $3a_1a_1a_4 + 2.3a_1a_2a_3 + a_2a_2a_2$, qui sont les seuls qu'on peut former avec trois lettres, de manière que la somme des indices dans chacun soit égale à 6 : leurs coefficiens numériques indiquent, comme on voit, le nombre des permutations dont les lettres qui les composent sont susceptibles.

Cette remarque, traduite en deux règles pratiques, l'une relative à la formation des groupes de lettres, et l'autre relative à celle des coefficiens numériques, d'après la théorie des combinaisons, constitue l'*Analise combinatoire* des géomètres allemands.

11. Si, au lieu de la fonction d'un polynôme $\phi(a + a_1x + a_2x^2 + \ldots)$ on avait à développer la fonction $\phi(\alpha + x)$ d'une fonction de binôme, il suffirait, d'après le n.° 5, de substituer, dans les équations (10), ou dans les résultats obtenus par la règle du n.° 8, pour les quantités polynômiales $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$, leurs valeurs (2).

Enfin, si l'on avait à développer la fonction d'une fonction de polynôme $\psi\phi(a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots)$, on aurait, d'après le même n.° 5,

$$\psi\phi(a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots) = \psi(\phi a + \mathrm{D}.\phi a.x + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.\phi a.x^2 + \tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.\phi a.x^3 + \ldots);$$

et

et il suffirait de substituer, dans les équations (10), ou dans les résultats obtenus par la règle du n.° 8, pour les quantités polynômiales $a$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, .... les dérivées correspondantes $\varphi a$, $\mathrm{D}.\varphi a$, $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2.\varphi a$, $\frac{1}{6}\mathrm{D}^3.\varphi a$, ...., qui doivent être elles-mêmes développées selon les règles du n.° 8.

Il serait même aisé, dans ce cas, d'obtenir immédiatement le développement de la fonction proposée ; car, en mettant dans l'équation (7) $\psi\varphi$ à la place de $\varphi$, on obtiendrait

$$\psi\varphi(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+....)=\psi\varphi a+\mathrm{D}.\psi\varphi a.x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.\psi\varphi a.x^2+.... ;$$

et au moyen d'une légère extension donnée à la règle du n.° 8, on trouverait

$$\mathrm{D}.\psi\varphi a=\mathrm{D}\psi\varphi a.\mathrm{D}\varphi a.a_1 ,$$

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.\psi\varphi a=\mathrm{D}\psi\varphi a(\mathrm{D}\varphi a.a_2+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.a_1^2)+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi\varphi a(\mathrm{D}\varphi a)^2.a_1^2 ,$$

$$\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.\psi\varphi a=\mathrm{D}\psi\varphi a.(\mathrm{D}\varphi a.a_3+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.2a_1a_2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.a_1^3)$$
$$+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi\varphi a.[(\mathrm{D}\varphi a)^2 2a_1a_2+2\mathrm{D}\varphi a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.a_1^3]+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\psi\varphi a.(\mathrm{D}\varphi a)^3.a_1^3 ,$$

et ainsi de suite.

Le développement précédent équivaut à celui d'une fonction triple d'un binôme $\psi\varphi f(\alpha+x)$. En effet, pour avoir le développement de cette fonction triple, il suffit de substituer, dans les formules précédentes, pour $a$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, ......, les valeurs (2), en fonction de $\alpha$.

Nous ne pousserons pas plus loin ces observations, sur le développement des fonctions multiples ; ce que nous venons de dire suffit pour faire apercevoir la possibilité de cette extension, au moyen du calcul des dérivations.

12. Jusqu'à présent nous n'avons considéré que les fonctions d'un seul polynôme, et nous avons complètement résolu le problème de leur développement successif : il nous resterait maintenant à resoudre la même question pour les fonctions de plusieurs polynômes, ainsi que pour celles des polynômes à double ou à triple entrée ; mais les limites que nous avons dû prescrire à cet écrit, ne nous per-

mettent pas d'entrer dans ces détails : nous nous contenterons d'ajouter encore le développement des produits de deux polynômes et de deux fonctions de polynômes, parce que nous en aurons besoin pour la théorie du retour des suites.

Proposons-nous d'abord de développer le produit

$$(11)\quad (a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)\times(b+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots)$$

en une série de la forme

$$A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots.$$

En effectuant la multiplication, par le procédé ordinaire, on obtient

$$(12)\left\{\begin{array}{l} A\ =ab\ , \\ A_1=ab_1+a_1b\ , \\ A_2=ab_2+a_1b_1+a_2b\ , \\ A_3=ab_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n=ab_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+\ldots+a_{n-2}b_2+a_{n-1}b_1+a_n\ ; \end{array}\right.$$

où la loi est évidente.

D'après le n.° 3, le problème peut se mettre sous la forme

$$(13)\quad \begin{array}{l}(a+\mathrm{D}a.x+\frac{1}{2}\mathrm{D}^2a.x^2+\frac{1}{6}\mathrm{D}^3a.x^3+\ldots)\times(b+\mathrm{D}b.x+\frac{1}{2}\mathrm{D}^2b.x^2+\frac{1}{6}\mathrm{D}^3b.x^3+\ldots)\\ \qquad =A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots\end{array}$$

En substituant donc, dans les équations (12), pour $a_1$, $a_2$, $a_3$, ...., $b_1$, $b_2$, $b_3$; .... leurs valeurs en dérivées de $a$ et de $b$, d'après le n.° 3, on obtient

$$(14)\left\{\begin{array}{l} A\ =ab\ , \\ A_1=\mathrm{D}(ab)=a.\mathrm{D}b+\mathrm{D}a.b\ , \\ A_2=\frac{1}{2}\mathrm{D}^2(ab)=a.\frac{1}{2}\mathrm{D}^2b+\mathrm{D}a.\mathrm{D}b+\frac{1}{2}\mathrm{D}^2a.b\ , \\ A_3=\frac{1}{6}\mathrm{D}^3(ab)=a\frac{1}{6}\mathrm{D}^3b+\mathrm{D}a.\frac{1}{2}\mathrm{D}^2b+\frac{1}{2}\mathrm{D}^2a.\mathrm{D}b+\frac{1}{6}\mathrm{D}^3a.b\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n=\frac{1}{1.2\ldots n}\mathrm{D}^n(ab)=a.\frac{\mathrm{D}^nb}{1.2\ldots n}+\mathrm{D}a.\frac{\mathrm{D}^{n-1}b}{1.2\ldots(n-1)}+\ldots+\frac{\mathrm{D}^{n-1}a}{1.2\ldots(n-1)}\mathrm{D}b+\frac{\mathrm{D}^na}{1.2\ldots n}b\ ; \end{array}\right.$$

où $a$ et $b$ (d'après les n.os 3 et 4) sont supposés être respectivement fonctions de deux quantités arbitraires $\alpha$ et $\beta$, dont les dérivées sont $D\alpha = 1$, $D^2\alpha = 0$, ...., $D\beta = 1$, $D^2\beta = 0$, ....

De la comparaison des formules (12) et (14) résulte la règle pratique suivante :

## Règle.

*Pour déduire* $A_{n+1}$ *de* $A_n$ [formules (12)], 1.° *ne faites varier dans chaque terme, que* b *et ses dérivées, en écrivant* $b_1$ *pour* $Db$, $b_2$ *pour* $Db_1$, $b_3$ *pour* $Db_2$, ....; 2.° *dans le dernier terme seulement, qui contient la plus haute dérivée de* a, *faites varier cette dérivée, en écrivant* $a_{n+1}$ *pour* $Da_n$.

13. Soit maintenant à développer le produit de deux fonctions de polynômes

$$(15)\qquad \varphi(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+....)\times\psi(b+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+...)$$
$$A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+.....$$

D'après le n.° 5, cette équation peut être mise sous la forme

$$(16)\qquad (\varphi a+D.\varphi a.x+\tfrac{1}{2}D^2.\varphi a.x^2+...)(\psi b+D.\psi b.x+\tfrac{1}{2}D^2.\psi b.x^2+...)$$
$$=A+D.A.x+\tfrac{1}{2}D^2.A.x^2+\tfrac{1}{6}D^3.A.x^3+....,$$

qui, étant comparée à celle (13), fait voir qu'il suffit de remplacer, dans celle-ci, $a$ par $\varphi a$, $b$ par $\psi b$, et les signes de dérivation sans points par des signes de dérivation avec points ; on aura donc, d'après le même n.° 5, les équations analogues à celles (14) ; c'est-à-dire,

$$A=\varphi a.\psi b,$$
$$A_1=D.(\varphi a.\psi b)=\varphi a.D.\psi b+D.\varphi a.\psi b,$$
$$A_2=\tfrac{1}{2}D^2.(\varphi a.\psi b)=\varphi a.\tfrac{1}{2}D^2.\psi b+D.\varphi a.D.\psi b+\tfrac{1}{2}D^2.\varphi a.\psi b,$$
$$A_3=\tfrac{1}{6}D^3.(\varphi a.\psi b)=\varphi a.\tfrac{1}{6}D^3.\psi b+D.\varphi a.\tfrac{1}{2}D^2.\psi b+\tfrac{1}{2}D^2.\varphi a.D.\psi b+\tfrac{1}{6}D^3.\varphi a.\psi b,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n=\frac{1}{1.2...n}D^n.(\varphi a.\psi b)=\varphi a.\frac{1}{1.2...n}D^n.\psi b+D.\varphi a.\frac{1}{1.2...(n-1)}D^{n-1}\psi b+....$$
$$+\frac{1}{1.2...(n-1)}D^{n-1}.\varphi a.D.\psi b+\frac{1}{1.2...n}D^n\varphi a.\psi b;$$

où chaque dérivée de $\varphi a$ et de $\psi b$ doit être développée comme les équations (10) ; c'est-à-dire, d'après la règle du n.° 8. Les formules précédentes contiennent donc, au fond, tout ce qu'il faut pour la solution complète de la question ; mais, pour ne rien laisser à désirer, nous allons en déduire les moyens d'exécuter immédiatement le développement complet de ces formules.

14. En exécutant les dérivations indiquées, au moyen de la règle 8, effectuant les multiplications, et ordonnant le tout par rapport aux exposans des dérivées, on obtient

$$
(18)\left\{
\begin{array}{l}
A=\varphi a.\psi b \\
A_1=\varphi a.\mathrm{D}\psi b.b_1 \\
\quad+\mathrm{D}\varphi a.\psi b.a_1 \\
A_2=\varphi a.\mathrm{D}\psi b.b_2+\varphi a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi b.b_1{}^2 \\
\quad+\mathrm{D}\varphi a.\psi b.a_2+\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}\psi b.a_1b_1 \\
\qquad+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\psi b.a_1{}^2 \\
A_3=\varphi a.\mathrm{D}\psi b.b_3+\varphi a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.\psi b.2b_1b_2 \qquad +\varphi a.\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\psi b.b_1{}^3 \\
\quad+\mathrm{D}\varphi a.\psi b.a_3+\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}\psi b(a_1b_2+a_2b_1)+\mathrm{D}\varphi a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi b.a_1b_1{}^2 \\
\qquad+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\psi b.2a_1a_2 \qquad +\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\mathrm{D}\psi b.a_1{}^2b_1 \\
\qquad\qquad +\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.\psi b.a_1{}^3 \\
A_4=\varphi a.\mathrm{D}\psi b.b_4+\varphi a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi b(2b_1b_3+b_2{}^2)+\varphi a.\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\psi b.3b_1{}^2b_2 \\
\quad+\mathrm{D}\varphi a.\psi b.a_4+\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}\psi b(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+\mathrm{D}\varphi a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi b.(2a_1b_1b_2+a_2b_1{}^2) \\
\qquad+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\psi b(2a_1a_3+a_2{}^2)+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\mathrm{D}\psi b.(a_1{}^2b_2+2a_1a_2b_1) \\
\qquad\qquad+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.\psi b.3a_1{}^2a_2 \\
\quad+\varphi a.\tfrac{1}{24}\mathrm{D}^4\psi b.b_1{}^4 \\
\quad+\mathrm{D}\varphi a.\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\psi b.a_1b_1{}^3 \\
\quad+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi b.a_1{}^2b_1{}^2 \\
\quad+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.\mathrm{D}\psi b.a_1{}^3b_1 \\
\quad+\tfrac{1}{24}\mathrm{D}^4\varphi a.\psi b.a_1{}^4 \\
A_5=\varphi a.\mathrm{D}\psi b.b_5+\varphi a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi b(2b_1b_4+2b_2b_3)+\varphi a.\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\psi b(3b_1{}^2b_3+3b_1b_2{}^2) \\
+\mathrm{D}\varphi a.\psi b.a_5+\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}\psi b(a_1b_4+a_2b_3+a_3b_2+a_4b_1)+\mathrm{D}\varphi a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi b(2a^2b_1b_3+a_1b_2+2a_2b_1b_2+a_3b_1) \\
\quad+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\psi b(2a_1a_4+2a_2a_3)+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\mathrm{D}\psi b(a_1{}^2b_3+2a_1a_2b_2+2a_1a_3b_1+a_2{}^2b_1) \\
\qquad\qquad+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.\psi b(3a_1{}^2a_3+3a_2a_2{}^2) \\
\qquad\qquad\qquad+\varphi a.
\end{array}
\right.
$$

$$\left|\begin{array}{ll}
+\varphi a.\tfrac{1}{24}\mathrm{D}^4\psi b.4b_1^{\,3}b_2 & +\varphi a.\tfrac{1}{120}\mathrm{D}^5\psi b.b_1^5 \\
+\mathrm{D}\varphi a.\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\psi b(3a_1b_1^{\,2}b_2+a_2b_1^{\,3}) & +\mathrm{D}\varphi a.\tfrac{1}{24}\mathrm{D}^4\psi b.a_1b_1^{\,4} \\
+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi b(2a_1^{\,2}b_1b_2+2a_1a_2b_1^{\,2}) & +\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\psi b.a_1^{\,2}b_1^{\,3} \\
+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a\,\mathrm{D}\psi b(a_1^{\,3}b_2+3a_1^{\,2}a_2b_1) & +\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a\,\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\psi b.a_1^{\,3}b_1^{\,2} \\
+\tfrac{1}{24}\mathrm{D}^4\varphi a.\psi b.4a_1^{\,3}a_2 & +\tfrac{1}{24}\mathrm{D}^4\varphi a\,\mathrm{D}\psi b.a_1^{\,4}b_1 \\
 & +\tfrac{1}{120}\mathrm{D}^5\varphi a.\psi b\,a_1^{\,5}
\end{array}\right.$$

et ainsi de suite.

En examinant la composition successive de ces coefficiens, on en conclut la règle pratique suivante, pour déduire immédiatement un coefficient quelconque de celui qui le précède.

## Règle.

15. *Pour déduire le développement de* $A_{n+1}$ *de celui de* $A_n$; *les dérivées des fonctions étant disposées en colonnes, d'après les dimensions de leurs exposans, et les lettres d'après leur ordre de succession;*

1.° *On ne fera varier, dans chaque terme de chaque colonne, que les coefficiens composés des quantités polynômiales* $a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots,$ *d'après la règle du n.° 8; en observant, pour ceux qui contiennent à la fois des* a *et des* b, *de ne faire varier d'abord que les* b, *et ensuite les* a, *mais dans le dernier terme seulement de chaque coefficient.*

2.° *On fera varier de plus, mais dans la dernière colonne seulement, la fonction* $\psi b$, *dans tous les termes; et, comme la puissance de* $b_1$ *augmente alors d'une unité, on divisera par son exposant ainsi augmenté;*

3.° *Enfin, on fera encore varier, mais dans le dernier terme de la dernière colonne seulement, la fonction* $\varphi a$; *et, comme la puissance de* $a_1$ *augmente alors d'une unité, on divisera par son exposant ainsi augmenté.*

Donnons des exemples de chacune des trois parties de cette règle.

1.° Le coefficient de $\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\mathrm{D}\psi b$, dans $A_4$, est $a_1^{\,2}b_2+2a_1a_2b_1$.

Pour en déduire celui du même terme dans $A_5$, je fais d'abord varier les $b$, ce qui donne $a_1^2b_3+2a_1a_2b_2$; faisant ensuite varier les $a$ dans le dernier terme $2a_1a_2b_1$, on a, d'après la première partie de la règle du n.° 8, $2a_1a_3b_1$, et d'après la seconde partie de cette règle $a_2^2b_1$. Rassemblant tous ces termes, on a le coefficient de $\frac{1}{2}D^2\varphi a.\psi b$ dans $A_5$,

2.° En appliquant la seconde partie de la règle ci-dessus aux cinq termes de la dernière colonne de $A_4$, on obtient les cinq premiers termes de la dernière colonne de $A_5$;

3.° Enfin, en appliquant la troisième partie de la règle ci-dessus au dernier terme $\frac{1}{24}D^4\varphi a.\psi b.a_1^4$ de la dernière colonne de $A_4$, on obtient le dernier terme $\frac{1}{120}D^5\varphi a.\psi b.a_1^5$ de la dernière colonne de $A_5$.

Cette règle est encore d'une exécution très-facile, et si expéditive qu'on peut écrire de suite, et sans s'arrêter, les termes successifs du développement. Elle n'est, jusqu'à présent, de même que celle du n.° 8, qu'une conclusion d'induction; mais nous la démontrerons complètement dans la suite, et nous donnerons aussi une règle très-simple, pour écrire immédiatement un terme quelconque du développement, indépendamment de ceux qui le précèdent.

16. *Remarque I.* En examinant la composition des termes successifs (18) du développement de l'équation (15), on découvre la loi remarquable suivante qui y règne. Le terme général $A_n$ est composé de $n$ colonnes, ordonnées selon les dimensions des exposans des dérivées de $\varphi a$ et $\psi b$, de manière que la $m$.me colonne contient les $m+1$ termes

$$\varphi a.\frac{D^m\psi b}{1.2.....m},\ D\varphi a.\frac{D^{m-1}\psi b}{1.2...(m-1)},\ldots.\frac{D^{m-1}\varphi a}{1.2...(m-1)}.D\psi b,\ \frac{D^m\varphi a}{1.2....m}.\psi b.$$

Chacun de ces termes a pour coefficient une fonction des quantités polynômiales $a_1$, $a_2$, $a_3$, ...., $b_1$, $b_2$, $b_3$, .... dont voici la formation: en supposant $r+s=m$, le coefficient du terme $\frac{D^r\varphi a}{1.2...r}.\frac{D^s\psi b}{1.2...s}$ est composé de tous les produits de $m$ lettres, dont un nombre $r$ des quantités polynômiales en $a$ et un nombre $b$ des quantités polynômiales en $b$, de manière que la somme de tous les indices de chaque produit soit égale à $n$. Quant aux coefficiens numériques de chaque produit, on les obtient en multipliant l'un par l'autre le nombre qui indique celui des permutations qu'on peut faire, entre les quantités polynômiales en $a$, et le nombre qui indique celui des permutions qu'on peut faire entre les quantités polynômiales en $b$.

Ainsi, le coefficient de $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\frac{1}{6}\mathrm{D}^3\psi b$, dans $A_7$ est

$$3a_1{}^2b_1b_2{}^2+3a_1{}^2b_1{}^2b_3+6a_1a_2b_1{}^2b_2+2a_1a_3b_1{}^3+a_2{}^2b_1{}^3\text{, c'est-à-dire,}$$

$$3a_1a_1b_1b_2b_2+3a_1a_1b_1b_1b_3+2.3a_1a_2b_1b_1b_2+2a_1a_3b_1b_1b_1+a_2a_2b_1b_1b_1,$$

qui contient en effet tous les produits possibles de deux quantités polynômiales en $a$ et de trois en $b$, de manière que la somme des indices soit égale à 7; et qui a des coefficiens numériques qui suivent la loi que nous venons d'indiquer.

On pourrait donc, au moyen de cette loi, qui est d'ailleurs la même pour une fonction quelconque de deux polynômes indépendans, former immédiatement un terme quelconque du développement, par la théorie des combinaisons; ce qui donnerait une extension considérable à l'analise combinatoire de Hindenburg; mais le moyen que nous donnerons par la suite sera à la fois plus simple, plus direct et plus analitique.

On remarquera sans doute que la simplicité de l'énoncé de cette loi, ainsi que de celle du n.° 10, n'est due qu'au choix que nous avons fait d'indices numériques, pour représenter les quantités polynômiales : elle n'aurait pu s'énoncer que très-difficilement, avec les lettres dans l'ordre alphabétique, employées par Arbogast et Hindenburg. Ces lettres à indices ont encore l'avantage d'indiquer, de la manière la plus caractéristique, leurs relations avec les dérivées du premier terme du polynôme, puisqu'on a généralement $a_n = \frac{\mathrm{D}^n a}{1.2...n}$:

tant il est vrai que souvent le plus léger changement dans les notations peut avoir l'influence la plus heureuse sur les méthodes.

17. *Remarque II.* La theorie que nous venons d'exposer, contient tout ce qui est nécessaire pour le développement complet des fonctions d'un polynome, et même, à la rigueur, pour celui d'une fonction quelconque de deux polynomes indépendans; car il suffirait, pour le développement de $\varphi(a+a_1x+a_2x^2+\ldots,\ b+b_1x+b_2x^2+\ldots)$, de remplacer, dans les formules (18), les produits tels que $\frac{\mathrm{D}^r\varphi a}{1.2\ldots r}\cdot\frac{\mathrm{D}^s\psi b}{1.2\ldots s}$ par les dérivées partielles du même ordre de $\varphi(a,b)$. Mais, nous allons encore envisager cette théorie sous un autre point de vue, qui nous facilitera singulierement l'exposition de celle du retour des fonctions et des séries, à laquelle nous nous proposons de consacrer l'article II.

18. On a, par le n.° 1,

$$(19)\qquad \varphi(a+y)=\varphi a+\mathrm{D}\varphi a.y+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.y^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.y^3+\ldots$$

Si l'on suppose

$$(20)\qquad y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots=x(a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots),$$

où les coefficiens $a_1$, $a_2$, $a_3$,.... représentent des quantités quelconques et indépendantes, et qu'on substitue cette valeur de $y$ dans l'équation (19), son premier membre se transformera en celui de l'équation (7); on aura donc

$$(21)\qquad \varphi(a+y)=\varphi(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)$$
$$=\varphi a+\mathrm{D}\varphi a.x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.x^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.x^3+\ldots$$

Ces deux développemens ne diffèrent l'un de l'autre qu'en ce que, dans les dérivées du premier, on suppose $\mathrm{D}a=1$, $\mathrm{D}^2a=0$, $\mathrm{D}^3a=0$,..., et dans celle du second, $\mathrm{D}a=a_1$, $\mathrm{D}^2a=2a_2$, $\mathrm{D}^3a=6a_3$,.... La manière de déduire les dérivées suivies d'un point de celles sans point a été exposée aux n.$^{os}$ 7 et 8.

L'équation (21) fournit donc le moyen de résoudre cette question

tion : $y$ étant une fonction donnée de $x$, ou un polynôme en $x$ ; développer, selon les puissances de $x$, une fonction quelconque $\varphi(a+y)$ ? En effet, d'après le n.° 3, l'équation (20) peut être mise sous la forme

$$(22) \qquad y=x\mathrm{f}(\alpha+x)\,,$$

et l'on a

$$(23) \qquad a_1=\mathrm{f}\alpha\,,\ a_2=\mathrm{Df}\alpha\,,\ a_3=\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\mathrm{f}\alpha\,,\ a_4=\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\mathrm{f}\alpha\,,\ldots\ldots;$$

c'est-à-dire, que $a_1$ doit être considéré comme un premier terme de polynôme.

En substituant ces valeurs dans l'équation (21), on obtient

$$(24) \qquad \varphi\{a+x\mathrm{f}(\alpha+x)\}=\varphi(a+\mathrm{f}\alpha.x+\mathrm{Df}\alpha.x^2+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\mathrm{f}\alpha.x^3+\ldots)$$
$$=\varphi a+\mathrm{D}.\varphi a.x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.\varphi a.x^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.\varphi a.x^3+\ldots.. ;$$

où, dans le développement du dernier membre, qu'on exécute d'après la règle du n.° 8, il faut substituer, pour $a_1$, $a_2$, $a_3$, .... leurs valeurs (23).

19. Si, dans la question du n.° précédent, la valeur de $y$ était donnée par l'équation suivante :

$$(25) \qquad y=x^{\psi}\mathrm{f}(\alpha+x)$$

qui, d'après le n.° 5, devient

$$(26) \qquad y=x(\psi\mathrm{f}\alpha+\mathrm{D}.\psi\mathrm{f}\alpha.x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.\psi\mathrm{f}\alpha.x^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.\psi\mathrm{f}\alpha.x^3+\ldots.)\ ;$$

il faudrait faire, dans le développement du dernier membre de l'équation (24),

$$(27) \qquad a_1=\psi\mathrm{f}\alpha\,,\ a_2=\mathrm{D}.\psi\mathrm{f}\alpha\,,\ a_3=\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.\psi\mathrm{f}\alpha\,,\ a_4=\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.\psi\mathrm{f}\alpha\,,\ldots.;$$

mais, conformément aux principes des n.$^{os}$ 5 et 6, ces dernières dérivées doivent être suivies d'un point, et développées d'après le n.° 7.

20. Si l'on avait à développer, selon les puissances de $x$ ; la fonction $\varphi(a+z)$, $z$ étant donné par l'équation

$$(28)\qquad z = x\psi(\beta+y)\,;$$

et $y$ par l'équation (22) ; on aurait

$$(29)\qquad \begin{aligned} \phi(a+z) &= \phi[a+x\psi(\beta+y)] = \phi\{a+x\psi[\beta+x\mathrm{f}(\alpha+x)]\} \\ &= \phi\{a+x\psi(\beta+\mathrm{f}\alpha.x+\mathrm{Df}\alpha.x^2+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\mathrm{f}\alpha.x^3+\ldots.)\} \\ &= \phi a+\mathrm{D}.\phi a.x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.\phi a.x^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.\phi a+\ldots\,; \end{aligned}$$

mais ici, dans le développement des dérivées du dernier membre, il faudrait remplacer $a_1$, $a_2$, $a_3$, .... par $\psi\beta$, $\mathrm{D}.\psi\beta$, $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2.\psi\beta$, ...., en observant de mettre, dans le développement de ces dernières dérivées, $\mathrm{f}\alpha$ à la place de $\mathrm{D}\beta$, $\mathrm{Df}\alpha$ à la place de $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\beta$, $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\mathrm{f}\alpha$ à la place de $\frac{1}{6}\mathrm{D}^3\beta$ ; et ainsi de suite.

On pourrait aisément pousser plus loin ces substitutions de fonctions dans les fonctions, ou de séries dans les séries ; et l'on voit que le principe de leur développement par les dérivations est simple et uniforme : il ne reste que la complication des résultats, qui est inhérente à la chose même.

## Article II.

### *Développement des fonctions selon les puissances d'une fonction quelconque de la variable, ou retour des fonctions et des séries.*

21. Depuis le n.° 18 de l'article précédent, nous nous sommes occupés de la question suivante : le développement d'une fonction quelconque, selon les puissances d'une fonction donnée de la variable principale, étant supposé connu ; en déduire le développement selon les puissances de la variable principale ? Dans cet article, nous allons résoudre la question inverse, savoir : le développement d'une fonction quelconque, selon les puissances de la variable principale, étant donné, ainsi que la relation entre cette variable et une autre fonction ; en déduire le développement selon les puis-

sances de cette dernière fonction ? Cette question contient le problème général du retour des fonctions et des séries.

22. Proposons-nous de transformer le polynôme

$$(30)\qquad A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots\ldots;$$

procédant selon les puissances de la variable principale $x$, en un polynôme

$$(31)\qquad B+B_1y+B_2y^2+B_3y^3+\ldots\ldots$$

procédant selon les puissances de $y$, dont la valeur est supposée donnée par l'équation (20)

$$y=x(a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots\ldots).$$

En comparant le polynôme (30) avec l'équation (21), et le polynôme (31) avec l'équation (19), on obtient

$$(32)\qquad A=\varphi a,\ A_1=\mathrm{D}.\varphi a,\ A_2=\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.\varphi a,\ A_3=\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.\varphi a,\ldots;$$

$$(33)\qquad B=\varphi a,\ B_1=\mathrm{D}\,\varphi a,\ B_2=\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\,\varphi a,\ B_3=\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\,\varphi a,\ldots\ldots$$

Ici, ce sont les dérivées suivies d'un point qui sont données immédiatement; et la question se réduit à en déduire celles sans points. On pourrait la résoudre en tirant les valeurs de ces dernières des équations (10), par des éliminations successives; mais, outre que ce moyen serait trop long, il est peu propre à faire découvrir la loi qui y règne : il est bien plus simple de les former immédiatement de la manière suivante.

On a, d'après les n.os 6 et 7, $\mathrm{D}.\varphi a=\mathrm{D}\varphi a.a_1$, et par conséquent $\mathrm{D}\varphi a=a_1^{-1}\mathrm{D}.\varphi a$; donc, en répétant l'opération indiquée par cette équation, on obtient

$$(34)\quad\left\{\begin{array}{l}\mathrm{D}\,\varphi a=a_1^{-1}\mathrm{D}.\varphi a,\\ \mathrm{D}^2\varphi a=\mathrm{D}(\mathrm{D}\varphi a)=a_1^{-1}\mathrm{D}.(a_1^{-1}\mathrm{D}.\varphi a),\\ \mathrm{D}^3\varphi a=\mathrm{D}(\mathrm{D}^2\varphi a)=a_1^{-1}\mathrm{D}.[a_1^{-1}\mathrm{D}.(a_1^{-1}\mathrm{D}.\varphi a)];\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{array}\right.$$

mais ici il faut observer que la manière dont nous sommes parvenus à ces relations suppose que $a_1$ est un second terme de polynôme; c'est-à-dire que, d'après le n.° 1, on a

$$a_1 = \mathrm{D}a\ ,\quad a_2 = \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2 a\ ,\quad a_3 = \tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3 a\ ,\ldots.. a_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\mathrm{D}^n a\ ;$$

et par conséquent

$$\mathrm{D}a_1 = \mathrm{D}^2 a = 2a_2\ ,\ \mathrm{D}^2 a_1 = \mathrm{D}^3 a = 6a_3\ ,\ldots.\ \mathrm{D}^{n-1} a_1 = \mathrm{D}^n a = 1.2\ldots n.a_n\ ;$$

ainsi, dans le développement des seconds membres des équations (34), il faudra substituer pour les dérivées de $a_1$ leurs valeurs précédentes.

Mais si, conformément au n.° 18, on veut considérer $a_1$ comme premier terme de polynôme, on a

$$a_2 = \mathrm{D}a_1\ ,\ a_3 = \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2 a_1\ ,\ a_4 = \tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3 a_1\ ,\ldots.. a_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\mathrm{D}^{n-1} a_1 :$$

en substituant ces valeurs dans les développemens des équations (34), ce qui revient à y écrire $2\mathrm{D}a_1$ pour $\mathrm{D}a_1$, $3\mathrm{D}^2 a_1$ pour $\mathrm{D}^2 a_1$, $4\mathrm{D}^3 a_1$ pour $\mathrm{D}^3 a_1$,...., $n\mathrm{D}^{n-1} a_1$ pour $\mathrm{D}^{n-1} a_1$, on pourra mettre ces équations sous la forme suivante :

$$(35)\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{D}\varphi a = a_1^{-1}\mathrm{D}.\varphi a\ ,\\
\mathrm{D}^2\varphi a = \mathrm{D}.(a_1^{-2}\mathrm{D}.\varphi a)\ ,\\
\mathrm{D}^3\varphi a = \mathrm{D}^2.(a_1^{-3}\mathrm{D}.\varphi a)\ ,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ .\\
\mathrm{D}\ \varphi a = \mathrm{D}^{n-1}.(a_1^{-n}\mathrm{D}.\varphi a)\ .
\end{array}\right.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (33), et remplaçant $\varphi a$ par $A$, on obtient enfin

$$(36)\left\{\begin{array}{l}
B = A\ ,\\
B_1 = a_1^{-1}\mathrm{D}.A\ ,\\
B_2 = \tfrac{1}{2}\mathrm{D}.(a_1^{-2}\mathrm{D}.A)\ ,\\
B_3 = \tfrac{1}{6}\mathrm{D}^2.(a_1^{-3}\mathrm{D}.A)\ ,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,\\
B_n = \dfrac{1}{1.2\ldots n}\mathrm{D}^{n-1}.(a_1^{-n}\mathrm{D}.A)\ ;
\end{array}\right.$$

où,

où, d'après l'observation du n.° 18, et d'après l'observation précédente, $a_1$ doit être considéré comme un premier terme de polynome.

23. Si l'on fait attention que l'équation (20) peut être mise sous la forme (22), et que le polynôme (30), d'après le n.° 3, peut représenter une fonction quelconque $\varphi(b+x)$; le problème du n.° précédent fournit la solution de la question suivante : étant donnée la relation $y=x\mathrm{f}(\alpha+x)$, développer la fonction quelconque $\varphi(b+x)$ suivant les puissances de $y$.

D'après cela, si l'on substitue, dans le polynôme (31), les valeurs (36), et dans celle-ci pour $A$ et $a_1$ leurs valeurs $\varphi b$ et $\mathrm{f}\alpha$, on aura

$$(37) \qquad \varphi(b+x)=B+B_1y+B_2y^2+B_3y^3+\ldots$$
$$=\varphi b+(\mathrm{f}\alpha)^{-1}\mathrm{D}.\varphi b\, y+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}.\{(\mathrm{f}\alpha)^{-2}\mathrm{D}.\varphi b\}y^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^2.\{(\mathrm{f}\alpha)^{-3}\mathrm{D}.\varphi b\}y^3+\ldots$$

où l'on peut supprimer, si l'on veut, les points qui suivent les signes de derivation qui affectent $\varphi b$; car, dans le binôme $b+x$, on a $\mathrm{D}b=1$; et par conséquent $\mathrm{D}.\varphi b=\mathrm{D}\varphi b$.

On aurait de même, dans la même hypothèse,

$$(38) \qquad \varphi(b+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots)=B+B_1y+B_2y^2+B_3y^3+\ldots$$
$$=\varphi b+(\mathrm{f}\alpha)^{-1}\mathrm{D}.\varphi b.y+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}.\{(\mathrm{f}\alpha)^{-2}\mathrm{D}.\varphi b\}y^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^2.\{(\mathrm{f}\alpha)^{-3}\mathrm{D}.\varphi b\}y^3+\ldots.$$

mais ici les points, après tous les signes de dérivation, sont indispensables, car on a $\mathrm{D}b=b_1$, $\mathrm{D}^2b=2b_2$, $\mathrm{D}^3b=6b_3$,...., et par conséquent $\mathrm{D}.\varphi b=\mathrm{D}\varphi b.b_1$,.....

On aurait encore, de la même manière, et pour la même valeur de $y$,

$$(39) \quad \psi\varphi(b+x)=\psi\varphi b+(\mathrm{f}\alpha)^{-1}\mathrm{D}.\psi\varphi b.y+\tfrac{1}{2}\{(\mathrm{f}\alpha)^{-2}\mathrm{D}.\psi b\}y^2+\tfrac{1}{6}\{(\mathrm{f}\alpha)^{-3}\mathrm{D}.\psi\varphi b\}y^3+\ldots,$$

où les points, après les signes de dérivation sont encore nécessaires : parce qu'on a $\mathrm{D}.\psi\varphi b=\mathrm{D}\psi\varphi b.\mathrm{D}\varphi b$.

24. Si, dans la question du n.° précédent, la valeur de $y$ était donnée par l'équation (25)

$$y=x\psi\mathrm{f}(\alpha+x),$$

il faudrait substituer, dans les équations (36), pour $a_1$ sa valeur $\psi \mathrm{f}\alpha$, conformément au n.° 19; ce qui donnerait, d'après l'observation faite sur l'équation (37)

$$(40)\quad \varphi(b+x)=\varphi b+(\psi \mathrm{f}\alpha)^{-1}\mathrm{D}\varphi b.y+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}.\{(\psi \mathrm{f}\alpha)^{-2}\mathrm{D}\varphi b\}y^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^2.\{(\psi \mathrm{f}\alpha)^{-3}\mathrm{D}\varphi b\}y^3+\ldots$$

Dans le cas particulier où $\psi$ représente la puissance $-1$, l'équation (25) devient

$$(41)\qquad y=\frac{x}{\mathrm{f}(\alpha+x)},$$

et alors l'équation (40) se change en

$$(42)\quad \varphi(b+x)=\varphi b+\mathrm{f}\alpha.\mathrm{D}\varphi b.y+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}.\{(\mathrm{f}\alpha)^2\mathrm{D}\varphi b\}y^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^2.\{(\mathrm{f}\alpha)^3\mathrm{D}\varphi b\}y^3+\ldots$$

On aurait de même, pour la valeur de $y$ (25),

$$(43)\quad \mathrm{F}\varphi(b+x)=\mathrm{F}\varphi b+(\psi \mathrm{f}\alpha)^{-1}\mathrm{D}.\mathrm{F}\varphi b.y+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}.\{(\psi \mathrm{f}\alpha)^{-2}\mathrm{D}.\mathrm{F}\varphi b\}y^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^2.\{(\psi \mathrm{f}\alpha)^{-3}\mathrm{D}.\mathrm{F}\varphi b\}y^3+.$$

où la même observation n'a lieu qu'après l'équation (39).

25. Proposons-nous enfin de résoudre la question suivante: étant données les relations

$$(44)\qquad y=x\mathrm{f}(\alpha+x),\quad z=x\psi(\beta+y),$$

développer la fonction $\varphi(b+x)$ selon les puissances de $z$, sans $x$ ni $y$.

En comparant les solutions des n.$^{os}$ précédens avec la question du n.° 20, dont celle-ci est l'inverse, on obtient immédiatement

$$(45)\quad \varphi(b+x)=\varphi b+(\psi\beta)^{-1}.\mathrm{D}\varphi b.z+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}.\{(\psi\beta)^{-2}\mathrm{D}\varphi b\}z^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^2.\{(\psi\beta)^{-3}.\mathrm{D}\varphi b\}z^3+\ldots;$$

en observant seulement de mettre, dans le développement des dérivées de $\psi\beta$, $\mathrm{f}\alpha$ pour $\mathrm{D}\beta$, $\mathrm{Df}\alpha$ pour $\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\beta$, $\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\mathrm{f}\alpha$ pour $\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\beta$, et ainsi de suite.

En se conformant à cette observation, on aurait de même

$$(46)\quad \mathrm{F}\varphi(b+x)=\mathrm{F}\varphi b+(\psi\beta)^{-1}\mathrm{D}.\mathrm{F}\varphi b.z+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}.\{(\psi\beta)^{-2}\mathrm{D}.\mathrm{F}\varphi b\}z^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^2.\{(\psi\beta)^{-3}\mathrm{D}.\mathrm{F}\varphi b\}z^3+\ldots$$

26. *Remarque.* La question traitée au n.° précédent est une espèce de *retour double* : on pourrait en former de pareilles sur des *retours triples*, *quadruples*, etc. : le principe de leurs solutions se déduit aisément de celle du n.° précédent ; et leur développement par les dérivations s'exécuterait aussi facilement que leur complication naturelle peut le permettre.

27. Depuis le commencement de cet article, nous n'avons fait qu'établir les formules générales du retour des fonctions et des séries ; occupons-nous maintenant de leur développement complet et effectif. Reprenons, à cet effet, les problèmes du n.° 23, et proposons-nous de développer complètement les coefficiens successifs $B$, $B_1$, $B_2$, $B_3$,.... de l'équation (38).

Comme nous avons vu, aux n.os 18 et 22, que $a_1$ devait être considéré comme un premier terme de polynôme, dans l'équation (20) ou (22), et que d'ailleurs les quantités $a_1$, $a_2$, $a_3$,... peuvent être quelconques ; nous les remplacerons par $c$, $c_1$, $c_2$, $c_3$,.... ; afin de conserver la régularité dans les développemens ; ainsi, l'équation (20) ou (22) deviendra

$$(47) \qquad y=x\mathrm{f}(\alpha+x)=x(c+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+....)$$

Au moyen de cette observation, le problème en question se réduit à développer les termes $B$, $B_1$, $B_2$, $B_3$,.... des équations (36), en y substituant $c$ à la place de $a_1$, et de $\varphi b$ à la place de $A$ ; ce qui donne

$$(48) \qquad 1B_1=c^{-1}\mathrm{D}.\varphi b\,,\ 2B_2=\mathrm{D}.(c^{-2}\mathrm{D}.\varphi b)\,,\ 3B_3=\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.(c^{-3}\mathrm{D}.\varphi b)....$$

En comparant ces termes avec la formule (17), on voit aisément que leur développement doit s'exécuter par la même règle, en observant cependant qu'ici la fonction $\varphi a$ est remplacée par une puissance négative de $c$, dont l'exposant est égal à l'indice du terme ; et que la fonction $\psi b$ est remplacée par $\mathrm{D}.\varphi b$. Avec cette attention, on aura, en suivant la règle du n.° 15, les développemens suivans, analogues à ceux (18)

$$
(49)\left\{
\begin{aligned}
&B = \phi b\,;\\
&1B_1 = c^{-1}.\mathrm{D}\phi b.b_1\,,\\
&2B_2 = c^{-2}.\mathrm{D}\phi b.b_2 + c^{-2}.\mathrm{DD}\phi b.b_1^2\\
&\qquad\qquad + \mathrm{D}(c^{-2}).\mathrm{D}\phi b.c_1 b_1\\
&3B_3 = c^{-3}.\mathrm{D}\phi b.b_3 + c^{-3}.\mathrm{DD}\phi b.2b_1 b_2 + c^{-3}.\frac{\mathrm{D^2D}\phi b.b_1^3}{2}.b_1^3\\
&\qquad\qquad + \mathrm{D}(c^{-3}).\mathrm{D}\phi b(c_1 b_2 + c_2 b_1) + \mathrm{D}(c^{-3}).\mathrm{DD}\phi b.c_1 b_1^2\\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{\mathrm{D}^2(c^{-3})}{2}\,\mathrm{D}\phi b.c_1^2 b_1\\
&4B_4 = c^{-4}.\mathrm{D}\phi b.b_4 + c^{-4}.\mathrm{DD}\phi b(2b_1 b_3 + b_2^2) + c^{-4}.\frac{\mathrm{D^2D}\phi b}{2}.3b_1^2 b_2\\
&\qquad + \mathrm{D}(c^{-4}).\mathrm{D}\phi b(c_1 b_3 + c_2 b_2 + c_3 b_1 + \mathrm{D}(c^{-4}).\mathrm{DD}\phi(2c_1 b_2 + c_2 b_1^2\\
&\qquad\qquad + \frac{\mathrm{D}^2(c^{-4})}{2}.\mathrm{D}\phi b(c_1^2 b_2 + 2c_1 c_2 b_1)\\
&\qquad + c^{-4}.\frac{\mathrm{D^3D}\phi b}{6}.b_1^4\\
&\qquad + \mathrm{D}(c^{-4}).\frac{\mathrm{D^2D}\phi b}{2}.c_1 b_1^3\\
&\qquad + \frac{\mathrm{D}^2(c^{-4})}{2}\,\mathrm{DD}\phi b.c_1^2 b_1^2\\
&\qquad + \frac{\mathrm{D}^3(c^{-4})}{6}\,\mathrm{D}\phi b.c_1^3 b_1\\
&5B_5 = c^{-5}.\mathrm{D}\phi b.b_5 + c^{-5}.\mathrm{DD}\phi b(2b_1 b_4 + 2b_2 b_3) + c^{-5}.\frac{\mathrm{D^2D}\phi b}{2}.(3b_1^2 b_3 + 3b_1 b_2^2)\\
&+ \mathrm{D}(c^{-5}).\mathrm{D}\phi b(c_1 b_4 + c_2 b_3 + c_3 b_2 + c_4 b_1) + \mathrm{D}(c^{-5}).\mathrm{DD}\phi b.(2c_1 b_1 b_3 + c_1 b_2^2 + 2c_2 b_1 b_2 + c_3 b_1^2)\\
&\qquad\qquad + \frac{\mathrm{D}^2(c^{-5})}{2}\,\mathrm{D}.\phi b.(c_1^2 b_3 + 2c_1 c_2 b_2 + 2c_1 c_3 b_1 + c_2^2 b_1)\\
&+ c^{-5}.\frac{\mathrm{D^3D}\phi b}{2}.4b_1^3 b_2 \qquad\qquad + c^{-5}.\frac{\mathrm{D^4.D}\phi b}{24}.b_1^5\\
&+ \mathrm{D}(c^{-5}).\frac{\mathrm{D^2D}\phi b}{2}(3c_1 b_1^2 + c_2 b_1^3) + \mathrm{D}(c^{-5}).\frac{\mathrm{D^3D}\phi b}{6}.c_1 b_1^4
\end{aligned}
\right.
$$

$$\left|\begin{array}{l}
+\frac{\mathrm{D}^2(c^{-5})}{2}.\mathrm{DD}\phi b(2c_1^2b_1b_2+2c_1c_2b_1^2)+\frac{\mathrm{D}^2(c^{-5})}{2}.\frac{\mathrm{D}^2\mathrm{D}\phi b}{2}.c_1^2b_1^3 \\
+\frac{\mathrm{D}^3(c^{-5})}{6}.\mathrm{D}\phi b(c_1^3b_2+3c_1^2c_2b_1) \qquad +\frac{\mathrm{D}^3(c^{-5})}{6}.\mathrm{DD}\phi b.c_1^3b_1^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\frac{\mathrm{D}^4(c^{-5})}{24}.\mathrm{D}\phi b.c_1^4b_1
\end{array}\right.$$

et ainsi de suite.

Si l'on effectue les dérivations des puissances négatives de $c$; qui ne sont qu'indiquées, ainsi que celles de $\mathrm{D}\phi b$, et qu'on ordonne selon les dérivées de $\phi b$, on obtient

$$(50)\left\{\begin{array}{l}
B=\phi b \\
1B_1=\mathrm{D}\phi b.c^{-1}.b_1 \\
2B_2=\mathrm{D}\phi b\left|\begin{array}{l} c^{-2}.b_2 \\ -2c^{-3}.b_1c_1 \end{array}\right. +2\frac{\mathrm{D}^2\phi b}{2}.c^{-2}.b_1^2 \\
3B_3=\mathrm{D}\phi b\left|\begin{array}{l} c^{-3}.b_3 \\ -3c^{-4}(b_1c_2+b_2c_1) \\ +\frac{3.4}{2}c^{-5}.b_1c_1^2 \end{array}\right. +2\frac{\mathrm{D}^2\phi b}{2}\left|\begin{array}{l} c^{-3}.2b_1b_2 \\ -3c^{-4}.b_1^2c_1 \end{array}\right. +3\frac{\mathrm{D}^3\phi b}{6}.c^{-3}.b_1^3 \\
4B_4=\mathrm{D}\phi b\left|\begin{array}{l} c^{-4}.b_4 \\ -4c^{-5}.(b_1c_3+b_2c_2+b_3c_1) \\ +\frac{4.5}{2}c^{-6}(2b_1c_1c_2+b_2c_1^2) \\ -\frac{4.5.6}{2.3}c^{-7}.b_1c_1^3 \end{array}\right. +2\frac{\mathrm{D}^2\phi b}{2}\left|\begin{array}{l} c^{-4}(2b_1b_3+b_2^2) \\ -4c^{-5}(b_1^2c_2+2b_1b_2c_1) \\ +\frac{4.5}{2}c^{-6}.b_1^2c_1^2 \end{array}\right. \\
\quad +3\frac{\mathrm{D}^3\phi b}{6}\left|\begin{array}{l} c^{-4}.3b_1^2b_2 \\ -4c^{-5}.b_1^3c_1 \end{array}\right. +4\frac{\mathrm{D}^4\phi b}{24}.c^{-4}.b_1^4
\end{array}\right.$$

$$
\begin{aligned}
5B_5 = \mathrm{D}\phi b \left| \begin{array}{l}
c^{-5}.b_5 \\
-5c^{-6}(b_1c_4+b_2c_3+b_3c^2+b_4c_1) \\
+\frac{5.6}{2}c^{-7}(2b_1c_1c_3+b_1c_2^2+2b_2c_1c^2+b_3c_1^2) \\
-\frac{5.6.7}{2.3}c^{-8}(3b_1c_1c_3+b_2c_1^3) \\
+\frac{5.6.7.8}{2.3.4}c^{-9}.b_1c_1^4
\end{array}\right.
+2\frac{\mathrm{D}^2\phi b}{2}. \left| \begin{array}{l}
c^{-5}(2b_1b_4+2b_2b_3) \\
-5c^{-6}(b_1^2c_3+2b_1b_2c_2+2b_1b_3c_1+b_2^2c_1) \\
+\frac{5.6}{2}c^{-7}(2b_1^2c_1c_2+2b_1b_2c_1^2) \\
-\frac{5.6.7}{2.3}c^{-8}.b_1^2c_1^3
\end{array}\right. \\
+3\frac{\mathrm{D}^3\phi b}{6}. \left| \begin{array}{l}
c^{-5}(3b_1^2b_3+3b_1b_2^2) \\
-5c^{-6}(b_1^3c_2+3b_1^2b_2c_1) \\
+\frac{5.6}{2}c^{-7}.b_1^3c_1^2
\end{array}\right.
+4.\frac{\mathrm{D}^4\phi b}{24} \left| \begin{array}{l}
c^{-5}.4b_1^3b_2+5.\frac{\mathrm{D}^5\phi b}{120}.c^{-5}.b_1^5 \\
-5c^{-6}.b_1^4.c_1
\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

et ainsi de suite.

L'examen de la composition successive des termes fournit encore une règle pratique, pour déduire un terme quelconque de celui qui le précède.

## Règle.

28. *Pour déduire le développement de* $(n+1)B_{n+1}$ *de celui de* $nB_n$, *celui-ci étant ordonné en colonnes, par rapport aux dérivées successives de* $\phi b$, *les termes de chaque colonne, par rapport aux puissances de* c, *et les quantités polynômiales d'après leur ordre de succession ;*

1.° *On divisera tous les termes de* $nB_n$ *par* n, *on multipliera chacun par l'exposant de* c *dans ce terme ( abstraction faite du signe ), et l'on augmentera cet exposant d'une unité ( aussi abstraction faite de son signe );*

2.° *On ne fera varier, dans chaque terme de chaque colonne, que les coefficiens composés des quantités polynômiales* $b_1, b_2, b_3, \ldots,$ $c_1, c_2, c_3, \ldots,$ *d'après la règle du n.° 8 ; en observant, pour* *ceux qui contiennent à la fois des* b *et des* c, *de ne faire varier d'abord que les* c, *et ensuite les* b, *mais dans le dernier terme seulement de chaque coefficient.*

3.° *On fera varier de plus, mais dans le dernier terme seulement de chaque colonne, la puissance de* c; *et, comme la puissance de* $c_1$ *augmente alors d'une unité, on divisera par son exposant ainsi augmenté;*

4.° *Enfin, on fera varier* $\varphi b$, *dans le tout dernier terme seulement, en mettant* $(n+1)\dfrac{\mathrm{D}^{n+1}\varphi b}{1.2..(n+1)}$ *pour* $n\dfrac{\mathrm{D}^{n}\varphi b}{1.2\ldots.n}$, *et augmentant la pnissance de* $b_1$ *d'une unité.*

Cètte règle est analogue à celle du n.° 15 : dans l'exécution, on n'a pas besoin de faire d'avance la préparation de la première partie ; elle peut se faire à mesure qu'on opère sur chaque terme.

29. Au moyen de la régle précédente, on peut écrire de suite les termes successifs du développement de l'équation (38) tout ordonnés et réduits à leur plus simple expression. Si l'on suppose $b_1=1$, $b_2=0$, $b_3=0, \ldots.$, on aura le cas de l'équation (37); et il n'en résulte d'autre changement à la règle précédente qu'une simplification dans la seconde partie, parce qu'il n'y a plus que des quantités polynômiales d'une seule espèce ; ainsi, les formules (50) deviendront, pour ce cas ( en remplaçant les colonnes par des parenthèses ),

$$B=\varphi b\,,$$

$$1B_1=\mathrm{D}\varphi b.c^{-1}\,,$$

$$2B_2=\mathrm{D}\varphi b(-2c^{-3}.c_1)+2\,\frac{\mathrm{D}^2\varphi b}{2}.c^{-2}\,,$$

$$3B_3=\mathrm{D}\varphi b\left(-3c^{-4}.c_2+\frac{3.4}{2}c^{-5}.c_1^{2}\right)+2\frac{\mathrm{D}^2\varphi b}{2}(-3c^{-4}.c_1)+3\frac{\mathrm{D}^3\varphi b}{6}.c^{-3}\,,$$

$$4B_4=\mathrm{D}\varphi l\left(-4c^{5}.c_3+\frac{4.5}{2}c^{-6}.2c_1c_2-\frac{4.5.6}{6}c^{-7}.c_1^{3}\right)+2\,\frac{\mathrm{D}^2\varphi b}{2}\left(-4c^{-5}.c_2+\frac{4.5}{2}c^{-6}.c_1^{2}\right)$$
$$+3\,\frac{\mathrm{D}^3\varphi b}{6}(-4c^{-5}.c_1)+4.\frac{\mathrm{D}^4\varphi b}{24}.c^{-4}\,,$$

$$5B_5=\mathrm{D}\varphi l\left[-5c^{-6}.c_4+\frac{5.6}{2}c^{-7}(2c_1c_3+c_2^2)-\frac{5.6.7}{6}c^{-8}.3c_1^2c_2+\frac{5.6.7.8}{24}c^{-9}.c_1^4\right]$$
$$+2\frac{\mathrm{D}^2\varphi b}{2}\left(-5c^{-6}.c_3+\frac{5.6}{2}c^{-7}.2c_1c_2-\frac{5.6.7}{2.3}c^{-8}.c_1^3\right)+3\frac{\mathrm{D}^3\varphi b}{6}\left(-5c^{-6}.c_2+\frac{5.6}{2}c^{-7}.c_1^2\right)$$
$$+4\frac{\mathrm{D}^4\varphi b}{24}(-5c^{-6}.c_1)+5.\frac{\mathrm{D}^5\varphi b}{120}.c^{-5},$$

et ainsi de suite.

Pour le développement de l'équation (39); comme on a, d'après le n.° 5,

$$\psi\varphi(b+x)=\psi(\varphi b+\mathrm{D}\varphi b.x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi b.x^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi b.x^3+\ldots),$$

la règle reste la même; mais, au lieu de $\varphi b$, il faut écrire $\psi\varphi b$, $\mathrm{D}\varphi b$ au lieu de $b_1$, $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi b$ au lieu de $b_2$, $\frac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi b$ au lieu de $b_3$, et ainsi de suite.

Pour le cas de l'équation (40), comme $\psi\mathrm{f}\alpha=\psi c$, il faudrait, en conservant la même règle, mettre partout $\psi c$ à la place de $c$, $\mathrm{D}.\psi c$ à la place de $c_1$, $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2.\psi c$ à la place de $c_2$, $\frac{1}{6}\mathrm{D}^3.\psi c$ à la place de $c_3$,....; en observant que ces dérivées doivent être elles-mêmes développées selon la règle du n.° 8; que $\mathrm{D}.\psi c=\mathrm{D}\psi c.c_1=\mathrm{D}\psi\mathrm{f}\alpha.\mathrm{Df}\alpha,\ldots$, et que, dans ces derniers développemens, il faut substituer $\mathrm{f}\alpha$ pour $c$, $\mathrm{Df}\alpha$ pour $c_1$, $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\mathrm{f}\alpha$ pour $c_2$, $\frac{1}{6}\mathrm{D}^3\mathrm{f}\alpha$ pour $c_3$,....

Pour le cas de l'équation (43), il faudrait tenir compte, à la fois, des deux observations précédentes, et écrire $\mathrm{F}\varphi b$ pour $\varphi b$, $\mathrm{D}\varphi b$ pour $b_1$,...., et $\psi c$ pour $c$, $\mathrm{D}.\psi c$ pour $c_1$,....

Mais, pour l'équation (42), la règle du n.° précédent s'emploie sans la moindre restriction, parce que cette équation ne diffère de celle (37) que par le signe des exposans de $c$ ou $\mathrm{f}\alpha$, dont cette règle est indépendante.

Pour le développement de l'équation (45), il faudrait remplacer $c$, $c_1$, $c_2$,...., par $\psi\beta$, $\mathrm{D}.\psi\beta$, $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2.\psi\beta$,...., en observant que $\mathrm{D}\beta=c$, $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\beta=c_1$, $\frac{1}{6}\mathrm{D}^3\beta=c_2$,...

Enfin,

Enfin, pour le développement de l'équation (46), il faudrait tenir compte de l'observation précédente, et de plus mettre $F\varphi b$ pour $\varphi b$, $D\varphi b$ pour $b_1$, $\frac{1}{2}D^2\varphi b$ pour $b_2$, ....

Au moyen de ces observations, l'application de la règle du n.° précédent est générale.

30. *Remarque.* En effectuant les dérivations de $D\varphi b$, indiquées dans les équations (49), on obtient $D^2\varphi b$, $\frac{D^3\varphi b}{2}$, $\frac{D^4\varphi b}{6}$, .....: nous avons préféré, dans les équations (50) et (51), d'écrire, à la place de ces résultats, $2\frac{D^2\varphi b}{2}$, $3\frac{D^3\varphi b}{6}$, $4\frac{D^4\varphi b}{24}$, ..... parce que $D\varphi b$, $\frac{1}{2}D^2\varphi b$, $\frac{1}{6}D^3\varphi b$, $\frac{1}{24}D^4\varphi b$, ...., sont les coefficiens du développement de $\varphi(b+x)$, et que, par ce moyen, les coefficiens numériques sont mis en évidence: ainsi, pour le problème du n.° 22, on a $D\varphi b=A_1$, $D^2\varphi b=2A_2$ $\frac{D^3\varphi b}{2}=3A_3$, $\frac{D^4\varphi b}{6}=4A_4$, .....

Nous avons déjà remarqué au n.° 27 que, d'après les n.$^{os}$ 18 et 22, $a_1$ devait être considéré comme premier terme de polynôme, et par conséquent comme indépendant de $a$; c'est pourpuoi, dès le n.° 23, nous avons remplacé partout cette lettre par $b$, sous les signes de fonction, afin de ne pas induire en erreur, par une prétendue dépendance qui n'existait plus. Cette observation deviendra encore plus claire par la théorie de l'article suivant.

C'est pour la même raison, et pour conserver la régularité de la loi des développemens, que nous avons remplacé, au n.° 27, le polynôme $a_1+a_2x+a_3x^2+....$ par celui $c+c_1x+c_2x^2+....$ Si, au n.° 18, nous avons préféré la première de ces deux formes, ce n'était que pour mieux faire apercevoir l'identité des développemens de $\varphi(a+a_1x+a_2x^2+....)$ et de $\varphi\{a+x(a_1+a_2x+....)\}$, et pour rendre plus palpable la dépendance mutuelle des coefficiens des développemens de $\varphi(a+y)$ et de $\varphi(a+a_1x+a_2x^2+....)$; dépendance qui nous a tant simplifié l'exposition de la théorie du retour des suites. On aura remarqué sans doute que la loi de cette dépendance est la même que celle du changement de la variable principale, dans la différentiation d'une fonction de deux variables.

## ARTICLE III.

### *Démonstration des règles de développement, et règles pour écrire immédiatement un terme quelconque des développemens, tant direct que de retour.*

31. Les règles des n.$^{os}$ 8, 15 et 28 ne sont que des conclusions d'induction, tirées de l'examen de la formation successive des termes d'un développement; et, sous ce rapport, elles peuvent laisser quelque doute sur l'exactitude des résultats qu'elles fournissent. Il est donc nécessaire de démontrer ces règles, afin que le calcul des dérivations soit non seulement un instrument commode et expéditif, mais encore sûr et rigoureux.

Ces mêmes règles n'offrent que le moyen de former successivement les termes du développement, en déduisant chacun de celui qui le précède; de sorte que, pour avoir, par exemple, le vingtième terme du développement, il faut calculer auparavant les dix-neuf qui sont à sa gauche. Mais souvent on n'a besoin que d'un terme assez éloigné de l'origine du développement pour que le calcul préalable de tous ceux qui le précèdent exige une perte de temps aussi considérable qu'inutile à l'objet qu'on a en vue. Il est donc essentiel d'avoir le moyen de former immédiatement un terme quelconque, indépendamment de tous ceux qui seraient avant lui.

Tels sont les deux objets que nous nous proposons de remplir dans cet article.

32. Si, dans le polynôme $a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$, on suppose $a_2=0$, $a_3=0$, ...., l'équation (7) deviendra

$$(52)\qquad \varphi(a+a_1x)=\varphi a+\text{D}.\varphi a.x+\tfrac{1}{2}\text{D}^2.\varphi a.x^2+\tfrac{1}{6}\text{D}^3.\varphi a.x^3+\ldots;$$

mais, par la supposition que nous venons de faire, on a [équations (3)], $\text{D}a=a_1$, $\text{D}^2a=0$, $\text{D}^3a=0$, ....; ce qui donne, d'après les n.$^{os}$ 6 et 7, $\mathrm{D}.\varphi a = \mathrm{D}\varphi a.a_1$, $\mathrm{D}^2.\varphi a = \mathrm{D}^2\varphi a.a_1^2$, $\mathrm{D}^3.\varphi a = \mathrm{D}^3\varphi a.a_1^3$,... En substituant ces valeurs dans l'équation (25), on obtient

$$(53)\qquad \varphi(a+a_1x) = \varphi a + \mathrm{D}\varphi a.a_1x + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.a_1^2x^2 + \tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.a_1^3x^3 + \ldots;$$

résultat identique avec celui qu'on aurait obtenu en mettant $a_1x$ à la place de $x$ dans le théorème de Taylor.

Supposons maintenant que $a_1$ devienne $a_1+a_2x$ : les puissances de $a_1$ se changeront en puissances de $a_1+a_2x$ qui, étant elles-mêmes des fonctions de binôme, peuvent être développées comme les équations (52) et (53); mais, dans ce cas, ces formules se termineront, parce que $\mathrm{D}a_1 = a_2$, $\mathrm{D}^2a_1 = 0$, ... donnent, en général, $\dfrac{\mathrm{D}^n.a_1^n}{1.2\ldots n} = (\mathrm{D}a_1)^n = a_2^n$, et $\mathrm{D}^{n+1}.a_1^n = 0$. Substituant donc, avec cette attention, $a_1+a_2x$ pour $a_1$, dans l'équation (53), on obtient

$$\varphi\{a+x(a_1+a_2x)\} = \varphi a + \mathrm{D}\varphi a(a_1+\mathrm{D}a_1.x)x + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a(a_1^2+\mathrm{D}.a_1^2.x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.a_1^2.x^2)x^2$$
$$+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a(a_1^3+\mathrm{D}.a_1^3\,x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.a_1^3.x^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.a_1^3.x^3)x^3+\ldots$$

En effectuant les dérivations indiquées, d'après les règles ordinaires de la différentiation, et remplaçant $\mathrm{D}a_1$ par $a_2$, cette équation devient

$$\varphi\{a+x(a_1+a_2x)\} = \varphi a + \mathrm{D}\varphi a(a_1+a_2x)x + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a(a_1^2+2a_1a_2x+a_2^2x^2)x^2$$
$$+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a(a_1^3+3a_1^2a_2x+3a_1a_2^2x^2+a_2^3x^3)x^3+\ldots$$

En ordonnant cette équation par rapport aux puissances de $x$, on obtient

$$(54)\qquad \varphi(a+a_1x+a_2x^2) = \varphi a + \mathrm{D}\varphi a.a_1x + (\mathrm{D}\varphi a.a_2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.a_1^2)x^2$$
$$+(\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.2a_1a_2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.a_1^3)x^3+(\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.a_2^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.3a_1^2a_2+\tfrac{1}{24}\mathrm{D}^4\varphi a.a_1^4)x^4+\ldots$$

Si l'on suppose ensuite que $a_2$ devienne $a_2+a_3x$, l'équation précédente deviendra, d'après les mêmes principes,

$$\varphi\{a+a_1x+x^2(a_2+a_3x)\} = \varphi a + \mathrm{D}\varphi a.a_1x + \{\mathrm{D}\varphi a(a_2+\mathrm{D}a_2.x)+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.a_1^2\}x^2$$
$$+\{\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.2a_1(a_2+\mathrm{D}a_2.x)+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.a_1^3\}x^3+\{\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a(a_2^2+\mathrm{D}.a_2^2.x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.a_2^2x^2)$$
$$+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.3a_1^2(a_2+\mathrm{D}a_2.x)+\tfrac{1}{24}\mathrm{D}^4\varphi a.a_1^4\}x^4+\ldots$$

ou, en effectuant les dérivations indiquées, mettant $a_3$ pour $\mathrm{D}a_2$, et ordonnant par rapport à $x$,

$$(55)\quad \varphi(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=\varphi a+\mathrm{D}\varphi a.a_1x+(\mathrm{D}\varphi a.a_2+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.a_1^2x^2)x^2$$
$$+(\mathrm{D}\varphi a.a_3+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a\,2a_1a_2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.a_1^3)x^3+(\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a(2a_1a_3+a_2^2)+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.3a_1^2a_2$$
$$+\tfrac{1}{24}\mathrm{D}^4\varphi a.a_1^4)x^4+\ldots.$$

En comparant les coefficiens des seconds membres des équations (53), (54), (55) avec les formules (10), on voit que les deux premiers termes de l'équation (53), les trois premiers de (54) et les quatre premiers de (55) sont déjà complets. En continuant ces substitutions, on obtiendrait chaque fois un terme complet de plus, et l'on arriverait enfin au développement entier de la fonction de polynôme $\varphi(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)$. Mais, sans aller plus loin, nous pouvons déjà observer, 1.° qu'on ne fait jamais varier, dans chaque terme, qu'une seule lettre à la fois, ou sa puissance, et que cette lettre est la dernière dans l'ordre des indices; car, d'après la marche que nous venons de suivre, dans ces développemens successifs, il est évident que les dernières lettres, dans l'ordre des indices, ne proviennent que des variations qu'ont subies les lettres précédentes; or, si l'on faisait encore varier celles-ci, il en résulterait que les mêmes lettres auraient subi plusieurs variations; ce qui est contraire a la marche de ces substitutions successives, où l'on ne fait plus attention aux lettres qui ont déjà subi une variation; et il s'ensuit que, dans chaque terme, on ne doit faire varier que la dernière lettre ou sa puissance; 2.° que, dans ces variations successives, chaque lettre est considérée comme un premier terme de polynôme: c'est-à-dire, qu'on écrit $a_2$ pour $\mathrm{D}a_1$, $a_3$ pour $\mathrm{D}a_2$, $a_4$ pour $\mathrm{D}a_3$, ...., sans autre coefficient que l'unité.

Voilà donc les deux conditions principales de la première partie de la règle du n.° 8 justifiées. Mais examinons de plus près la formation de chaque terme du développement, en supposant que toutes les substitutions précédentes, au lieu d'être successives, soient faites à la fois.

33. Le terme $A_{n+1}$, ou le coefficient de $x^{n+1}$, dans le déve-

loppement de $\varphi(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)$ ne peut être composé que des trois parties suivantes : 1.° du terme correspondant du développement de $\varphi(a+a_1x)$, équation (53), c'est-à-dire, de $\frac{\mathrm{D}^{n+1}\varphi a}{1.2\ldots(n+1)}a_1^{n+1}$, 2.° des termes provenant de la substitution de $a_1+a_2x$ pour $a_1$, de $a_2+a_3x$ pour $a_2$, de $a_3+a_4x$ pour $a_3$, et ainsi de suite, dans les dernières lettres (ou leurs puissances) de chaque terme de $A_n$; 3.° enfin, de ceux provenant des mêmes substitutions, dans les puissances des dernières lettres des termes de $A_{n-1}$, $A_{n-2}$,...., en remontant. Examinons chacune de ces trois parties :

1.° La première partie a toujours évidemment lieu ; car il faut qu'elle subsiste quand $a_2$, $a_3$, $a_4$,... deviennent nuls ; nous verrons tout à l'heure comment la règle du n.° 8 la fournit.

2.° En faisant la substitution indiquée, dans un terme de $A_n$ de la forme $\zeta a_2^\alpha a_4$, par exemple ; on obtient $\zeta a_2^\alpha(a_4+a_5x)$, et il en résulte pour $A_{n+1}$ le terme $\zeta a_2^\alpha a_5$ ; ce qui revient à faire varier $a_4$ de $\mathrm{D}a_4$, et à écrire $a_5$, à la place de cette dérivée. Si le terme avait été de la forme $\zeta a_2^\alpha a_4^\beta$, on aurait obtenu $\zeta a_2^\alpha(a_4^\beta+\mathrm{D}.a_4^\beta.x+\frac{1}{2}\mathrm{D}^2.a_4^\beta.x^2+\ldots)$, et il en serait résulté, pour $A^{n+1}$, le terme $\zeta a_2^\alpha.\mathrm{D}.a_4^\beta=\beta\zeta a_2^\alpha a_4^{\beta-1}a_5$ ; cela revient donc encore à différencier $a_4^\beta$, d'après les règles ordinaires, et à écrire $a_5$ à la place de $\mathrm{D}a_4$. C'est ce qui constitue, avec l'observation de la fin du n.° précédent, la première partie de la règle du n.° 8.

3.° Il paraîtrait d'abord que, pour trouver les termes de cette troisième partie, on est obligé de recourir aux termes ou coefficiens antérieurs à celui de $A_n$; mais on peut s'en dispenser, au moyen de l'observation suivante. Si $A_{n+1}$ doit contenir un terme provenant d'une puissance de quantité polynômiale, qui a reçu un accroissement, $A_n$ contient aussi un terme dû à cette puissance, qui en est la dérivée immédiatement inférieure ; par exemple, si $A_{n+1}$ doit contenir $\frac{1}{24}\mathrm{D}^4.a_3^6=\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}a_3^2a_4^4$, $A_n$ contiendra $\frac{1}{6}\mathrm{D}^3.a_3^6=$

$\frac{6.5.4}{1.2.3}a_3{}^3a_4{}^3$ : de plus, ces termes, dus aux puissances des quantités polynômiales, sont toujours aisés à reconnaître, en ce que les deux dernières lettres se suivent, dans l'ordre des indices, et réciproquement; car, on a évidemment ( $\zeta$ étant un coefficient numérique convenable ) $\zeta a_3{}^3a_4{}^2=\zeta a_3{}^3(\mathrm{D}a_3)^2=\frac{1}{2}\mathrm{D}^2.a_3{}^5$. Il ne reste donc que de savoir déduire d'un semblable terme dans $A_n$ son correspondant dans $A_{n+1}$. Soit donc $\zeta a_2{}^ra_3{}^s$ ce terme dans $A_n$; on a $\zeta a_2{}^ra_3{}^s=\zeta a_2{}^r(\mathrm{D}a_2)^s$ $=\frac{\mathrm{D}^s.a_2{}^{r+s}}{1.2....s}$; or, le terme correspondant dans $A_{n+1}$ sera $\frac{\mathrm{D}^{s+1}.a_2{}^{r+s}}{1.2....(s+1)}$ $=\frac{1}{s+1}\mathrm{D}.\frac{\mathrm{D}^s.a_2{}^{r+s}}{1.2....s}=\frac{\zeta}{s+1}\mathrm{D}.a_2{}^r(\mathrm{D}a_2)^s=\frac{\zeta r}{s+1}.a_2{}^{r-1}a_3{}^{s+1}$ ; ce qui revient à différencier l'avant-dernière lettre, ou sa puissance, à écrire $a_3$ pour $\mathrm{D}a_2$, et à diviser le résultat par l'exposant de la puissance de la dernière lettre, qui se trouve augmenté d'une unité. On ne fait donc autre chose qu'exécuter la seconde partie de la règle du n.° 8. Cette même partie de la règle, appliquée à la fonction $\varphi a$ dans le terme $\frac{\mathrm{D}^n\varphi a}{1.2....n}.a_1{}^n$ de $A_n$ fournit le terme $\frac{\mathrm{D}^{n+1}\varphi a}{1.2..(n+1)}.$ $a_1{}^{n+1}$, dont nous avons parlé au commencement de ce n.°

La règle du n.° 8 est donc parfaitement exacte, et fournit le moyen le plus simple pour déduire le développement d'un terme $A^{n+1}$ de celui du terme $A_n$ qui le précède immédiatement.

34. Proposons-nous maintenant de développer immédiatement, et indépendamment des termes qui précèdent, un terme quelconque $A_n=\frac{\mathrm{D}^n.\varphi a}{1.2....n}$ de l'équation (6) ou (7).

En faisant

$$(56)\qquad \zeta=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3+....,$$

cette équation devient, d'après le n.° 32, équation (53)

$$(57)\qquad \varphi(a+\zeta x)=\varphi a+\mathrm{D}\varphi a.\zeta x+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\zeta^2x^2+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.\zeta^3x^3+....$$

Mais, $\zeta$ étant lui-même un polynôme, ses puissances sont des fonctions de polynômes qui, d'après le n.° 5, deviennent.

$$(58)\left\{\begin{array}{l} z^2=a_1{}^2+\mathrm{D}.a_1{}^2.x+\frac{1}{2}\mathrm{D}^2.a_1{}^2.x^2+\frac{1}{6}\mathrm{D}^3.a_1{}^2x^3+\ldots\ldots \\ z^3=a_1{}^3+\mathrm{D}.a_1{}^3.x+\frac{1}{2}\mathrm{D}^2.a_1{}^3.x^2+\frac{1}{6}\mathrm{D}^3.a_1{}^3x^3+\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z^n=a_1{}^n+\mathrm{D}.a_1{}^n.x+\frac{1}{2}\mathrm{D}^2.a_1{}^n.x^2+\frac{1}{6}\mathrm{D}^3.a_1{}^n.x^3+\ldots\ldots \end{array}\right.$$

où $a_1$ doit être considéré comme un premier terme de polynôme ; c'est-à-dire, qu'on a $\mathrm{D}a_1=a_2$, $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2a_1=a_3$, $\frac{1}{6}\mathrm{D}_1{}^3a_1=a_4 \ldots \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\mathrm{D}^{n-1}a_1=a_n$.

Substituant ces valeurs dans l'équation (57), on obtient

$$(59)\qquad \varphi(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)=$$
$$A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots\ldots\ldots+A_nx^n+\ldots$$
$$=\varphi a+\mathrm{D}\varphi a.a_1x+\left.\begin{array}{l}\mathrm{D}\varphi a.\mathrm{D}a_1 \\ +\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.a_1{}^2\end{array}\right\}x^2+\left.\begin{array}{l}+\mathrm{D}\varphi a.\frac{1}{2}\mathrm{D}^2a_1 \\ +\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\mathrm{D}.a_1{}^2 \\ +\frac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.a_1{}^3\end{array}\right\}x^3+\ldots\left.\begin{array}{l}+\mathrm{D}\varphi a.\frac{\mathrm{D}^{n-1}a_1}{1.2\ldots(n-1)} \\ +\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a.\frac{\mathrm{D}^{n-2}.a_1{}^2}{1.2\ldots(n-2)} \\ +\frac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.\frac{\mathrm{D}^{n-3}.a_1{}^3}{1.2\ldots(n-3)} \\ +\ldots\ldots\ldots \\ +\frac{\mathrm{D}^{n-1}\varphi a}{1.2\ldots(n-1)}.\mathrm{D}.a_1{}^{n-1} \\ +\frac{\mathrm{D}^n\varphi a}{1.2\ldots n}.a_1{}^n\end{array}\right\}x^n+\ldots$$

d'où l'on tire

$$(60)\qquad A_n=\frac{\mathrm{D}^n.\varphi a}{1.2\ldots n}=\mathrm{D}\varphi a.\frac{\mathrm{D}^{n-1}a_1}{1.2\ldots(n-1)}+\frac{1}{2}\mathrm{D}^2\varphi a\frac{\mathrm{D}^{n-2}.a_1{}^2}{1.2\ldots(n-2)}$$
$$+\frac{1}{6}\mathrm{D}^3\varphi a.\frac{\mathrm{D}^{n-3}.a_1{}^3}{1.2\ldots(n-3)}+\ldots+\frac{\mathrm{D}^{n-1}\varphi a}{1.2\ldots(n-1)}\mathrm{D}.a_1{}^{n-1}+\frac{\mathrm{D}^n\varphi a}{1.2\ldots n}a_1{}^n\ ;$$

ou, en écrivant cette formule à rebours,

$$(61)\qquad A_n = \frac{D^n.\varphi a}{1.2\,....\,n} = \frac{D^n\varphi a}{1.2....n}.a_1^n + \frac{D^{n-1}\varphi a}{1.2..(n-1)}.D.a_1^{n-1}$$

$$+ \frac{D^{n-2}\varphi a}{1.2...(n-2)}.\tfrac{1}{2}D^2.a_1^{n-2} + ... + \tfrac{1}{2}D^2\varphi a.\frac{D^{n-2}.a_1^2}{1.2...(n-2)} + D\varphi a.\frac{D^{n-1}a_1}{1.2...(n-1)}.$$

Les quantités qui restent à développer, dans cette dernière formule, se succèdent dans l'ordre suivant

$$(62)\qquad a_1^n,\ D.a_1^{n-1},\ \tfrac{1}{2}D^2.a_1^{n-2},\ \tfrac{1}{6}D^3.a_1^{n-3},\ .....\ \frac{D^{n-2}.a_1^2}{1.2..(n-2)},\ \frac{D^{n-1}.a_1}{1.2...(n-1)}.$$

Si tous les exposans de $a_1$, sous les signes de dérivation, étaient les mêmes et égaux à $n$, on appliquerait immédiatement, au développement de ces quantités, la règle du n.° 8 ; mais, comme ils vont toujours en diminuant, il est nécessaire, avant tout, de faire subir à chaque terme une préparation qui consiste à diminuer l'exposant de $a_1$ d'une unité, d'un terme au suivant, et à modifier en conséquence les coefficiens numériques provenant de ces exposans.

Pour trouver la règle de cette préparation, observons que les dérivées (62) se développent elles-mêmes selon la formule (61), et qu'on a, en général,

$$(63)\qquad \frac{D^r.a_1^{n-r}}{1.2...(n-r)} = \frac{D^r a_1^{n-r}}{1.2....r}.a_2^r + \frac{D^{r-1}a_1^{n-r}}{1.2....(r-1)}.D.a_2^{r-1} + \frac{D^{r-2}a_1^{n-r}}{1.2...(r-2)}.\tfrac{1}{2}D^2.a_2^{r-2} + ...$$

$$+ \frac{D^{r-s}a_1^{n-r}}{1.2...(r-s)}.\frac{D^s.a_2^{r-s}}{1.2....s} + .... + Da_1^{n-r}.\frac{D^{r-1}a_2}{1.2..(r-1)}.$$

Or, pour déduire de ce développement celui de $\frac{D^{r+1}.a_1^{n-r-1}}{1.2...(r+1)}$, il suffit d'en déduire d'abord celui de $\frac{D^r.a_1^{n-r-1}}{1.2....r}$, et d'appliquer à ce dernier la règle du n.° 8. A cet effet, on changera, dans tous les termes de la formule (63), $n$ en $n-1$ ; mais voyons ce qui en résultera pour

pour un terme quelconque. On a, d'après les règles ordinaires de la différentiation,

$$\frac{\mathrm{D}^{r-s}a_1^{n-r}}{1.2\ldots(r-s)}=\frac{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\ldots(n-2r+s+2)(n-2r+s+1)}{1.2.3\ldots.(r-s)}.a_1^{n-2r+s},$$

$$\frac{\mathrm{D}^{r-s}a_1^{n-r-1}}{1.2\ldots(r-s)}=\frac{(n-r-1)(n-r-2)\ldots.(n-2r+s+1)(n-2r+s)}{1.2.3\ldots(r-s)}.a_1^{n-2r+s-1}.$$

Ainsi, pour déduire le développement de $\frac{\mathrm{D}^r.a_1^{n-r-1}}{1.2\ldots r}$ de celui de $\frac{\mathrm{D}^r.a_1^{n-r}}{1.2\ldots r}$, il suffit de diviser chaque terme de ce développement par $n-r$, de le multiplier par l'exposant de $a_1$ dans ce terme, et de diminuer cet exposant d'une unité ; ce qui fournit la règle pratique suivante.

## Règle.

35. *Pour déduire le développement de* $\frac{\mathrm{D}^{r+1}.a_1^{n-r-1}}{1.2\ldots.(r+1)}$ *de celui de* $\frac{\mathrm{D}^r.a_1^{n-r}}{1.2\ldots r}$, *divisez chaque terme de ce dernier développement par* $n-r$, *multipliez-le par l'exposant de* $a_1$ *dans ce terme (en observant que, dans les termes sans* $a_1$, *cet exposant est zéro), et diminuez son exposant d'une unité. Après cette préparation, suivez la règle du n.° 8.*

Pour donner un exemple de cette règle, nous allons l'appliquer au développement de $A_6$, dans l'équation (6) ou (59). Les quantités à développer, dans ce cas, sont

$$a_1^6,\ \mathrm{D}.a_1^5,\ \tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.a_1^4,\ \tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.a_1^3,\ \tfrac{1}{24}\mathrm{D}^4.a_1^2,\ \tfrac{1}{120}\mathrm{D}^5.a_1.$$

La première de ces quantités reste $a_1^6$ ; la dérivée $\mathrm{D}.a_1^5$ donne $5a_1^4a_2$ ; pour en déduire celle $\frac{1}{2}\mathrm{D}^2.a_1^4$, il faut la diviser par 5, multiplier par $4$, exposant de $a_1$, et diminuer cet exposant d'une unité ; ce qui donne $4a_1{}^3a_2$ : appliquant ensuite la règle du n.° 8 à ce terme ainsi préparé, on trouve $4a_1{}^3a_3+\frac{4.3}{2}a_1{}^2a_2{}^2$. Pour déduire de cette dérivée celle $\frac{1}{6}D^3.a_1{}^3$, il faut diviser le tout par $4$, multiplier respectivement les deux termes par 3 et 2, exposans de $a_1$ et diminuer ces exposans d'une unité ; ce qui donne $3a_1{}^2a_3+3a_1a_2{}^2$ : appliquant la règle du n.° 8, on obtient $3a_1{}^2a_4+2.3a_1a_2a_3+a_2{}^3$. Pour déduire de cette dernière celle $\frac{1}{24}D^4.a_1{}^2$, il faut diviser le tout par 3, multiplier les trois termes respectivement par 2, 1, 0, exposans de $a_1$, et diminuer ces exposans d'une unité; ce qui donne $2a^1a_4+2a_2a_3$ : appliquant la règle du n.° 8, on obtient $2a_1a_5+2a_2a_4+a_3{}^2$. Enfin, pour déduire de cette dérivée celle $\frac{1}{120}D^5.a_1$, il faut diviser tous les termes par 2, les multiplier respectivement par 1, 0, 0, exposans de $a_1$, et diminuer ces exposans d'une unité ; ce qui donne $a_5$, dont la dérivée est $a_6$, d'après la règle du n.° 8. En rassemblant tous ces termes, et les multipliant par leurs coefficiens respectifs (61), on aura le développement de $A_6$, écrit en sens inverse.

L'énoncé de ces opérations peut paraître un peu long ; mais leur exécution est très-expéditive. Après s'être exercé à calculer quatre ou cinq termes, on en a tellement l'habitude qu'il n'en coûte plus, pour ainsi dire, que la peine de les écrire.

36. *Remarque.* La règle précédente donne non seulement le moyen d'écrire immédiatement le coefficient d'une puissance quelconque de $x$, dans le développement de $\varphi(a+a_1x+a_2x^2+\ldots)$, mais encore une partie quelconque de ce coefficient, sans calculer le reste. Ainsi, si l'on demande le coefficient de $\frac{D^r\varphi a}{1.2\ldots\ldots r}$, dans le développement de $A_n=\frac{D^n.\varphi a}{1.2\ldots\ldots n}$, l'équation (61) indiquera que ce coefficient est $\frac{D^{n-r}.a_1{}^r}{1.2\ldots\ldots(n-r)}$, dont le développement peut s'exécuter immédiatement, d'après la règle précédente et l'équation (61). Cette observation peut avoir les applications les plus utiles, dans la théorie des hasards, et dans celle de la partition des nombres. Nous avons vu au n.° 10 que le

coefficient de $\frac{\mathrm{D}^r.\phi a}{1.2..n}$ dans $\frac{\mathrm{D}^n.\phi a}{1.2....n}$ était composé de tous les produits de $r$ lettres qu'on peut former avec les quantités polynômiales $a_1$, $a_2$, $a_3$, ...., de manière que la somme des indices de chaque produit soit égale à $n$, et que les coefficiens numériques de chaque produit indiquaient le nombre des permutations dont les lettres de ces produits sont susceptibles : nous aurons donc immédiatement tous ces produits, avec leurs coefficiens numériques, en développant la dérivée $\frac{\mathrm{D}^{n-r}.a_1{}^r}{1.2...(n-r)}$. De plus, le nombre des termes dont ce développement sera composé indiquera de combien de manières on peut composer le nombre $n$, avec $r$ nombres, égaux ou inégaux. Ainsi, en supposant $n=12$, $r=8$, on aura, pour le coefficient de $\frac{\mathrm{D}^4\phi a}{1.2....8}$, dans $\frac{\mathrm{D}^{12}\phi a}{1.2.....12}$,

$$\tfrac{1}{24}\mathrm{D}^4.a_1{}^8=\tfrac{1}{24}\mathrm{D}^4a_1{}^8.a_2{}^6+\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3a_1{}^8.\mathrm{D}.a_2{}^3+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2a_1{}^8.\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.a_2{}^2+\mathrm{D}a_1{}^8.\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3.a_2$$

$$=\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}a_1{}^4a_2{}^4+\frac{8.7.6}{1.2.3}a_1{}^5.3a_2{}^2a_3+\frac{8.7}{1.2}a_1{}^6(2a_2a_4+a_3{}^2)+\tfrac{8}{1}a_1{}^7a_5.$$

Ce coefficient étant composé de cinq termes, fait voir que le nombre 12 peut être formé de cinq manières différentes, par l'addition de huit nombres, savoir : $1+1+1+1+2+2+2+2$, $1+1+1+1+1+2+2+3$, $1+1+1+1+1+1+2+4$, $1+1+1+1+1+1+3+3$, $1+1+1+1+1+1+1+5$, lesquels sont donnés immédiatement par les indices et exposans des lettres des produits.

37. La règle du n.° 15 n'est qu'un corollaire de celle du n.° 8 et de celle du n.° 12, qui est une suite évidente des équations (12) : en effet, si dans l'équation (15) on suppose $a_2=0$, $a_3=0$,..., $b_2=0$, $b_3=0$,...., elle deviendra

$$(64)\qquad \phi(a+a_1x)\times\psi(b+b_1x)=A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+.... ;$$

or, le premier membre de cette équation devient, d'après l'équation (53),

$$(65)\qquad (\varphi a + D\varphi a.a_1x + \tfrac{1}{2}D^2\varphi a.a_1{}^2x^2 + \ldots)(\psi b + D\psi b.b_1x + \tfrac{1}{2}D^2\psi b.b_1{}^2x^2 + \ldots);$$

Ce produit étant développé, d'après l'équation (13), donne

$$(66)\qquad \varphi(a+a_1x)\times\psi(b+b_1x)=$$

$$\begin{array}{llll}
A & +A_1x & +A_2x^2 & +A_3x^3 \\
=\varphi a\psi b & \left.\begin{array}{l}+\varphi a.D\psi b.b_1 \\ +D\varphi a.\psi b.a_1\end{array}\right\}x & \left.\begin{array}{l}+\varphi a.\frac{1}{2}D^2\psi b.b_1{}^2 \\ +D\varphi a.D\psi b.a_1b_1 \\ +\frac{1}{2}D^2\varphi a.\psi b.a_1{}^2\end{array}\right\}x^2 & \left.\begin{array}{l}+\varphi a.\frac{1}{6}D^3\psi b.b_1{}^3 \\ +D\varphi a.\frac{1}{2}D^2\psi b.a_1b_1{}^2 \\ +\frac{1}{2}D^2\varphi a.D\psi b.a_1{}^2b_1 \\ +\frac{1}{6}D^3\varphi a.\psi b.a_1{}^3\end{array}\right\}x^3
\end{array}$$

$$+\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+A_nx^n+\ldots$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\ldots+\varphi a.\dfrac{D^n\psi b}{1.2\ldots n}.b_1{}^n \\
+\ldots+D\varphi a.\dfrac{D^{n-1}\psi b}{1.2\ldots(n-1)}.a_1b_1{}^{n-1} \\
+\ldots+\frac{1}{2}D^2\varphi a.\dfrac{D^{n-2}\psi b}{1.2\ldots(n-2)}.a_1{}^2b^{n-2} \\
+\ldots+\frac{1}{6}D^3\varphi a.\dfrac{D^{n-3}\psi b}{1.2\ldots(n-3)}.a_1{}^3b^{n-3} \\
+\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\dfrac{D^{n-1}\varphi a}{1.2\ldots(n-1)}.D\psi b.a_1{}^{n-1}b_1 \\
+\dfrac{D^n\varphi a}{1.2\ldots n}.\psi b.a_1{}^n
\end{array}\right\}x^n
\begin{array}{l} +\ldots \\ +\ldots \\ +\ldots \\ \\ +\ldots \\ +\ldots \\ +\ldots \end{array}$$

Ici les colonnes qui forment les coefficiens de $x$ ne sont autre chose que les dernières colonnes des équations (18). Or, le produit (65) s'effectuant comme le produit (13), avec la seule différence qu'à la place de $a$ et de $b$, il faut écrire $\varphi a$ et $\psi b$, et $\mathrm{D}.\varphi a = \mathrm{D}\varphi a_1$, $\mathrm{D}.\psi b = \mathrm{D}\psi b.b_1$, ..... à la place de $\mathrm{D}a$, $\mathrm{D}b$, .... ; il s'ensuit que, pour déduire la dernière colonne de $A_{n+1}$ de celle de $A_n$ [ équations (18) ], il faut faire varier $\psi b$ dans tous les termes de cette colonne, et de plus faire varier $\varphi a$ dans le dernier terme $\frac{\mathrm{D}^n\varphi a}{1.2....n}.\psi b.a_1{}^n$ de cette même colonne. Les deux premières parties du n.° 15 se trouvent donc démontrées.

Les $n$ autres colonnes qui composent $A_{n+1}$ ne peuvent donc provenir que de la variation des quantités polynômiales $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..... $b_1$, $b_2$, $b_3$, ....; c'est-à-dire, de la substitution de $a_1 + a_2 x$ pour $a_1$, de $a_2 + a_3 x$ pour $a_2$, ...., de $b_1 + b_2 x$ pour $b_1$, de $b_2 + b_3 x$ pour $b_2$, ...., dans les termes précédens. Il faut donc appliquer ici la règle du n.° 8, modifiée par la coexistance de deux polynômes indépendans, c'est-à-dire, par la règle du n.° 12; ce qui constitue la première partie de la règle du n.° 15. Cette règle se trouve donc entièrement justifiée.

38. Passons maintenant au développement immédiat, et indépendant des termes qui precèdent, d'un terme quelconque de l'équation (15), ou du terme général $A_n = \frac{\mathrm{D}^n.(\varphi a.\psi b)}{1.2...n}$.

En effectuant complètement le développement indiqué par la dernière des équations (17), d'après les n.$^{os}$ 34 et 35, et l'ordonnant selon la somme des exposans de dérivation, relatifs à $\varphi a$ et $\psi b$, on peut le mettre sous la forme suivante :

$$(67)\quad \frac{\mathrm{D}^n.(\varphi a.\psi b)}{1.2...n} = \frac{\mathrm{D}^n\varphi a}{1.2....n}.\psi b.a_1{}^n + \frac{\mathrm{D}^{n-1}\varphi a}{1.2...(n-1)}.\psi b.\mathrm{D}.a_1{}^{n-1} + .....$$

$$+ \frac{\mathrm{D}^{n-1}\varphi a}{1.2...(n-1)}.\mathrm{D}\psi b.a_1{}^{n-1}b_1 + \frac{\mathrm{D}^{n-2}\varphi a}{1.2...(n-2)}.\mathrm{D}\psi b.\mathrm{D}.(a_1{}^{n-2}b_1) + .....$$

$$+\frac{D^{n-1}\varphi a}{1.2\ldots.(n-2)}.\tfrac{1}{2}D^2\psi b.a_1{}^{n-2}b_1{}^2+\frac{D^{n-3}\varphi a}{1.2\ldots(n-3)}.\tfrac{1}{2}D^2\psi b.D.(a_1{}^{n-3}b_1{}^2)+\ldots.$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots.$$

$$+\tfrac{1}{2}D^2\varphi a.\frac{D^{n-2}\psi b}{1.2\ldots(n-2)}.a_1{}^2b_1{}^{n-2}+D\varphi a.\frac{D^{n-2}\psi b}{1.2\ldots(n-2)}.D.(a_1b_1{}^{n-2})$$

$$+D\varphi a.\frac{D^{n-1}\psi b}{1.2..(n-1)}.a_1b_1{}^{n-1}+\varphi a.\frac{D^{n-1}\psi b}{1.2\ldots.(n-1)}.D.b_1{}^{n-1}$$

$$+\varphi a.\frac{D^n\psi b}{1.2\ldots n}b_1{}^n$$

$$\ldots.+\tfrac{1}{2}D^2\varphi a.\psi b.\frac{D^{n-2}a_1{}^2}{1.2..(n-2)}+D\varphi a.\psi b.\frac{D^{n-1}a_1}{1.2..(n-1)}$$

$$\ldots.+D\varphi a.D\psi b.\frac{D^{n-2}.(a_1b_1)}{1.2\ldots(n-2)}+\varphi a.D\psi b\frac{D^{n-1}b_1}{1.2\ldots(n-1)}$$

$$\ldots.+\varphi a.\tfrac{1}{2}D^2\psi b.\frac{D^{n-2}.b_1{}^2}{1.2\ldots(n-2)}$$

Il n'y a plus, dans cette formule, dont la loi est très-élégante, que des fonctions de quantités polynômiales à développer ; et elles se succèdent par colonnes dans l'ordre suivant :

$$(68)\left\{\begin{array}{l}
a_1{}^n\quad,\ D.a_1{}^{n-1}\quad,\ \tfrac{1}{2}D^2.a_1{}^{n-2}\quad,\ldots\dfrac{D^{n-2}.a_1{}^2}{1.2..(n-2)},\ \dfrac{D^{n-1}.a_1}{1.2\ldots(n-1)},\\
a_1{}^{n-1}b_1,D.(a_1{}^{n-2}b_1),\tfrac{1}{2}D^2.(a_1{}^{n-3}b_1),\ldots\dfrac{D^{n-2}(a_1b_1)}{1.2\ldots(n-2)},\ \dfrac{D^{n-1}.b_1}{1.2..(n-1)},\\
a_1{}^{n-2}b_1{}^2,D.(a_1{}^{n-3}b_1{}^2),\tfrac{1}{2}D^2.(a_1{}^{n-4}b_1{}^2),\ldots\dfrac{D^{n-2}.b_1}{1.2..(n-2)}\\
a_1{}^{n-2}b_1{}^3,D.(a_1{}^{n-4}b_1{}^3),\tfrac{1}{2}D^2.(a_1{}^{n-5}b_1{}^3),\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_1{}^2b_1{}^{n-2},D.(a_1b_1{}^{n-2}),\tfrac{1}{2}D^2.b_1{}^{n-2},\\
a_1b_1{}^{n-1},\ D.b_1{}^{n-1}\\
\quad b_1{}^n,
\end{array}\right.$$

Si tous les exposans de $a_1$, sous le signe de dérivation, étaient les mêmes que dans les termes correspondans de la première colonne, on pourrait appliquer immédiatement au développement de ces quantités la règle du n.° 15; mais, comme ces exposans vont en diminuant d'une unité, d'une colonne à l'autre, comme au n.° 34, il est nécessaire de faire subir à chaque terme la même préparation que dans ce n.°; c'est-à-dire, qu'il faut soumettre chaque terme à la règle du n.° 35, et ensuite y appliquer celle du n.° 15. Par ce moyen, on peut développer immédiatement un terme quelconque $\frac{D^n.(\varphi a.\psi b)}{1.2...n}$ de l'équation (15), indépendamment de ceux qui le précèdent.

39. *Remarque.* On peut faire ici une observation analogue à celle du n.° 36. Par le procédé du n.° précédent, on peut aussi calculer immédiatement un terme quelconque de $\frac{D^n.(\varphi a.\psi b)}{1.2...n}$, indépendamment des autres : ainsi le coefficient de $\frac{D^r\varphi a}{1.2...r}.\frac{D^s\psi b}{1.2...s}$ sera $\frac{D^{n-r-s}.(a_1{}^r b_1{}^s)}{1.2...(n-r-s)}$, dont le développement s'exécutera par le n.° précédent, en remplaçant $n$ par $n-r-s$, $\varphi a$ par $a_1{}^r$ et $\psi b$ par $b_1{}^s$, et considérant $a_1$ et $b_1$ comme des premiers termes de polynômes. Supposant donc $n=12$, $r=7$, $s=2$, on aura, pour le coefficient de $\frac{D^7\varphi a}{1.2...7}.\frac{D^2\psi b}{1.2}$, dans $\frac{D^{12}.(\varphi a.\psi b)}{1.2...12}$,

$$\frac{D^3.(a_1{}^7 b_1{}^2)}{1.2.3} = \tfrac{1}{6}D^3 a_1{}^7.b_1{}^2.a_2{}^3 + \tfrac{1}{2}D^2 a_1{}^7.b_1{}^2.D.a_2{}^2 + Da_1{}^7.b_1{}^2.\tfrac{1}{2}D^2 a_2$$

$$+ \tfrac{1}{2}D^2 a_1{}^7.Db_1{}^2.a_2{}^2 b_2 + Da_1{}^7.Db_1{}^2.D.(a_2 b_2) + a_1{}^7.Db_1{}^2.\tfrac{1}{2}D^2 b_2$$

$$+ D\,a_1{}^7.\tfrac{1}{2}D^2 b_1{}^2.a_2 b_2{}^2 + a_1{}^7.\tfrac{1}{2}D^2 b_1{}^2 D.b_2{}^2$$

$$= \frac{7.6.5}{1.2.3} a_1{}^4.b_1{}^2.a_2{}^3 + \frac{7.6}{1.2} a_1{}^5.b_1{}^2.2a_2 a_3 + 7a_1{}^6.b_1{}^2.a_4$$

$$+\frac{7.6}{1.2}a_1{}^5.2b_1.a_2b_2+\tfrac{7}{1}a^6.2b_1(a_2b_3+a_3b_2)+a_1{}^7.2b_1.b_4$$

$$+\tfrac{7}{1}a_1{}^6.a_2b_2{}^2+a_1{}^7.2b_2b_3$$

D'après la remarque du n.° 17, qui s'applique également ici, le procédé du n.° précédent donne aussi le moyen de calculer immédiatement un terme quelconque du développement d'une fonction quelconque de deux polynômes indépendans $\varphi(a+a_1x+a_2x^2+\ldots..,$ $b+b_1x+b_2x^2+\ldots.)$; il suffit pour cela de remplacer, dans la formule (67) les produits des dérivées de $\varphi a$ et $\psi b$ par les dérivées partielles correspondantes de $\varphi(a,b)$; et le n.° précédent fait voir avec quelle facilité le calcul des dérivations fournit la solution de ce problème compliqué, et intraitable par les méthodes ordinaires.

40. La règle du n.° 28 est un corollaire bien simple de celles des n.$^{os}$ 15 et 35; en effet, la forme du terme général (48), $nB_n=\frac{\text{D}^{n-1}.(c^{-n}.\text{D}.\varphi b)}{1.2\ldots(n-1)}$, étant comparée à celle (17) $A_{n-1}=\frac{\text{D}^{n-1}.(\varphi a.\psi b)}{1.2\ldots(n-1)}$, fait voir qu'on obtient la première, en remplaçant, dans celle-ci $\psi b$ par $c^{-n}$, et $\varphi a$ par $\text{D}.\varphi b$. Les règles de développement doivent donc être les mêmes pour l'une et l'autre formes, sauf les différences suivantes : 1.° l'exposant de $c$ diminuant d'une unité d'un terme à l'autre, il faut faire subir à chaque terme, avant d'en déduire le suivant, la préparation du n.° 35; 2.° $\varphi a$ étant remplacé par $\text{D}.\varphi b$, il s'ensuit qu'on a, en général, $\frac{\text{D}^r.\text{D}.\varphi b}{1.2\ldots.r}=\frac{\text{D}^{r+1}.\varphi b}{1.2\ldots r}=(r+1)\frac{\text{D}^{r+1}\varphi b}{1.2\ldots(r+1)}$; et $\frac{\text{D}^r\text{D}\varphi b}{1.2\ldots r}=(r+1)\frac{\text{D}^{r+1}\varphi b}{1.2\ldots(r+1)}$; ce qui produit les coefficiens numériques égaux aux exposans de dérivation; 3.° enfin, nous avons ordonné différemment les termes des équations (50), en transformant les lignes horizontales des équations (18) en colonnes, et réciproquement : il en est résulté que les dernières colonnes des équations (18) sont devenues les derniers termes de chaque colonne des équations

(50)

(50), en transformant les lignes horizontales des équations (18) en colonnes, et réciproquement : il en est résulté que les dernières colonnes des équations (18) sont devenues les derniers termes de chaque colonne des équations (50) ; ce qui a produit les modifications des 2.$^{me}$ et 3.$^{me}$ parties de la règle du n.° 15.

41. En tenant compte des observations du n.° précédent, la formule (67) fournit le moyen de développer immédiatement un quelconque des termes (48), indépendamment des précédens : on a, en général,

$$(69) \qquad nB_n = \frac{D^{n-1}.(c^{-n}.D.\phi b)}{1.2\ldots(n-1)} =$$

$$n\frac{D^n\phi b}{1.2\ldots. n}.(c^{-n}).b_1{}^n + (n-1)\frac{D^{n-1}\phi b}{1.2\ldots(n-1)}.(c^{-n}).D.b_1{}^{n-1} + \ldots.$$

$$+(n-1)\frac{D^{n-1}\phi b}{1.2\ldots(n-1)}.D(c^{-n}).b_1{}^{n-1}c_1 + (n-2)\frac{D^{n-2}\phi b}{1.2\ldots(n-2)}.D(c^{-n}).D.(b_1{}^{n-2}c_1) + \ldots$$

$$+(n-2)\frac{D^{n-2}\phi b}{1.2\ldots(n-2)}.\tfrac{1}{2}D^2(c^{-n}).b_1{}^{n-2}c_1{}^2 + (n-3)\frac{D^{n-3}\phi b}{1.2\ldots(n-3)}.\tfrac{1}{2}D^2(c^{-n}).D.(b_1{}^{n-3}c_1{}^2) + \ldots$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots$$

$$+3.\tfrac{1}{6}D^3\phi b.\frac{D^{n-3}(c^{-n})}{1.2\ldots(n-3)}.b_1{}^3c_1{}^{n-3} + 2.\tfrac{1}{2}D^2\phi b.\frac{D^{n-3}(c^{-n})}{1.2\ldots(n-3)}.D.(b_1{}^2c_1{}^{n-3}) + \ldots.$$

$$+2.\tfrac{1}{2}D^2\phi b.\frac{D^{n-2}(c^{-n})}{1.2\ldots(n-2)}.b_1{}^2c_1{}^{n-2} + D\phi b.\frac{D^{n-2}(c^{-n})}{1.2\ldots(n-2)}.D.(b_1c_1{}^{n-2})$$

$$+D\phi b.\frac{D^{n-1}(c^{-n})}{1.2\ldots(n-1)}.b_1c_1{}^{n-1}$$

$$\ldots.+3.\tfrac{1}{6}D^3\phi b.(c^{-n}).\frac{D^{n-3}.b_1{}^3}{1.2\ldots(n-3)} + 2.\tfrac{1}{2}D^2\phi b.(c^{-n}).\frac{D^{n-2}.b_1{}^2}{1.2\ldots(n-2)} + D\phi b.(c^{-n})\frac{D^{n-1}b_1{}^3}{1.2\ldots(n-1)}$$

$$\ldots.+2.\tfrac{1}{2}D^2\phi b.D(c^{-n}).\frac{D^{n-3}(b_1{}^2c_1)}{1.2\ldots.(n-3)} + D\phi b.D(c^{-n}).\frac{D^{n-2}(b_1c_1)}{1.2\ldots(n-2)}$$

$$\ldots.+D\phi b.\tfrac{1}{2}D^2(c^{-n}).\frac{D^{n-3}(b_1c_1{}^2)}{1.2\ldots(n-3)}$$

où les quantités qui restent à développer sont de la même forme que celles (68), du n.° 38, et doivent être développées de la même manière.

42. Au moyen du n.° précédent, nous sommes donc en état de calculer immédiatement un terme quelconque d'une fonction de polynôme, ordonné selon les puissances d'une fonction ou d'un polynôme donné ; ce qui constitue le problème général du retour des fonctions et des séries, étendu aux fonctions de polynômes. De plus, d'après la remarque du n.° 39, qui est applicable à ce cas, nous pouvons aussi calculer immédiatement une partie quelconque d'un terme, sans calculer le reste de ce terme. Mais, ce qu'il y a de plus remarquable, c'est que cette question difficile est résolue d'une manière si simple qu'on n'a, pour ainsi dire, que la peine d'écrire le résultat.

## Conclusion.

43. Résumons, en deux mots, l'objet et l'esprit du calcul des dérivations, tel qu'il résulte de ce petit écrit. Le théorème de Taylor donne le développement d'une fonction simple d'un binôme, selon les puissances ascendantes de la variable principale, ou selon les mêmes puissances d'une fonction quelconque donnée de cette variable. Le passage du théorème de Taylor au développement des fonctions de polynômes, ou des fonctions de fonctions, selon les puissances ascendantes de la variable, n'est autre chose que le passage de la différentiation d'une fonction, en regardant la différentielle de la variable principale comme constante, à la différentielle de la même fonction, en ne regardant aucune différentielle comme constante. Quant au passage du développement d'une fonction, selon les puissances ascendantes de la variable à celui selon les puissances ascendantes d'une fonction donnée de cette variable; ( ce qui constitue le retour des fonctions et des séries ); il n'est

autre chose que celui de la différentiation d'une fonction, en changeant de variable principale ou indépendante.

44. Me voici parvenu au terme que je m'étais proposé : celui de déduire la véritable théorie du calcul des derivations du seul théorème de Taylor, sans l'emploi d'aucun principe nouveau. J'espère que les géomètres verront avec plaisir ce beau corollaire d'un théorème qui a déjà été si fécond. Le cadre étroit dans lequel j'ai resserré l'essence de ce calcul les engagera sans doute à donner quelques momens à la lecture de ce petit écrit ; et j'ose présumer qu'elle les réconciliera avec le calcul des dérivations, dont l'ouvrage d'Arbogast a pu les éloigner. Mon but n'a pas été d'épuiser la matière, mais d'éveiller l'attention des géomètres sur l'utilité, trop méconnue, des dérivations ; et de leur éviter la recherche pénible de nouveaux moyens de développement, en leur présentant ceux qui sont, à la fois, les plus simples et les plus expéditifs qu'on puisse trouver.

Les géomètres auxquels l'*Analise combinatoire* est familière verront, par nos remarques des n.$^{os}$ 10, 16 et 36, que le calcul des dérivations contient, non seulement les véritables sources des règles de cette analise, et leur extension à des fonctions de plusieurs polynômes indépendans, mais encore les moyens d'exécution les plus commodes et les plus rapides.

Metz, le 5 de mai 1815.

# ANALISE ALGÉBRIQUE.

## *Théorèmes nouveaux, sur les limites extrêmes des racines des équations numériques;*

Par M. Bret, professeur de mathématiques à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble.

Pour rendre la théorie que je vais développer plus facile à saisir, je crois convenable de l'appliquer à un exemple particulier. Rien ne sera plus facile ensuite que de l'exposer d'une manière générale.

Soit donc l'équation du 9.^me^ degré

$$ax^9+bx^8-cx^7-dx^6+ex^5-fx^4-gx^3+hx^2-kx+l=0\,, \qquad (1)$$

dans laquelle les signes sont supposés en évidence; et proposons-nous d'obtenir une limite supérieure de ses racines.

Nous remarquerons d'abord que, quels que soient $A$ et $m$, on a

$$Ax^m=A(x^m-1)+A=A(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1)+A$$

ou, en posant pour abréger $x-1=y$ d'où $x=1+y$

$$Ax^m=Ayx^{m-1}+Ayx^{m-2}+\ldots+Ayx+Ay+A\,. \qquad (2)$$

Cela posé, appliquons la transformation (2) à tous les termes *positifs* de l'équation (1), et nous aurons

$$\begin{aligned}
ax^9 &= ayx^8+ayx^7+ayx^6+ayx^5+ayx^4+ayx^3+ayx^2+ayx+ay+a\ ,\\
bx^8 &= \ldots\ byx^7+byx^6+byx^5+byx^4+byx^3+byx^2+byx+by+b\ ,\\
ex^5 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ eyx^4+eyx^3+eyx^2+eyx+ey+e\ ,\\
hx^2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ hyx+hy+h\ ,\\
l\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ l\ .
\end{aligned}$$

Introduisant ces développemens dans l'équation (1), rassemblant les termes affectés des mêmes puissances de $x$, et écrivant les premiers ceux de ces termes dont le coefficient renferme une partie négative, on obtiendra la transformée

$$\begin{aligned}
&\{(a+b)y-c\}x^7+\{(a+b)y-d\}x^6+\{(a+b+e)y-f\}x^4+\{(a+b+e)y-g\}x^3+\{(a+b+e+h)y-k\}x\\
&+y\{ax^8+(a+b)x^5+(a+b+e)x^2+(a+b+e+h)\}+(a+b+e+h+l)=0\ . \qquad (3)
\end{aligned}$$

Or, il est clair que, pourvu qu'on ne prenne pas $y$ négatif ou, ce qui revient au même, $x$ positif plus petit que l'unité, les termes de la seconde ligne donneront toujours un résulsat positif quelque autre valeur qu'on puisse d'aillenrs prendre pour $x$ ; donc, pour que toute autre valeur, mise pour $x$ dans l'équation (1), ne donne point un résultat négatif, il suffit uniquement qu'elle ne rende point négative la première ligne de l'équation (3), ce qui arrivera infailliblement si elle ne rend négatif aucun des termes qui la composent.

Cette condition sera évidemment remplie, si l'on fait en sorte que les binômes

$$\begin{aligned}
&(a+b)y-c\ ,\ (a+b+e)y-f\ ,\ (a+b+e+h)y-k\ ,\\
&(a+b)y-d\ ,\ (a+b+e)y-g\ ,
\end{aligned}$$

soient positifs ; or, c'est ce qui arrivera nécessairement, si l'on ne prend pas $y$ ou $x-1$ moindre que la plus grande des fractions

$$\frac{c}{a+b}, \quad \frac{d}{a+b}, \quad \frac{f}{a+b+e}, \quad \frac{g}{a+b+e}, \quad \frac{k}{a+b+e+h},$$

ou, ce qui revient au même, si l'on ne prend pas $x$ moindre que le plus grand des cinq nombres

$$1+\frac{c}{a+b}, \quad 1+\frac{d}{a+b}, \quad 1+\frac{f}{a+b+e}, \quad 1+\frac{g}{a+b+e}, \quad 1+\frac{k}{a+b+e+h};$$

ce qui fournit la règle suivante.

*THÉORÈME I. En ajoutant successivement à l'unité une suite de fractions ayant pour numérateurs les coefficiens négatifs d'une équation proposée, pris positivement, et pour dénominateurs la somme de tous les coefficiens positifs qui les précèdent respectivement, le plus grand des nombres résultans pourra être pris pour limite supérieure des racines de cette équation.*

Il est entendu au surplus que, dans la pratique, il suffira de considérer le plus grand coefficient dans chacune des séries de termes négatifs.

Appliquons cette règle à la recherche d'une limite supérieure des racines de l'équation

$$2x^7+11x^6-10x^5-26x^4+31x^3+72x^2-230x-348=0;$$

cette limite sera le plus grand des deux nombres

$$1+\frac{26}{2+11} \quad \text{ou} \quad 1+\frac{26}{13};$$

$$1+\frac{348}{2+11+31+72} \quad \text{ou} \quad 1+\frac{348}{116};$$

ainsi, cette limite sera 4.

Si l'on veut obtenir la limite inférieure des mêmes racines; on remarquera qu'en changeant les signes des racines de la proposée, elle devient

$$2x^7-11x^6-10x^5+26x^4+31x^3-72x^2-230x+348=0\;;$$

or, par la règle ci-dessus, on pourra prendre pour limite supérieure des racines de cette dernière le plus grand des nombres

$$1+\frac{11}{2}$$

$$1+\frac{230}{2+26+31} \quad \text{ou} \quad 1+\frac{230}{59}\;;$$

ainsi, cette limite sera 7 ; d'où il résulte que toutes les racines réelles de la proposée sont comprises entre $+4$ et $-7$.

La méthode vulgaire, indiquée par M. Lacroix dans ses élémens, donne pour ces limites $+175$ et $-116$; la méthode plus parfaite de Lagrange, adoptée par M. Francœur, donne $+20$ et $-116$, on voit par là combien la nôtre leur est préférable. Je ne dis rien de la méthode des dérivées successives, attribuée à Mac-Laurain, laquelle n'est qu'un tâtonnement assez laborieux.

Reprenons la transformée (3). En vertu de la formule (2) on a

$$ax^8=ayx^7+ayx^6+ayx^5+ayx^4+ayx^3+ayx^2+ayx+ay+a.$$

Mais, en vertu de la même formule les termes $ayx^5$ et $ayx^2$ peuvent être développés comme il suit :

$$ayx^5=ay^2x^4+ay^2x^3+ay^2x^2+ay^2x+ay^2+ay\;;$$

$$ayx^2=\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;ay^2x+ay^2+ay\;;$$

ce qui donnera, en substituant et ordonnant,

$$ax^8 = ayx^7 + ayx^6 + \begin{array}{l|l|l|l|l|l} ay^2 & x^4 + ay^2 & x^3 + ay^2 & x^2 + 2ay^2 & x + 2ay^2 & + 2ay \\ + ay & + ay & + ay & + ay & + ay & + a \,. \end{array}$$

Mais on aura encore, en vertu de la même formule (2),

$$(2ay^2 + ay)x^2 = \begin{array}{l|l|l} 2ay^3 & x + 2ay^3 & + 2ay^2 \\ + ay^2 & + ay^2 & + ay \end{array} ;$$

ce qui donnera, en substituant de nouveau

$$ax^8 = ayx^7 + ayx^6 + \begin{array}{l|l|l|l|} ay^2 & x^4 + ay^2 & x^3 + ay^3 & x + ay^3 \\ + ay & + ay & + 2ay^2 & + 3ay^2 \\ & & + ay & + 3ay \\ & & & + a \end{array} .$$

Par de semblables transformations, on trouvera

$$(a+b)x^5 = (a+b)yx^4 + (a+b)yx^3 + \begin{array}{l|l|} (a+b)y^2 & x + (a+b)y^2 \\ + (a+b)y & + 2(a+b)y \\ & + (a+b) \end{array} ;$$

$$(a+b+e)x^2 = (a+b+e)yx + \begin{array}{l|} (a+b+e)y \\ + (a+b+e) \end{array}$$

$$(a+b+e+h) = (a+b+e+h) .$$

En ajoutant ensemble tous ces résultats, il viendra

$$ax^8 + (a+b)x^5 + (a+b+e)x^2 + (a+b+e+h)$$

$$= ayx^7,$$

$$=ayx^7+ayx^6+\left.\begin{array}{r} ay^2 \\ +(2a+b)y \end{array}\right| x^4+\left.\begin{array}{r} ay^2 \\ +(2a+by)y \end{array}\right| x^3+\left.\begin{array}{r} ay^3 \\ +\ (3a+b)y^2 \\ +(3a+2b+e)y \end{array}\right| x+\left.\begin{array}{r} ay^3 \\ +\ (4a+b)y^2 \\ +\ (6a+3b+e)y \\ +(4a+3b+2e+h) \end{array}\right|$$

substituant cette valeur dans l'équation (3), elle prendra la forme que voici :

$$\left.\begin{array}{l} \{ay^2+(a+b)y-c\}x^7+\{ay^2+(a+b)y-d\}x^6 \\ +\{ay^3+(2a+b)y^2+(a+b+e)y-f\}x^4 \\ +\{ay^3+(2a+b)y^2+(a+b+e)y-g\}x^3 \\ +\{ay^4+(3a+b)y^3+(3a+2b+e)y^2+(a+b+e+h)y-k\}x \\ +\{ay^4+(4a+b)y^3+(6a+3b+e)y^2+(4a+3b+2e+h)y+(a+b+e+h+l)\}=0. \end{array}\right. \quad (4)$$

Or, il est clair que, pourvu que $y$ soit positif, ou que $x$ soit plus grand que l'unité, la dernière ligne de cette équation sera toujours positive ; il suffira donc, pour que tout son premier membre le soit, de donner à $y$ une valeur positive qui ne rende négatif aucun des coefficiens des termes en $x$ ; or, comme tous les termes qui composent chacun de ces coefficiens sont positifs excepté le dernier, il suffira, pour satisfaire à cette condition, de prendre $y$ tel que dans aucun de ces coefficiens le premier terme ne soit moindre que le dernier, ce qui revient à faire

$$\begin{array}{ll} ay^2>c\ , & ay^3>f\ , \\ ay^2>d\ , & ay^3>g\ ; \end{array} \quad ay^4>k\ ,$$

le signe $>$ n'excluant pas l'égalité ; or, cela se réduit évidemment à prendre $x$ au moins aussi grand que le plus grand des nombres

$$1+\sqrt[2]{\frac{c}{a}}\,,\quad 1+\sqrt[3]{\frac{f}{a}}\,,\quad 1+\sqrt[2]{\frac{d}{a}}\,,\quad 1+\sqrt[3]{\frac{g}{a}}\,,\quad 1+\sqrt[4]{\frac{k}{a}}\,;$$

ce qui fournit cette seconde règle :

THÉORÈME II. *Si, après avoir divisé successivement chacun des coefficiens négatifs d'une équation par le coefficient du premier terme, on extrait de chaque quotient une racine dont le degré soit le nombre des termes positifs qui précèdent le coefficient négatif dont il s'agit, le plus grand des nombres qu'on obtiendra en augmentant chacune de ces racines d'une unité pourra être pris pour limite supérieure des racines de l'équation proposée.*

Il est entendu au surplus que, dans l'application de cette règle, comme dans celle de la précédente, il suffira d'avoir égard au plus grand coefficient négatif de chaque série de termes consécutivement négatifs.

En faisant l'application de cette règle à l'équation déjà prise pour exemple, on trouvera, pour la limite des racines positives le plus grand des nombres,

$$1+\sqrt[2]{\frac{26}{2}}\,,\quad 1+\sqrt[4]{\frac{348}{2}}\,;$$

et pour la limite des racines négatives, prise positivement, le plus grand des nombres

$$1+\sqrt[1]{\frac{11}{2}}\,,\quad 1+\sqrt[3]{\frac{230}{2}}\,;$$

c'est-à-dire, que ces deux limites seront $+5$ et $-7$. On voit que cette règle rentre dans celle qu'indique M. Francœur.

Au lieu de faire abstraction des termes intermédiaires des polynômes en $y$ qui multiplient les diverses puissances de $x$, dans l'équation (4), on peut y avoir égard, et chercher à rendre ces polynômes tous positifs par l'application du *Théorème I*; on verra sur-le-champ qu'il faut pour cela prendre $y$ au moins égal au plus grand des nombres

$$1+\frac{c}{b+2a},\quad 1+\frac{f}{e+2b+4a},\quad 1+\frac{k}{h+2e+4b+8a};$$
$$1+\frac{d}{b+2a},\quad 1+\frac{g}{e+2b+4a},$$

ce qui revient à prendre $x$ au moins égal au plus grand des nombres

$$2+\frac{c}{b+2a};\quad 2+\frac{f}{e+2b+4a},\quad 2+\frac{k}{h+2e+4b+8a};$$
$$2+\frac{d}{b+2a};\quad 2+\frac{g}{e+2b+4a},$$

c'est-à-dire, qu'on peut prendre pour limite supérieure des racines le plus grand des nombres qu'on obtient en ajoutant à *deux* unités une suite de fractions ayant pour numérateurs les divers coefficiens négatifs pris positivement, et pour dénominateurs la somme des produits des coefficiens positifs qui les précèdent respectivement, et de droite à gauche, par les puissances successives de *deux*, à partir de sa puissance zéro, ou de l'unité.

Mais, de même que nous avons appliqué le *Théorème I* à l'équation (4), pour en conclure ce dernier, nous pouvons également lui appliquer celui-ci, et nous en conclurrons qu'en y prenant pour $y$ le plus grand des nombres

$$2+\frac{c}{(a+b)+2a}=2+\frac{c}{b+3a},$$

$$2+\frac{d}{(a+b)+2a}=2+\frac{d}{b+3a},$$

$$2+\frac{f}{(a+b+e)+2(2a+b)+4a}=2+\frac{f}{e+3b+9a};$$

$$2+\frac{g}{(a+b+e)+2(2a+b)+4a}=2+\frac{g}{e+3b+9a},$$

$$2+\frac{k}{(a+b+e+h)+2(3a+2b+e)+4(3a+b)+8a}$$

$$=2+\frac{k}{h+3e+9b+27a};$$

ou, ce qui revient au même, en prenant pour $x$ le plus grand des nombres

$$3+\frac{c}{b+3a};\quad 3+\frac{f}{e+3b+9a},\qquad 3+\frac{k}{h+3e+9b+27a};$$

$$3+\frac{d}{b+3a},\quad 3+\frac{g}{e+4b+9a};$$

on aura une limite supérieure des racines de cette équation ; c'est-à-dire qu'on peut prendre pour limite supérieure des racines d'une équation proposée le plus grand des nombres qu'on obtient en ajoutant à *trois* une suite de fractions ayant pour numérateurs les coefficiens négatifs de la proposée, pris positivement, et pour dénominateurs la somme des produits des coefficiens positifs qui les précèdent respectivement, de droite à gauche, par les puissances successives de *trois*, à partir de sa puissance zéro, c'est-à-dire, de l'unité.

On peut pareillement appliquer cette dernière règle à rendre positifs les coefficiens fonctions de $y$ de l'équation (4), et l'on trouvera que tout se réduit à ne pas prendre $x$ moindre que le plus grand des nombres

$$4+\frac{c}{b+4a}, \quad 4+\frac{f}{e+4b+16a}, \quad 4+\frac{d}{b+4a}, \quad 4+\frac{g}{e+4b+16a}; \quad 4+\frac{k}{h+4e+16b+64a};$$

et, comme rien ne limite ce raisonnement, on pourra dire généralement qu'on rendra positif le premier membre de l'équation (4), et conséquemment de l'équation (1), en prenant pour $x$ le plus grand des nombres

$$n+\frac{c}{b+an}, \quad n+\frac{f}{e+bn+an^2}; \quad n+\frac{d}{b+an}, \quad n+\frac{g}{e+bn+an^2}, \quad n+\frac{k}{h+en+bn^2+an^3};$$

$n$ étant un nombre entier positif quelconque. De là résulte cette nouvelle règle.

*THÉORÈME III. En ajoutant successivement à un nombre entier positif arbitraire une suite de fractions ayant successivement pour numérateurs les coefficiens négatifs d'une équation proposée, pris positivement, et pour dénominateurs la somme des produits des coefficiens positifs qui les précèdent respectivement, de droite à gauche, par les puissances successives du nombre arbitraire, à partir de sa puissance zéro ou de l'unité; le plus grand des nombres* *résultans pourra être pris pour limite supérieure des racines de cette équation.*

Observons, 1.° que ce théorème renferme le *Théorème I*, comme cas particulier : c'est celui où le nombre arbitraire est l'unité ; 2.° que, dans son application, comme dans celle de celui-là, il suffit de faire entrer en considération le plus grand des coefficiens que renferme chaque série de termes consécutivement négatifs, de sorte qu'on n'a pas plus de nombres à calculer qu'il n'y a de ces séries ; 3.° qu'enfin, en prenant successivement pour le nombre arbitraire 1, 2, 3,.... on trouvera souvent une limite *minimum*, inférieure à celle que donnerait l'application du *Théorème I.*

# GÉOMÉTRIE DES SURFACES COURBES.

## *De la génération des paraboloïdes elliptique et hyperbolique ;*

Par M. Bérard, principal et professeur de mathématiques du collége de Briançon, membre de plusieurs sociétés savantes.

Toute parabole, rapportée à deux axes quelconques, formant entre eux un angle $\gamma$, est, comme l'on sait, exprimée par une équation de la forme

$$(Ax+By)^2+2(A'x+B'y)+C=0 \; . \qquad (2)$$

Supposons que, par une transformation de coordonnées, on soit parvenu à rapporter la courbe à son diamètre principal, pris pour axe des $t$, et à la tangente à son sommet, prise pour axe des $u$; supposons de plus que, par suite de cette transformation, l'équation soit devenue

$$u^2=2Pt\ , \qquad (2)$$

$P$ étant conséquemment le demi-paramètre.

Si l'on désigne par $a, b$, respectivement les coordonnées de l'origine primitive rapportée aux axes de $t$ et des $u$, et par $\alpha$, $\beta$ les angles que font respectivement les axes des $x$ et des $y$ avec l'axe des $t$, on repassera, comme l'on sait, du système transformé au système primitif, en posant

$$\left.\begin{aligned} t&=a+x\text{Cos.}\alpha+y\text{Cos.}\beta\ ,\\ u&=b+x\text{Sin.}\alpha+y\text{Sin.}\beta\ . \end{aligned}\right\}\ (3)$$

En faisant la substitution dans l'équation (2), on obtiendra la transformée

$$(x\text{Sin.}\alpha+y\text{Sin.}\beta)^2+2\{(b\text{Sin.}\alpha-P\text{Cos.}\alpha)x+(b\text{Sin.}\beta-P\text{Cos.}\beta)y\}+(b^2-Pa)=0\ ;$$

laquelle ne devra différer au plus de l'équation (1) que par un facteur commun à tous ses termes; désignant donc ce facteur par $\lambda^2$, on aura

$$\text{Sin.}\alpha=\lambda A\ ,\quad b\text{Sin.}\alpha-P\text{Cos.}\alpha=\lambda^2A'\ ,$$

$$\text{Sin.}\beta=\lambda B\ ,\quad b\text{Sin.}\beta-P\text{Cos.}\beta=\lambda^2B'\ ,$$

$$b^2-2Pa=\lambda^2C\ ;$$

équations auxquelles il faudra joindre l'équation de condition

$$\text{Cos.}(\beta-\alpha)=\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta+\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta=\text{Cos.}\gamma\ :$$

Or, de ces six équations la cinquième est la seule qui renferme $u$ et $C$, d'où il suit que les cinq autres sont suffisantes pour déterminer les cinq quantités $a$, $b$, $\alpha$, $\beta$, $P$, et que ces quantités sont des fonctions de $A$, $B$, $A'$, $B'$ seulement.

Observons en outre que, dans le système transformé, l'équation du diamètre principal étant $u=0$, l'équation de ce diamètre sera, dans le système primitif (3),

$$x\text{Sin.}\alpha+y\text{Sin.}\beta+b=0\ ;$$

puis donc que cette équation ne renferme point $a$, la détermination des constantes qu'elle contient sera indépendante de $C$.

Il est donc établi, par ce qui précède, que *si, dans l'équation d'une parabole, rapportée à deux axes obliques quelconques, on fait seulement varier le dernier terme, on fera simplement glisser son sommet le long de son diamètre principal, considéré comme droite indéfinie, sans changer aucunement la position de ce diamètre ni les dimensions de la courbe.*

Les mêmes considérations établissent que réciproquement *si, sans changer aucunement les dimensions d'une parabole ni la situation de son diamètre principal, on fait simplement glisser son sommet le long de ce diamètre; à quelque système d'axes que la courbe soit d'ailleurs rapportée, on pourra toujours amener sa nouvelle équation à ne différer de la première que par son dernier terme.*

Il en irait absolument de même si l'on faisait glisser un point quelconque de la courbe le long d'un diamètre passant par ce point, puisqu'alors le sommet de cette parabole parcourrait aussi son diamètre principal.

Cela posé, soit un paraboloïde quelconque, elliptique ou hyperbolique. Par l'un quelconque de ses points menons-lui un diamètre et un plan tangent; menons-lui ensuite un plan secant parallèle à ce plan tangent; la section sera une ellipse ou une hyperbole; menons à cette courbe deux diamètres conjugués quelconques; et menons, sur

sur le plan tangent, deux parallèles à ces diamètres. Soient prises ces deux parallèles pour axes des $x$ et des $y$, et le diamètre du paraboloïde qui passe par leur intersection pour axe des $z$; l'équation de cette surface sera, comme l'on sait

$$Ax^2 \pm By^2 + Cz = 0\,;$$

$A$ et $B$ étant de mêmes signes ou de signes contraires, suivant que le paraboloïde est elliptique ou hyperbolique.

Or, présentement, soit qu'on donne à $x$ ou à $y$ une suite de valeurs particulières, on obtiendra toujours une suite d'équations de paraboles ne différant uniquement que par le terme tout connu, et qui répondront conséquemment, d'après ce qui a été dit précédemment, à des paraboles égales, ayant toutes un même point de leur périmètre sur le plan des $xz$ ou sur celui des $yz$. On peut donc de cette observation deduire les conséquences que voici :

*I. Les sections paraboliques faites à un paraboloïde, elliptique ou hyperbolique, par des plans parallèles quelconques, sont des paraboles égales entre elles, ayant leurs points homologues situés sur d'autres paraboles aussi égales entre elles et comprises dans des plans parallèles.*

*II. Réciproquement, tout paraboloïde, elliptique ou hyperbolique, peut être conçu engendré par le mouvement d'une parabole, de grandeur invariable, demeurant constamment parallèle à un même plan, et dont l'un quelconque des points décrit une autre parabole, fixée de grandeur et de situation dans l'espace.*

La différence entre le paraboloïde elliptique et le paraboloïde hyperbolique ne consiste donc uniquement qu'en ce que la parabole *génératrice* et la parabole directrice ont leur concavité tournées dans le même sens pour le premier, et en sens inverse pour le second.

Le cylindre parabolique et le plan ne sont que des cas particuliers de cette génération ; le premier a lieu lorsque la parabole génératrice ou la parabole directrice dégénère en ligne droite ; le second répond au cas où cela arrive à la fois à toutes les deux.

# QUESTIONS RÉSOLUES.

## *Solution du problème de dynamique proposé à la page 220 du V.e volume de ce recueil ;*

Par M. J. F. Français, professeur à l'école royale de l'artillerie et du génie.

PROBLÈME. *On donne la sous-tendante de l'arc que doit décrire l'extrémité inférieure d'un pendule simple ; et on demande quelle longueur doit avoir ce pendule, pour que la durée de ses oscillations soit un* minimum ?

*Solution.* Soient $2a$ la longueur de la sous-tendante donnée, $2\alpha$ l'amplitude d'oscillation qui lui répond, $r$ la longueur inconnue du pendule, $\theta$ l'angle que fait sa direction avec la verticale à une époque quelconque $t$ ; en supposant nulle la vitesse initiale et désignant la gravité par $g=9^m,8088$ environ ; il est connu qu'on aura

$$\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{r}{2g}}.\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\mathrm{Cos}.\theta-\mathrm{Cos}.\alpha}}\,; \qquad (1)$$

on aura de plus

$$r\mathrm{Sin}.\alpha=a\,; \qquad (2)$$

au moyen de quoi, éliminant $r$ de (1), il viendra

$$\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{a}{2g}}.\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\mathrm{Sin}.\alpha(\mathrm{Cos}.\theta-\mathrm{Cos}.\alpha)}}\,;$$

intégrant entre $\theta=\alpha$ et $\theta=0$ et designant par $2T$ la durée d'une oscillation entière, on trouvera (*)

$$2T=\varpi\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\frac{1}{\text{Sin.}\alpha}\cdot\left(1+A_1\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\alpha+A_2\text{Sin.}^4\tfrac{1}{2}\alpha+A_3\text{Sin.}^6\tfrac{1}{2}\alpha+\ldots\right); \qquad (4)$$

les coefficiens $A_1$, $A_2$, $A_3$,.... étant donnés par la loi suivante

$$A_n=\left\{\frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6......2n}\right\}^2. \qquad (5)$$

En considérant $T$ comme fonction de $\alpha$, différentiant l'équation (4) sous ce point de vue et égalant $\frac{dT}{d\alpha}$ à zéro, on trouvera, toutes réductions faites,

$$1=B_1\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}\alpha+B_2\text{Sin.}^4\tfrac{1}{2}\alpha+B_3\text{Sin.}^6\tfrac{1}{2}\alpha+\ldots. \qquad (6)$$

équation dans laquelle les coefficiens $B_1$, $B_2$, $B_3$,.... sont donnés par la loi suivante.

$$B_n=\frac{4n^2+8n-1}{4n^2-4n+1}\cdot A_n. \qquad (7)$$

L'équation (6) n'est point susceptible de résolution exacte ni directe ; en la traitant par le retour des suites, on trouve à peu près $\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\alpha=0{,}338255$, d'où $\alpha=71.^\circ 7'.33''$, et $r=\frac{a}{\text{Sin.}\alpha}=1{,}056823.a$; l'équation (4) donne ensuite $2T=\varpi\sqrt{\frac{a}{g}}.1{,}126105=\sqrt{\frac{a}{0^m{,}986547}}$.

Mais cette valeur de $2T$ est-elle bien réellement un *minimum* ? Pour répondre à cette question nous remarquerons d'abord que,

---

(*) Voyez, pour les détails de l'intégration, le *Traité de mécanique* de M. Poisson ; tome I, page 415.

J. D. G.

soit que nous fassions $\alpha=0$ ou $\alpha=180°$, nous trouverons également $2T=\frac{1}{0}=\infty$ ; de sorte que la valeur en question se trouve comprise entre deux *maxima* ; ce qui est déjà le caractère d'un véritable *minimum* ; mais ce n'est guère que par le calcul des valeurs particulières que l'on peut s'assurer, avec certitude, qu'il n'en existe point d'autres entre ces deux limites. En supposant successivement $\alpha=71°$ et $\alpha=71°.15'$, il vient $2T=\varpi\sqrt{\frac{a}{g}}.1,136394$, et $2T=\varpi\sqrt{\frac{a}{g}}.1,136376$ ; d'où l'on voit que la valeur trouvée ci-dessus, moindre que ces deux là, est comprise entre elles.

*Remarque.* Ce problème trouve son application dans la *Théorie des ponts* : il sert à déterminer la longueur du cable, ou cordage d'ancre, d'un *pont volant* (*), de manière que le trajet de la rivière se fasse dans le moindre temps possible. Il faut cependant observer que cette application suppose que la vitesse du courant est uniforme, sur toute la largeur de la rivière ; circonstance qui n'a pas généralement lieu ; mais le résultat du problème peut toujours servir de première approximation, que l'on corrige ensuite d'après l'expérience.

Le pont volant offre encore à résoudre une autre question intéressante dans la pratique : c'est de déterminer la longueur du cable de manière que la vitesse du pont volant, dans la position $\theta=0$, soit un *maximum*.

---

(*) Un *pont volant* est un petit pont, isolé et mobile, ordinairement établi sur deux bateaux, et attaché à l'une des extrémités d'un cable dont l'autre extrémité est fixée par une ancre, soit au bord du fleuve soit entre ses deux rives. Le choc du courant de l'eau sur ce pont, faisant ici un effet analogue à celui de la pesanteur sur le pendule, le fait osciller d'une rive à l'autre autour de l'ancre. L'application que fait ici M. Français de sa théorie suppose que le cours d'eau est rectiligne et d'une largeur constante, et que l'ancre est fixée dans son intérieur, à égale distance de ses deux bords. $2a$ est supposé la largeur du fleuve et $r$ la longueur du cordage d'ancre.

*J. D. G.*

Représentons par $v$ la vitesse du pont volant dans cette position. L'équation (3) donne pour la vitesse, dans une position quelconque,

$$\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{2g}{a}\text{Sin.}\alpha(\text{Cos.}\theta-\text{Cos.}\alpha)}\ ; \qquad (8)$$

qui, en faisant $\theta=0$, devient

$$v=\sqrt{\frac{2g}{a}\text{Sin.}\alpha(1-\text{Cos.}\alpha)}\ . \qquad (9)$$

En différentiant cette équation, et faisant $\frac{dv}{d\alpha}=0$, on obtient

$$(1-\text{Cos.}\alpha)(1+2\text{Cos.}\alpha)=0\ . \qquad (10)$$

Le premier de ces facteurs égalé à zéro donne $\alpha=0$, pour la valeur *minimum* de $v$, qui répond à $r=\frac{a}{0}=\infty$. Le second donne $\text{Cos.}\alpha=-\frac{1}{2}$, d'où $\alpha=120°$ pour la valeur *maximum* de $v$; ce qui résout bien la question abstraite d'un pendule simple, mais ne peut pas convenir au pont volant, pour lequel $\alpha$ ne peut pas excéder $90°$. Ainsi, pour cette question, il faut rejeter toutes les valeurs négatives de $\text{Cos.}\alpha$. D'après cette observation, la seule inspection de l'équation (9) prouve que $v$ aura sa seule valeur *maximum* admissible dans la pratique, lorsqu'on aura $\text{Sin.}\alpha=1$ et $\text{cos.}\alpha=0$, d'où $\alpha=90°$; ce qui donne, pour la longueur du cable, $r=a$.

---

## *Solution des deux problèmes de géométrie proposés à la page 356 du V.e volume des* Annales;

Par M. Tédénat, correspondant de l'institut, recteur de l'académie de Nismes.

**P**ROBLÈME I. *Déterminer les trois côtés d'un triangle, en fonction des perpendiculaires abaissées sur leurs directions du centre du cercle circonscrit ?*

*Solution.* Soient $X$, $Y$, $Z$ les trois angles du triangle ; $x$, $y$, $z$ les côtés respectivement opposés ; et enfin, $a$, $b$, $c$ les perpendiculaires abaissées sur leurs directions du centre du cercle circonscrit.

La droite qui joint le centre à l'une quelconque des extrémités du côté $z$ est l'hypothénuse d'un triangle-rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont $\frac{1}{2}z$ et $c$, et dans lequel l'angle opposé a $\frac{1}{2}z$ est $Z$ ; d'où il suit qu'on doit avoir

$$2c\,\text{Tang}\,Z=z\ ;$$

ou, en quarrant et transformant la tangente en fonction du cosinus

$$4c^2=(4c^2+z^2)\text{Cos.}^2Z\ . \qquad (1)$$

Les pieds des perpendiculaires $a$, $b$ étant les milieux respectifs des côtés $x$, $y$, il s'ensuit que la droite qui les joint est parallèle à $z$ et égale à $\frac{1}{2}z$ ; et, comme d'ailleurs l'angle de ces deux droites $a$, $b$ est supplément de $Z$, il s'ensuit qu'on doit avoir

$$z^2=4(a^2+b^2+2ab\,\text{Cos.}Z)$$

ou

$$z^2-4(a^2+b^2)=8ab\,\text{Cos.}Z\ . \qquad (2)$$

Si, entre les équations (1) et (2), on élimine $z^2$, il viendra

$$2ab\,\text{Cos.}^3Z+(a^2+b^2+c^2)\text{Cos.}^2\text{Z}-c^2=0\ ;$$

ou encore

$$c^2\text{Sec.}^3Z-(a^2+b^2+c^2)\text{Sec.}Z-2ab=0\ ; \qquad (3)$$

équation du troisième degré, sans second terme, qui est dans le cas irréductible ; et on aura deux autres équations analogues pour déterminer $X$ et $Y$. $X$, $Y$, $Z$ étant ainsi connus, on menera par un même point trois droites égales à $a$, $b$, $c$ formant autour de ce point des angles supplémens de ceux-là ; menant ensuite à ces trois droites par leurs extrémités des perpendiculaires, terminées à leur rencontre commune, le triangle demandé se trouvera construit.

Si l'on voulait avoir immédiatement l'équation qui donne le côté $z$, il ne s'agirait que d'éliminer Cos.$Z$ entre les équations (1) et (2), ce qui donnerait

$$z^6-4(2a^2+2b^2-c^2)z^4+16(a^2+b^2)(a^2+b^2-2c^2)z^2+64c^2(a^2-b^2)^2=0\ ;$$

et l'on aurait des équations analogues pour $x$ et $y$. Le dernier terme de cette équation étant positif, il s'ensuit que, si le problème est possible, il n'admettra que deux solutions au plus.

*PROBLÈME II. Déterminer les trois côtés d'un triangle, en fonction des droites qui joignent le centre du cercle inscrit à ses sommets?*

*Solution.* Soient encore ici $x$, $y$, $z$ les trois côtés du triangle; $X$, $Y$, $Z$ les angles respectivement opposés; et soient $a$, $b$, $c$ les droites qui joignent le centre à leurs sommets.

La droite $c$ est l'hypothénuse commune de deux triangles-rectangles, dont un des côtés de l'angle droit est le rayon $r$ du cercle inscrit, et dans lesquels l'angle opposé est $\frac{1}{2}Z$; d'où il suit qu'on doit avoir

$$r=c\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}Z\ . \qquad (1)$$

Les droites $a$, $b$ forment avec le côté $z$ un triangle, dans lequel l'angle opposé à $z$ est $q+\frac{1}{2}Z$, $q$ désignant l'angle droit; l'aire de ce triangle est donc

$$\tfrac{1}{2}ab\mathrm{Sin}.(q+\tfrac{1}{2}Z)=\tfrac{1}{2}ab\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}Z\ ;$$

mais, comme sa hauteur est $r$, son aire aura aussi pour expression $\frac{1}{2}rz$; donc

$$rz=ab\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}Z\ ;$$

ou, en éliminant $r$, au moyen de l'équation (1)

$$cz\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}Z=ab\mathrm{Cos}.\tfrac{1}{2}Z\ . \qquad (2)$$

D'un autre côté, le même triangle donne

$$z^2=a^2+b^2+2ab\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}Z\ . \qquad (3)$$

En éliminant $z$, entre les équations (2) et (3) et transformant le cosinus en sinus, il vient

$$2abc^2\text{Sin.}^3\tfrac{1}{2}Z+[c^2(a^2+b^2)+a^2b^2]\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}Z-a^2b^2=0\,,$$

ou encore

$$a^2b^2\text{Cosec.}^3\tfrac{1}{2}Z-[c^2(a^2+b^2)+a^2b^2]\text{Cosec.}\tfrac{1}{2}Z-2abc^2=0\,;$$

équation du troisième degré, sans second terme qui est dans le cas irréductible; et on aura deux autres équations analogues pour déterminer $X$ et $Y$. $X$, $Y$, $Z$ étant ainsi connus; on menera, par un même point trois droites, égales à $a$, $b$, $c$, formant autour de ce point des angles $q+\tfrac{1}{2}X$, $q+\tfrac{1}{2}Y$, $q+\tfrac{1}{2}Z$. En joignant leurs extrémités par trois autres droites, le triangle demandé se trouvera construit.

Si l'on voulait avoir immédiatement l'equation qui donne le côté $z$, il ne s'agirait que d'éliminer $\text{Sin.}\tfrac{1}{2}Z$ du quarré de l'équation (2), au moyen de l'équation (3), après y avoir transformé le cosinus en sinus, ce qui donnerait

$$c^2z^6+[a^2b^2-2c^2(a^2+b^2)]z^4-(a^2+b^2)[2a^2b^2-c^2(a^2+b^2)]z^2a^2+b^2(a^2-b^2)^2=0\,;$$

et l'on aurait des équations analogues pour $x$ et $y$. On voit encore ici que le dernier terme de l'équation étant positif, le problème, lorsqu'il sera possible, n'admettra que deux solutions au plus.

---

# QUESTIONS PROPOSÉES.

## *Problème d'Analise.*

Une équation de forme quelconque, entre tant de variables qu'on voudra, étant donnée; assigner à ces variables des valeurs telles que la plus grande de toutes soit la moindre possible, ou que la moindre de toutes soit la plus grande possible?

# ASTRONOMIE.

## *Mémoire sur les éclipses de soleil ;*

Par M. le professeur KRAMP, doyen de la faculté des sciences de Strasbourg.

( *Première partie.* )

1. PROBLÈME. *Soient* (*fig.* 1) S *le centre du disque du soleil, vu de la terre, dont le centre doit conséquemment se trouver sur la perpendiculaire menée au plan de ce disque par le point* S ; *et soit* CC′ *le diamètre du même disque. On suppose que deux observateurs, situés en deux points de la surface de la terre, voient au même instant le centre du disque lunaire sur le disque solaire, l'un en* L *et l'autre en* L′ ; *et on demande la relation générale entre les diverses quantités que le problème donne lieu de considérer ?*

2. *Solution.* Les quantités données du problème sont : les demi-diamètres du soleil, de la lune et de la terre ; nous nommerons le premier $a$, le second $b$ et le troisième $c$ ; ensuite les distances des centres du soleil et de la lune à celui de la terre ; nous les désignerons par $A$ et $B$ ; cela rend les demi-diamètres apparens des deux astres respectivement égaux à $\frac{a}{A}$ et $\frac{b}{B}$, et leurs parallaxes horizontales égales à $\frac{c}{A}$ et $\frac{c}{B}$. Toutefois, dans cette analise, nous ne ferons aucun usage des parallaxes.

3. Il faudra fixer les trois axes rectangulaires auxquels nous assignerons le centre de la terre pour point d'intersection commune, et auxquels nous rapporterons tant le centre de la lune que les deux points de la surface de la terre où les deux observateurs sont placés. En désignant par $x$, $y$, $z$ les coordonnées de l'un, et par $x'$, $y'$, $z'$ celles de l'autre, ce qui donne $x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2=c^2$, nous supposerons l'axe des $x$ dirigé du centre de la terre vers celui du soleil ; l'axe des $y$ sera mené dans le plan de l'écliptique, parallèlement au diamètre $CC'$ du soleil, c'est-à-dire, vers la partie orientale du ciel ; l'axe des $z$, perpendiculaire au plan des deux autres, sera dirigé vers le pôle de l'écliptique.

4. Nous nommerons $P$, $Q$, $R$ les coordonnées du centre de la lune, respectivement parallèles aux $x$, $y$, $z$, et prises dans le même sens ; ce qui donne $P^2+Q^2+R^2=B^2$. Comme près de la conjonction le quarré $B^2$ l'emporte considérablement sur la somme $Q^2+R^2$, la différence $B-P$ sera presque nulle ; et, à plus forte raison, sera-t-il permis de faire $P=b-\frac{Q^2+R^2}{2B}$.

5. La position du point L sur le disque solaire sera déterminée par les deux coordonnées SN et NL ; et celle du point L′ par les deux coordonnées SN′ et N′L′; elles seront respectivement parallèles aux axes des $y$ et des $z$. Nous ferons

$$\mathrm{SN}=q \quad , \qquad \mathrm{SN}'=q' \; ,$$

$$\mathrm{NL}=r \quad ; \qquad \mathrm{N'L'}=r' \; .$$

6. Nous avons exposé, dans le tableau suivant, pour chacun des deux observateurs, les coordonnées des trois points par lesquels passe le rayon visuel, savoir :

1. Le lieu de l'observateur ;
2. Le centre de la lune ;
3. Le lieu apparent de ce centre sur le disque solaire.

| | 1.er *Observateur.* | 2.me *Observateur.* |
|---|---|---|
| 1. . . . . . . | $x$ , $y$ , $z$ , | $x'$ , $y'$ , $z'$ , |
| 2. . . . . . . | $B$ , $Q$ , $R$ , | $B$ , $Q$ , $R$ , |
| 3. . . . . . . | $A$ , $q$ , $r$ ; | $A$ , $q'$ , $r'$ . |

Nous en déduirons les quatre proportions

$$A-x : B-x = q-y : Q-y \ ,$$

$$A-x : B-x = r-z : R-z \ ,$$

$$A-x' : B-x' = q'-y' : Q-y' \ ,$$

$$A-x' : B-x' = r'-z' : R-z' \ .$$

$$(A-x)(Q-y) = (B-x)(q-y) \ ,$$

$$(A-x)(R-z) = (B-x)(r-z) \ ,$$

$$(A-x')(Q-y') = (B-x')(q'-y') \ ;$$

$$(A-x')(R-z') = (B-x')(r'-z') \ .$$

7. En éliminant ici les deux coordonnées $Q$, $R$ du centre de la lune, on en fera deux autres, auxquelles nous donnerons la forme suivante, pour en faire ressortir la symétrie

$$\frac{(A-B)y+(B-x)q}{A-x} = \frac{(A-B)y'+(B-x')q'}{A-x'} \ ;$$

$$\frac{(A-B)z+(B-x)r}{A-x} = \frac{(A-B)z'+(B-x')r'}{A-x'} \ .$$

Elles font connaître la relation entre le déplacement de l'observateur et celui du lieu apparent du centre de la lune, et contiennent ainsi la solution du problème.

8. Elles deviennent beaucoup plus simples, si on suppose l'un des deux observateurs au centre même de la terre. Il en résulte l'éclipse par laquelle le calculateur doit commencer dans tous les

cas, et que nous nommerons *éclipse géocentrique.* En plaçant au centre de la terre celui des deux observateurs à qui se rapportent les lettres accentuées $x'$, $y'$, $z'$, de même que $q'$, $r'$, on aura $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$; les coordonnées $q'$, $r'$ pourront être immédiatement déduites des tables, et regardées comme des quantités données. Les équations deviendront

$$A(A-B)y=(A-x)Bq'-Aq(B-x) \ ;$$
$$A(A-B)z=(A-x)Br'-Ar(B-x) \ .$$

9. En divisant par $(A-x)B$, et en faisant, pour abréger

$$\frac{A(B-x)}{B(A-x)}=n,$$

on aura

$$y:z=q'-nq:r'-nr \ .$$

Le *maximum* de $x$ n'est qu'un soixantième de $B$, qui n'est lui-même qu'un quatre centième de $A$; la fraction $n$ diffère donc très-peu de l'unité; ainsi, dans tous les cas, les deux rapports $y:z$ et $q'-q:r'-r$ sont presque égaux entre eux.

10. Le quarré de la distance du lieu de l'observateur au centre de la lune est égal à $(P-x)^2+(Q-y)^2+(R-z)^2$, ou à $B^2-2Px-2Qy-2Rz+c^2$; ce qui rend cette distance presque égale à $B-x$. Si l'on veut tenir compte de l'erreur, très-peu sensible, que cette formule laisse subsister, on fera cette distance égale à $B-x-\omega$; et l'on aura

$$2\omega=\frac{2Qy+2Rz-y^2-z^2}{B-x} \ .$$

11. *PROBLÈME II. Le lieu apparent du centre de la lune sur le disque solaire étant* L′, *dans le cas de l'éclipse géocentrique; on demande dans quel endroit de la terre cette éclipse paraîtra centrale, dans le même instant?*

12. *Solution.* Les quantités données sont ici $q'$, $r'$; les inconnues sont $x$, $y$, $z$; il faut les déterminer de manière que $q=0$, $r=0$. Les équations du n.° 8 fournissent

$$A(A-B)y=(A-x)Bq';$$

$$A(A-B)z=(A-x)Br';$$

c'est-à-dire,

$$y=\frac{Bq'}{A-B}, \quad z=\frac{Br'}{A-B};$$

après quoi on trouvera $x$, en vertu de $x^2=c^2-y^2-z^2$. Cette solution nous aidera à trouver, sur le globe, la courbe de l'éclipse centrale.

13. *PROBLÈME III. Déterminer, dans la même supposition, l'endroit du globe, où l'on observe, dans le même instant, le centre de la lune sur un point donné du disque solaire?*

14. Les quantités données sont ici $q$, $r$; $q'$, $r'$; les inconnues $x$, $y$, $z$, seront fournies par ces mêmes équations du n.° 8. En y supprimant $B$ dans $A-B$ et $x$ dans $A-x$ et $B-x$, on trouve

$$y=\frac{B(q'-q)}{A}, \quad z=\frac{B(r'-r)}{A}:$$

ce sont là les premières valeurs approchées des deux inconnues $y$ et $z$; elles font connaître $x$ à l'aide de $x^2=c^2-y^2-z^2$. Donc si, pour abréger, on fait $\lambda^2=(q'-q)^2+(r'-r)^2$; ce qui rend $\lambda$ égal à la distance des deux lieux apparens du centre de la lune sur le disque solaire, on aura le quarré de la troisième ordonnée $x$, égal à $c^2-\frac{B^2}{A^2}\lambda^2$; quantité que, pour abréger, nous désignerons par $h^2$, et qui, pour exprimer la valeur rigoureuse de $x^2$, a besoin d'être corrigée encore.

15. A cet effet, on fera $x=h-\omega$, et sachant d'avance que $\omega$ sera une quantité très-petite, on s'arrêtera, dans les développemens à sa première puissance. Faisant donc, pour abréger

$$F=AB(q'-q)+(Aq-Bq')h;$$

$$G=AB(r'-r)+(Ar-Br')h;$$

on trouvera

$$2\omega = \frac{F^2+G^2-(A-B)^2B^2\lambda^2}{F(Aq-Bq')+G(Ar-Br')+A^2(A-B)^2h}.$$

On peut remarquer qu'une erreur commise dans $x$ influe peu sur les coordonnées $y$, $z$; de sorte qu'après avoir déterminé $x$, et en avoir déduit $y$ et $z$, à l'aide des équations du n.° 8; on aura une nouvelle valeur de $x$, très-approchée, et beaucoup plus exacte que la précédente, en faisant $x=\sqrt{c^2-y^2-z^2}$.

16. *PROBLÈME IV. On demande l'équation de la courbe, tracée sur la surface du globe, où l'éclipse paraît d'une grandeur donnée; c'est-à-dire, où le centre de la lune, observé géocentriquement en* L' *paraît partout éloigné de celui* S *du soleil d'une même quantité, que nous désignerons par* f, *tellement que* $f^2=q^2+r^2$?

17. *Solution.* On aura donc, en vertu des équations du n.° 8,

$$A^2f^2(B-x)^2=\{(A-x)Bq'-A(A-B)y\}^2+\{(A-x)Br'-A(A-B)z\}^2.$$

Combinant cette équation avec celle du globe, savoir : $x^2+y^2+z^2=c^2$, on pourra en tirer celles des trois projections de la courbe demandée, faites sur les trois plans principaux, et dont la forme, très-compliquée, nous annoncera d'abord une courbe à double courbure.

18. Le cas le plus simple serait celui où les centres de ces trois astres seraient sur une même ligne droite; ce qui ferait du centre du soleil le lieu géocentrique de celui de la lune. Ayant alors $q'=0$, $r'=0$, les deux équations du n.° 8 deviendront

$$(B-x)q=-Ay, \quad (B-x)r=-Az;$$

d'où il résultera l'équation

$$(B-x)^2f^2=(A-B)^2(c^2-x^2),$$

qui ne renferme plus que la seule inconnue $x$. Effectivement, dans ce cas, la courbe demandée est un petit cercle du globe perpendiculaire à la ligne des centres, et dont il reste à déterminer la distance au centre de la terre, moyennant l'équation qu'on vient de trouver.

19. Faisant, pour abréger,

$$c^2 - \frac{(B^2-c^2)}{(A-B)^2} f^2 = R^2 \text{ ,}$$

la solution de notre équation du second degré donnera

$$x = \frac{Bf^2 + (A-B)^2 R}{f^2 + (A-B)^2} \text{ .}$$

Pour que la solution soit possible, il faut que $R^2$ soit une quantité positive ; il faut donc qu'on ait

$$f^2 < \frac{(A-B)^2 c^2}{B^2-c^2} \text{ ;}$$

ou bien, en supprimant $B$ dans $A-B$ et $c^2$ dans $B^2-c^2$,

$$f < \frac{Ac}{B} \text{ ;}$$

conclusions évidentes d'ailleurs.

20. Pour donner une solution, au moins approximative, du problème général, supprimons, dans les deux équations du n.° 8, $B$ dans $A-B$, et $x$ dans $A-x$ et $B-x$ ; elles deviendront

$$Bq = Bq' - Ay \text{ , } \quad Br = Br' - Az \text{ ;}$$

d'où l'on tire, en ajoutant les quarrés de part et d'autre,

$$\frac{B^2 f^2}{A^2} = \left(\frac{Bq'}{A} - y\right)^2 + \left(\frac{Br'}{A} - z\right)^2 \text{ :}$$

équation de la projection de la courbe demandée, faite sur le plan mené par le centre de la terre, perpendiculairement à la ligne des centres.

21. Cette équation appartient à un cercle ayant pour rayon $\frac{Bf}{A}$, et dont le centre est éloigné de l'axe des $x$, de $\frac{Bq'}{A}$ dans le sens des $y$, et de $\frac{Br'}{A}$ dans celui des $z$. La courbe en question est donc celle qui résulte de l'intersection de la sphère et du cy-

lindre droit. Tant que l'axe du cylindre passe par le centre de la sphère, cette intersection est un cercle, perpendiculaire sur l'axe; c'est le cas que nous avons examiné précédemment. Dans tous les autres cas, ce sera une courbe à double courbure.

22. Des trois axes principaux auxquels nous avons rapporté jusqu'ici le lieu de l'observateur, celui des $x$ était dirigé vers le centre du soleil ; celui des $y$ était perpendiculaire au premier, dans le plan de l'écliptique; et celui des $z$ perpendiculaire aux précédens, était dirigé vers son pôle. Pour nous rapprocher des longitudes et des latitudes géographiques, nous introduirons trois nouveaux axes rectangulaires, ayant encore leur intersection commune au centre de la terre, afin d'y rapporter nos trois nouvelles variables que nous désignerons par les lettres majuscules $X$, $Y$, $Z$. L'axe des $X$ sera dirigé vers le point d'équinoxe du printemps ; l'axe des $Y$ sera dans la colure des solstices et dirigé vers le 90.$^{me}$ degré de l'équateur; enfin, l'axe des $Z$ sera dirigé vers le pôle de ce grand cercle.

23. Le triangle sphérique tri-rectangle que j'ai nommé *orthoèdre*, est le représentant de tout système de trois axes rectangulaires entre eux. Leur point commun d'intersection est le centre de la sphère, dont la surface comprend huit orthoèdres. Si d'un point I, pris dans l'espace, on mène au sommet commun une droite que nous prendrons pour unité, et qui fasse avec eux les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, on aura trois triangles-rectangles, dont les bases, Cos.$\alpha$, Cos.$\beta$, Cos.$\gamma$, seront les coordonnées du point I, rapporté à nos trois axes rectangulaires. Ces angles seront remplacés dans l'orthoèdre, dont nous supposons les trois sommets A, B, C, par les trois arcs de grands cercles AI, BI, CI, menés du point I aux trois sommets de l'orthoèdre; ainsi les trois lettres $x$, $y$, $z$, employées pour désigner les coordonnées de I, seront équivalentes à Cos.$\alpha$, Cos.$\beta$, Cos.$\gamma$.

24. En regardant l'orthoèdre A′B′C′ (fig. 2), comme le représentant du système des trois axes rectangulaires que nous avons

employés

employés jusqu'ici, on pourra prendre le côté $A'B'$ pour le plan de l'écliptique, le troisième sommet $C'$ pour le pôle de ce plan, et le sommet $A'$ pour le lieu apparent du soleil, vu du centre de la terre, qui est le même que celui de l'orthoèdre. Prolongeant le côté $A'B'$ jusqu'au point d'*aries* qui est ici désigné par $A$, et menant sur la surface de la sphère l'arc $AB$, faisant avec $AA'B'$ un angle égal à l'obliquité de l'écliptique, le grand cercle dont $AB$ fait partie pourra représenter l'équateur. Il ne restera donc plus qu'à prendre l'arc $AB$ égal à un quart de circonférence, et assigner la position du point $C$, pôle de cet arc, pour avoir, dans le nouvel orthoèdre $ABC$, le représentant du nouveau système de coordonnées que nous avons désigné d'avance par les lettres majuscules $X$, $Y$, $Z$.

25. Soit $\varepsilon$ l'obliquité de l'écliptique, et $\alpha$ l'arc $AA'$, longitude du soleil au moment de l'observation. Menons des trois sommets de l'un des deux orthoèdres aux trois sommets de l'autre des arcs de grands cercles, qui ne sont pas exprimés dans la figure, mais qu'il est aisé d'imaginer; on aura

$$AA'=\alpha\ ;\qquad \mathit{Cos}.BA'=\mathrm{Cos}.\varepsilon\mathrm{Sin}.\alpha\ ,\qquad \mathit{Cos}.CA'=\mathrm{Sin}.\varepsilon\mathrm{Sin}.\alpha\ ,$$

$$AB'=90^\circ+\alpha\ ;\qquad \mathit{Cos}.BB'=\mathrm{Cos}.\varepsilon\mathrm{Cos}.\alpha\ ,\qquad \mathit{Cos}.CB'=\mathrm{Sin}.\varepsilon\mathrm{Cos}.\alpha\ ,$$

$$AC'=90^\circ\ ;\qquad BC'=90^\circ+\varepsilon\ ;\qquad CC'=\varepsilon\ .$$

26. En vertu du n.° 24, on aura, pour nos deux orthoèdres,

$$x=\mathit{Cos}.A'I\ ,\qquad X=\mathit{Cos}.AI\ ,$$

$$y=\mathit{Cos}.B'I\ ,\qquad Y=\mathit{Cos}.BI\ ,$$

$$z=\mathit{Cos}.C'I\ ,\qquad Z=\mathit{Cos}.CI\ .$$

Reste donc à passer, avec facilité, de l'un de nos deux systèmes de coordonnées à l'autre; ce qui sera l'objet du théorème suivant :

27. *THÉORÈME. Désignant par* p, q, r, *les coordonnées d'un point quelconque* A *d'une surface sphérique, et par* p', q', r', *celles d'un autre point quelconque* B *de la même surface; le cosinus de*

*l'arc de grand cercle* AB, *compris entre ces deux points, sera* $\mathrm{Cos.AB}=pp'+qq'+rr'$.

28. En combinant ensemble les formules des trois derniers n.os, on aura pour résultat les six égalités qui suivent, lesquelles renferment la solution du problème qui nous occupe,

$$x=+X\mathrm{Cos.}\alpha+Y\mathrm{Cos.}\varepsilon\mathrm{Sin.}\alpha+Z\mathrm{Sin.}\varepsilon\mathrm{Sin.}\alpha\ ,$$

$$y=-X\mathrm{Sin.}\alpha+Y\mathrm{Cos.}\varepsilon\mathrm{Cos.}\alpha+Z\mathrm{Sin.}\varepsilon\mathrm{Cos.}\alpha\ ,$$

$$z=\qquad -Y\mathrm{Sin.}\varepsilon\qquad +Z\mathrm{Cos}\,\varepsilon\ ;$$

et réciproquement

$$X=x\mathrm{Cos.}\alpha\qquad -y\mathrm{Sin.}\alpha\ ,$$

$$Y=x\mathrm{Cos.}\varepsilon\mathrm{Sin.}\alpha+y\mathrm{Cos.}\varepsilon\mathrm{Cos.}\alpha-z\mathrm{Sin.}\varepsilon\ ,$$

$$Z=x\mathrm{Sin.}\varepsilon\mathrm{Sin.}\alpha+y\mathrm{Sin.}\varepsilon\mathrm{Cos.}\alpha+z\mathrm{Cos.}\varepsilon\ .$$

29. L'angle que fait, dans un instant donné, le méridien d'un lieu avec le colure des équinoxes, est ce qu'on appelle *ascension droite du milieu du ciel*, *ascension droite du méridien*, ou *angle horaire de l'équinoxe*; et, comme, dans toute cette analise, l'un de ses deux côtés sera toujours le colure des équinoxes, nous le nommerons simplement *angle horaire*. Au moment du midi vrai, l'angle horaire sera donc égal à l'ascension droite du soleil. Et si l'on désigne par $A$ l'ascension droite du soleil au midi vrai d'un certain jour, et par $A'$ ce qu'elle sera au midi vrai du jour suivant, l'angle horaire aura augmenté, pendant cet intervalle de $360°+A'-A$; quantité que, pour abréger, nous désignerons par $\alpha$. Comme de plus cette augmentation sera proportionnelle au temps, il s'ensuit qu'en prenant pour unité la durée entière d'un jour solaire, l'angle horaire, au bout du temps $t$, considéré comme une fraction quelconque du jour sera égal $A+\alpha t$.

30. Si de plus on désigne par $D$ la différence angulaire entre le méridien dont nous parlons et un autre méridien du globe situé à son orient; l'angle horaire au moment du midi vrai étant $A$ pour

le premier des deux, il sera pour le second, dans le même instant, égal à $A+D$; et, après une fraction de jour exprimée par $t$, il sera $A+D+\alpha t$, en conservant à $\alpha$ sa signification $\alpha=A'-A+360°$. Ainsi, désignant généralement l'angle horaire par $\mu$, on aura $\mu=A+D+\alpha t$.

31. L'autre angle qui sert à déterminer la position du lieu de l'observateur, par rapport à nos trois plans principaux, c'est la latitude du lieu : nous la désignerons par $\lambda$. L'angle $\lambda$ est une quantité constante pour chaque lieu de la terre; l'angle $\mu$ est une quantité variable qui, pendant sa rotation, varie proportionnellement au temps.

32. La tangente de l'angle horaire est, dans tous les cas, égale à $\frac{Y}{X}$; et, dans la supposition d'une terre sphérique, la latitude $\lambda$ a pour sinus $\frac{Z}{c}$; Il en résulte

$$X=c\text{Cos.}\lambda\text{Cos.}\mu\ ,$$

$$Y=c\text{Cos.}\lambda\text{Sin.}\mu\ ,$$

$$Z=c\text{Sin.}\lambda\ .$$

Moyennant ces formules, on aura, pour chaque instant, les coordonnées $X$, $Y$, $Z$ de tout lieu dont on connaît la latitude. Les formules du n.° 28 nous aideront à en déduire les coordonnées $x$, $y$, $z$, qui se rapportent immédiatement à la phase de l'éclipse, et qui pourront servir dans l'application des formules du n.° 8.

33. L'applatissement de la terre, si toutefois on veut y faire attention, dans les calculs sur les éclipses, apportera quelques légères modifications à nos formules. En conservant la lettre $c$ pour désigner le demi-petit axe BC du globe (fig. 3) : et en nommant $a$ le grand axe AC, la latitude du point M ne sera plus l'angle ACM; ce sera l'angle ARM que fait le grand axe AC avec la normale MR. En supposant de plus aux méridiens une forme elliptique, on aura

$$\overline{\mathrm{CM}}^2=\frac{a^4\mathrm{Cos.}^2\lambda+c^4\mathrm{Sin.}^2\lambda}{a^2\mathrm{Cos.}^2\lambda+c^2\mathrm{Sin.}^2\lambda}\ ;$$

$$\overline{\mathrm{CP}}^2=\frac{a^4\mathrm{Cos.}^2\lambda}{a^2\mathrm{Cos.}^2\lambda+c^2\mathrm{Sin.}^2\lambda}\ ,\qquad \overline{\mathrm{PM}}^2=\frac{c^4\mathrm{Sin.}^2\lambda}{a^2\mathrm{Cos.}^2\lambda+c^2\mathrm{Sin.}^2\lambda}\ :$$

La ligne $PM$ est toujours la même que l'ordonnée $Z$, tandis que CP est identique avec $\sqrt{X^2+Y^2}$.

34. Si, en faisant $a=c+\omega$, on s'arrête, dans les développemens, aux premières puissances de $\omega$, on aura

$$\mathrm{CM}=c+\omega\mathrm{Cos.}^2\lambda\ ,$$

$$\mathrm{CP}=c\mathrm{Cos.}\lambda+\omega\mathrm{Cos.}\lambda(2-\mathrm{Cos.}^2\lambda)\ ;$$

$$\mathrm{PM}=c\mathrm{Sin.}\lambda-\omega\mathrm{Sin.}\lambda\mathrm{Cos.}^2\lambda\ ;$$

et, en mettant ces deux expressions à la place de $c\mathrm{Cos.}\lambda$ et de $c\mathrm{Sin.}\lambda$, on pourra encore employer les trois formules du n.° 33, même dans la supposition d'une terre sphéroïdique.

35. Le calcul de l'éclipse géocentrique n'a aucune difficulté. Il faudra déterminer, pour chaque instant proposé, les coordonnées $\mathrm{SN}'=q'$, $\mathrm{N}'\mathrm{L}'=r'$ (fig. 1), du lieu géocentrique du centre de la lune sur le disque solaire. Ayant déjà désigné par $L$ la longitude du soleil, soit $\eta$ la longitude de la lune, et $\theta$ sa latitude; on aura

$$q'=A\mathrm{Tang.}(\eta-\alpha)\qquad r'=A\mathrm{Tang.}\theta\ :$$

ce sont là les valeurs absolues de ces coordonnées. Pour avoir leurs valeurs angulaires, exprimées en minutes et secondes du cercle dont le rayon est *un*, il faudra diviser par $A$; on aura ainsi

$$q'=\eta-\alpha\ ,\qquad r'=\theta\ .$$

36. Dans l'intervalle d'un midi à l'autre, la longitude du soleil croît proportionnellement au temps. Dans la connaissance des temps, année 1816, je trouve cette longitude

Pour le 18 novembre, à midi. . . . . . $180°+56°.4'.\ 2''$,

Pour le 19 novembre, à midi. . . . . . $180°+57°.4'.48''$, Comme les deux différences du 18 au 19 et du 19 au 20 sont rigoureusement égales, la simple progression arithmétique suffit; ainsi, la longitude du soleil, au bout du temps $t$, comptée depuis le midi vrai du 18, en prenant pour unité la durée d'un jour solaire, sera $\alpha = 180° + 56°.4'.2'' + 3640''t$.

37. Il n'en est pas de même de la lune, dont les inégalités, pendant ce même intervalle de temps, sont déjà très-sensibles. La longitude de cet astre est égale à *sept* signes, *plus*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Le 18 à midi. . . . . . . | 13°. 8'. 9'' | = 47289'' | , |
| Le 18 à minuit. . . . . . | 20 .32 .49 | = 73969 | , |
| Le 19 à midi. . . . . . . | 27 .54 .45 | = 100485 | , |
| Le 19 à minuit. . . . . . | 35 .13 . 6 | = 126786 | . |

Le premier terme de la colonne est 47289''; sa première différence est +26680''; sa seconde différence est −164''; et sa troisième différence est −51''. Ces deux dernières sont très-sensibles encore. Les quatre valeurs sont comprises dans la formule

$$\nu = 7^s + 47289'' + 55490''t - 226''t^2 - 68''t^3;$$

il faudra s'en servir pour trouver, avec précision, les valeurs des longitudes intermédiaires.

38. On trouve de même la latitude de la lune

| | | | |
|---|---|---|---|
| Le 18 à midi. . . . . . . | 2°. 4'.36'' | = 7476'' | , |
| Le 18 à minuit. . . . . . | 1 .25 .54 | = 5154 | , |
| Le 19 à midi. . . . . . . | .45 .58 | = 2758 | , |
| Le 19 à minuit. . . . . . | 5 .34 | = 334 | . |

Le premier terme de la colonne est 7476''; sa première différence est −2322''; la seconde est −74''; la troisième est +46''. Elles nous font connaître les valeurs exactes des latitudes intermédiaires, au moyen de la formule

$$\theta = 7476'' - 4538''t - 244''t^2 - 64''t^3.$$

39. Pour nous débarrasser de l'emploi de ces polynômes, il faudra resserrer les limites du temps. L'éclipse est comprise, pour l'observateur de Berlin, entre huit heures du matin et midi, temps vrai de Paris. On trouve, à l'aide de nos formules, qu'à huit heures du matin, la longitude de la lune sera $180^\circ + 51^\circ.27'.48''$, et sa latitude $59'.22''$. A midi vrai du même jour, sa longitude sera $180^\circ + 57^\circ.54'.45''$, et sa latitude $13'.24''$. Pendant cet intervalle de quatre heures, sa longitude aura donc changé de $2^\circ.26'.57''$, et sa latitude de $13'.24''$. A ces mêmes huit heures du matin, la longitude du soleil aura été $180^\circ + 56^\circ.54'.35''$, elle aura donc changé, jusqu'à midi vrai du même jour, de $10'.7''$; ce qui nous permettra d'exprimer nos trois quantités angulaires par de simples binômes, de la forme $A + Bt$. On aura donc alors, en prenant l'intervalle de quatre heures pour l'unité du temps $t$, lequel sera compté depuis huit heures du matin, temps vrai de Paris,

$$\alpha = 180^\circ + 56^\circ.54'.35'' + 607''t,$$

$$\eta = 180^\circ + 55^\circ.27'.48'' + 8817''t,$$

$$\theta = 59'.22'' - 804''t;$$

donc

$$q' = \eta - \alpha = -5207'' + 8210''t,$$

$$r' = \theta = +3562'' - 804''t.$$

40. Il nous sera donc permis de supposer, en général, $q = M + mt$; $r = N + nt$; les facteurs numériques $M$, $N$, $m$, $n$, étant immédiatement donnés par les tables. Dans le cas de l'éclipse de 1816, on aura donc

$$M = -5207''; \quad m = +8210'',$$

$$N = +3562'', \quad n = -804''.$$

Le temps $t$, exprimé en fonction de l'intervalle de quatre heures, sera compté depuis huit heures du matin, temps vrai de Paris.

41. Le moment de la conjonction est indiqué par $q=0$, d'où il résulte $t=-\frac{M}{m}$. Dans l'éclipse géocentrique de 1816, on aura $t=0,634226$; la conjonction arrivera donc à $10^h.32'.13''$ du matin; la latitude de la lune sera alors $\frac{Nm-Mn}{m}$; ce qui fait, dans le cas actuel, $3052''$ ou $5'.50''$

42. La plus courte distance apparente des centres, vue de celui de la terre, indiquera le milieu de l'éclipse géocentrique; elle répond à $t=-\frac{Mm+Nn}{m^2+n^2}$; elle sera égale à $\frac{Mn-Nn}{\sqrt{m^2+n^2}}$. Dans l'éclipse de 1816, on aura $t=0,670286$; ce qui répond à $10^h.40'.52''$; et elle sera égale à $3037''=50'.37''$.

43. Le jour de l'éclipse, les deux demi-diamètres apparens du soleil et de la lune seront respectivement $973''$ et $787''$; ce qui donne pour leur somme $1960''$. Comme cette somme est beaucoup plus petite que la moindre distance géocentrique des deux centres, on voit qu'il n'existera pas d'éclipse géocentrique; le centre de la terre ne pouvant entrer ni dans l'ombre de la lune, ni même dans sa pénombre. Cela n'empêchera pas de déterminer, pour chaque instant, les deux coordonnées $q'$, $r'$; mais, quelque valeur qu'on suppose à $t$, le lieu apparent du centre de la lune sera toujours beaucoup au-delà du disque solaire : l'éclipse, en effet, ne sera visible que pour une partie de l'hémisphère boréal du globe.

44. On trouve, dans la connaissance des temps, et en employant une interpolation convenable, que le 19 novembre, à 10 heures du matin, temps vrai de Paris, le demi-diamètre apparent du soleil est de $973''4$, et celui de la lune $987''$. En supposant le rayon de la terre égal à l'unité, celui du soleil sera 111,48, et celui de la lune 0,273 ( *LALANDE*, *abrégé d'astronomie* ). Divisant les premiers nombres par les derniers, on aura les parallaxes horizontales au moment du milieu de l'éclipse géocentrique, pour lequel il faut

prendre ici celui de la plus petite distance apparente des centres ; elle sera $8'',7345$ pour le soleil et $3617''$ pour la lune. Passant de là aux distances réelles, on aura

La première $A = 23615$ ; $\text{Log.}A = 4,3731879$ ;

La seconde $B = 57,0765$ ; $\text{Log.}B = 1,7560767$ .

45. Les ascensions droites du soleil, au midi vrai du 18 et du 19 novembre, seront, d'après les tables,

Au 18 . . . . . $A = 180° + 53°.44'.28''$ ,

Au 19 . . . . . $A' = 180° + 54.47.2''$ .

La différence est $1°.2'.34''$, ou $3754''$. On aura donc $\alpha = 360° + 3754''$, ce qui rend l'angle horaire $\mu = 233°.44'.28'' + (360° + 3754'')t$ ; le temps étant compté depuis le midi vrai du 18 novembre, et exprimé en fraction d'un jour solaire. Pour établir de la conformité entre nos formules, il vaudra mieux prendre l'intervalle de quatre heures pour unité de temps, et compter depuis huit heures du matin. On aura alors $\mu = 174°.36'.36'' + 216626''t$. Pour tout autre observateur, placé à l'orient de Paris, il faudra ajouter à cette formule la différence angulaire des méridiens, que nous avons désignée par $D$. Pour Berlin, on aura $D = 11°.2'$, faisant en temps $44'.8''$.

46. Pour donner une application de nos formules, poursuivons l'éclipse du 19 novembre d'heure en heure, depuis huit heures du matin jusqu'à midi, en supposant l'observateur placé à Berlin, qui a pour hauteur du pôle. $\lambda = 52°.31'.45''$. La lettre $t$ se rapportera toujours au temps vrai de Paris. Il faudra commencer par $q'$, $r'$, coordonnées du centre de la lune, observé du centre de la terre. Elles formeront deux progressions arithmétiques, ayant pour leurs premiers termes,

Celle de $q'$ . . . . . $-5207''$ ,

Celle de $r'$ . . . . . $+3562''$ ;

et pour leurs différences,

celle

Celle de $q'$ . . . . . . $+2055''$ ,

Celle de $r'$ . . . . . . $-\ 201''$ .

Les longitudes du soleil et les angles horaires formeront aussi deux progressions arithmétiques, ayant pour leurs premiers termes,

Celle de la longitude $\alpha$ . . . . . $236.^\circ 54'.35''$ ,

Celle de l'angle horaire $\mu$ . . . . $185.^\circ 38'.36''$ ;

et pour différences

Celle de la longitude $\alpha$ . . . . $2'.32''$ ,

Celle de l'angle horaire $\mu$ . . . $15.^\circ 2'.36''$ .

Voici la table ;

| Temps. | $q'$ | $r'$ | $\alpha = 180^\circ +$ | $\mu = 189^\circ +$ |
|---|---|---|---|---|
| $8^h$. | $-5207''$ | $+3562''$ | $56^\circ.54'.35''$ | $5^\circ.38'.36''$ |
| 9. | $-3154$ | $+3361$ | 56 .57 . 7 | 20 .41 .12 |
| 10. | $-1102$ | $+3160$ | 56 .59 .39 | 35 .43 .48 |
| 11. | $+\ 950$ | $+2959$ | 57 . 2 .11 | 50 .46 .24 |
| 12. | $+3003$ | $+2758$ | 57 . 4 .43 | 65 .49 . 0 |

47. La latitude connue de Berlin, et les angles horaires qu'on vient de déterminer, conduisent aux coordonnées $X$, $Y$, $Z$, moyennant les formules du n.° 32 ; ensuite de quoi celles du n.° 28 feront connaître, sans difficulté, les coordonnées $x$, $y$, $z$, dont la valeur numérique est changée à chaque instant, en vertu de la rotation

du globe, ainsi que des mouvemens propres du soleil et de la lune. En voici la table :

| Temps. | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| 8.h | 0,1117452 | —0,6497894 | 0,7580235 |
| 9. | 0,2107286 | —0,5418849 | 0,8136055 |
| 10. | 0,2772901 | —0,4087702 | 0,8694922 |
| 11. | 0,3068908 | —0,2595157 | 0,9156797 |
| 12. | 0,2975057 | —0,1042659 | 0,9490080 |

48. Les coordonnées $x$, $y$, $z$, meneront immédiatement à celles que nous avons désignées par $q$, $r$, et qui détermineront le lieu apparent du centre de la lune sur le disque du soleil, moyennant les formules du n.° 8, savoir :

$$Aq(B-x)=(A-x)Bq'-A(A-B)y \,,$$

$$Ar(B-x)=(A-x)Br'-A(A-B)z \,.$$

Comme la plus grande valeur de $x$ de la table n'est encore qu'un quatre-vingt millième de $A$, nous pouvons supprimer $x$ dans $A-x$; ce qui réduit nos formules à

$$(B-x)q=Bq'-(A-B)y \,,$$

$$(B-x)r=Br'-(A-B)z \,.$$

Ces formules font connaître les valeurs absolues de $q$, $r$. Pour les réduire en secondes, il faudra diviser $A-B$ par $A$Tang.1″; il en résultera le quotient 205767; et, en désignant ce quotient par $n$, on aura

$$(B-x)q=Bq'-ny,$$

$$(B-x)r=Br'-nz.$$

Ces formules nous feront connaître les grandeurs apparentes des coordonnées $q$, $r$, vues de l'observatoire de Berlin et exprimées en secondes. Nous avons ajouté, dans la troisième colonne de la table ci-jointe, la distance apparente du centre du soleil à celui de la lune, c'est-à-dire, $\sqrt{q^2+r^2}$.

| Temps. | $q$ | $r$ | $\sqrt{q^2+r^2}$ |
|---|---|---|---|
| 8.$^h$ | −2868″ | +850″ | 2991″ |
| 9. | −1204 | +427 | 1278 |
| 10. | + 375 | − 23 | 376 |
| 11. | +1897 | −347 | 1928 |
| 12. | +3396 | −670 | 3461 |

49. Pour rendre cette table plus complète, en la construisant de quart d'heure en quart d'heure, il faudra employer l'interpolation; on aura

| Temps. | $q$ | $r$ | Distances des centres. |
|---|---|---|---|
| 8.$^h$ 0′ | −2868″ | +850″ | 2991″ |
| 8. 15 | −2443 | +743 | 2565 |
| 8. 30 | −2023 | +637 | 2121 |
| 8. 45 | −1611 | +532 | 1701 |
| 9. 0 | −1204 | +427 | 1278 |
| 9. 15 | − 802 | +323 | 876 |
| 9. 30 | − 405 | +222 | 461 |
| 9. 45 | − 13 | +121 | 122 |
| 10. 0 | + 375 | − 23 | 376 |
| 10. 15 | + 759 | − 73 | 756 |
| 10. 30 | +1141 | −167 | 1153 |
| 10. 45 | +1519 | −258 | 1541 |
| 11. 0 | +1897 | −347 | 1928 |
| 11. 15 | +2272 | −432 | 2313 |
| 11. 30 | +2646 | −515 | 2696 |
| 11. 45 | +3021 | −594 | 3079 |
| 12. 0 | +3396 | −670 | 3461 |

La méthode d'interpolation que nous avons employée, pour construire cette table, sera l'objet du problème qui suit :

50. *PROBLÈME IV. Soit* y *une fonction de* x, *telle que*

*Pour* $x=0$, 1, 2, 3, 4, ........;

*On ait* y=a, b, c, d, e, ........;

*on demande de comprendre toutes ces valeurs particulières dans une seule formule, telle que* $y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots$, *et de faire connaître la loi générale des coefficiens*, A, B, C, D,....?

41. *Solution.* Désignons par $\Delta a$, $2\Delta^2 a$, $6\Delta^3 a$, $24\Delta^4 a$,....., les première, seconde, troisième, quatrième,..... différences du premier terme de la colonne; tellement que

$$\begin{aligned}
\Delta a &= b-a,\\
2\Delta^2 a &= c-2b+a;\\
6\Delta^3 a &= d-3c+3b-a,\\
24\Delta^4 a &= e-4d+6c-4b+a;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

on aura alors

$$\begin{aligned}
A &= a\\
B &= \Delta a-\Delta^2 a+2\Delta^3 a-6\Delta^4 a+24\Delta^5 a-\ldots;\\
C &= \Delta^2 a-3\Delta^3 a+11\Delta^4 a-50\Delta^5 a+\ldots;\\
D &= \Delta^3 a-6\Delta^4 a+35\Delta^5 a-\ldots,\\
E &= \Delta^4 a-10\Delta^5 a+\ldots;\\
F &= \Delta^5 a-\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

52. Les coefficiens numériques de ces suites sont les mêmes que ceux des facultés des divers degrés. La faculté de $x$ à exposant *cinq*,

qui est le développement du produit $x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ ou $x^5+10x^4+35x^3+50x^2+24x$, a pour ses coefficiens 1, 10, 35, 50, 24; et tels sont aussi les nombres de la colonne verticale des $\Delta^5 a$. La série est d'un grand usage, sur-tout dans les cas où les différences $\Delta a$, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, $\Delta^4 a$, .... vont rapidement en décroissant; ce qui rend la suite $A+Bx+Cx^2+....$ très-convergente; mais le défaut même de cette circonstance n'ôte rien à sa généralité.

53. L'application de ces formules à la table du n.° 48 donne

$$12q=-34416+20572t-645t^2+38t^3+3t^4,$$
$$12r=+10800-5124t+13t^2+36t^3-t^4,$$
$$6\sqrt{q^2+r^2}=+17946-3251t-1381 5t^2+7817t^3-1029t^4.$$

54. Une interpolation analogue, faite dans la table du n.° 49, nous apprendra que la moindre distance des centres, qui indique le milieu de l'éclipse, aura lieu à $9^h.46'.44''$, temps vrai de Paris; ce qui équivaut à $10^h.30'.52''$, temps vrai de Berlin. Une détermination générale et plus rigoureuse, sera l'objet du problème suivant.

55. ***PROBLÈME V.*** *On demande la relation générale qui existe, au moment du milieu de l'éclipse, ou de la plus grande phase, entre le temps et la position géographique du lieu de l'observateur?*

56. *Solution.* L'épaisseur de la partie éclipsée est généralement égale à la somme des deux demi-diamètres du soleil et de la lune, moins la distance de leurs centres; le moment de la plus grande phase est donc celui de la moindre distance des centres. Le quarré de cette distance est $q^2+r^2$; on aura donc, pour le cas du *minimum*, l'équation $q\mathrm{d}q+r\mathrm{d}r=0$. Or, nous avons n.° 8 les deux équations qui suivent:

$$Aq(B-x)=(A-x)Bq'-A(A-B)y;$$
$$Ar(B-x)=(A-x)Br'-A(A-B)z.$$

Nous avons de plus

$$\left.\begin{array}{l} q' = M + mt\ ; \\ r' = N + nt\ ; \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} \mathrm{d}q' = m\mathrm{d}t\ ; \\ \mathrm{d}r' = n\mathrm{d}t\ . \end{array}\right.$$

Les coordonnées géocentriques $q'$, $r'$ sont fonctions du temps seul; mais les coordonnées $x$, $y$, $z$, sont fonctions du temps et de la position géographique du lieu de l'observateur, c'est-à-dire, de sa longitude et de sa latitude. Elles doivent donc, toutes les trois, être considérées comme variables.

57. En différenciant, sous ce point de vue, les deux équations du n.° 8, et y introduisant $m\mathrm{d}t$ et $n\mathrm{d}t$, en place de $\mathrm{d}q'$ et $\mathrm{d}r'$, il vient

$$A(B-x)\mathrm{d}q = (Aq-Bq')\mathrm{d}x - A(A-B)\mathrm{d}y + (A-x)Bm\mathrm{d}t\ ,$$
$$A(B-x)\mathrm{d}r = (Ar-Br')\mathrm{d}x - A(A-B)\mathrm{d}z + (A-x)Bn\,\mathrm{d}t\ .$$

Mais, les équations du problème donnant

$$(B-x)(Aq-Bq') = (A-B)(Bq'-Ay)\ ,$$
$$(B-x)(Ar-Br') = (A-B)(Br'-Az)\ ,$$

changent les dernières dans les suivantes

$$\begin{aligned} A(B-x)^2\mathrm{d}q = {} & (A-B)(Bq'-Ay)\mathrm{d}x \\ & -A(A-B)\,(B-x)\,\mathrm{d}y \\ & +(A-x)(B-xBm\mathrm{d}t\ ; \\ A(B-x)^2\mathrm{d}r = {} & (A-B)(Br'-Az)\mathrm{d}x \\ & -A(A-B)\,(B-x)\,\mathrm{d}z \\ & +(A-x)(B-x)Bn\mathrm{d}t\ . \end{aligned}$$

58. Il ne reste plus qu'à prendre la somme des produits respectifs de ces deux équations par $q$ et $r$, pour former la fonction $q\mathrm{d}q + r\mathrm{d}r$ qui, égalée à zéro, doit donner la plus courte distance des centres. En posant, pour abréger,

$$(Bq'-Ay)q+(Br'-Az)r=P\ ,$$

il en résultera l'équation

$$(A-B)P\mathrm{d}x=A(A-B)(B-x)(q\mathrm{d}y+r\mathrm{d}z)-(A-x)(B-x)B(mq+nr)\mathrm{d}t\ .$$

59. L'équation de la sphère $x^2+y^2+z^2=0$, donne, en différenciant $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=0$. On pourra donc éliminer la différentielle $\mathrm{d}x$ de l'équation précédente ; il viendra ainsi

$$B(A-x)(B-x)(mq+nr)x\mathrm{d}t=(A-B)\{Py+A(B-x)qx\}\mathrm{d}y$$
$$+(A-B)\{Pz+A(B-x)rx\}\mathrm{d}z\ .$$

60. En conséquence, si l'on suppose que le moment d'une plus grande phase est donnée d'avance, ce qui rend $\mathrm{d}t=0$, et qu'on demande l'endroit de la terre où l'observateur doit se placer, pour voir cette moindre distance apparente des centres sous un angle donné, il faudra égaler séparément à zéro les deux coefficiens de $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$. Il en résultera les deux équations qui suivent :

$$0=Py+A(B-x)qx\ ,\quad 0=Pz+A(B-x)rx\ .$$

61. Ces équations donnent immédiatement $\frac{y}{z}=\frac{q}{r}$ ; de sorte qu'on peut faire $y=kq$, $z=kr$. Les équations du n.° 8 deviendront alors

$$(A-x)Bq'=A(A-B)kq+A(B-x)q\ ,$$
$$(A-x)Br'=A(A-B)kr+A(B-x)r\ ,$$

de sorte qu'en faisant, pour abréger

$$nA(A-B)+A(B-x)=F$$

on aura

$$(A-x)Bq'=Fq\ ,$$
$$(A-x)Br'=Fr\ ;$$

ainsi donc, au moment de la plus grande phase, quelle que soit d'ailleurs sa grandeur absolue ; on a toujours $\frac{q}{r}=\frac{q'}{r'}=\frac{y}{z}$ ; d'où résulte le théorème qui suit :

62.

61. *THÉORÈME. Les lieux apparens du centre de la lune sur le disque solaire, vus de différens points du globe, au même moment d'une plus grande phase, sont situés sur une ligne droite, qui passe par le centre du disque.*

# GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

## *Construction géométrique des équations du deuxième degré à deux et à trois variables;*

Par M. Bérard, principal et professeur de mathématiques du collége de Briançon, membre de plusieurs sociétés savantes.

Le sujet dont je me propose ici d'entretenir le lecteur a déja été tant de fois rebattu, qu'il n'est plus, pour ainsi dire, permis d'y revenir de nouveau, sans bien préciser d'abord ce qu'on se propose d'ajouter aux théories déjà connues.

On n'avait encore, pour la recherche des grandeur et direction des diamètres principaux, dans les lignes et surfaces du second ordre, que des méthodes indirectes et compliquées, lorsqu'en 1810 je publiai, dans mes *Opuscules*, l'équation dont les racines sont les quarrés des demi-diamètres principaux des lignes du second ordre, rapportées à des axes rectangulaires; équation que j'y déduisais de la méthode *de maximis et minimis*.

M. Gergonne, ignorant sans doute ce que j'avais fait sur ce sujet, y revint peu après, par des procédés analogues (*Annales*, tom. II, pag. 335)

Auparavant (*Annales*, tom. II, pag. 33), M. Bret avait donné, par la transformation des coordonnées, appliquée d'une manière ingénieuse qui lui est propre, l'équation qui conduit à la détermination des diamètres principaux, dans les surfaces du second ordre, rapportées à des axes rectangulaires.

En octobre 1813 (*Annales*, tom. III, pag. 105), je donnai, pour la première fois, l'équation aux quarrés des demi-diamètres principaux des lignes et surfaces du second ordre, rapportée à des axes obliques quelconques. Cette équation remarquable, ainsi que les théorèmes que j'en ai déduits, ont été reproduits par M. Binet (*Journal de l'école polytechnique*, XVI.e cahier, pag. 321), par M. Hachette (*Traité des surfaces du second degré*, Paris 1813), et par M. Garnier (*Géométrie analitique*, pag. 372).

M. Bret (*Annales*, tom. IV, pag. 93), étendit ensuite ses méthodes au cas général des axes obliques.

Je rassemblai tout ce que j'avais fait sur ce sujet dans un mémoire que je publiai en 1814 (voyez l'annonce, *Annales*, février 1814), et dans lequel je m'occupai également des lignes et surfaces du second ordre dépourvues de centre, dont il n'avait pas encore été traité jusqu'alors.

M. Gergonne (*Annales*, tom. V, pag. 61), a donné une méthode très-simple et très-remarquable, pour la discussion géométrique des équations du second degré à deux et à trois variables, dans l'hypothèse des axes obliques; mais on peut raisonnablement regretter que l'auteur n'ait point été aussi heureux dans la recherche des longueurs des demi-diamètres principaux.

Enfin, M. Bret (*Annales*, tom. V, pag. 357), a donné une méthode nouvelle, assez briève, et dégagée de toute application du calcul différentiel, pour parvenir, dans les lignes et surfaces qui ont un centre, et, quelle que soit la direction des axes, à l'équation dont les racines sont les quarrés des demi-diamètres principaux.

Il est certes bien loin de ma pensée de revenir ici de nouveau sur le mode de discussion employé par M. Gergonne, et qui paraît laisser bien peu de choses à désirer; mon dessein est seulement, en admettant comme déjà connues toutes les vérités que ce mode de discussion, ou tout autre équivalent, peut faire découvrir, de montrer comment on peut facilement construire la ligne ou la surface dont l'équation est donnée, du moins lorsque cette ligne ou cette surface a un centre; car je ne dois pas dissimuler que, pour le cas où elle en est dépourvue, je n'ai encore rien trouvé d'assez simple, d'assez élégant et d'assez symétrique pour oser ici en occuper le lecteur. On trouvera au surplus, dans le mémoire rappelé plus haut, ce que j'ai pu faire de mieux à cet égard.

## §. I.

### *Construction des lignes du second ordre.*

Lorsqu'une ligne ou portion de ligne du second ordre est tracée sur un plan, la méthode la plus simple que l'on puisse employer pour en déterminer le centre est la suivante: on y trace, sous une direction quelconque, deux ou un plus grand nombre de cordes parallèles, dont les milieux déterminent la direction d'un certain diamètre; on répète la même opération pour d'autres cordes parallèles, d'une direction différente de celle des premières; et on obtient ainsi un second diamètre. Si ces deux diamètres se coupent, la courbe a un centre, lequel n'est autre que leur intersection; s'ils sont parallèles, tous les autres diamètres que l'on pourrait construire leur seraient également parallèles, et la courbe est dépourvue de centre, ou, en d'autres termes, elle a son centre situé à une distance infinie; si enfin ces deux diamètres se confondent, tout autre diamètre se confondrait avec eux, et la courbe a une infinité de centres, situés sur une même ligne droite.

Imitons ce procédé par l'analise. Soit

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2A'x+2B'y+D=0\,, \qquad (1)$$

l'équation de la courbe dont il s'agit ; l'angle des coordonnées étant supposé $=\gamma$.

Soit $x=a$ l'équation d'une corde quelconque parallèle à l'axe des $y$; en combinant cette équation avec la proposée, celle-ci deviendra

$$y^2+2\,.\frac{Ca+B'}{B}y+\frac{Aa^2+2A'a+D}{B}=0\,.$$

les deux valeurs de $y$ déduites de cette équation seront les ordonnées des extrémités de la corde dont il s'agit. Mais le coefficient du second terme d'une équation du second degré, pris avec un signe contraire, étant la somme de ses racines, il en résulte que, pour le milieu de cette corde, on aura

$$y=-\frac{Ca+B'}{B}\ ;$$

en changeant donc $a$ en $x$, dans cette dernière équation, l'équation résultante

$$By+Cx+B'=0$$

sera celle du lieu géométrique des milieux de toutes les cordes parallèles à l'axe des $y$; c'est-à-dire, l'équation du diamètre qui coupe toutes ces cordes en deux parties égales.

On peut remarquer que cette équation n'est autre chose que la dérivée de la proposée (1), prise par rapport à $y$ seulement; et en conclure que la dérivée de la même équation, prise par rapport à $x$ seulement, sera l'équation du diamètre coupant en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe des $x$.

Il suit de là que les équations des diamètres coupant en deux parties égales les cordes parallèles aux deux axes sont

$$\left.\begin{array}{l} Ax+Cy+A'=0\ , \\ By+Cx+B'=0\ . \end{array}\right\}\ (2)$$

En thèse générale ces deux diamètres se couperont : ils seront parallèles si l'on a

$$C^2-AB=0 \quad \text{d'où} \quad C=\sqrt{AB}\ ;$$

enfin ils se confondront, si l'on a en outre,

$$CB'=BA' \quad \text{ou} \quad CA'=AB'$$

d'où

$$A=C\,\frac{A'}{B'}\,, \qquad B=C\,\frac{B'}{A'}\,.$$

Dans le premier cas, la courbe aura un centre ; dans le second, elle en sera dépourvue, enfin dans le troisième, elle en aura une infinité, tous situés sur une droite dont l'équation sera

$$A'x+B'y+\frac{A'B'}{C}=0\,.$$

occupons-nous uniquement du premier de ces trois cas.

Nous venons d'observer que, lorsqu'une ligne du second ordre a un centre, ce centre est déterminé par l'intersection de deux quelconques de ses diamètres. Si, de ce même centre et d'un rayon quelconque, on décrit un cercle, ce cercle coupera, en général, la courbe en quatre points, lesquels seront les extrémités de deux diamètres égaux, symétriquement situés par rapport aux diamètres principaux ; de sorte que la droite qui divisera en deux parties égales l'angle de ces deux diamètres, indiquera par sa direction celle de l'un des diamètres principaux. Si donc on prend le rayon du cercle de telle manière que les deux diamètres se confondent, l'un des diamètres principaux se confondra aussi avec eux, et le rayon du cercle sera la moitié de ce diamètre.

Imitons analitiquement ce procédé. D'abord la combinaison des équations (2) donne, pour les équations du centre

$$x=\frac{BA'-CB'}{C^2-AB}\,, \qquad y=\frac{AB'-CA'}{C^2-AB}\,. \qquad (3)$$

En y transportant l'origine, et posant, pour abréger

$$\frac{ABD-AB'^2-BA'^2-DC^2+2A'B'C}{C^2-AB}=E\ , \qquad (4)$$

l'équation (1) devient

$$Ax^2+By^2+2Cxy=E\ . \qquad (5)$$

L'équation du cercle ayant son centre à la nouvelle origine, et son rayon égal à $r$ est

$$x^2+y^2+2xy\text{Cos}.\gamma=r^2\ . \qquad (6)$$

Soit donc $y=mx$ l'équation du diamètre passant par l'une des intersections des deux courbes, il viendra, en substituant dans les équations (5) et (6),

$$\left.\begin{array}{l}(A+Bm^2+2Cm)\,x^2=E\ ,\\ (1+m^2+2m\text{Cos}.\gamma)x^2=r^2\ ;\end{array}\right\}\ (7)$$

d'où on conclura, par l'élimination de $x^2$,

$$(Br^2-E)m^2+2(Cr^2-E\text{Cos}.\gamma)m+(Ar^2-E)=0\ . \qquad (8)$$

Telle est donc l'équation qui donnera les directions des deux diamètres qui passent par les intersections de la courbe avec le cercle dont le centre coïncide avec le sien, et dont le rayon est $r$.

Si nous supposons ce rayon $r$ indéterminé, nous pourrons profiter de son indétermination pour faire coïncider les deux diamètres, lesquels auront alors pour direction commune celle de l'un des diamètres principaux; et la valeur qui en résultera pour $r$ sera la moitié de la longueur de ce diamètre.

Il faut pour cela que l'équation (8) ait ses deux racines égales; c'est-à-dire, qu'il faut que son premier membre soit un quarré, ou du moins puisse le devenir, à l'aide d'un multiplicateur convenable, indépendant de $m$. En la multipliant par $Br^2-E$, elle devient

$$(Br^2-E)^2m^2+2(Br^2-E)(Cr^2-E\text{Cos}.\gamma)m+(Br^2-E)(Ar^2-E)=0\ .$$

Or, sous cette forme, on voit qu'elle sera un quarré si l'on a

$$(Cr^2-E\text{Cos.}\gamma)^2=(Br^2-E)(Ar^2-E) \ ,$$

c'est-à-dire,

$$(C^2-AB)r^4+E(A+B-2C\text{Cos.}\gamma)r^2-E^2\text{Sin.}^2\gamma=0 \ ; \qquad (9)$$

et qu'alors la racine de ce quarré sera

$$(Br^2-E)m+(Cr^2-E\text{Cos.}\gamma)=0 \ . \qquad (10)$$

La première de ces deux équations fera connaître les deux valeurs de $r^2$, et on en conclura, au moyen de la seconde, les valeurs correspondantes de $m$. Il est difficile de penser qu'aucune autre voie puisse conduire aussi brièvement à la détermination des grandeurs et directions des demi-diamètres conjugués.

## §. II.

### *Construction des surfaces du second ordre.*

Lorsqu'une surface ou portion de surface du second ordre est donnée dans l'espace, la méthode la plus simple que l'on puisse employer pour en déterminer le centre est la suivante : on lui mène, sous une direction quelconque, trois ou un plus grand nombre de cordes parallèles, non comprises dans un même plan, dont les milieux déterminent la position d'un certain plan diamétral ; on répète la même opération pour deux autres systèmes de cordes parallèles, d'une direction différente de celle des premières ; on obtient ainsi deux autres plans diamétraux. Si les trois plans se coupent en un point, la surface a un centre, lequel n'est autre que leur intersection ; s'ils se coupent tous trois, suivant une même droite, la surface a une infinité de centres situés sur cette droite ; s'ils se confondent, elle a une infinité de centres situés sur l'un deux ; enfin s'ils sont parallèles, ou si seulement leurs intersections deux à deux sont parallèles, la surface est dépourvue de centre ou, en d'autres termes, elle a son centre situé à une distance infinie.

Imitons ce procédé, par l'analise; soit

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy+2A''x+2B''y+2C''+D=0\ , \quad (1)$$

l'équation de la surface dont il s'agit, les angles des coordonnées étant $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Soient $x=a$, $y=b$ les équations d'une corde quelconque, parallèle à l'axe des $z$; en combinant ces équations avec la proposée, celle-ci deviendra.

$$z^2+2\frac{A'b+B'a+C''}{C}z+\frac{Aa^2+Bb^2+2C'ab+2A''a+2B''b+D}{C}=0\ .$$

Les deux valeurs de $z$, déduites de cette équation, seront les coordonnées, parallèles aux $z$, des deux extrémités de la corde dont il s'agit. Mais le coefficient du second terme d'une équation du second degré, pris avec un signe contraire, étant la somme de ses racines, il en résulte que, pour le milieu de cette corde, on doit avoir

$$z=-\frac{A'b+B'a+C''}{C}\ ;$$

en changeant donc $a$ en $x$ et $b$ en $y$, dans cette dernière, l'équation résultante

$$Cz+A'y+B'x+C''=0$$

sera celle du lieu géométrique des milieux de toutes les cordes parallèles à l'axe des $z$, c'est-à-dire, l'équation du plan diametral qui coupe toutes ces cordes en deux parties égales.

On peut remarquer que cette équation n'est autre chose que la dérivée de la proposée (1), prise par rapport à $z$ seulement; et en conclure que les dérivées de la même équation, prises successivement par rapport à $x$ et $y$ seront les équations des plans diamétraux coupant en deux parties égales les cordes respectivement parallèles aux axes des $x$ et des $y$.

Il

Il suit de là que les équations des plans diamétraux coupant en deux parties égales les cordes parallèles aux trois axes sont

$$\left.\begin{array}{l} Ax+C'y+B'z+A''=0\ , \\ By+A'z+C'x+B''=0\ , \\ Cz+B'x+A'y+C''=0\ , \end{array}\right\}(2)$$

En thèse générale ces trois plans se couperont en un point : Ils se couperont suivant une même droite, lieu des centres, si l'on a; à la fois,

$$A\ (A'^2-B'C')+B\ (B'^2-C'A')+C\ (C'^2-A'B')=0\ ,$$

$$A''(A'^2-B'C')+B''(B'^2-C'A')+C''(C'^2-A'B')=0\ ;$$

ils se confondront en un seul, lieu des centres, si l'on a, à la fois;

$$\begin{array}{ll} AA'-B'C'=0\ , & \\ BB'-C'A'=0\ , & A'A''=B'B''=CC''\ ; \\ CC'-A'B'=0\ , & \end{array}$$

enfin, ils n'auront aucun point commun, et conséquemment la surface sera dépourvue de centre, si l'on a

$$ABC-AA'^2-BB'^2-CC'^2+2A'B'C'=0\ .$$

Occupons-nous uniquement du cas où les trois plans se coupent en un point.

Nous venons de voir que, lorsqu'une surface du second ordre a un centre, ce centre est déterminé par l'intersection des trois quelconques de ses plans diamétraux. Si de ce même centre, et d'un rayon quelconque, on décrit une sphère, cette sphère coupera en général la surface suivant une courbe à double courbure, aux différens points de laquelle menant des rayons, ces rayons seront les élémens rectilignes d'une certaine surface conique ayant même centre que la sphère. Mais, si l'on prend le rayon de la sphère de telle manière que tous ces élémens se confondent en une seule droite, cette droite indiquera, par sa direction celle de l'un des diamètres principaux, et le rayon qui remplira cette condition sera la moitié de la longueur de ce diamètre.

Imitons analitiquement ce procédé. D'abord, en posant pour abréger

$$A'^2-BC=a\ ,\quad AA'-B'C'=a'\ ,$$

$$B'^2-CA=b\ ,\quad BB'-C'A'=b'\ ,$$

$$C'^2-AB=c\ ,\quad CC'-A'B'=c'\ ;$$

$$ABC-AA'^2-BB'^2-CC'^2+2A'B'C'=d\ ;$$

il viendra (2), pour les coordonnées du centre,

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{aA''+c'B''+b'C''}{d}\ , \\ y&=\frac{bB''+a'C''+c'A''}{d}\ , \\ z&=\frac{cC''+b'A''+a'B''}{d}\ . \end{aligned}\right\}\quad(3)$$

En y transportant l'origine, et faisant encore pour abréger

$$aA''^2+bB''^2+cC''^2+2a'B''C''+2b'C''A''+2c'A''B''=-dE\ , \qquad (4)$$

l'équation (1) deviendra simplement

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy=E\ . \qquad (5)$$

L'équation de la sphère ayant son centre à la nouvelle origine et son rayon égal à $r$, est

$$x^2+y^2+z^2+2yz\,\mathrm{Cos.}\alpha+2zx\,\mathrm{Cos.}\beta+2xy\,\mathrm{Cos.}\gamma=r^2\,. \qquad (6)$$

Soient donc $z=mz$, $y=nz$ les équations du diamètre passant par l'un quelconque des points de l'intersection des deux surfaces ; il viendra, en substituant dans les équations (5) et (6),

$$\left.\begin{aligned}(Am^2+Bn^2+C+2A'n+2B'm+2C'mn)z^2=E\,,\\(m^2+n^2+1+2n\,\mathrm{Cos.}\alpha+2m\,\mathrm{Cos.}\beta+2mn\,\mathrm{Cos.}\gamma)z^2=r^2\,;\end{aligned}\right\}\ (7)$$

d'où on conclura par l'élimination de $z^2$

$$\left.\begin{aligned}&(Ar^2-E)m^2+(Br^2-E)n^2+(Cr^2-E)\\&+2(A'r^2-E\,\mathrm{Cos.}\alpha)n+2(B'r^2-E\,\mathrm{Cos.}\beta)m+2(C'r^2-E\,\mathrm{Cos.}\gamma)mn=0\end{aligned}\right\}\ (8)$$

Telle est donc la relation qui doit exister entre $m$ et $n$ pour que la droite, dont les équations sont $x=mz$ et $y=nz$, soit située sur la surface du cône. On voit qu'à chaque valeur de l'une de ces quantités répondront deux valeurs de l'autre ; ce qui revient à dire que tout plan conduit par l'origine perpendiculairement, soit au plan des $xz$ soit au plan des $yz$, coupera la surface conique suivant deux de ses génératrices.

Mais, si l'on suppose que le rayon $r$ ait été choisi de manière que toutes ces génératrices se confondent entre elles et avec un des diamètres principaux ; il devra arriver que, soit qu'on résolve l'équation (8) par rapport à $m$ ou qu'on la résolve par rapport à $n$, la valeur de l'une ou de l'autre de ces quantités sera unique ou, ce qui revient au même, se réduira uniquement à sa partie rationnelle. En exprimant cette double condition, c'est-à-dire, en supprimant le radical dans cette équation résolue successivement par rapport à $m$ et à $n$, et chassant ensuite le dénominateur, on obtiendra, en transposant, les deux équations

$$\left.\begin{array}{l}(Ar^2-E)m+(C'r^2-E\text{Cos.}\gamma)n+(B'r^2-E\text{Cos.}\beta)=0\ ,\\ (Br^2-E)n+(C'r^2-E\text{Cos.}\gamma)m+(A'r^2-E\text{Cos.}\alpha)=0\ ;\end{array}\right\}\quad(9)$$

lesquelles ne sont, au surplus, que les dérivées de (8), prises successivement par rapport à $m$ et par rapport à $n$. Telles sont donc les équations qui feront connaître les valeurs de $m$ et de $n$ qui conviennent aux diamètres principaux, lorsque toutefois $r$ sera déterminée conformément à la présente hypothèse.

Au moyen de ces équations, l'équation (8) se simplifie ; en en retranchant en effet la somme des produits respectifs de celles-ci par $m$ et $n$, elle devient

$$(B'r^2-E\text{Cos.}\beta)m+(A'r^2-E\text{Cos.}\alpha)n+(Cr^2-E)=0\ . \qquad (10)$$

Eliminant donc $m$ et $n$ de cette dernière, au moyen des équations (9), et faisant encore usage des abréviations déjà employées ci-dessus il viendra

$$\begin{array}{l} dr^6+E(a+b+c+2a'\text{Cos.}\alpha+2b'\text{Cos.}\beta+2c'\text{Cos.}\gamma)r^4\\ +E^2\left\{\begin{array}{l}A\text{Sin.}^2\alpha-2A'(\text{Cos.}\alpha-\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)\\ +B\text{Sin.}^2\beta-2B'(\text{Cos.}\beta-\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha)\\ +C\text{Sin.}^2\gamma-2C'(\text{Cos.}\gamma-\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta)\end{array}\right\}r^2 \qquad (11)\\ -E^3(1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)=0\ .\end{array}$$

Cette dernière équation fera connaître les longueurs des demi-diamètres principaux ; on en conclura ensuite leurs directions, au moyen des équations (9). On conviendra encore ici qu'il n'est guère présumable que tout autre procédé puisse conduire au but d'une manière tout à la fois aussi simple et aussi élémentaire.

Ceux qui désireront plus de développemens sur ce sujet, pourront consulter l'ouvrage déjà cité sur la *Discussion et la construction des lignes et surfaces du second ordre*; ouvrage dans lequel je me suis principalement attaché à faire connaître les caractères et la construction des huit cas que présente l'équation à deux variables, et des quinze cas que présente celle qui en renferme trois.

# QUESTIONS RÉSOLUES.

## *Solution du III.e problème de géométrie proposé à la page 28 de ce volume;*

Par M. J. B. Durrande.

*Problème.* *Des trois quarrés qui peuvent être inscrits à un même triangle scalène, quel est le plus grand et quel est le plus petit?*

*Solution.* Il est évident que ce problème se réduit au suivant:

*Des deux quarrés inscrits qui reposent sur deux côtés inégaux d'un même triangle, quel est le plus grand et quel est le plus petit?*

C'est donc sous ce point de vue que nous allons le résoudre.

Soient $a$, $b$, $c$ les trois côtés d'un triangle; $a'$, $b'$ les perpendiculaires abaissées respectivement sur les directions de $a$ et $b$

des sommets opposés ; et $x$, $y$ les côtés des quarrés inscrits, reposant respectivement sur $a$ et $b$ comme bases. Soient enfin $r$ le rayon du cercle circonscrit, et $t$ l'aire du triangle.

Il est d'abord évident que $x$ et $y$ seront déterminés par les proportions

$$a':a::(a'-x):x\ ,$$

$$b':b::(b'-y):y\ ;$$

desquelles on tire

$$x=\frac{aa'}{a+a'}\ ,\quad y=\frac{bb'}{b+b'}\ .$$

Or, on a

$$2t=aa'=bb'\ ;$$

d'où

$$a'=\frac{2t}{a}\ ,\quad b'=\frac{2t}{b}\ ;$$

donc encore, en substituant,

$$x=\frac{2at}{a^2+2t}\ ,\quad y=\frac{2bt}{b^2+2t}\ .$$

Enfin on a ( *Applicat. de l'alg. à la géom.* de LACROIX )

$$r=\frac{abc}{4t},\quad \text{d'où}\quad 2t=\frac{abc}{2r}\ ;$$

donc enfin

$$x=\frac{abc}{2ar+bc}\ ,\quad y=\frac{abc}{2br+ca}\ .$$

Ces deux valeurs ayant le même numérateur, nous jugerons de leur grandeur relative en comparant leurs dénominateurs ; or,

$$(2ar+bc)-(2br+ca)=2r(a-b)-c(a-b)=(2r-c)(a-b) \;;$$

et, comme $c$ ne peut jamais surpasser $2r$, il s'ensuit que cette différence suivra le signe de $a-b$ ; si donc on suppose $a>b$, on aura aussi

$$2ar+bc>2br+ca \,,$$

et conséquemment

$$x<y \;;$$

ainsi, des quarrés inscrits qui posent sur deux côtés d'un triangle, le plus petit est celui qui pose sur le plus grand de ces deux côtés.

Il est aisé de conclure de là que des trois quarrés inscrits à un même triangle scalène, le plus grand pose sur le plus petit côté, le moyen sur le moyen et le plus petit sur le plus grand.

Si l'on demandait dans quel cas deux de ces quarrés sont égaux, on exprimerait cette condition en posant

$$(2r-c)\,(a-b)=o \;;$$

ce qui donne $a=b$ ou $c=2r$ ; ainsi cela a lieu, 1.° lorsque les côtés sur lesquels reposent ces quarrés sont égaux ; 2.° lorsque ces côtés sont perpendiculaires l'un à l'autre. Dans ce dernier cas, les deux quarrés se confondent.

# QUESTIONS PROPOSÉES.

## *Théorèmes de Géométrie sphérique.*

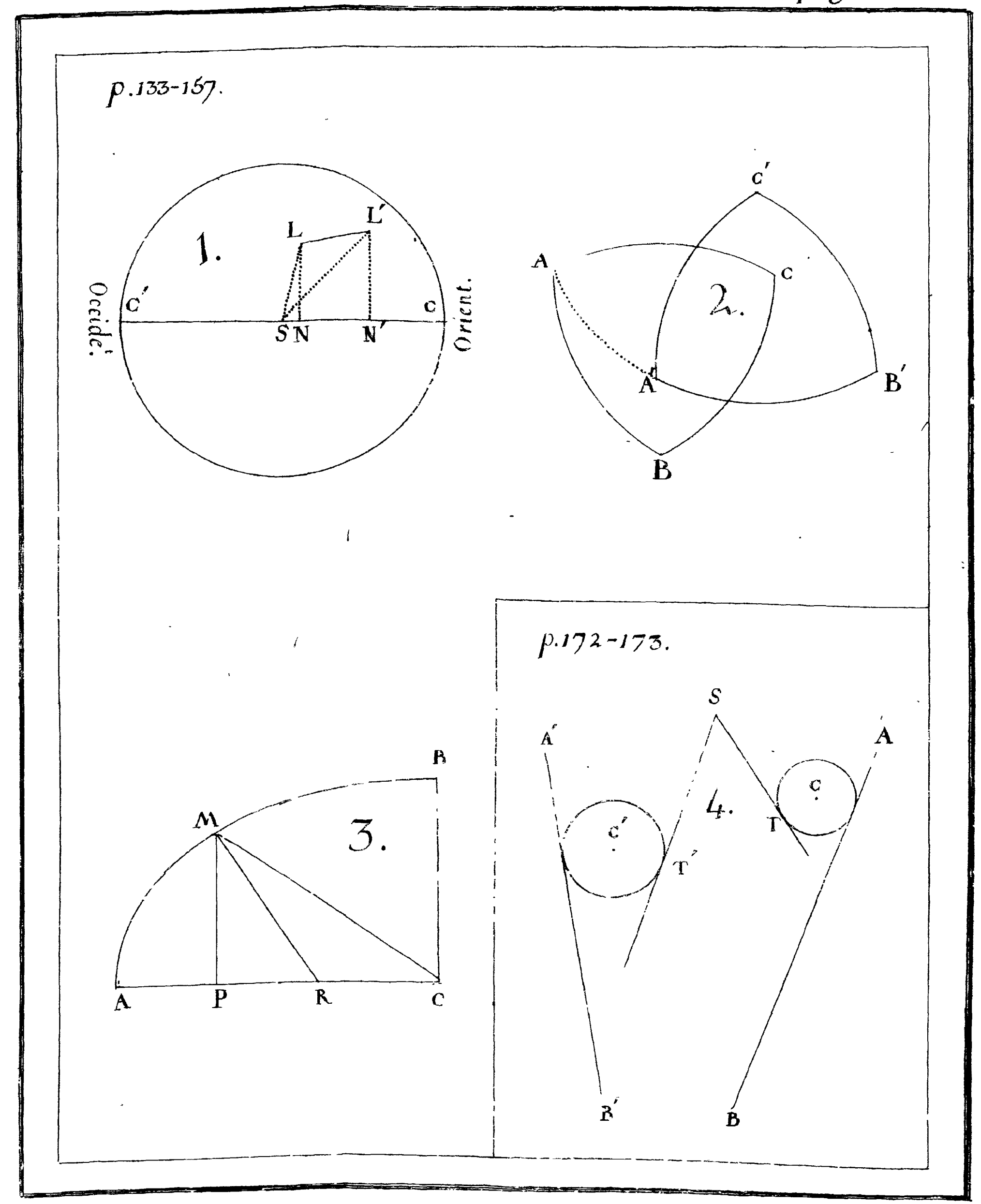
I. Si trois cercles se coupent sur une sphère ; les trois arcs de grands cercles qui joindront leurs points d'intersection deux à deux concourront en un même point.

II. Si on mène à trois cercles d'une sphère, pris deux à deux, des arcs de grands cercles tangens, tant extérieurement qu'intérieurement ; les trois points de concours des arcs tangens extérieurs seront situés sur un même grand cercle ; et les trois points de concours des arcs tangens intérieurs seront deux à deux sur un même grand cercle avec l'un des premiers.

## *Problème de statique.*

TST′ (fig. 4) est un levier coudé, rectiligne, de forme invariable et sans pesanteur, ne pouvant se mouvoir que dans un même plan autour du point fixe S. AB, A′B′ sont deux droites fixes et indéfinies, données de position dans ce plan. Enfin C, C′ sont les centres de deux cercles pesans et homogènes de rayons et de poids connus, assujettis à poser à la fois, et respectivement sur AB et A′B′ et sur les bras de levier ST et ST′, et libres d'ailleurs de tout obstacle. On demande les conditions d'équilibre de cette machine, abstraction faite du frottement ?

Tom. VI, Plan. II, pag. 133 - 173.




J. D. G. fecit.

# ASTRONOMIE.

## *Sur la déclinaison des planètes;*

Par M. le professeur KRAMP, doyen de la faculté des sciences de Strasbourg.

I. LES déclinaisons des planètes, consignées dans nos éphémérides, forment des séries très-irrégulières, et dont il paraît fort difficile de déterminer la loi. Prenons pour exemple les années 1811, 1812, 1813, 1814, 1815, qui sont les cinq premières de la décade actuelle.

Pendant ces cinq années, la déclinaison d'*Uranus* a été constamment *australe*; et on peut remarquer que, pendant une partie de l'année, elle a passé sans cesse de sa plus grande valeur à la plus petite, et que pendant l'autre, elle a repassé de la plus petite à la plus grande. Les plus grandes déclinaisons étaient renfermées entre les limites 17°.6′ et 21°.22′; celles des moindres déclinaisons ont été 15°.45′ et 20°.42′; la planète s'est donc écartée du plan de l'équateur.

La déclinaison constamment australe de *Saturne* a fait des oscillations semblables; ses plus grandes déclinaisons ont diminué de 23°.6′ à 19°.40′; les plus petites ont diminué de même depuis 21°.54′ jusqu'à 17°.45′; la planète s'est donc rapprochée de l'équateur.

La déclinaison de *Jupiter* a été boréale pendant les quatre années 1811, 1812, 1813, 1814. Le 16 novembre de cette dernière année, la planète a traversé le plan de l'équateur; le 9 avril 1815; elle l'a repassé une seconde fois; et le 9 juillet de cette même année, elle est redescendue de nouveau dans l'hémisphère australe.

*Mars* a traversé *cinq* fois le plan de l'équateur; savoir, le 1.er février et le 25 octobre 1812; le 1.er janvier et le 7 octobre 1814, et le 10 juillet 1815. Les intervalles de temps de l'un de ces passages à l'autre ont été successivement 266, 433, 280, 276 jours; nombres dont l'inégalité ne saurait dépendre de l'ellipticité de l'orbite.

*Venus* a traversé le même plan *douze* fois; et, en exprimant en jours les intervalles de temps d'un passage à l'autre, on trouve les nombres qui suivent: 181, 142, 265, 148, 244, 154, 45, 52, 149, 145, 153. L'excentricité presque insensible de l'orbite de Vénus n'a rien de commun avec l'inégalité de ces nombres.

Ces mêmes intervalles sont encore beaucoup plus inégaux pour *Mercure* qui, pendant ces cinq années, a traversé *seize* fois le plan de l'équateur. La recherche des lois qui lient entr'eux les termes de ces séries irrégulières dépend du problème suivant:

2. *PROBLÈME. Connaissant les élémens de l'orbite d'une planète, on demande l'expression générale de sa déclinaison, pour un temps quelconque proposé?*

*Solution.* Soient EZT l'écliptique (fig. 1) S le soleil; T la terre; SE la ligne des équinoxes; SNQ la ligne menée du soleil au nœud ascendant de l'orbite de la planète: cette dernière étant supposée en M, élevée au-dessus du plan de l'écliptique. Abaissons de M sur ce plan la perpendiculaire ML, et sur la ligne des nœuds la perpendiculaire MN. Menons de plus, dans le plan même de l'écliptique, la ligne TL dont le prolongement rencontre en Q la ligne des nœuds et la ligne LN; ensuite les deux rayons vecteurs SM, ST, et enfin la ligne TM, de la terre T à la planète M. Quant aux lignes auxiliaires, remarquons que S Z est parallèle à TLQ; que TO est parallèle à LN, et conséquemment perpendiculaire comme elle à la ligne des nœuds S Q; et qu'enfin

LH est parallèle à cette même ligne des nœuds, et conséquemment perpendiculaire à TO.

3. Cela étant, soient

$\beta$.... l'angle LNM, inclinaison de l'orbite;

$\delta$.... l'angle ESN, longitude du nœud ascendant;

$\theta$.... l'angle EST, longitude héliocentrique de la terre;

$\omega$.... l'angle MSN que fait le rayon vecteur de la planète avec la ligne des nœuds;

$a$.... la ligne ST, rayon vecteur de la terre;

$r$.... la ligne SM, rayon vecteur de la planète;

$L$.... l'angle ESZ, longitude géocentrique de la planète;

$L'$.... l'angle MTL, latitude géocentrique de la planète;

$\delta - L$.... l'angle NSZ que fait la ligne des nœuds avec SZ, ou avec sa parallèle TLQ.

4. Les élémens de l'orbite de la planète étant supposés connus, les deux rayons vecteurs $a$, $r$, de même que les angles $\beta$, $\delta$, $\theta$, $\omega$, seront donnés de même. Par leur moyen, on exprimera les angles $\delta - L$ et $L'$ de la manière suivante

$$\text{Tang.}(\delta - L) = \frac{a\text{Sin.}(\theta - \delta) - r\text{Cos.}\beta\text{Sin.}\omega}{r\text{Cos.}\omega - a\text{Cos.}(\theta - \delta)},$$

$$\text{Tang.}L' = \frac{r\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\omega\text{Cos.}(\delta - L)}{r\text{Cos.}\omega - a\text{Cos.}(\theta - \delta)}.$$

5. Pour abréger, désignons par $R^2$ la somme des quarrés du numérateur et du dénominateur de la première de ces deux fractions, de celle qui exprime la tangente de l'angle $\delta - L$. On aura ainsi:

$$R\text{Sin.}(\delta - L) = a\text{Sin.}(\theta - \delta) - r\text{Sin.}\omega\text{Cos.}\beta,$$

$$R\text{Cos.}(\delta - L) = r\text{Cos.}\omega - a\text{Cos.}(\theta - \delta).$$

On trouvera de même, à cause de $L = \delta - (\delta - L)$,

$$R\text{Sin.}L = r\text{Sin.}\delta\text{Cos.}\omega + r\text{Cos.}\delta\text{Sin.}\omega\text{Cos.}\beta - a\text{Sin.}\theta,$$

$$R\text{Cos.}L = r\text{Cos.}\delta\text{Cos.}\omega - r\text{Sin.}\delta\text{Sin.}\omega\text{Cos.}\beta - a\text{Cos.}\theta\ ;$$

et enfin

$$R\text{Tang.}L' = r\text{Sin.}\omega\text{Sin.}\beta\ .$$

6. Soit, en second lieu, $f^2$ la somme des quarrés des deux termes de la seconde fraction, qui exprime la tangente de la latitude géocentrique $L'$, ou $R^2 + r^2\text{Sin.}^2\omega\text{Sin.}^2\beta$. On trouve, en développant,

$$f^2 = a^2 - 2ar\{\text{Cos.}(\theta-\delta)\text{Cos.}\omega + \text{Sin.}(\theta-\delta)\text{Sin.}\omega\text{Cos.}\beta\} + r^2\ ;$$

la lettre $f$ désigne donc la ligne $TM$, distance de la terre à la planète. Il en résulte

$$f\text{Sin.}L' = r\text{Sin.}\beta\text{Sin.}\omega\ ,\quad f\text{Cos.}L' = R\ .$$

7. Nous avons fait connaître ailleurs les formules par lesquelles on trouve l'ascension droite et la déclinaison d'un astre, dont on connaît la longitude et la latitude. Soient (fig. 2) EX l'équateur, EY l'écliptique, S un astre quelconque ; soit de plus $\varepsilon$ l'obliquité de l'écliptique, $A$ l'ascension droite EA, $A'$ la déclinaison SA, $L$ la longitude EL, $L'$ la latitude SL ; cette dernière étant supposée boréale. On aura

$$\text{Sin.}A' = \text{Sin.}\varepsilon\text{Sin.}L\text{Cos.}L' + \text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}L'\ .$$

8. Il ne reste qu'à développer cette expression, pour avoir celle de la déclinaison, au bout d'un temps donné ; on trouvera (4, 5, 6)

$$\text{Sin.}A' = \frac{r(\text{Sin.}\delta\text{Cos.}\omega\text{Sin.}\varepsilon + \text{Cos.}\delta\text{Sin.}\omega\text{Cos.}\beta\text{Sin.}\varepsilon + \text{Sin.}\omega\text{Sin.}\beta\text{Cos.}\varepsilon) - a\text{Sin.}\theta\text{Sin.}\varepsilon}{f}\ .$$

9. On simplifiera cette expression, en introduisant un angle $\lambda$, tel que

$$\text{Tang.}\lambda = \frac{\text{Sin.}\delta\text{Sin.}\varepsilon}{\text{Cos.}\delta\text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\beta + \text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}\beta}\ ;$$

on aura alors

$$\text{Sin.}A' = \frac{r\text{Sin.}\delta\text{Sin.}(\lambda+\omega) - a\text{Sin.}\lambda\text{Sin.}\theta}{f\text{Sin.}\lambda}\,.\,\text{Sin.}\varepsilon\ .$$

10. Le soleil étant rapporté au centre de la sphère, soit FS le

grand cercle de cette sphère déterminé par l'orbite de la planète ; ce grand cercle coupant l'équateur en F et l'écliptique en B, et par conséquent BS étant l'argument de la latitude ES la distance à l'équinoxe et B le nœud ascendant ; l'arc BF sera ce que nous avons désigné par $\lambda$, et l'argument de latitude BS sera $\omega$ ; on aura donc

$$\text{Sin}.A' = \frac{r\text{Sin.BESin.FS} - a\text{Sin.BFSin.}\theta}{f\text{Sin.BF}}.\text{Sin.}\varepsilon\ .$$

11. Comme l'angle $\beta$, ou l'inclinaison de l'orbite vers l'écliptique, est un angle très-petit, pour toutes les planètes de notre système solaire, on voit que l'arc $\lambda$ ou BF ne saurait différer beaucoup de l'arc $\delta$ ou BE, qui est la longitude du nœud. On trouve effectivement Tang.$(\delta - \lambda)$ égale, à peu près, à Sin.$\beta$Sin.$\delta$Cos.$\varepsilon$ ; ce qui rend cette différence angulaire sensiblement proportionnelle au sinus de l'inclinaison de l'orbite. Si la planète se mouvait entièrement dans le plan de l'écliptique, on aurait exactement $\lambda = \delta$, et le sinus de la déclinaison de la planète, ou Sin.$A'$, se trouverait être

$$\text{Sin}.A' = \frac{r\text{Sin.}(\delta + \omega) - a\text{Sin.}\theta}{f}.\text{Sin.}\varepsilon\ .$$

12. Dans le cas d'une planète infiniment éloignée, et qui rentrerait ainsi dans la classe des étoiles fixes, la distance $r$ ferait disparaître $a$, et il viendrait par conséquent

$$\text{Sin}.A' = \frac{\text{Sin.}BE\text{Sin.}FS\text{Sin.}\varepsilon}{\text{Sin.}BF}\ .$$

Cette expression est une quantité constante, et indépendante du temps ; et on voit qu'elle ne veut dire autre chose que sin. SA ; l'arc SA étant effectivement la déclinaison de l'étoile.

13. Le moment du passage de la planète par le plan de l'équateur est celui où la déclinaison $A'$ est nulle ; on a alors

$$r\text{Sin.}\delta\text{Sin.}(\lambda + \omega) = a\text{Sin.}\lambda\text{Sin.}\theta\ ;$$

équation dans laquelle les angles $\theta$ et $\omega$, de même que les deux rayons vecteurs $a$ et $r$, sont des fonctions très-connues, mais transcendantes du temps, et qui ne peuvent être développées qu'en séries infinies. Le problème est donc insoluble, dans le cas des orbites elliptiques; et dans la supposition même d'un mouvement uniforme et circulaire, il exige l'emploi de la règle de fausse position.

14. En nous bornant au calcul des mouvemens moyens, essayons de déterminer (9) la déclinaison des planètes de notre système, telle qu'elle doit avoir été le 1.er janvier de l'année 1815, à *midi.* Le logarithme de la distance de la terre au soleil était alors 9,9926560; et la longitude du soleil était 280°. 16'. 30''; on aura donc $\text{Log.}a=9.9926560$ et $\theta=100°.16'.30''$. De plus, du 1.er janvier 1801 à *minuit* jusqu'au 1.er janvier 1815 à *midi* il s'est écoulé 5113 jours et demi.

15. Il faudra connaître les mouvemens moyens journaliers de la terre, de la planète et du nœud de celle-ci. Soient donc

$m$.... le mouvement moyen journalier de la terre,

$n$.... le mouvement moyen journalier de la planète,

$h$.... le mouvement moyen journalier du nœud.

Les trois moyens mouvemens seront exprimés en degrés et parties de degrés. Le mouvement $h$ sera une fraction très-petite, et qui ne deviendra bien sensible qu'au bout d'un siècle.

16. Il faudra connaître aussi les longitudes héliocentriques moyennes de la terre, de la planète, et du nœud de celle-ci, à l'époque dont on veut partir. Soient donc, pour cette époque,

$M$.... la longitude de la terre;

$N$.... la longitude de la planète,

$H$.... la longitude de son nœud.

Ainsi, les mouvemens étant supposés uniformes et circulaires; on aura :

$$v = M + mt ,$$
$$EL = N + nt ,$$
$$EB = H - ht .$$

17. Il en résultera

$$BL = EL - EB = N - H + (n + h)t ;$$

ainsi,

$$\text{Tang.}BS = \text{Tang.}\omega = \frac{\text{Tang.}[N - H + (n + h)t]}{\text{Cos.}\beta} .$$

La lettre $t$ désigne ici le nombre des jours écoulés depuis l'époque fixe jusqu'à celle pour laquelle on veut déterminer la longitude de la planète. Comme l'angle $\beta$ est très-petit, pour toutes les planètes de notre système, excepté Mercure, on aura sensiblement $\text{Cos.}\beta = 1$, ce qui donne

$$\omega = N - H + (n + h)t$$

18. Les mouvemens moyens et journaliers des planètes sont exprimés dans la table qui suit :

| | |
|---|---|
| Mercure. . . . . | 4°,09237706 , |
| Vénus. . . . . . | 1 ,60217659 , |
| Terre . . . . . . | 0 ,98564716 , |
| Mars . . . . . . | 0 ,52407126 , |
| Jupiter . . . . . | 0 ,08312916 , |
| Saturne. . . . . | 0 ,03349833 , |
| Uranus. . . . . | 0 ,01176895 . |

La troisième de ces valeurs est celle de $m$ ; les autres appartiennent aux $n$ des différentes planètes de notre système.

19. Voyons présentement quelles erreurs pourra entraîner, dans le calcul des latitudes au commencement de 1815, l'emploi des moyens mouvemens. On a d'abord les distances moyennes, c'est-à-dire, $r$, ainsi qu'il suit :

| | | |
|---|---|---|
| Mercure. . . . . . | 0,3870981 , | Log. $r$ = 9.5878210 ; |
| Vénus. . . . . . . | 0,7233323 , | 9.8593379 , |
| Mars. . . . . . . . | 1,5236935 , | 0,1828978 , |
| Jupiter. . . . . . | 5,202794 · , | 0,7162365 , |
| Saturne. . . . . . | 9,53877 . . , | 0,9794924 , |
| Uranus. . . . . . | 19,1833 . . . ; | 1,2829233 . |

20. Les arcs décrits pendant 5113 jours $\frac{1}{4}$, en rejetant les circonférences entières, seront respectivement (18)

| | |
|---|---|
| Mercure. . . . . | 46°.22′.12″ ; |
| Vénus. . . . . . | 272 .43 .48 , |
| Mars. . . . . . . | 159 .56 .16 , |
| Jupiter . . . . . | 65 . 4 .51 , |
| Saturne. . . . . | 271 .17 .37 , |
| Uranus . . . . . | 60 .10 .50 ; |

Mais, au commencement de 1801, les longitudes étaient

| | |
|---|---|
| Mercure. . . . . | 163°.56′.27″ , |
| Vénus. . . . . . | 10 .44 .31 , |
| Mars. . . . . . . | 64 . 7 . 2 , |
| Jupiter . . . . . | 102 .12 .36 , |
| Saturne . . . . . | 135 .20 .32 , |
| Uranus. . . . . | 177 .47 .18 ; |

ajoutant donc ces arcs aux précédens, en rejetant encore les circonférences entières, on obtiendra pour les longitudes, au commencement de 1815,

| | |
|---|---|
| Mercure. . . . . | 210°.18′.39″ , |
| Vénus. . . . . . | 283 .28 .23 , |
| Mars. . . . . . . | 223 .57 .28 , |

Jupiter.

| | |
|---|---|
| Jupiter. . . . . | 167 .17 .27 ; |
| Saturne . . . . | 306 .38 . 9 , |
| Uranus . . . . | 237 .58 . 8 . |

21. Le mouvement séculaire rétrograde du nœud de chaque planète et le mouvement de ce nœud pour 5113 jours $\frac{1}{4}$ sont ainsi qu'il suit :

| | | |
|---|---|---|
| Mercure. . . . . | 782″ , | 1′.49″ , |
| Vénus. . . . . . | 1870 , | 4 .21 , |
| Mars. . . . . . . | 2329 , | 5 .26 , |
| Jupiter . . . . . | 1578 , | 3 .41 , |
| Saturne. . . . . | 2260 , | 5 .16 , |
| Uranus. . . . . | 3598 , | 8 .23 ; |

mais la longitude du nœud, au commencement de 1801, était

| | |
|---|---|
| Mercure. . . . . | 45°.57′.31″ , |
| Vénus. . . . . . | 74 .52 .40 , |
| Mars. . . . . . . | 48 . 1 .28 , |
| Jupiter . . . . . | 98 .25 .34 , |
| Saturne. . . . . | 111 .55 .47 , |
| Uranus . . . . . | 72 .51 .14 ; |

cette longitude ☊ devait donc être, au commencement de 1815,

| | |
|---|---|
| Mercure. . . . . ☊= | 45°.55′.47″ , |
| Vénus. . . . . . . . | 74 .48 .20 , |
| Mars . . . . . . . . | 47 .56 . 2 , |
| Jupiter . . . . . . . | 98 .21 .53 , |
| Saturne. . . . . . . | 111 .50 .31 , |
| Uranus . . . . . . . | 72 .42 .51 , |

étant donc cette dernière longitude de celle de la planète pour la même époque de 1815, on obtiendra pour l'arc BL, base du triangle sphérique rectangle BLS,

| | |
|---|---|
| Mercure. . . . . | BL = 164°.23′. 0″, |
| Vénus. . . . . . . . . | 208 .40. 0 , |
| Mars . . . . . . . . . . | 176 . 1 .16 , |
| Jupiter . . . . . . . . | 68 .55 .34 , |
| Saturne. . . . . . . . | 194 .47 .38 , |
| Uranus. . . . . . . . | 165 . 6 .54 ; |

mais, les inclinaisons $\beta$ des orbites sont respectivement

| | |
|---|---|
| Mercure. . . . . | $\beta$ = 5°. 0′. 0″, |
| Vénus. . . . . . . . | 3 .23 .35 , |
| Mars. . . . . . . . . | 1 .51 . 0 , |
| Jupiter . . . . . . . | 1 .18 .52 , |
| Saturne. . . . . . . | 2 .29 .38 , |
| Uranus. . . . . . . | 0 .46 .25 . |

Divisant donc par le cosinus de cette inclinaison $\beta$ la tangente de de BL, on obtiendra pour quotient la tangente de BS ou $\omega$ qu'on trouvera être ainsi

| | |
|---|---|
| Mercure. . . . . | $\omega$ = 164°.16′.29″ ; |
| Vénus. . . . . | 208 .42 .36 , |
| Mars. . . . . . . | 176 .1 . 9 , |
| Jupiter . . . . . | 68 .55 .24 , |
| Saturne. . . . . | 194 .48 .30 , |

22. On a d'ailleurs, pour le commencement de 1815, le logarithme du rayon vecteur terrestre ou Log.$a$=9,9926560, la longitude héliocentrique de la terre ou $\theta$ = 100°.16′.30″, et l'obliquité de l'écliptique $\varepsilon$ = 23°.27′.50″ ; d'après quoi on trouvera $\theta - \delta$ ainsi qu'il suit :

| | |
|---|---|
| Mercure. . . . . $\ell - \odot =$ | 54°.20'.48'' , |
| Vénus. . . . . . | 25 .28 .10 , |
| Mars. . . . . . . | 52 .20 .28 , |
| Jupiter . . . . . | 1 .54 .37 , |
| Saturne. . . . . . | 348 .24 . 0 , |
| Uranus . . . . . | 27 .33 .39 ; |

23. Avec toutes ces données, et à l'aide des formules du commencement de ce mémoire, on trouvera, pour la distance $f$ de la terre à la planète et pour l'angle $\lambda$,

| | | |
|---|---|---|
| Mercure. . . . . . | $f=$ 1,173566 , | $\lambda=$ 38°.14'.14'' , |
| Vénus. . . . . . . | 1,705748 , | 67 .35 .20 , |
| Mars. . . . . . . . | 2,208150 , | 40 .32 .54 , |
| Jupiter. . . . . . | 4,903223 , | 95 .59 .14 , |
| Saturne. . . . . . | 9,676540 , | 107 .29 .48 , |
| Uranus. . . . . . | 19,919737 , | 71 .23 . 0 ; |

et on aura enfin pour la déclinaison $A'$, que nous mettons en regard avec celle des éphémérides,

| | Suiv. not. cal. | Suiv. les éphém. | Diff. |
|---|---|---|---|
| Mercure. . . . . | 22°.44'.37''.$A$ | 23°.13 | +28'.23'', |
| Vénus. . . . . . | 23 .38 .20 .$A$ | 23 .38 | — 0 .20 , |
| Mars . . . . . . | 19 .35 .40 .$B$ | 19 .34 | — 1 .40 ; |
| Jupiter . . . . . | 1 .50 . 0 .$A$ | 2 .29 | +29 . 0 , |
| Saturne . . . . . | 21 .16 . 0 .$A$ | 20 .28 | —48 . 0 , |
| Uranus. . . . . | 19 .58 . 0 .$A$ | 21 . 1 | —63 . 0 . |

24. En comparant successivement ces différences avec la plus

grande équation du centre de la planète, on trouve qu'elles en sont respectivement, du moins à peu de chose près, les fractions suivantes

$$\frac{1}{50},\ \frac{1}{150},\ \frac{1}{384},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{5};$$

Ces résultats, et sur-tout celui qui répond à Mercure, la plus excentrique de toutes les planètes, conduisent à conjecturer, avec beaucoup de vraisemblance, que l'ellipticité des orbites influe moins qu'on ne le croirait sur la déclinaison des planètes, que cependant l'erreur qui résulte du simple emploi des moyens mouvemens, dans le calcul de cette déclinaison, augmente avec les dimensions de l'orbite.

25. La condition du passage de la planète par le plan de l'équateur est renfermée dans l'équation $r\text{Sin.}\delta\text{Sin.}(\lambda+\omega)=a\text{Sin.}\lambda\ \text{Sin.}\theta$, (13). L'état insoluble de cette équation, dans la supposition du mouvement elliptique, nous oblige à nous contenter de l'emploi des mouvemens moyens. Encore serons-nous obligés de profiter de la circonstance favorable que nous présente l'inclinaison des orbites qui, dans notre système solaire, est partout assez petite pour qu'on puisse, sans erreur sensible, supposer $\text{Cos.}\,\beta=1$, ce qui donne simplement (17)

$$\omega=N-H+(n+h)t.$$

26. L'extrême lenteur du mouvement des nœuds nous permet en outre, du moins pour un nombre d'années limité, de supposer $h$ nulle; il résultera de là $\omega=N-H+nt$. Dans cette même supposition, l'angle $\lambda$ deviendra une quantité constante, et indépendante du temps. Ainsi désignant par L ce que devient $\lambda$ lorsque dans l'expression générale de Tang. $\lambda$ (9), on remplace la lettre $\delta$ par $H$ (17), ce qui donnera

$$\text{Tang.}L=\frac{\text{Sin}\,H\text{Sin.}\varepsilon}{\text{Cos.}H\text{Sin.}\varepsilon+\text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}\beta},$$

l'équation finale du problème sera

$$r\text{Sin}\,H\text{Sin.}(L+N-H+nt)=a\text{Sin.}L\text{Sin.}(M+mt)\ .$$

27. Cette équation ne renferme que la seule inconnue $t$ : c'est le nombre des jours comptés depuis l'époque fixe jusqu'à l'époque où se fera quelque passage de la planète par le plan de l'équateur. Les quantités $m$, $n$, $a$, $r$ seront liées entr'elles par la loi de Képler $\left(\frac{m}{n}\right)^2=\left(\frac{r}{a}\right)^3$. Mais, comme les rapports $\frac{m}{n}$, $\frac{r}{a}$ sont incommensurables, l'équation, malgré sa simplicité apparente, sera transcendante, et exigera, pour sa résolution l'emploi de la règle de fausse position. On sait de plus que la série que forment les racines de cette équation n'a rien de commun, même dans les cas les plus simples, avec les progressions arithmétiques, géométriques, recurrentes, etc.

28. La simplicité de l'équation finale (26) rend au moins l'emploi des fausses positions très-facile ; et on pourra s'en servir avec avantage, pour trouver les valeurs approchées des passages d'une planète par le plan de l'équateur, pour une année quelconque qui ne serait pas trop éloignée.

29. Après avoir discuté les cas où la déclinaison devient nulle, examinons les époques où elle parvient à son *maximum* ou *minimum*. Les notations précédentes seront conservées ; nous supposerons toujours $h$ sensiblement nul, ce qui donnera $\delta=H$ et nous ferons la longitude de la planète EL ou $N+nt=\varkappa$.

30. Le quarré de la distance de la terre à la planète ou $f^2$ a été trouvé (6).

$$f^2=a^2-2ar[\text{Cos.}(\theta-\delta)\text{Cos.}\omega+\text{Sin.}(\theta-\delta)\text{Sin.}\omega\text{Cos.}\beta]+r^2.$$

En faisant $\text{Cos.}\beta=1$, cette formule deviendra

$$f^2=a^2-2ar\text{Cos.}(\theta-\delta-\omega)+r^2\ ,$$

ou bien

$$f^2=a^2-2ar\text{Cos.}[M-N+(m-n)t]+r^2\ ;$$

et, en différentiant,

$$f\mathrm{d}f = ar(m-n)\mathrm{Sin.}(\theta-\delta-\omega)\mathrm{d}t.$$

31. L'expression générale du sinus de la déclinaison a été trouvée (9). Pour remplir la condition proposée, il faut égaler à *zéro* la différentielle de cette quantité. En y regardant $a$, $r$, $\delta$, $\lambda$ comme constants, nous n'y aurons que les trois seules variables $\theta$, $\omega$, $f$, qui toutes dépendent du temps; nous aurons ainsi

$$\mathrm{d}\theta = m\mathrm{d}t \quad , \quad \mathrm{d}\omega = n\mathrm{d}t$$

et nous venons de trouver $\mathrm{d}f$ (30).

32. Nous parviendrons ainsi à une équation composée de huit termes, et qui a au moins l'apparence d'être compliquée. On y reconnaît bientôt les deux facteurs suivans

$$r\mathrm{Sin.}\delta\mathrm{Sin.}(\kappa+\lambda-\delta) - a\mathrm{Sin.}\lambda\mathrm{Sin.}\theta = F,$$

$$nr\mathrm{Sin.}\delta\mathrm{Cos.}(\kappa+\lambda-\delta) - ma\mathrm{Sin.}\lambda\mathrm{Cos.}\theta = G;$$

et l'équation devient ainsi

$$f^2G = arF(m-n)\mathrm{Sin.}(\theta-\kappa) .$$

33. Pour en tirer l'inconnue $t$, voyons ce qu'elle deviendrait dans le cas d'une planète dont l'orbite serait couchée dans le plan de l'écliptique. L'angle $\beta$ alors serait égal à *zéro*; la différence angulaire $\lambda-\delta$ s'évanouirait; et toute l'équation serait divisible par $\mathrm{Sin.}\delta = \mathrm{Sin.}\lambda$. Supprimant ce facteur commun, on aurait

$$F = r\mathrm{Sin.}\kappa - a\mathrm{Sin.}\theta \quad , \quad G = nr\mathrm{Cos.}\kappa - ma\mathrm{Cos.}\theta .$$

L'équation serait alors décomposable dans les deux facteurs qui suivent

$$r\mathrm{Cos.}\kappa - a\mathrm{Cos.}\theta ,$$

$$nr^2 - ar(m+n)\mathrm{Cos.}(\theta-\kappa) + ma^2 .$$

34. En égalant le premier facteur à *zéro*, on obtient l'équation

$$r\mathrm{Cos.}(N+nt) = a\mathrm{Cos.}(M+mt) ;$$

elle répond naturellement à l'équation trouvée (26) qui dans la même hypothèse, se réduit à

$$r\text{Sin.}(N+nt)=a\text{Sin.}(M+mt)\ ,$$

et fait connaître les passages de la planète par le plan de l'équateur.

35. Le second facteur égalé à *zéro* donne

$$\text{Cos.}(\theta-\varkappa)=\text{Cos.}[M-N+(m-n)t]=\frac{ma^2+nr^2}{(m+n)ar}\ .$$

Cette formule est connue ; c'est celle qui détermine l'époque où la planète devient *stationnaire*. Ainsi donc, en supposant le mouvement de la planète uniforme et circulaire, et son orbite couchée dans le plan même de l'écliptique, elle parviendra à sa plus grande ou à sa moindre déclinaison au moment même où elle deviendra stationnaire.

36. On sait que le cosinus de tout angle $A$ est aussi celui des angles $2\varpi-A$, $2\varpi+A$, $4\varpi-A$, $4\varpi+A$, etc. En conséquence, en désignant par $A$ le moindre des angles qui aura $\frac{ma^2+nr^2}{(m+n)ar}$ pour cosinus, et par $t$, $t'$, $t''$,.... les valeurs consécutives de l'inconnue $t$, on aura

$$(m-n)t = A-M+N\ ,\quad (m-n)t' =2\varpi-A-M+N\ ,$$

$$(m-n)t''=2\varpi+A-M+N\ ,\quad (m-n)t'''=4\varpi-A-M+N\ ,$$

$$(m-n)t^{\text{iv}}=4\varpi+A-M+N\ ,\quad (m-n)t^{\text{v}}=6\varpi-A-M+N\ ,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;

Ces racines formeront ainsi deux progressions arithmétiques ayant pour différence commune $\frac{2\varpi}{m-n}$ ; c'est la durée d'une révolution synodique.

37. Donc, en supposant la planète mue dans le plan de l'écliptique, d'un mouvement uniforme et circulaire, les époques des plus grandes

et des moindres déclinaisons forment trois progressions très-distinctes. La première comprend les racines de l'équation $r\text{Cos.}(N+nt)=a\,\text{Cos.}(M+mt)$. Les déclinaisons que cette équation fait connaître sont toutes du genre des *maxima* ; elles précèdent et elles suivent les passages de la planète par l'équateur, et elles sont ainsi alternativement boréales et australes. Les deux autres forment deux progressions arithmétiques, indépendantes de cette première, qui ont pour différence commune la durée de la révolution synodique, et dans lesquelles la différence de deux termes correspondans $t''-t'$, $t'''-t''$,... sera partout la même, savoir $\frac{2A}{m-n}$.

38. Nous avons rassemblé dans les deux tables qui suivent les plus grandes et les moindres déclinaisons, de même que les passages par l'équateur, de la planète de Mars, pendant les cinq années 1811, 1812, 1813, 1814, 1815. Les jours sont comptés d'une série continue, depuis le 1.er de l'an 1811.

39. La première table contient les passages de Mars par l'équateur, ainsi que les plus grandes déclinaisons dont ils sont précédés et suivis ; ces dernières, qui résultent de l'équation $r\text{Cos.}x=a\text{Cos.}\theta$, sont alternativement désignées par les lettres A et B ; les passages le sont alternativement par AB et BA, suivant que l'astre entre dans l'hémisphère boréal ou dans l'hémisphère austral.

| *Plus grandes déclinais. et passages par l'équat.* | *Jours.* | *Différenc.* |
|---|---|---|
| 26°. 1′ A | 265 | |
| AB | 394 | 129 |
| 24°.22′ B | 524 | 130 |
| BA | 666 | 142 |
| 23°.38′ A | 815 | 149 |
| AB | 1096 | 282 |
| 24°.36′.B | 1235 | 138 |

Ces

| | | |
|---|---|---|
| BA . . . . . | 1377 . . . . . . . . . | 142 |
| 23°.44′. A . . . . . | 1511 . . . . . . . . . | 134 |
| AB . . . . . | 1652 . . . . . . . . . | 141 |

La plupart de ces différences varient, il est vrai, entre des limites assez resserrées 129 et 149; mais la différence 282 suffit seule pour exclure tout soupçon d'une presque égalité qui pourrait exister entre elles.

La seconde table contient les époques où la planète parvient à sa plus grande ou à sa moindre déclinaison, sans traverser le plan de l'équateur, conformément aux formules (35, 36); ces époques sont celles qui suivent :

| | | |
|---|---|---|
| Plus grande. . . . . . | A . . . . . | 136 jours. |
| Moindre. . . . . . . . | A . . . . . | 175 |
| Plus grande. . . . . . | A . . . . . | 891 |
| Moindre. . . . . . . . | A . . . . . | 962 |
| Plus grande. . . . . . | B . . . . . | 1718 |
| Moindre. . . . . . . . | B . . . . . | 1770 |

Les plus grandes déclinaisons ont lieu aux époques 136, 891, 1718 jours, et les plus petites aux époques 175, 962, 1770. Les différences des premiers nombres sont 755 et 827, dont la moyenne est 791; les différences des derniers sont 787 et 808, dont la moyenne est 797. Le milieu entre ces deux moyennes 794, et la durée de la révolution synodique est seulement 780; la différence de 14 jours doit être rejetée sur l'ellipticité de l'orbite et sur l'angle d'environ deux degrés que fait le plan de cette orbite avec celui de l'écliptique.

40. On peut remarquer que les plus grandes et les moindres longitudes géocentriques ont lieu aux jours qui suivent :

| | |
|---|---|
| Plus grande. . . . | 110 jours. |
| Moindre. . . . . . | 176 |
| Plus grande. . . . | 912 |
| Moindre. . . . . . | 973 |
| Plus grande. . . . | 1717 |
| Moindre. . . . . . | 1780 |

Ainsi les jours des plus grandes et des moindres longitudes ne sont pas éloignés de ceux des plus grandes et des moindres déclinaisons, conformément à la remarque déjà faite (35). Les plus grandes et les moindres déclinaisons, tirées de l'équation $r\text{Cos.}(N+nt)=a\text{Cos.}(M+mt)$, n'ont rien de commun avec les plus grandes et les moindres longitudes géocentriques, ce qui nous apprend à les distinguer facilement, par la simple observation des longitudes, de celles qui répondent à l'autre équation

$$nr^2-(m+n)ar\text{Cos.}(\theta-\varkappa)+ma^2=0 .$$

41. Pour déterminer, d'après les tables ou les observations, le jour et même l'heure où les plus grandes ou moindres déclinaisons ont dû avoir lieu, on peut employer la méthode qui suit. Soient $x$ le temps et $y$ la déclinaison qui y répond, aux environ du *maximum* ou du *minimum*; il sera permis de supposer

$$y=A+Bx+Cx^2 .$$

La déclinaison $y$ parviendra à son *maximum* ou *minimum*, lorsque $x = -\frac{B}{2C}$ : on aura dans ce cas

$$\gamma = \frac{4AC - B^2}{4C}.$$

42. Pour déterminer les coefficiens $A$, $B$, $C$, on emploîra les déclinaisons, calculées ou observées, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, répondant respectivement aux temps.... $a$, $b$, $c$, de manière que la déclinaison moyenne $\beta$ soit plus grande ou moindre que chacune des extrêmes $\alpha$, $\gamma$. Alors on aura les trois équations

$$\alpha = A + Ba + Ca^2,$$

$$\beta = A + Bb + Cb^2,$$

$$\gamma = A + Bc + Cc^2;$$

desquelles on tirera

$$A = -\frac{bc(b-c)\alpha + ca(c-a)\beta + ab(a-b)\gamma}{(b-c)(c-a)(a-b)},$$

$$B = +\frac{(b^2-c^2)\alpha + (c^2-a^2)\beta + (a^2-b^2)\gamma}{(b-c)(c-a)(a-b)},$$

$$C = -\frac{(b-c)\alpha + (c-a)\beta + (a-b)\gamma}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

Le temps au bout duquel la plus grande ou la moindre déclinaison aura lieu sera

$$x = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(b^2-c^2)\alpha + (c^2-a^2)\beta + (a^2-b^2)\gamma}{(b-c)\alpha + (c-a)\beta + (a-b)\gamma};$$

et cette déclinaison sera

$$y = \frac{(b-c)^4\alpha^2 + (c-a)^4\beta^2 + (a-b)^4\gamma^2 - 2(b-c)^2(c-a)^2\alpha\beta - 2(c-a)^2(a-b)^2\beta\gamma - 2(a-b)^2(b-c^2\gamma\alpha}{4(b-c)(c-a)(a-b)[(b-c)\alpha + (c-a)\beta + (a-b)\gamma]}.$$

Si l'on prend les temps en progression arithmétique, ce qui permettra de supposer $a=-1$, $b=0$, $c=+1$, ces formules deviendront

$$x=\frac{1}{2}\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-2\beta+\gamma}\,,\quad y=\frac{1}{8}.\frac{\alpha^2+16\beta^2+\gamma^2-8\alpha\beta-8\beta\gamma-2\gamma\alpha}{\alpha-2\beta+\gamma}\,.$$

43. Les formules qui ont été l'objet de ce mémoire, fondées sur ce que l'orbite de la planète était supposée dans le plan de l'éliptique, subissent quelques modifications lorsqu'elle est hors de ce plan; ce qui sera l'objet d'un autre mémoire.

---

# GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

## *Sur la recherche du rapport de la circonférence du cercle à son diamètre.*

Par M. GERGONNE.

DANS un petit traité élémentaire de géométrie plane, publié à Nancy en 1813, par M. SCHAWAB, on trouve, entre autres choses intéressantes, le théorème que voici :

*Soient deux polygones réguliers de même périmètre, l'un de* m *et l'autre de* 2m *côtés; soient respectivement* r, R *les rayons des cercles inscrit et circonscrit au premier*, r', R' *les rayons des cercles inscrit et circonscrit au dernier, on aura*

$$1.^{\circ}\ \div r.r'.R\ ;\quad 2.^{\circ}\ \div\!\div r':R':R\ .$$

Cet élégant théorème se démontre très-simplement comme il suit :

Soit SMC (fig. 3) un triangle, rectangle en M; soit prolongé le côté MC au-delà du point C, de manière que son prolongement CC′ soit égal à l'hypothénuse CS. Soit menée C′S, et soit abaissée du point C sur cette droite la perpendiculaire CS′; enfin soit menée S′M′ parallèle à SM. Voici ce qui résulte de cette construction :

Le triangle SCC′ ayant ses deux côtés CS et CC′ égaux, doit aussi avoir les angles opposés égaux, et conséquemment C′ l'un d'eux est égal à leur demi-somme; cet angle C′ est donc aussi moitié de l'angle extérieur SCM. En outre, le point S′ étant le milieu de SC′, il s'ensuit que S′M′ est la moitié de SM; ainsi, on a en même temps

$$\mathrm{S'M'}=\tfrac{1}{2}\mathrm{SM}\,, \quad Ang.\mathrm{S'C'M'}=\tfrac{1}{2}Ang.\mathrm{SCM}\,.$$

Il résulte de là que, si l'on suppose que MS soit un demi-côté d'un polygone régulier de $m$ côtés, dont C soit le centre, M′S′ sera un demi-côté du polygone régulier de $2m$ côtés, de même contour, dont C′ sera le centre. Or, il est clair que CM et CS seront les rayons des cercles inscrit et circonscrit au premier; et que C′M′ et C′S′ seront les rayons des cercles inscrit et circonscrit au dernier: ainsi l'on aura

$$\mathrm{CM}=r\,; \qquad \mathrm{C'M'}=r'\,,$$

$$\mathrm{CS}=R\,; \qquad \mathrm{C'S'}=R'\,.$$

Or, le point M′ étant le milieu de C′M, on doit avoir $2\mathrm{C'M'}=\mathrm{C'M}=\mathrm{CM}+\mathrm{CC'}=\mathrm{CM}+\mathrm{CS}$; et de plus le triangle CS′C′, rectangle en S′ donne $\overline{\mathrm{C'S'}}^2=\mathrm{C'M'}\times\mathrm{C'C}=\mathrm{C'M'}\times\mathrm{CS}$; donc $2r'=r+R$, et $R'^2=r'R$; c'est-à-dire,

$$\div\, r.r'.R\,; \qquad \dot{\overline{\cdot\cdot}}\; r':R':R\,;$$

comme nous l'avions annoncé.

Cette proposition peut encore être démontrée trigonométriquement ainsi qu'il suit :

On a d'abord évidemment

$$r = R\text{Cos.}\,\frac{\varpi}{m}\,, \qquad (1) \qquad r' = R'\text{Cos.}\,\frac{\varpi}{2m}\,; \qquad (2)$$

de plus, les périmètres des deux polygones étant $2mr\text{Tang.}\,\frac{\varpi}{m}$, $4mr'\text{Tang.}\,\frac{\varpi}{2m}$, on doit avoir

$$r\text{Tang.}\,\frac{\varpi}{m} = 2r'\,\text{Tang.}\,\frac{\varpi}{2m}\,. \qquad (3)$$

Si l'on élimine $r$, $r'$ de cette dernière équation, au moyen des deux précédentes, il viendra

$$R\text{Sin.}\,\frac{\varpi}{m} = 2R'\text{Sin.}\,\frac{\varpi}{2m}\,,$$

ou bien

$$2R\text{Sin.}\,\frac{\varpi}{2m}\,\text{Cos.}\,\frac{\varpi}{2m} = 2R'\text{Sin.}\,\frac{\varpi}{2m}\,,$$

ou en réduisant

$$R\text{Cos.}\,\frac{\varpi}{2m} = R'\,,$$

équation qui, combinée par multiplication avec l'équation (2) donne

$$Rr' = R'^2\,, \qquad (4)$$

qui est la seconde de nos deux propositions.

On a en outre

$$2\text{Cos.}^2\,\frac{\varpi}{2m} = 1 + \text{Cos.}\,\frac{\varpi}{m}\,;$$

d'où éliminant les cosinus, au moyen des équations (1), (2), il vient

$$2\frac{r'^2}{R'^2}=1+\frac{r}{R}=\frac{r+R}{R}\ ;$$

mettant dans cette dernière pour $R'^2$ sa valeur (4), il viendra enfin

$$2r'=r+R\ ,$$

qui est la première des deux propositions annoncées.

Cela posé, concevons un polygone régulier quelconque, de $m$ côtés, dont on connaisse le périmètre $p$, ainsi que les rayons $r$ et $R$ des cercles inscrit et circonscrit ; si l'on forme une série, dont les premier et second termes soient respectivement $r$ et $R$, et dont les suivans soient alternativement, à partir du troisième, moyens par *différences* et par *quotiens* entre les deux qui précèdent immédiatement chacun d'eux ; il suit de ce qui vient d'être démontré, que les termes de rangs impairs de cette série seront successivement les rayons des cercles inscrits aux polygones réguliers de $m$, $2m$, $4m$, $8m$,... côtés, ayant leurs périmètres constamment égaux à $p$, et que les termes de rangs pairs de la même suite seront successivement les rayons des cercles circonscrits aux mêmes polygones.

Mais, lorsque, le périmètre d'un polygone régulier demeurant constant, le nombre de ses côtés croît continuellement, le rayon du cercle inscrit croît aussi sans cesse, tandis qu'au contraire celui du cercle circonscrit décroît ; le premier est toujours moindre et le second plus grand que le rayon du cercle dont la circonférence serait égale au périmètre du polygone ; mais ils tendent sans cesse, l'un et l'autre, vers cette limite commune.

Ainsi, dans la série dont il vient d'être question, tandis que les termes de rangs impairs croîtront sans cesse, ceux de rangs pairs, au contraire, décroîtront continuellement ; mais de manière que les uns et les autres tendront, de plus en plus, à devenir égaux entre eux, et au rayon du cercle dont la circonférence serait $p$; c'est-à-dire, que ces termes convergeront perpétuellement vers la valeur $\frac{p}{2\varpi}$. (*)

Voilà donc un procédé, aussi simple qu'élégant, pour obtenir du nombre $\varpi$ une valeur aussi approchée qu'on pourra le désirer; il

---

(*) Soient $r_1$, $r_2$, $r_3$, .... $r_x$ les rayons des cercles inscrits, et $R_1$, $R_2$, $R_3$, .... $R_x$ ceux des cercles circonscrits; nous aurons les deux équations aux différences

$$2r_{x+1}=r_x+R_x\,,\quad R^2_{x+1}=R_x.r_{x+1}\;;$$

nous aurons pareillement, en changeant $x$ en $x+1$,

$$2r_{x+2}=r_{x+1}+R_{x+1}\,,\quad R^2_{x+2}=R_{x+1}.r_{x+2}\;.$$

Si, entre ces quatre équations, on élimine successivement $R_x$, $R_{x+1}$, $R_{x+2}$, et ensuite $r_x$, $r_{x+1}$, $r_{x+2}$, on obtiendra ces deux-ci

$$(2r_{x+2}-r_{x+1})^2=(2r_{x+1}-r_x)r_{x+1}\,,$$

$$R_x(2R^2_{x+2}-R^2_{x+1})=R^3_{x+1}\;.$$

La première de ces équations exprime, entre les termes de rangs impairs, une relation indépendante des termes de rangs pairs, et la seconde entre les termes de rangs pairs, une relation indépendante des termes de rangs impairs. On voit en outre que, dans le cas de $x=\infty$, l'intégrale commune des ces deux équations est $\frac{p}{2\varpi}$, pourvu seulement que $\frac{r}{R}$ soit le cosinus d'un sous-multiple de la circonférence; et l'on a alors $p=2m\sqrt{R^2-r^2}$.

Si $\frac{r}{R}$ était le cosinus d'une fraction rationnelle et irréductible $\frac{n}{m}$ de la circonférence, on tomberait alors sur les polygones étoilés de M. Poinsot, et la série convergerait continuellement vers $\frac{p}{2n\varpi}$.

ne

ne s'agira, en effet, que de déterminer $r$ et $R$, avec un nombre suffisant de chiffres décimaux, et d'en conclure ensuite, comme il vient d'être dit, les autres termes de la suite, avec le même degré d'approximation, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à deux termes consécutifs qui ne présentent plus aucune différence dans l'ordre de décimales adopté. Divisant $\frac{1}{2}p$ par l'un d'eux, le quotient qu'on obtiendra sera une valeur approchée du nombre $\pi$. On en connaîtra le degré d'approximation en divisant de nouveau $\frac{1}{2}p$ par le même diviseur, augmenté ou diminué d'une unité décimale du dernier ordre; et on ne conservera dans le résultat que les chiffres décimaux communs aux deux quotiens. On se rappellera au surplus que, dans les extractions de racines quarrées, dès qu'on a obtenu plus de la moitié des chiffres de la racine, on peut obtenir les suivans par une simple division.

Ce procédé est déjà bien simple, mais il est encore susceptible de quelques simplifications assez notables. Et d'abord, l'inégalité des termes de la série diminuant continuellement, à mesure que ces termes seront plus avancés vers la droite, on parviendra bientôt à deux termes consécutifs qui, abstraction faite de la virgule, se ressembleront, vers la droite, dans plus de la moitié de leurs chiffres : or, lorsqu'on en sera parvenu là, on pourra, sans erreur sensible, dans le degré d'approximation qu'on aura eu en vue, substituer des demi-sommes aux racines quarrées de produits ; de sorte que le calcul des termes ultérieurs de la série se poursuivra, d'une manière tout à fait simple et uniforme, en prenant constamment, pour chaque terme, la demi-somme des deux qui le précèderont immédiatement. Cette remarque, qui n'a point échappé à M. Schwab, peut se justifier comme il suit.

Tout se réduit évidemment à prouver que la demi-somme de deux nombres entiers, qui ont plus de la moitié de leurs chiffres pareils vers la gauche, ne diffère pas de plus d'une demi-unité de la racine quarrée de leur produit. Or, soient en effet $A$ le plus petit de ces nombres et $A+a$ le plus grand; il s'agira de prouver que

$$(A+\tfrac{1}{2}a)-\sqrt{A^2+aA}<\tfrac{1}{2}\ ;$$

ou, en transposant et multipliant par 2,

$$2A+(a-1)<\sqrt{A^2+aA}\ .$$

En quarrant et réduisant, cette inégalité devient

$$\frac{(a-1)^2}{4A}<1\ .$$

Or, puisqu'on suppose que $a$ n'a pas la moitié du nombre des chiffres de A, $a^2$ et à plus forte raison $(a-1)^2$ n'aura pas autant de chiffres que A, d'où il suit qu'en effet $\frac{(a-1)^2}{4A}$ sera une véritable fraction, comme l'exprime l'inégalité ci-dessus.

Voilà donc déjà notre procédé devenu bien simple ; mais, quelque facile qu'il puisse être de prendre la demi-somme de deux nombres, si l'on faisait le calcul avec beaucoup de chiffres décimaux, on pourrait se trouver entraîné à répéter un grand nombre de fois cette opération, avant d'être parvenu à anéantir totalement la différence entre deux termes consécutifs : voyons donc si nous ne pourrons point encore nous épargner ce travail.

Soient $a$, $b$ respectivement, deux termes consécutifs d'une suite dont chaque terme est la demi-somme des deux qui le précèdent immédiatement ; les termes subséquens de cette suite seront

$$\frac{a+b}{2},\quad \frac{a+3b}{4},\quad \frac{3a+5b}{8},\quad \frac{5a+11b}{16},\quad \frac{11a+21b}{32},\ldots\ ;$$

et il s'agira de connaître le dernier terme de cette suite, prolongée à l'infini. Pour le découvrir, donnons à ces termes cette autre forme

$$\frac{2(a+2b)+(a-b)}{3.2},\quad \frac{4(a+2b)-(a-b)}{3.4},\quad \frac{8(a+2b)+(a-b)}{3.8},\ldots,$$

on verra alors que son terme général est

$$\frac{a+2b}{3}-(-1)^n.\frac{a-b}{3.2^n}\ .$$

Or, dans le cas de $n$ infini, la seconde partie de cette valeur s'évanouit ; d'où il suit que le dernier terme de la série est $\frac{1}{3}(a+2b)$. On pourra donc, dès qu'on sera parvenu à deux termes consécutifs différant dans moins de moitié de leurs chiffres décimaux, calculer de suite le dernier terme de la série, sans passer par le calcul des intermédiaires. (*)

Il n'est plus question présentement que de fixer le choix du polygone primitif devant servir de point de départ. Ce choix pourrait être fait d'une infinité de manières différentes ; mais de tous les polygones réguliers, le plus simple est, sans contredit, le système de deux droites qui se confondent : c'est un polygone de deux côtés, ayant deux angles nuls, dans lequel le cercle inscrit a un rayon nul et le cercle circonscrit un rayon égal à la moitié de l'un de ses côtés ou au quart de son périmètre ; de sorte qu'en prenant ce rayon pour unité, ce périmètre sera 4 ; et $\frac{p}{2\varpi}$ deviendra $\frac{2}{\varpi}$.

Ainsi, la suite dont les deux premiers termes sont 0 et 1, et dont les autres sont alternativement, à partir du troisième, moyens par différences et par quotiens entre les deux qui les précèdent immédiatement, converge sans cesse vers la valeur de $\frac{2}{\varpi}$ (**). Voici le calcul de ces termes, avec sept chiffres décimaux, et en ayant égard aux observations précédemment faites.

---

(*) Ce qui précède revient à dire que, si l'on a l'équation aux différences

$$2Z_{x+2}=Z_x+Z_{x+1}\,,$$

il s'ensuivra

$$3Z_{\infty}=Z_1+2Z_2\,;$$

d'où résulte encore ce théorème de géométrie.

THÉORÈME. *Soient marqués arbitrairement, sur une droite indéfinie deux points* 1 *et* 2 ; *puis, sur la même droite, soient marqués successivement un point* 3 *également distant de* 1 *et* 2, *un point* 4 *également distant de* 2 *et* 3, *un point* 5 *également distant de* 3 *et* 4, *et ainsi de suite. Cette opération, continuée à l'infini, conduira à un point final qui se trouvera situé aux deux tiers de l'intervalle entre* 1 *et* 2, *à partir de* 1.

(**) De là résulte ce théorème.

*Théorème.* Soit CMS (fig. 4) un triangle isocèle, rectangle en M. Soit prolongé MC, de sorte que CC′=CS, et soit menée SC′, dont S′ soit le milieu ; soit fait C′C″=C′S′, et soit menée S′C″, dont S″ soit le milieu ; soit fait C″C‴=C″S″.

| | |
|---|---|
| $(1)= \ldots\ldots =0,0000000$; | $(10)= \sqrt{(8)\times(9)} =0,6376435$; |
| $(2)= \ldots\ldots =1,0000000$; | $(11)=\frac{1}{2}\{(9)+(10)\} =0,6361083$; |
| $(3)=\frac{1}{2}\{(1)+(2)\}=0,5000000$; | $(12)= \sqrt{(10)\times(11)} =0,6368754$; |
| $(4)= \sqrt{(2)\times(3)}=0,7071068$; | $(13)=\frac{1}{2}\{(11)+(12)\} =0,6364919$; |
| $(5)=\frac{1}{2}\{(3)+(4)\}=0,6035534$; | $(14)= \sqrt{(12)\times(13)} =0,6366836$; |
| $(6)= \sqrt{(4)\times(5)}=0,6532815$; | $(15)=\frac{1}{2}\{(13)+(14)\} =0,6365878$; |
| $(7)=\frac{1}{2}\{(5)+(6)\}=0,6284174$; | $(16)= \sqrt{(14)\times(15)} =0,6366357$; |
| $(8)= \sqrt{(6)\times(7)}=0,6407289$; | $(17)=\frac{1}{2}\{(15)+(16)\} =0,6366117$; |
| $(9)=\frac{1}{2}\{(7)+(8)\}=0,6345731$; | $(\infty)=\frac{1}{3}\{(16)+2\times(17)\}=0,6366197$. |

On a donc $\frac{2}{\varpi}=0,6366197$ d'où $\frac{1}{\varpi}=0,3183098$ ; résultat exact à sept chiffres décimaux.

# QUESTIONS PROPOSÉES.

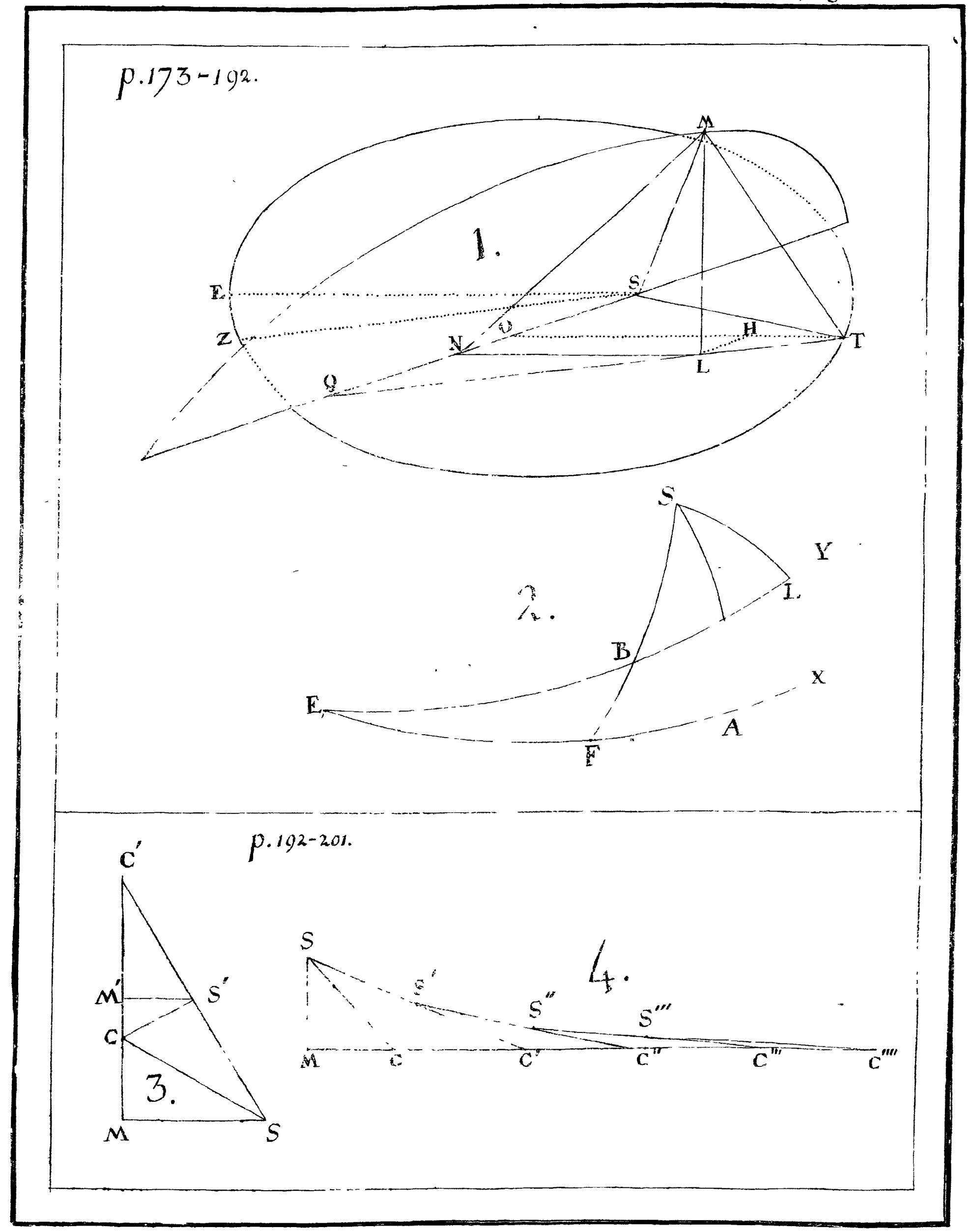
## *Problèmes de Géométrie.*

I. DANS la vue de boucher un trou polygonal, fait dans une étoffe qui a un *envers*, on a taillé une pièce polygonale de la même étoffe. Cette pièce bouche exactement le trou ; mais c'est en mettant l'*envers* à l'*endroit*. Ne serait-il pas possible de la découper en plusieurs autres pièces qui, assemblées entre elles, formassent une nouvelle pièce qui bouchât encore le trou, mais sans offrir cet inconvénient ?

II. Deux polyèdres étant symétriques l'un à l'autre, c'est-à-dire, égaux mais non superposables ; décomposer l'un d'eux en parties qui, assemblées d'une autre manière, forment, par leur réunion, un polyèdre identique avec l'autre ? (*)

et soit menée $S''C'''$, dont $S'''$ soit le milieu ; et ainsi de suite. Les droites $CC'$, $C'C''$, $C''C'''$,... convergeront sans cesse vers le rayon du cercle dont la circonférence serait $4MS$.

(*) M. Legendre a démontré, dans ses *Élémens de géométrie*, que deux polyèdres symétriques sont des sommes de parties superposables, moins d'autres sommes de parties superposables. Cela suffit bien pour constater l'équivalence des volumes, mais non pour exécuter la superposition effective.




I. D. G. fecit.

# PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

## *Doutes et réflexions sur quelques principes fondamentaux de la mécanique rationnelle ;*

Par M. Dubuat, chevalier de l'ordre royal et militaire de St-Louis, professeur à l'école royale de l'artillerie et du génie.

J'ai déjà insinué, dans le précédent volume de ce recueil (pag. 215), qu'il y avait une sorte de contradiction, du moins apparente, entre certaines applications du principe des momens et le principe qui permet de transporter le point d'application d'une force en un lieu quelconque de sa direction. Je me propose de revenir ici sur ce sujet d'une manière plus spéciale ; et je commencerai par me proposer le problème suivant :

*PROBLÈME. Des forces quelconques, appliquées à différens points d'un corps solide et ayant une résultante unique, étant données de grandeur et de position ; on demande le point d'application de leur résultante ?*

La solution de ce problème, qui ne présente aucune difficulté, serait absolument sans intérêt, si l'auteur d'un traité de statique très-répandu n'avait fait la remarque que le problème est indéterminé, et que le calcul se borne à donner les équations de la droite qui représente la direction de la résultante, et sur laquelle se trouve le point demandé. C'est à la page 119 de la statique de M. Poinsot qu'est faite cette remarque, fondée sur ce que les valeurs des coordonnées du point d'application de la résultante se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, lorsqu'on veut les déterminer par les équations auxquelles conduit la recherche de cette résultante. Cela doit en effet être ainsi, suivant M. Poinsot, parce que la résultante pouvant être supposée appliquée à un point quelconque de sa direction, il est impossible que le calcul détermine l'un de ces points de préférence à tous les autres (*).

Si ce raisonnement était exact, il s'ensuivrait que le calcul ne pourrait donner le point d'application de la résultante de deux forces parallèles, ni de deux forces qui agissent suivant une même droite, ni même de deux forces qui concourent en un point; car la résultante pouvant être supposée appliquée à un point quelconque de sa direction, il serait impossible que le calcul déterminât l'un de ces points de préférence à tous les autres (**).

Sans pousser plus loin ces conséquences absurdes, il est facile d'apercevoir le defaut du raisonnement de M. Poinsot. Le principe, supposé vrai, qu'une force peut être censée appliquée à un point quelconque de sa direction n'empêche pas que la résultante d'un certain nombre de forces, agissant sur un corps solide, n'ait un point d'application déterminé (***) ; et, si d'ailleurs les équations

(*) M. Poinsot n'a fait, ce me semble, en ceci, qu'énoncer d'une manière un peu plus positive ce que tous les géomètres qui ont écrit dans ces derniers temps ont implicitement admis. Aucun d'eux n'a songé, plus que lui, à assigner le point d'application de la résultante. J'avouerai que moi-même j'ai constamment jusqu'ici professé la même doctrine qu'eux.

*J. D. G.*

(**) J'ai aussi constamment pensé jusqu'ici que le calcul ne pouvait proprement donner le point d'application de la résultante, soit de deux forces parallèles, soit de deux forces qui agissent suivant la même droite, soit enfin de deux forces qui concourent en un même point. *J. D. G.*

(***) Il me paraît, au contraire, que ces deux choses s'excluent formellement; qu'est-ce en effet qui distinguerait, autrement, le point d'application effectif de la résultante de celui où on peut la supposer appliquée ?

*J. D. G.*

qui doivent déterminer la résultante donnent des valeurs $\frac{0}{0}$, pour les coordonnées de son point d'application ; au lieu de dire, avec M. Poinsot, que cela doit être, parce que la résultante est censée appliquée à un point quelconque de sa direction ; on dira que cela doit être, par la raison bien simple que les équations d'une droite ne déterminent pas l'un des points de cette droite plutôt que tout autre ; et on en conclura qu'il faut, outre les équations de la résultante, une autre équation entre les coordonnées de son point d'application, pour la détermination complète de ce point.

*Solution.* Soient donc $X'$ $Y'$ $Z'$ ; $X''$, $Y''$, $Z''$, .... les composantes, parallèles aux axes, des forces $P'$, $P''$, ..., appliqués à différens points $(x', y', z')$, $(x'', y'', z'')$, .... d'un système solide libre. Soient $X$, $Y$, $Z$ les composantes parallèles aux axes de leur résultante $P$, dont $(x, y, z)$ soit le point d'application ; on aura, comme l'on sait (*), pour l'intensité de la résultante,

$$P=\sqrt{(\Sigma.X')^2+(\Sigma.Y')^2+(\Sigma.Z')^2}\ ; \qquad (1)$$

et sa direction sera donnée par les trois équations

$$\left.\begin{array}{l} y\Sigma.Z'-z\Sigma.Y'=\Sigma.y'Z'-\Sigma.z'Y'\ , \\ z\Sigma.X'-x\Sigma.Z'=\Sigma.z'X'-\Sigma.x'Z'\ , \\ x\Sigma.Y'-y\Sigma.X'=\Sigma.x'Y'-\Sigma.y'X'\ ; \end{array}\right\}\ (2)$$

dont chacune est comportée par les deux autres, au moyen de la condition

$$(\Sigma.y'Z'-\Sigma.z'Y')\Sigma.X'+(\Sigma.z'X'-\Sigma.x'Z')\Sigma.Y'+(\Sigma.x'Y'-\Sigma.y'X')\Sigma.Z'=0\ , \qquad (3)$$

qui exprime que la résultante est unique. Ces équations se réduisent donc ainsi à deux, et ne peuvent conséquemment déterminer autre chose que la direction de la résultante, et non les coordonnées $x$, $y$, $z$ de son point d'application. Il s'agit donc de trouver une nouvelle équation entre les mêmes coordonnées.

---

(*) Voyez Prony, Francœur, Poinsot, Labey ou Poisson.

Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, respectivement, les angles que forme la direction de la résultante $P$ avec les axes des $x$, $y$, $z$; ces angles seront connus par les équations de cette résultante, et l'on aura

$$P\text{Cos}.\alpha=\Sigma.X', \quad P\text{Cos}.\beta=\Sigma.Y', \quad P\text{Cos}.\gamma=\Sigma.Z'. \qquad (4)$$

Cela posé, si l'on imagine un plan normal à la direction de la résultante, et passant par son point d'application; en désignant par $a$, $b$, $c$ les coordonnées de ce point, la perpendiculaire abaissée sur ce plan du point ($x'$, $y'$, $z'$) aura pour longueur

$$(x'-a)\text{Cos}.\alpha+(y'-b)\text{Cos}.\beta+(z'-c)\text{Cos}.\gamma. \qquad (5)$$

Si ensuite on décompose chacune des forces $X'$, $Y'$, $Z'$ en deux autres, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle au plan dont il s'agit, les composantes de la première sorte seront

$$X'\text{Cos}.\alpha, \text{ pour le force } X',$$
$$Y'\text{Cos}.\beta, \text{ pour la force } Y',$$
$$Z'\text{Cos}.\gamma, \text{ pour la force } Z';$$

d'où il suit que

$$X'\text{Cos}.\alpha+Y'\text{Cos}.\beta+Z'\text{Cos}.\gamma \qquad (6)$$

sera la composante totale de $P'$ parallèle à la résultante, et qu'ainsi son moment par rapport à notre plan normal sera (5)

$$(X'\text{Cos}.\alpha+Y'\text{Cos}.\beta+Z'\text{Cos}.\gamma)\{(x'-a)\text{Cos}.\alpha+(y'-b)\text{Cos}.\beta+(z'-c)\text{Cos}.\gamma\}, \qquad (7)$$

ou, en développant,

$$\left.\begin{array}{r}x'X'\text{Cos}.^2\alpha+(y'Z'+z'Y')\text{Cos}.\beta\text{Cos}.\gamma\\ +y'Y'\text{Cos}.^2\beta+(z'X'+x'Z')\text{Cos}.\gamma\text{Cos}.\alpha\\ +z'Z'\text{Cos}.^2\gamma+(x'Y'+y'Z')\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\beta\\ -(a\text{Cos}\alpha+b\text{Cos}.\beta+c\text{Cos}.\gamma)(X'\text{Cos}.\alpha+Y'\text{Cos}.\beta+Z'\text{Cos}.\gamma).\end{array}\right\}(8)$$

Si l'on exécute la même décomposition pour les autres composantes $P''$, $P'''$,..... du système, on en déduira des résultats analogues. On aura donc, au lieu des puissances $P'$, $P''$,.... du système, d'autres puissances, dont les unes seront parallèles à la résultante, tandis que les autres lui seront normales ; ces dernières devront donc se détruire ; et la somme des momens des premières, par rapport à notre plan normal devra être nulle, puisque ce plan est supposé passer par le point d'application de la résultante. En exprimant donc que la somme des formules semblables à (8), relatives à toutes les forces, est nulle ; remarquant que les quantités constantes $a$, $b$, $c$, Cos.$\alpha$, Cos.$\beta$, Cos.$\gamma$ et leurs fonctions peuvent être placées hors du signe $\Sigma$, et qu'enfin

$$\Sigma(X'\text{Cos}.\alpha+Y'\text{Cos}.\beta+Z'\text{Cos}.\gamma)=P\,, \tag{9}$$

il viendra

$$P(a\text{Cos}.\alpha+b\text{Cos}.\beta+c\text{Cos}.\gamma)$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Cos}.^2\alpha\Sigma.x'X'+\text{Cos}.\beta\text{Cos}.\gamma\Sigma(y'Z'+z'Y')\\+\text{Cos}.^2\beta\Sigma.y'Y'+\text{Cos}.\gamma\text{Cos}.\alpha\Sigma(z'X'+x'Z')\\+\text{Cos}.^2\gamma\Sigma.z'Z'+\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\beta\Sigma(x'Y'+y'X')\end{array}\right\}; \tag{10}$$

ou enfin, en remettant pour Cos.$\alpha$, Cos.$\beta$, Cos.$\gamma$ les valeurs données par les équations (4),

$$P^2(a\Sigma.X'+b\Sigma.Y'+c\Sigma.Z')$$

$$=\left\{\begin{array}{l}(\Sigma.X')^2\Sigma.x'X'+\Sigma.Y'\Sigma.Z'\Sigma(y'Z'+z'Y')\\+(\Sigma.Y')^2\Sigma.y'Y'+\Sigma.Z'\Sigma.X'\Sigma(z'X'+x'Z')\\+(\Sigma.Z')^2\Sigma.z'Z'+\Sigma.X'\Sigma.Y'\Sigma(x'Y'+y'X')\end{array}\right\}. \tag{11}$$

Or, puisque $a$, $b$, $c$ sont les coordonnées du point d'application de la résultante, on doit avoir (2)

$$\left.\begin{array}{l} b\Sigma.Y'-c\Sigma.Y'=\Sigma(y'Z'-z'Y')\ , \\ c\Sigma.X'-a\Sigma.Z'=\Sigma(z'X'-x'Z')\ , \\ a\Sigma.Y'-b\Sigma.X'=\Sigma(x'Y'-y'X')\ ; \end{array}\right\}. \quad (12)$$

En combinant deux quelconques de ces trois équations avec l'équation (11), posant pour abréger

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma.y'Z'-\Sigma.z'Y'=A\ , \\ \Sigma.z'X'-\Sigma.x'Z'=B\ , \\ \Sigma.x'Y'-\Sigma.y'X'=C\ , \end{array}\right\}. \quad (13)$$

$$(\Sigma.X')^2\Sigma.x'X'+(\Sigma.Y')^2\Sigma.y'Y'+(\Sigma.Z')^2\Sigma.z'Z'=K\ ; \quad (14)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma.Y'\Sigma.Z'\Sigma(y'Z'+z'Y') \\ +\Sigma.Z'\Sigma.X'\Sigma(z'X'+x'Z') \\ +\Sigma.X'\Sigma.Y'\Sigma(x'Y'+y'X') \end{array}\right\}=S\ , \quad (15)$$

et ayant égard aux équations (1 et 3), il viendra

$$\left.\begin{array}{l} a=\frac{1}{P^4}\{P^2(C\Sigma.Y'-B\Sigma.Z')+(K+S)\Sigma.X'\}\ , \\ b=\frac{1}{P^4}\{P^2(A\Sigma.Z'-C\Sigma.X')+(K+S)\Sigma.Y'\}\ , \\ c=\frac{1}{P^4}\{P^2(B\Sigma.X'-A\Sigma.Y')+(K+S)\Sigma.Z'\}\ ; \end{array}\right\} \quad (16)$$

telles sont donc les coordonnées du point d'application de la résultante $P$. Si l'on suppose cette résultante parallèle à l'axe des $z$, on aura

$$\Sigma.X'=0\ ,\quad \Sigma.Y'=0\ ,\quad \Sigma.Z'=P\ ;$$

d'où

$$K = P^2 \Sigma . z'Z' \;,\quad S = 0 \;;$$

ce qui donnera

$$a = -\frac{B}{P} \;,\quad b = +\frac{A}{P} \;,\quad c = \frac{\Sigma . z'Z'}{P} \;;$$

c'est-à-dire,

$$a = \frac{\Sigma(x'Z' - z'X')}{\Sigma . Z'} \;,\quad b = \frac{\Sigma(y'Z' - z'Y')}{\Sigma . Z'} \;,\quad c = \frac{\Sigma . z'Z'}{\Sigma . Z'} \;.$$

Si en outre on supposait que les puissances primitives $P'$, $P''$, $P'''$,.... sont parallèles à cet axe des $Z$, ces puissances ne seraient autre chose que les composantes $Z'$, $Z''$, $Z'''$, .... ; tandis que les autres composantes $X'$, $X''$, $X'''$.... $Y'$, $Y''$, $Y'''$, .... seraient nulles ; on aurait donc alors simplement

$$a = \frac{\Sigma . x'Z'}{\Sigma . Z'} \;,\quad b = \frac{\Sigma . y'Z'}{\Sigma . Z'} \;,\quad c = \frac{\Sigma . z'Z'}{\Sigma . P'} \;; \qquad (17)$$

formules qui vont nous servir à constater une erreur, dans la théorie actuelle de la pression des fluides sur les corps flottans (*).

---

(*) Serait-ce trop hasarder que de dire qu'en calculant les formules (16), M. Dubuat n'a peut-être fait autre chose qu'assigner un point de la direction de la résultante, lié par une loi géométrique ou analitique tout à fait arbitraire, avec d'autres points, pris arbitrairement sur les directions des composantes ? Qu'est-ce en effet que le moment d'une force ? Peut-il être quelque chose indépendamment d'une définition ? Et, quelque définition qu'on en veuille donner, les momens peuvent-ils avoir, *à priori*, quelques propriétés non renfermées, du moins implicitement, dans la définition qu'on aura voulu en donner ? J'ai déterminé la résultante de plusieurs forces parallèles ( et je n'ai eu nullement besoin pour cela de connaître leurs points d'application ) ; je cherche la distance de cette résultante à un plan fixe, parallèle aux directions des forces ; je trouve que cette distance est égale à la somme des produits des composantes par leurs distances à ce plan, divisée par la somme de ces mêmes composantes, c'est-à-dire, par la résultante ; j'en conclus que le produit de la résultante par sa distance à un plan fixe, parallèle à la direction commune des forces, est égal à la somme des produits des composantes par leurs distances au même plan ; je prévois que

On sait que les pressions exercées par un fluide pesant sur les divers points de la surface antérieure d'un corps flottant, ont une résultante unique et verticale, égale au poids du volume de fluide déplacé, et passant par le centre de gravité du volume de la carène, supposée homogène. A l'égard du point d'application de cette résultante, il est le même, suivant tous les auteurs d'Hydrostatique, que le centre de gravité du volume de la carène; cependant, si on le détermine par les formes que nous venons d'exposer, on trouvera, en le comparant à ce centre, que la verticale comprise

---

je serai souvent dans le cas de rappeler cette proposition; cette pensée me fait désirer d'en pouvoir abréger l'énoncé: dans cette vue, je conviens d'appeler MOMENT d'une force le produit de cette force par sa distance à un plan parallèle à sa direction; et dès-lors ma proposition se réduit à dire simplement que *le moment de la résultante est égal à la somme des momens des composantes.* Tout est, dans ce cas, clair et intelligible; mais, du moment que je compare une force à un plan non parallèle à sa direction, je n'aperçois plus de *moment*, du moins d'après le sens que je viens tout-à-l'heure d'attacher à ce mot. A la vérité, je pourrais bien, en généralisant la définition, appeler MOMENT d'une force *le produit de cette force par la distance de son point d'application à un plan quelconque;* mais, s'il est admis que ce point peut être pris arbitrairement sur sa direction, il s'ensuivra, comme M. Dubuat l'a fort bien observé lui-même (*Annales*, tom. V, pag. 215), qu'excepté le cas du parallélisme au plan, le moment d'une force est *tout ce qu'on voudra.*

En vain objectera-t-on, contre cette doctrine, que tous les géomètres reconnaissent l'existence d'un centre des forces parallèles; qu'est-ce, en effet, que ce centre? le voici: on prend arbitrairement, sur les directions de plusieurs forces parallèles, des points que l'on suppose fixes; on imagine ensuite que les forces, toujours appliquées à ces points, changent d'une manière quelconque leur direction commune; on trouve que, dans ce changement, la résultante est toujours dirigée vers un même point fixe, et c'est ce point qu'on nomme le *centre des forces parallèles.* Mais, outre que rien de semblable ne saurait plus exister, lorsque les forces cessent d'être parallèles; qui ne voit que, même dans le cas où elles sont telles, ce qu'on appelle *centre des forces* est tout aussi arbitraire et variable que les points pris arbitrairement sur les directions de ces forces?

*J. D. G.*

entre

entre le point d'application de la résultante des poussées du fluide et le plan de flottaison est double de la verticale comprise entre ce même plan et le centre de volume de la carène. C'est donc une erreur de dire que ces deux points se confondent en un seul. Cependant cette erreur serait assez indifférente, si le principe déjà cité, *qu'une force peut être censée appliquée à un point quelconque de sa direction*, était vrai généralement et sans exception; car, en vertu de ce principe, le centre de volume de la carène, qui est toujours sur la direction verticale de la résultante des poussées du fluide, pourrait être pris pour le point d'application de la résultante. Il en serait de même à l'égard d'une résultante ou même d'une force quelconque; il suffirait, dans tous les cas, de connaître sa direction, et la recherche de son point d'application serait tout à fait inutile. Or, nous avons déjà eu occasion de remarquer (*Annales*, tom. V, pag. 215), qu'il n'est pas toujours permis de déplacer le point d'application d'une force, et de le porter sur un autre point de sa direction (*). En revenant ici sur cette remarque, nous allons essayer de développer ce que nous n'avions fait qu'indiquer en l'endroit cité.

Le principe dont il sagit n'est plus aujourd'hui réputé une simple hypothèse; c'est une proposition démontrée, ou du moins que l'on croit l'être, et dont l'énoncé est :

» On ne change rien à l'action d'une force, en transportant son
» point d'application en un point quelconque de sa direction, pourvu

(*) Il est permis, je crois, de déplacer le point d'application d'une force, lorsque cette force doit conserver invariablement la même direction; mais, si elle doit changer de direction par rapport au système auquel elle est appliquée ou, ce qui revient au même, si ce système doit changer de situation par rapport à elle, on ne jouira plus de la même faculté; le point d'application de la force sera alors celui par lequel sa direction ne cessera de passer, malgré le changement survenu. C'est, en particulier, le cas des corps pesans; c'est également celui des corps solides flottant sur des fluides.

J. D. G.

» que ce second point soit censé lié au premier, par une droite
» inflexible, et que l'intensité et la direction de la force soient
» restées les mêmes. »

Admettons d'abord la proposition, et voyons quelles en seraient les conséquences.

1.° La condition de stabilité d'un corps solide, flottant sur un fluide pesant, est que le centre de gravité du corps soit inférieur, dans la position d'équilibre, au centre des pressions du fluide; ou, si le premier de ces deux points est supérieur au second, il faut, pour la stabilité de l'équilibre, que leur distance verticale soit moindre qu'une longueur donnée par le calcul, et dépendante de l'étendue et de la figure de la flottaison, ainsi que de la masse du corps. Mais, en se permettant de déplacer, à volonté, le point d'application des forces, tout cela se simplifie, et l'équilibre est toujours stable ou, si l'on veut, ne l'est jamais. Veut-on que l'équilibre soit stable? On déplace le point d'application de la résultante des poussées du fluide, dans la position d'équilibre, et on le porte, sur la direction verticale de cette résultante, au-dessus du centre de gravité du corps; cela suffit, comme nous venons de le dire, pour que l'équilibre soit stable. Veut-on, au contraire, qu'il ne le soit pas? On porte le centre de pression, sur la même verticale assez au-dessous du centre de gravité pour qu'il en soit ainsi. En faisant ces déplacemens, on a soin de dire que le point d'application de la force et le point de sa direction auquel on le transporte sont censés liés entre eux par une verge inflexible et inextensible (*).

2.° La durée des oscillations d'un pendule dépend, non seulement de l'amplitude des oscillations et du moment d'inertie du pendule, mais encore de la distance verticale de son centre de gravité

(*) Pour parvenir à la condition de stabilité de l'équilibre d'un corps flottant, on est obligé de comparer sa position d'équilibre à une autre position qui en soit très-voisine. Il y a donc lieu, dans ce cas, à l'exception mentionnée dans la note précédente. *J. D. G.*

au centre ou à l'axe de rotation, dans la position d'équilibre. Or, le centre de gravité d'un corps est le point d'application de la résultante des actions exercées par la gravité sur les molécules matérielles de ce corps (*); le centre de gravité peut donc être déplacé sur sa verticale, tout comme le point d'application de toute autre force peut l'être sur sa direction (**). Ce déplacement étant fait, dans la position d'équilibre du pendule, le centre de gravité étant transporté au centre de rotation, la durée des oscillations est nulle. On pourrait lui donner une valeur quelconque, en déplaçant convenablement le centre de gravité (***).

3.° Ce que nous venons de dire convient, avec quelques modifications, à tous les systèmes, et, en particulier, à un système de corps pesans. La distinction des équilibres stables et non stables du système suppose que la hauteur du centre de gravité est variable, et la détermination de la durée des oscillations, que le système peut faire sur une position d'équilibre stable, dépend de la valeur de l'ordonnée verticale du centre de gravité, dans la position d'équilibre. En vertu du déplacement des forces, le centre de gravité n'est pas en un point plutôt qu'en un autre de sa verticale; d'où il suit qu'il ne devrait être question ni de la distinction des équilibres stables et non stables, ni de la durée des oscillations d'un système de corps pesants, dans tout traité de mécanique où on a démontré, dès les premières pages, qu'une force peut être supposée appliquée en l'un quelconque des points de sa direction (****).

La démonstration de ce principe est fondée sur plusieurs autres propositions, dont la première est celle-ci :

« Deux forces égales et contraires appliquées aux deux extrémités

(*) Dans toutes les situations que ce corps peut prendre dans l'espace.

(**) *Oui*, dans le cas d'équilibre; *non*, dans celui du mouvement.

(***) Cette seconde objection me paraît devoir se résoudre comme la première.

(****) Même réponse encore que ci-dessus. *J. D. G.*

» d'une droite inflexible, et agissant dans la direction de cette droite, » sont en équilibre. »

Il est certain que l'équilibre a lieu entre les deux forces ; mais la preuve que l'on en donne, et qui consiste à dire qu'il n'y a pas de raison pour que le mouvement naisse d'un côté plutôt que de l'autre, n'est peut-être pas aussi claire qu'elle pourrait d'abord le paraître. En l'appliquant aux *Couples* de M. Poinsot, composés de deux forces égales, parallèles et contraires, on en conclurait que les deux forces d'un même couple sont en équilibre ; car on pourrait dire aussi qu'il n'y a pas de raison pour que le mouvement naisse plutôt dans le sens de l'une de ces forces que dans le sens de l'autre (*). Si l'on objectait que les momens des forces, par rapport au centre de masse du corps solide auquel on les suppose appliquées pouvant être inégaux, cette inégalité détruit l'indentité entre les actions des deux forces, nous objecterions à notre tour que la même inégalité de momens peut exister dans le cas de deux forces égales et contraires, appliquées aux extrémités d'une droite faisant partie d'un corps solide, et agissant dans la direction de cette droite (**). Les momens des forces, par rapport à un plan normal à leur direction, et passant par le centre de masse du corps, peuvent être inégaux ; ce qui détruit aussi l'identité parfaite que suppose la

(*) C'est aussi là ce qui arrive ; le système n'est alors entraîné dans le sens d'aucune force, ou plutôt il l'est également dans le sens de l'une et de l'autre ; car c'est à cela que revient au fond le mouvement de rotation que ces forces tendent à faire naître.

(**) L'une et l'autre objections me sembleraient être tout au moins prématurées ; on ne peut guère savoir ce que c'est que des momens, ni de quelles propriétés ils jouissent, lorsqu'on n'en est encore qu'à la démonstration du principe dont il s'agit ici. D'ailleurs, encore une fois, loin que la mécanique doive recevoir ses lois de la théorie des momens, cette théorie me semble au contraire devoir être absolument subordonnée aux principes de cette science ; principes au défaut desquels les momens sont et ne peuvent être que des fonctions tout à fait insignifiantes. *J. D. G.*

preuve. Mais laissons là cette preuve, et voyons la suite de la démonstration.

La seconde proposition dont on y fait usage peut être énoncée de la manière suivante.

« Si des forces appliquées à un système sont en équilibre, elles » se détruisent, et sont à l'égard du système, comme si elles n'existaient pas; en sorte qu'il est permis, dans tous les cas, de faire » abstraction de ces forces, lorsqu'elles sont appliquées au système, » ou de les y supposer appliquées lorsqu'elles ne le sont pas réel» lement. »

C'est principalement sur cette proposition, admise jusqu'à présent sans preuve, qu'est établie la démonstration du théorème relatif au déplacement du point d'application des forces. Il importe donc d'examiner si cette proposition est vraie en général, ou si, au contraire, elle admet des exceptions dans quelques cas particuliers.

Or, les équations de l'équilibre et celles du mouvement d'un système étant respectivement

$$\Sigma(X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z)=0\ ,$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{\Sigma.mn^2}{2}\right)=\Sigma(X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z)\ ;$$

Si on ajoute aux forces $X$, $Y$, $Z$, ou si l'on en retranche d'autres forces en équilibre, et satisfaisant par conséquent à la première équation, il est évident que ces nouvelles forces ne changeront rien à l'expression $\Sigma(X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z)$, commune aux deux équations; d'où il semblerait permis de conclure que des forces en équilibre se détruisent et s'évanouissent également, soit dans les formules de la statique soit dans celles de la dynamique. Mais on sait que, pour obtenir certaines conditions ou pour parvenir à certains résultats du mouvement d'un système, il faut différentier la seconde équation, et évaluer la différentielle $\mathrm{d}^2.\Sigma.mn^2$, dans une position d'équilibre. Cette différentielle devient alors une fonction des forces en équilibre, telle que ces forces ne s'y évanouissent plus; ce qui suffit pour prouver que des forces en équilibre ne se détruisent pas toujours et ne sont pas toujours, à l'égard d'un système, comme si elles n'existaient pas.

Cependant, lorsqu'il ne s'agit que des conditions de l'équilibre ou, plus généralement, lorsque la solution d'un problème n'exige pas que la formule $d\Sigma mn^2$ soit différentiée et évaluée dans une position d'équilibre, nous venons de voir que des forces supposées en équilibre se détruisent, et peuvent être regardées comme nulles; il est donc permis alors de changer le point d'application d'une force, et de le porter en un autre point de sa direction, pourvu (et c'est la condition énoncée dans tous les traités) que le second point soit lié ou censé lié, c'est-à-dire, regardé comme lié au premier, par une verge inflexible et inextensible.

Ici se présentent naturellement deux questions. Que signifient ces expressions : *censés liés ou regardés comme liés*? Si le point auquel on transporte la force fait partie d'un système, sa liaison avec le point d'application est déterminée par la nature du système; elle est par conséquent indépendante de tout ce qu'on peut imaginer en disant que les deux points sont liés ou censés liés entre eux par une verge inflexible et inextensible. Si, au contraire, le second point est pris hors du système, sa liaison avec le premier est tout à fait arbitraire, et toujours telle qu'on voudra le supposer. La fiction exprimée par ces termes : *censés liés ou regardés comme liés*, est donc inutile dans le second cas et contradictoire dans le premier (*). On éviterait ce double inconvénient, en réduisant la condition du déplacement des forces à ce que le second point, s'il fait partie

(*) Quelques auteurs, pour démontrer les conditions de l'équilibre du polygone funiculaire, transportent d'un nœud au nœud voisin les points d'application des forces ou de leurs résultantes. Ces nœuds sont donc censés liés entre eux par une droite inflexible. Cependant, d'après la définition du polygone funiculaire, donnée par les mêmes auteurs, les nœuds sont assemblés par des cordes flexibles; il y a donc ici contradiction.

*Note de M. Dubuat.*

du système, soit tel que sa distance au premier soit, par la nature même de ce système, constante et invariable. Mais, cette condition est-elle absolument nécessaire? et ne peut-il exister qu'une seule espèce de liaison entre deux points, dont l'un est le point d'application d'une force, et l'autre celui auquel il est permis de transporter ce point d'application? telle est la seconde question qu'il s'agit de résoudre (*).

Or, la propriété en vertu de laquelle un point situé sur la direction d'une force peut être pris pour le point d'application de cette force, consiste en ce que deux forces égales et contraires, appliquées aux deux points, suivant la direction de la droite qui les joint, sont en équilibre. Il faut donc, après avoir posé les équations de l'équilibre, en conclure les équations de condition qui peuvent avoir lieu entre les coordonnées de ces deux points.

Soient donc $x$, $y$, $z$, $x'$, $y'$, $z'$ ces coordonnées; $X$, $Y$, $Z$, $-X$, $-Y$, $-Z$ les forces égales et opposées appliquées aux deux points; soient aussi

---

(*) Voici comment j'ai cru devoir entendre jusqu'ici la faculté de déplacer le point d'application d'une force. Une force étant appliquée à un point d'un système, je prends arbitrairement un second point sur la direction de cette force. Si ce point est un point du système qui, par sa nature, soit invariablement lié avec le premier, je suppose que la force lui est appliquée; si c'est, au contraire, un point de l'espace, tout à fait étranger au système, je ne puis y transporter la force sans imaginer, au préalable, une liaison de ce point avec le premier. Il m'importe peu, au surplus, que la condition de distance invariable entre les deux points soit *nécessaire*; tout ce qu'il faut pour mon but, c'est qu'elle soit suffisante.

Dans la statique, il doit être permis, en outre, de transporter une force d'un point d'un système à un autre point du système non lié avec lui d'une manière invariable; car, lorsque l'équilibre existe dans un système, cet équilibre doit subsister; à plus forte raison, si l'on conçoit que le système se soit tout-à-coup solidifié. On peut donc, dans le polygone funiculaire *en équilibre*, supposer tous les nœuds liés entre eux d'une manière invariable.

J. D. G.

$$Adx+Bdy+Cdz+A'dx'+B'dy'+C'dz'=0\ ,$$

$$Ddx+Edy+Fdz+D'dx'+E'dy'+F'dz'=0\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,$$

les équation de condition, entre les coordonnées; les équations de l'équilibre seront

$$X+\lambda A+\mu D+\ldots=0\ ,\quad -X+\lambda A'+\mu D'+\ldots=0\ ,$$

$$Y+\lambda B+\mu E+\ldots=0\ ,\quad -Y+\lambda B'+\mu E'+\ldots=0\ ,$$

$$Z+\lambda C+\mu F+\ldots=0\ ,\quad -Z+\lambda C'+\mu F'+\ldots=0\ ;$$

$\lambda$ et $\mu$ étant deux indéterminées. En nommant $R$ la résultante des forces $X$, $Y$, $Z$ et désignant par $s$ la distance entre les deux points on a

$$X=R.\frac{x-x'}{s}\ ,\quad Y=R.\frac{y-y'}{s}\ ,\quad Z=R.\frac{z-z'}{s}\ ;$$

d'où il est facile de conclure

$$A=\rho.\frac{x-x'}{s}+\varpi D\ ,\quad A'=-\rho.\frac{x-x'}{s}+\varpi D'\ ,$$

$$B=\rho.\frac{y-y'}{s}+\varpi E\ ,\quad B'=-\rho.\frac{y-y'}{s}+\varpi E'\ ,$$

$$C=\rho.\frac{z-z'}{s}+\varpi F\ ,\quad C'=-\rho.\frac{z-z'}{s}+\varpi F'\ ;$$

$\rho$ et $\varpi$ étant des indéterminées dépendant des premières. Substituant ces valeurs dans la première équation de condition, il vient

$$\frac{f}{s}\left\{(x-x')(\mathrm{d}x-\mathrm{d}x')+(y-y')(\mathrm{d}y-\mathrm{d}y')+(z-z')(\mathrm{d}z-\mathrm{d}z')\right\}$$
$$+\lambda(D\mathrm{d}x+E\mathrm{d}y+F\mathrm{d}z+D'\mathrm{d}x'+E'\mathrm{d}y'+F'\mathrm{d}z'=0\ ,$$

ou simplement

$$(x-x')(\mathrm{d}x-\mathrm{d}x')+(y-y')(\mathrm{d}y-\mathrm{d}y')+(z-z')(\mathrm{d}z-\mathrm{d}z')=0\ .$$

On trouverait le même résultat en prenant les valeurs de $D$, $E$, $F$, $D'$, $E'$, $F'$, et les substituant dans la seconde équation de condition. Donc il ne peut y avoir qu'une seule équation de condition entre les coordonnées des deux points ; et cette équation exprime que la distance entre ces deux points est constante et invariable.

Il suit de tout ce qui a été dit ci-dessus que le théorème relatif au changement du point d'application des forces est sujet à des exceptions, dans plusieurs cas connus ; que, hors de ce cas, le théorème est démontré, ainsi que la condition à observer dans la manière de déplacer ce point. Mais il se présente encore ici une question à examiner ; c'est la suivante ;

Le théorème relatif au déplacement du point d'application des forces, peut-il être démontré au commencement d'un traité de mécanique ; et peut-il conséquemment être considéré comme devant servir de fondement à cette science ?

En réduisant la question au seul cas de l'équilibre, pour lequel le théorème est vrai, généralement et sans exception, et en l'énonçant de la manière suivante : *Lorsqu'il s'agit d'exprimer les conditions de l'équilibre d'un système, il est permis de transporter les points d'application des forces à des points quelconques de leur direction, pourvu que ces points, s'ils font partie du système soient à des distances fixes et invariables des points réels d'application* (*) ;

(*) J'avoue que je n'ai jamais bien compris ce que pouvait être, *en statique*, le point *réel* d'application d'une force. Loin que je croie difficile d'admettre en l'énonçant, disons-nous, de cette manière, sa démonstration dépend, comme nous l'avons déjà remarqué, de celle d'une autre proposition, laquelle, réduite aussi au cas de l'équilibre, est : *Si, parmi les forces appliquées à un système, il s'en trouve qui soient d'elles-mêmes en équilibre, leur existence dans le système ne changera rien aux conditions de l'équilibre entre les autres forces qui lui sont appliquées.*

C'est donc cette dernière proposition qu'il faudra démontrer, à moins pourtant qu'on ne veuille l'admettre comme évidente d'elle-même. La difficulté de trouver une démonstration antérieure à toute théorie, et fondée uniquement sur la définition des forces en équilibre, fera probablement qu'on s'en tiendra à ce dernier parti (*). Mais alors il conviendra d'expliquer pourquoi cette proposition, vraie sans exception en statique, ne l'est point toujours en dynamique (**). Quoi qu'il en soit, en l'admettant comme un théorème démontré ou comme une proposition évidente d'elle-même, il est facile d'en conclure la formule générale de l'équilibre entre des forces quelconques, appliquées à un système aussi quelconque.

Soient en effet $X$, $Y$, $Z$, $X'$, $Y'$, $Z'$, .... des forces en équilibre, appliquées aux différens points $(x, y, z)$, $(x', y', z')$, .... d'un système; et supposons la condition d'équilibre exprimée par l'équation

---

qu'une force peut être transportée suivant sa direction; il me semble au contraire que toute la difficulté consisterait plutôt ici à bien établir qu'il n'est pas permis de transporter une force parallèlement à sa direction (Voyez *Annales*, tom. I, pag. 175, *à la note*).

(*) Ce serait assez mon avis, et cela précisément parce que la proposition dont il s'agit me semble résulter évidemment de la définition de l'équilibre.

(**) J'ai quelquefois pensé que les forces, considérées indépendamment du *mouvement* qu'elles peuvent faire naître, n'étant que des êtres de raison, on avait peut-être tort de vouloir isoler la science de l'équilibre de celle du mouvement. Ne serait-ce pas à cette cause que tiendraient en partie les difficultés théoriques que l'on rencontre dès l'entrée de la mécanique ?

*J. D. G.*

$$F(X, Y, Z, X', Y', Z', \ldots x, y, z, x', y', z', \ldots) = 0. \quad (1)$$

Soient $P, Q, R, P', Q', R', \ldots$ d'autres forces, indépendantes des premières, appliquées aux mêmes points; la condition de l'équilibre entre les forces totales $X+P$, $Y+Q$, $Z+R$, $X'+P'$, $Y'+Q'$, $Z'+R'$, ..... sera

$$F(X+P, Y+Q, Z+R, X'+P', Y'+Q', Z'+R', \ldots x, y, z, x', y', z', \ldots) = 0;$$

ou, en supprimant dans le développement la partie détruite par l'équation (1), et désignant par $F_x$, $F_y$, $F_z$, ..... les fonctions dérivées de F, prises successivement par rapport à $X, Y, Z, \ldots$

$$PF_x(X, Y, Z, \ldots) + QF_y(X, Y, Z, \ldots) + RF_z(X, Y, Z, \ldots) + \ldots = 0.$$

En vertu de la proposition mentionnée plus haut, les forces en équilibre $X, Y, Z, \ldots$ doivent s'évanouir, et il ne doit rester dans le premier membre de l'équation que les forces $P, Q, R, \ldots$; donc les fonctions dérivées sont des dimensions nulles, et la fonction primitive F est linéaire; ce qui change l'équation (1) en celle-ci

$$AX + BY + CZ + A'X' + B'Y' + C'Z' + \ldots = 0; \quad (2)$$

$A, B, C, A', B', C', \ldots$ étant des coefficiens encore inconnus; mais indépendans de l'intensité des forces.

Cela posé, lorsque la résultante des forces $X, Y, Z$, qui agissent le point $(x, y, z)$, est perpendiculaire à la surface courbe sur laquelle ce point est assujetti à se mouvoir, c'est-à-dire, lorsqu'on a l'équation de condition $Xdx + Ydy + Zdz = 0$, les forces $X, Y, Z$ sont en équilibre, et la somme des termes qui contiennent ces forces doit s'évanouir; donc l'expression linéaire $AX+BY+CZ$ doit être de la forme $\mu(Xdx + Ydy + Zdz)$, $\mu$ étant indépendant des forces. Par une raison semblable $A'X' + B'Y' + C'Z'$ doit être de la forme $\mu'(X'\mathrm{d}x'+Y'\mathrm{d}y'+Z'\mathrm{d}z)$, et ainsi de suite ; de sorte que l'équation (2) devient

$$\mu(X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z)+\mu'(X'\mathrm{d}x'+Y'\mathrm{d}y'+Z'\mathrm{d}z')+\ldots\ldots=0\,. \qquad (3)$$

De plus, lorsqu'il y a, entre les coordonnées des deux points $(x, y, z)$ $(x', y', z')$, ainsi qu'entre les forces qui leur sont appliquées, la réaction exprimée par

$$X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z+X'\mathrm{d}x'+Y'\mathrm{d}y'+Z'\mathrm{d}z'=0\,,$$

les forces $X$, $Y$, $Z$, $X'$, $Y'$, $Z'$ considérées ensemble sont en équilibre, et doivent conséquemment s'évanouir, et il en serait de même pour deux autres groupes de forces quelconques (*) ; d'où il suit qu'on doit avoir $\mu=\mu'=\mu''=\ldots$; ce qui réduit l'équation (3) à

$$\mu\Sigma(X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z)=0\,;$$

dans laquelle le facteur $\mu$, indépendant des forces, ne peut donner une condition d'équilibre en l'égalant à zéro ; donc enfin l'équation générale de l'équilibre doit être simplement

$$\Sigma(X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z)=0\,. \text{ (**)}$$

---

(*) Cette proposition étant facile à établir, nous en supprimons la démonstration, pour abréger.

*Note de M. Dubuat.*

(**) M. Dubuat voudra peut-être bien me pardonner la manière franche dont j'ai hasardé de combattre quelques assertions répandues dans le cours de son mémoire. Si même il considère la liberté avec laquelle j'en ai usé à son égard comme un témoignage de l'estime que je lui porte, il ne fera que me rendre une justice rigoureuse. Loin que je regarde son travail comme inutile ou déplacé, je pense au contraire que c'est à des dissertations du genre de la sienne que ce recueil doit être principalement consacré ; et je me ferai toujours un devoir d'accueillir avec empressement toutes celles qui auront pour objet d'éclaircir et de perfectionner les doctrines fondamentales qui constituent proprement la philosophie de la science.

*J. D. G.*

# QUESTIONS RÉSOLUES.

## *Solution des deux problèmes de géométrie proposés à la page 60 de ce volume.*

### *Solution du premier problème ;*

Par un ABONNÉ.

LE problème proposé revient évidemment à celui-ci :

*PROBLÈME. Déterminer, en fonction des trois angles plans d'un angle trièdre*, 1.° *l'angle générateur du cône droit inscrit* ; 2.° *l'angle générateur du cône droit circonscrit ;* 3.° *enfin, l'angle que forment entre eux les axes de ces deux cônes ?*

Ce problème se trouvant implicitement résolu dans un article inséré à la page 329 du précédent volume des *Annales* ; je n'aurai pour ainsi dire ici d'autre tâche à remplir qu'à en faire ressortir la solution démandée ; et je serai conséquemment dans le cas d'y renvoyer fréquemment (*).

---

(*) L'auteur de cet article, en le rédigeant, devait ne point connaître, ou du moins avoir totalement perdu de vue un article de M. Français, inséré dans la *Correspondance sur l'école polytechnique* (tom. 1.er, n.° 9, janvier 1808, pag. 337). Ce sont exactement les mêmes résultats et la même manière de procéder. Au surplus, ces formules de M. Français avaient déjà paru, antérieurement, dans le XIV.e cahier du *Journal de l'école polytechnique* (page 182) ; mais alors sa marche, pour y parvenir, était un peu différente.

*Solution*. Soient $a$ , $b$ , $c$ , les trois angles plans de l'angle trièdre dont il s'agit ; $r$ l'angle générateur du cône droit inscrit ; $R$ l'angle générateur du cône droit circonscrit, et $D$ l'angle que forment les axes de ces deux cônes. Soient faits, pour abréger,

$$2s=a+b+c\ ,$$

$$\Delta^2=1-\text{Cos.}^2a-\text{Cos.}^2b-\text{Cos.}^2c+2\text{Cos.}a\text{Cos.}b\text{Cos.}c\ .$$

Si, dans le mémoire cité, on suppose que les trois axes sont les arêtes de notre angle trièdre, on aura

$$(y\,,\ z)=a\ ,\quad (z\,,x)=b\ ,\quad (x\,,\ y)=c\ .\quad (^*)$$

I. Si, dans l'équation (R), (*Annales*, tom. V, pag. 331), on substitue pour $a, b, c$, les valeurs données par les équations (13), (pag. 337), en ayant égard aux conventions ci-dessus, il viendra

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sin.}^2a\text{Sin.}^2(yz\,,r)+2\text{Sin.}b\text{Sin.}c\,\text{Cos.}(zx\,,r)\text{Sin.}(xy\,,r)\\ \text{Sin.}^2b\text{Sin.}^2(zx\,,r)+2\text{Sin.}c\text{Sin.}a\text{Cos.}(xy\,,r)\text{Sin.}(yz\,,r)\\ \text{Sin.}^2c\text{Sin.}^2(xy\,,r)+2\text{Sin.}a\text{Sin.}b\text{Cos.}(yz\,,r)\text{Sin.}(zx\,,r)\end{array}\right\}=\Delta^2\ .$$

Si l'on suppose ensuite que la droite désignée par $r$, dans cette équation est l'axe du cône droit inscrit, lequel doit conséquemment faire, avec les trois faces de l'angle trièdre, des angles égaux entre eux et à l'angle générateur $r$ de ce cône, on aura

$$(xy\,,r)=(yz\,,r)=(zx\,,r)=r\,;$$

par suite de quoi notre équation donnera

---

(*) Il faut bien remarquer que nos $a$, $b$, $c$ ne sont point ceux du mémoire cité. Il en est de même de $r$.

$$\operatorname{Sin.}^2 r=\frac{\Delta^2}{\begin{array}{l}\operatorname{Sin.}^2 a+2\operatorname{Sin.}b\operatorname{Sin.}c\operatorname{Cos.}a\\+\operatorname{Sin.}^2 b+2\operatorname{Sin.}c\operatorname{Sin.}a\operatorname{Cos.}b\\+\operatorname{Sin.}^2 c+2\operatorname{Sin.}a\operatorname{Sin.}b\operatorname{Cos.}c\end{array}}. \qquad (1)$$

II. Si, dans la formule (7), (tom. V, pag. 334), on prend pour $r$ l'axe du cône droit circonscrit, lequel doit faire avec les trois arètes de l'angle trièdre des angles égaux entre eux et à l'angle générateur $R$ de ce cône, on aura

$$(r,x)=(r,y)=(r,z)=R\ ;$$

en conséquence, cette formule donnera

$$\operatorname{Cos.}^2 R=\frac{\Delta^2}{\begin{array}{l}\operatorname{Sin.}^2 a-2(\operatorname{Cos.}a-\operatorname{Cos.}b\operatorname{Cos.}c)\\+\operatorname{Sin.}^2 b-2(\operatorname{Cos.}b-\operatorname{Cos.}c\operatorname{Cos.}a)\\+\operatorname{Sin.}^2 c-2(\operatorname{Cos.}c-\operatorname{Cos.}a\operatorname{Cos.}b)\end{array}}. \qquad (2)$$

III. Si enfin, dans l'équation (19), (tom. V, pag. 338), on substitue pour $\operatorname{Sin.}(yz,x)$, $\operatorname{Sin.}(zx,y)$, $\operatorname{Sin.}(xy,z)$ les valeurs données par les équations (14), (tom. V, pag. 337), il viendra

$$\Delta\operatorname{Cos.}(r,r')=\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Sin.}a\operatorname{Sin.}(yz,r)\operatorname{Cos.}(r',x)\\+\operatorname{Sin.}b\operatorname{Sin.}(zx,r)\operatorname{Cos.}(r',y)\\+\operatorname{Sin.}c\operatorname{Sin.}(xy,r)\operatorname{Cos.}(r',z)\end{array}\right\};$$

prenant alors pour $r$ l'axe du cône inscrit, et pour $r'$ celui du cône circonscrit, ce qui donnera, à la fois,

$$(yz,r)=(zx,r)=(xy,r)=r\ ;$$
$$(r',x)=(r',y)=(r',z)=R,$$
$$(r,r')=D\ ;$$

cette équation donnera

$$\operatorname{Cos.}D=\frac{1}{\Delta}(\operatorname{Sin.}a+\operatorname{Sin.}b+\operatorname{Sin.}c)\operatorname{Sin.}r\operatorname{Cos.}R\ ; \qquad (3)$$

formule dans laquelle il ne sera plus question que de substituer pour $\Delta$, $\text{Sin}.r$, $\text{Cos}.R$ les valeurs trouvées ci-dessus (I, II). (*)

IV. De l'expression (1) de $\text{Sin}.^2r$ on conclut aisément

$$\text{Cos}.^2r=\frac{4\text{Sin}.^2s}{\begin{array}{l}\text{Sin}.^2a+2\text{Sin}.b\text{Sin}.c\text{Cos}.a\\+\text{Sin}.^2b+2\text{Sin}.c\text{Sin}.a\text{Cos}.b\\+\text{Sin}.^2c+2\text{Sin}.a\text{Sin}.b\text{Cos}.c\end{array}}\ ; \qquad (4)$$

et par suite

$$\text{Tang}.^2r=\frac{\Delta^2}{4\text{Sin}.^2s}\ ; \qquad (5)$$

or, on trouve aisément

$$\Delta^2=4\text{Sin}.s\text{Sin}.(s-a)\text{Sin}.(s-b)\text{Sin}.(s-c)\ ;$$

donc enfin

$$\text{Tang}.r=\frac{\sqrt{\text{Sin}.s\text{Sin}.(s-a)\text{Sin}.(s-b)\text{Sin}.(s-c)}}{\text{Sin}.s}\ ; \qquad (6)$$

formule commode pour le calcul par logarithmes.

Si dans cette dernière formule, on suppose le rayon de la sphère infini, il viendra

$$r=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}\ ; \qquad (7)$$

expression connue du rayon du cercle inscrit au triangle rectiligne, en fonction de ses trois côtés.

V. De l'expression (2) de $\text{Cos}.^2R$ on conclut aisément

$$\text{Sin}.^4R=\frac{16\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}a\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}b\text{Sin}.^2\tfrac{1}{2}c}{\begin{array}{l}\text{Sin}.^2a-2(\text{Cos}.a-\text{Cos}.b\text{Cos}.c)\\+\text{Sin}.^2b-2(\text{Cos}.b-\text{Cos}.c\text{Cos}.a)\\+\text{Sin}.^2c-2(\text{Cos}.c-\text{Cos}.a\text{Cos}.b)\end{array}}\ ; \qquad (8)$$

et, par suite ;

(*) Il serait intéressant de découvrir si, pour le triangle sphérique, comme pour le triangle rectiligne, $D$ est simplement fonction de $r$ et $R$ (voyez *Annales*, tom. III, pag. 347). Le moyen de s'en assurer serait d'éliminer, entre les équations (1, 2, 3), deux quelconques des trois angles $\alpha$, $b$, $c$, afin de voir si le troisième disparaîtrait aussi de lui-même ; mais ce moyen ne paraît pas être d'une exécution très-facile. J. D. G.

Tang.²

$$\text{Tang.}^2R=\frac{16\,\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}a\,\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}c}{\Delta^2}\,; \qquad (9)$$

ou, en mettant pour $\Delta^2$ sa valeur ci-dessus, et extrayant la racine quarrée,

$$\text{Tang.}R=\frac{2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c}{\sqrt{\text{Sin.}s\,\text{Sin.}(s-a)\,\text{Sin.}(s-b)\,\text{Sin.}(s-c)}}\,; \qquad (10)$$

formule commode par le calcul par logarithmes.

Si, dans cette dernière formule, on suppose le rayon de la sphère infini, elle deviendra

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}\,; \qquad (11)$$

expression connue du rayon du cercle circonscrit au triangle rectiligne, en fonction de ces trois côtés.

---

## *Solution du deuxième problème ;*

Par M. Bérard, principal et professeur de mathématiques du collége de Briançon, membre de plusieurs sociétés savantes.

### §. I.

*Trouver le rayon de la sphère inscrite à un tétraèdre ?*

Soient ABCD le tétraèdre donné ;

*Aire*BCD$=A$ , *Aire*CDA$=B$ , *Aire*DAB$=C$ , *Aire*ABC$=D$ ;

$T$ le volume du tétraèdre ; $r$ le rayon de la sphère inscrite ;

AD$=a$ , BD$=b$ , CD$=c$ , BC$=d$ , CA$=e$ , AB$=f$ ;

$o$ le centre de la sphère inscrite, $a'$, $b'$, $c'$ ses coordonnées respectivement parallèles à $a$, $b$, $c$, le sommet D étant l'origine ;

$g$, $h$, $k$ les perpendiculaires abaissées des sommets A, B, C sur les plans des faces opposées $A$, $B$, $C$ ;

Enfin, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles que forment deux à deux les arêtes $a$, $b$, $c$.

En concevant le tétraèdre comme composé de quatre autres ayant leur sommet commun au point $o$, et ayant pour bases les quatre faces $A$, $B$, $C$, $D$ du premier ; leur hauteur commune sera le rayon cherché $r$, et l'on aura conséquemment

$$T=(A+B+C+D)\cdot\frac{r}{3}\;;$$

d'où on tire

$$r=\frac{3T}{A+B+C+D}\,. \qquad (1)$$

D$o$ est la diagonale d'un parallélipipède, dont les arêtes concourant en D sont égales à $a'$, $b'$, $c'$ ; et dans lequel les distances entre les faces opposées sont toutes égales à $r$. En conséquence, les triangles-rectangles semblables donnent

$$a'=\frac{ar}{g}\,,\quad b'=\frac{br}{h}\,,\quad c'=\frac{cr}{k}\,. \qquad (2)$$

Voilà donc les coordonnées du centre déterminées. On sait d'ailleurs que

$$\text{Cos.}\alpha=\frac{b^2+c^2-d^2}{2bc}\,,\quad \text{Cos.}\beta=\frac{c^2+a^2-e^2}{2ca}\,,\quad \text{Cos.}\gamma=\frac{a^2+b^2-f^2}{2ab}\;;$$

$$T=\tfrac{1}{6}abc\sqrt{1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma}\;;$$

$$A=\tfrac{1}{2}bc\text{Sin.}\alpha\,,\quad B=\tfrac{1}{2}ca\text{Sin.}\beta\,,\quad C=\tfrac{1}{2}ab\text{Sin.}\gamma\;;$$

$$D=\tfrac{1}{4}\sqrt{2e^2f^2+2f^2d^2+2d^2e^2-d^4-e^4-f^4}\;;$$

$$g=\frac{3T}{A}\,,\quad h=\frac{3T}{B}\,,\quad k=\frac{3T}{C}\;;$$

au moyen de quoi $r$, $a'$, $b'$, $c'$ peuvent, sans difficulté, être exprimés en fonction des six arêtes.

Les équations de D$o$ sont

$$\frac{x}{a'}=\frac{y}{b'}=\frac{z}{c'}\,,$$

ou

$$\frac{gx}{a}=\frac{hy}{b}=\frac{kz}{c}\,,$$

ou

$$\frac{x}{Aa}=\frac{y}{Bb}=\frac{z}{Cc}\ ,$$

ou enfin

$$\frac{x}{\text{Sin.}\alpha}=\frac{y}{\text{Sin.}\beta}=\frac{z}{\text{Sin.}\gamma}\ . \qquad (3)$$

## §. II.

*Trouver le rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre ?*

Tout étant d'ailleurs comme ci-dessus, soient de plus O le centre et R le rayon de la sphère circonscrite ; en désignant par $a''$, $b''$, $c''$ les coordonnées du centre de cette sphère, respectivement parallèles aux arêtes $a$, $b$, $c$, son équation sera

$$\left.\begin{array}{l}(x-a'')^2+2(y-b'')(z-c'')\text{Cos.}\alpha\\+(y-b'')^2+2(z-c'')(x-a'')\text{Cos.}\beta\\+(z-c'')^2+2(x-a'')(y-b'')\text{Cos.}\gamma\end{array}\right\}=R^2\ ; \qquad (4)$$

Pour exprimer que cette sphère passe par les quatre sommets A, B, C, D, il faudra écrire que son équation est également satisfaite par chacun des quatre systèmes de valeurs

$$\begin{array}{l}x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0\ ,\\x=a\ ,\ y=0\ ,\ z=0\ ,\\x=0\ ,\ y=b\ ,\ z=0\ ,\\x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=c\ .\end{array}$$

Cela donne

$$a''^2+b''^2+c''^2+2b''c''\text{Cos.}\alpha+2c''a''\text{Cos.}\beta+2a''b''\text{Cos.}\gamma=R^2\ , \qquad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l}(a-a'')^2+b''^2+c''^2+2b''c''\text{Cos.}\alpha-2c''(a-a'')\text{Cos.}\beta-2b''(a-a'')\text{Cos.}\gamma=R^2\ ,\\a''^2+(b-b'')^2+c''^2-2c''(b-b'')\text{Cos.}\alpha+2c''a''\text{Cos.}\beta-2a''(b-b'')\text{Cos.}\gamma=R^2\ ,\\a''^2+b''^2+(c-c'')^2-2b''(c-c'')\text{Cos.}\alpha-2a''(c-c'')\text{Cos.}\beta+2a''b''\text{Cos.}\gamma=R^2\ .\end{array}\right\} \qquad (6)$$

Retranchant l'équation (5) de chacune des équations (6), celles-ci deviendront, en divisant la première par $a$, la seconde par $b$ et la troisième par $c$,

$$2a''+2c''\text{Cos.}\beta+2b''\text{Cos.}\gamma=a\ ,$$
$$2b''+2a''\text{Cos.}\gamma+2c''\text{Cos.}\alpha=b\ ,$$
$$2c''+2b''\text{Cos.}\alpha+2a''\text{Cos.}\beta=c\ .$$

En se rappelant que

$$1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}\beta^2-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma=\frac{36T^2}{a^2b^2c^2}\ , \qquad (7)$$

on en tire

$$a''=\frac{a^2b^2c^2}{72T^2}\{a\text{Sin.}^2\alpha-b(\text{Cos.}\gamma-\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta)-c(\text{Cos.}\beta-\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha)\}\ ,$$

$$b''=\frac{a^2b^2c^2}{72T^2}\{b\text{Sin.}^2\beta-c(\text{Cos.}\alpha-\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)-a(\text{Cos.}\gamma-\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta)\}\ ,$$

$$c''=\frac{a^2b^2c^2}{72T^2}\{c\text{Sin.}^2\gamma-a(\text{Cos.}\beta-\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha)-b(\text{Cos.}\alpha-\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)\}\ ,$$

substituant ces valeurs dans l'équation (5), et ayant toujours égard à l'équation (7), il viendra

$$R^2=\frac{a^2b^2c^2}{144T^2}\left\{\begin{array}{c} a^2\text{Sin.}^2\alpha-2bc(\text{Cos.}\alpha-\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma) \\ +b^2\text{Sin.}^2\beta-2ca(\text{Cos.}\beta-\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha) \\ +c^2\text{Sin.}^2\gamma-2ab(\text{Cos.}\gamma-\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta) \end{array}\right\}. \qquad (8)$$

## §. III.

*Trouver la distance entre les centres des sphères inscrite et circonscrite à un même tétraèdre ?*

En représentant par $D$ cette distance, et conservant d'ailleurs les mêmes dénominations que ci-dessus, on aura

$$D^2=\left\{\begin{array}{c} (a'-a'')^2+2(b'-b'')(c'-c'')\text{Cos.}\alpha \\ +(b'-b'')^2+2(c'-c'')(a'-a'')\text{Cos.}\beta \\ +(c'-c'')^2+2(a'-a'')(b'-b'')\text{Cos.}\gamma \end{array}\right\}; \quad (9)$$

formule dans laquelle il n'est plus question que de substituer pour les coordonnées des deux centres les valeurs trouvées ci-dessus, et qui se simplifierait peut-être, en y introduisant les rayons $R$ et $r$. (*)

(*) Il serait sur-tout intéressant de savoir si $D$ peut être exprimé uniquement en fonction de $R$ et $r$. J. D. G.

# GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

## *Théorèmes nouveaux sur les lignes et surfaces du second ordre* ;

Par M. Frégier, ancien élève de l'école polytechnique.

J'ai annoncé, dans le III.e volume de la *Correspondance sur l'école polytechnique* ( n.° 3, janvier 1816, page 394 ), un théorème en vertu duquel on peut construire, avec un équerre, pour tout instrument, la normale et par conséquent la tangente à une ligne du second ordre, indépendamment de la connaissance des diamètres principaux. Je me propose ici de démontrer ce théorème, ainsi que plusieurs autres théorèmes analogues, sur les lignes et surfaces du second ordre.

Une ligne du second ordre étant donnée, et un point fixe étant pris arbitrairement sur cette courbe ; si l'on prend la tangente en ce point pour axe des $x$ et la normale qui lui répond pour axe des $y$, en désignant par $N$ la longueur de la normale, mesurée depuis l'origine jusqu'au point où elle rencontre de nouveau la courbe, par

$$y=Ax+N\,,$$

l'équation de la tangente à cette dernière extrémité de la normale, et enfin par $P$ le rayon de courbure qui répond à l'origine ; l'équation de la courbe dont il s'agit, sera

$$Nx^2+2Py(y-Ax-N)=0 \ . \qquad (1)$$

Soit D une droite menée arbitrairement par l'origine, et formant respectivement avec les axes des $x$ et des $y$ des angles dont les cosinus soient $a$ et $b$, ce qui donnera

$$a^2+b^2=1 \ ; \qquad (2)$$

l'équation de cette droite sera

$$ay=bx \ ; \qquad (3)$$

en la combinant avec l'équation (1), on obtiendra, pour les coordonnées de l'intersection de D avec la courbe

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{2NPab}{Na^2+2Pb^2-2APab} \ , \\ y&=\frac{2NPb^2}{Na^2+2Pb^2-2APab} \ . \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Pour une nouvelle droite D′, passant également par l'origine, et formant avec les axes des $x$ et des $y$ des angles dont les cosinus soient respectivement $a'$, $b'$, ce qui donne

$$a'^2+b'^2=1 \ , \qquad (5)$$

on aura semblablement

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{2NPa'b'}{Na'^2+2Pb'^2-2APa'b'} \ , \\ y&=\frac{2NPb'^2}{Na'^2+2Pb'^2-2APa'b'} \ . \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

On trouvera aisément d'après cela que l'équation de la corde C qui joint les extrémités des deux droites D, D′ est, en divisant par $ab'-ba'$,

$$\{N(ab'+ba')-2APbb'\}x+(2Pbb'-Naa')y=2NPbb' \ . \qquad (7)$$

Si, pour savoir en quels points la corde C coupe la normale et la tangente ; on fait successivement, dans cette équation, $x$ et $y=0$, il viendra

$$y=\frac{2NP}{2P-N\frac{aa'}{bb'}}, \tag{8}$$

$$x=\frac{2NP}{N\left(\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}\right)-2AP} \tag{9}$$

d'où l'on voit que, pourvu que $\frac{aa'}{bb'}$ soit constant, la corde C coupera toujours la normale au même point ; et que, pourvu que $\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}$ soit constant, cette même corde coupera toujours la tangente au même point, quelles que puissent être d'ailleurs les directions des droites D et D'.

Parmi les divers cas où $\frac{aa'}{bb'}$ est constant, l'un des plus simples est, sans contredit, celui où l'on a

$$aa'+bb'=0, \quad \text{d'où} \quad \frac{aa'}{bb'}=-1 ;$$

les droites D, D' sont alors perpendiculaires l'une à l'autre ; et le point fixe de la normale par lequel passe la droite C est donnée (8) par la formule

$$y=\frac{2NP}{2P+N}. \tag{10}$$

De là résulte ce théorème :

*THÉORÈME I. Si l'on inscrit à une ligne du second ordre une suite de triangles-rectangles ayant tous le sommet de l'angle droit situé en un même point de cette courbe ; leurs hypothénuses concourront toutes en un même point de la normale menée par le sommet commun à tous ces triangles ; d'où il suit encore, par* *la théorie des pôles* (*), *que les points de concours des tangentes aux extrémités de ces hypothénuses seront tous situés sur une même droite.*

Si donc, n'ayant d'autre instrument qu'un équerre, on veut construire la tangente et la normale en un point quelconque d'une ligne du second ordre, il ne s'agira que de construire, avec l'équerre, deux triangles rectangles ayant le sommet de l'angle droit au point dont il s'agit; la droite menée de ce point à l'intersection des hypothénuses des deux triangles sera la normale, et conséquemment la perpendiculaire menée à cette droite, par le même point de la courbe, en sera la tangente.

Cette construction fournit en outre un moyen assez simple d'obtenir le rayon de courbure, et conséquemment la situation du centre du cercle osculateur. Si, en effet, l'on désigne par $K$ la distance de l'origine au point fixe de la normale par lequel passent toutes les hypothénuses, point que nous venons d'enseigner à déterminer; on aura (10)

$$K=\frac{2NP}{2P+N}\,, \quad \text{d'où} \quad P=\tfrac{1}{2}.\frac{KN}{N-K}\,.$$

Il résulte clairement de notre analise qu'il y aurait une infinité d'autres cas où les droites C se couperaient en un même point de la normale. Nous nous bornerons à signaler celui où l'on aurait

$$\frac{aa'}{bb'}=1\ ,\ \text{ou}\ aa'=bb'\ ,\ \text{ou encore}\ \frac{a}{b}=\frac{b'}{a'}\ ;$$

c'est celui où les droites D, D′ feraient d'un même côté, soit avec la tangente soit avec la normale, des angles complément l'un de l'autre. Le point fixe serait alors donné par la formule

$$y=\frac{2NP}{2P-N}\,.$$

(*) Voyez *Annales*, tome III, page 293.

Parmi les différens cas où $\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}$ est constant, l'un des plus remarquables est celui où cette fonction est nulle. Les droites D, D′ font alors, de differens côtés, des angles égaux soit avec la tangente soit avec la normale; c'est-à-dire, en d'autres termes, que la normale divise en deux parties égales l'angle formé par ces deux droites. Le point fixe de la tangente où concourent alors les droites C est donné (9) par la formule

$$x=-\frac{N}{A}\ ;$$

ce point est donc celui où concourrent les tangentes aux deux extrémités de la normale. De là résulte ce théorème :

*THÉORÈME II. Si l'on inscrit à une ligne du second ordre une suite de triangles, ayant tous un sommet commun, et dont l'angle à ce sommet soit divisé en deux parties égales par la normale qui lui répond; les côtés opposés de ces triangles iront tous concourir au point de la tangente où elle est coupée par la tangente à l'autre extrémité de cette normale; d'où il résulte encore, par la théorie des pôles, que les points de concours des tangentes aux extrémités de ces troisièmes côtés de triangles seront situés sur une même droite, laquelle ne sera autre ici que la normale elle-même.*

La vérité de ce théorème s'aperçoit au surplus immédiatement, en remarquant que l'équation du système de deux droites qui, passant par l'origine, font de part et d'autre des angles égaux avec la normale; est de la forme

$$x^2=\lambda y^2\ , \qquad (11)$$

dans laquelle $\lambda$ est une constante qui détermine l'angle des deux droites. Or, en éliminant $x^2$ entre cette équation et l'équation (1), il vient, en divisant par $y$,

$$(N\lambda-2P)y-2P(Ax+N)=0\ ; \qquad (12)$$

équation d'une droite qui, quel que soit $\lambda$, coupe toujours l'axe des $x$ au point pour lequel on a $x=-\frac{N}{A}$.

Il est aisé de voir, d'après cela, que si, par le point de la courbe que l'on considère, l'on mène deux cordes divisant en deux parties égales les angles que forme la normale avec la tangente, la droite qui joindra les extrémités de ces cordes déterminera, sur la normale et sur la tangente, les points fixes relatifs à nos deux théorèmes.

Une surface du second ordre étant donnée, et un point fixe étant pris arbitrairement sur cette surface ; si l'on prend les deux tangentes conjuguées rectangulaires de ce point pour axes des $x$ et des $y$ et la normale qui répond au même point pour axe des $z$ ; en désignant par $N$ la longueur de la normale terminée à la surface, supposant que l'équation du plan tangent à la seconde extrémité de cette normale est

$$z=Ax+By+N\ ,$$

et représentant respectivement par $P$ et $Q$ les rayons de courbure des sections suivant les plans des $xz$ et des $yz$ ; l'équation de la surface dont il s'agit prendra la forme

$$N(Qx^2+Py^2)+2PQz(z-Ax-By-N)=0\ (*). \qquad (1)$$

Soit D une droite menée arbitrairement par l'origine, et formant respectivement avec les axes des $x$, des $y$ et des $z$ des angles dont les cosinus soient $a$, $b$, $c$, ce qui donnera

$$a^2+b^2+c^2=1\ ; \qquad (2)$$

les équations de cette droite seront

$$cx=az\ , \qquad cy=bz\ ; \qquad (3)$$

en les combinant avec l'équation (1), on obtiendra, pour les coordonnées de l'intersection de D avec la surface courbe,

(*) Voyez *Annales*, tom. IV, pages 372 et 375.

$$\left.\begin{aligned}
x&=\frac{2NPQac}{N(Qa^2+Pb^2)+2PQc(c-Aa-Bb)}\,,\\
y&=\frac{2NPQbc}{N(Qa^2+Pb^2)+2PQc(c-Aa-Bb)}\,,\\
z&=\frac{2NPQc^2}{N(Qa^2+Pb^2)+2PQc(c-Aa-Bb)}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Pour deux autres droites D′, D″ passant également par l'origine, et formant avec les axes des $x$, des $y$ et des $z$ des angles dont les cosinus soient $a'$, $b'$, $c'$, pour l'une, et $a''$, $b''$, $c''$, pour l'autre, ce qui donne

$$a'^2+b'^2+c'^2=1\,, \qquad (5)$$

$$a''^2+b''^2+c''^2=1\,; \qquad (6)$$

on aura semblablement

$$\left.\begin{aligned}
x&=\frac{2NPQa'c'}{N(Qa'^2+Pb'^2)+2PQc'(c'-Aa'-Bb')}\,,\\
y&=\frac{2NPQb'c'}{N(Q'a^2+Pb'^2)+2PQc'(c'-Aa'-Bb')}\,,\\
z&=\frac{2NPQc'^2}{N(Qa'^2+Pb'^2)+2PQc'(c'-Aa'-Bb')}\,;
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}
x&=\frac{2NPQa''c''}{N(Qa''^2+Pb''^2)+2PQc''(c''-Aa''-Bb'')}\,;\\
y&=\frac{2NPQb''c''}{NQa''^2+Pb''^2)+2PQc''(c''-Aa''-Bb'')}\,,\\
z&=\frac{2NPQc''}{N(Qa''^2+Pb''^2)+2PQc''(c''-Aa''-Bb'')}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

On trouvera aisément, d'après cela, que l'équation du plan C qui joint les extrémités des droites D, D′, D″ est

$$\left\{\begin{aligned}
&cc'(bc'-cb')(NQa''^2+NPb''^2-2APQa''c'')\\
&+c'c''(b'c''-c'b'')(NQa^2+NPb^2-2APQac)\\
&+c''c(b''c-c''b)(NQa'^2+NPb'^2-2APQa'c')
\end{aligned}\right\}x$$

$$+\left\{\begin{array}{l} cc'(ca'-ac')(NQa''^2+NPb''^2-2BPQb''c'') \\ +c'c''(c'a''-a'c'')(NQa^2+NPb^2-2BPQbc) \\ +c''c(c''a-a''c)(NQa'^2+NPb'^2-2BPQb'c') \end{array}\right\}y$$

$$+\left\{\begin{array}{l} cc'(ab'-ba')(NQa''^2+NPb''^2+2PQc''^2) \\ +c'c''(a'b''-b'a''(NQa^2+NPb^2+2PQc^2) \\ +c''c(a''b-b''a)(NQa'^2+NPb'^2+2PQc'^2) \end{array}\right\}z$$

$$=2NPQcc'c''(ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''), \quad (9)$$

Cela posé, supposons que chacune de nos droites D, D′, D″, soit perpendiculaire aux deux autres, nous exprimerons cette circonstance par les trois équations

$$\left.\begin{array}{l} aa'+bb'+cc'=0, \\ a'a''+b'b''+c'c''=0, \\ a''a+b''b+c''c=0; \end{array}\right\} \quad (10)$$

lesquelles, combinées avec les relations (2, 5, 6), donneront entr'autres (*)

$$\left.\begin{array}{lll} bc'-cb'=a'', & ca'-ac'=b'', & ab'-ba'=c'', \\ b'c''-c'b''=a, & c'a''-a'c=b, & a'b''-b'a''=c, \\ b''c-c''b=a', & c''a-a''c=b', & a''b-b''a=c'; \end{array}\right\} (11)$$

et par conséquent

$$\left.\begin{array}{l} ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'' \\ =a(b'c''-c'b'')+a'(b''c-c''b)+a''(bc'-cb') \\ =a^2+b^2+c^2=1\,. \end{array}\right\} (12)$$

En conséquence, l'équation (9) deviendra simplement

(*) Voyez la *Correspondance sur l'école polytechnique*, tome III, n.° 3, janvier 1816, page 302.

{NQ

$$\{NQ(cc'a''^3+c'c''a^3+c''ca'^3)+NP(cc'a''b''^2+c'c''ab^2+c''ca'b'^2)-2APQcc'c''\}x$$
$$+\{NP(cc'b''^3+c'c''b^3+c''cb'^3)+NQ(cc'a''^2b''+c'c''a^2b+c''ca'^2b')-2BPQcc'c''\}y$$
$$+cc'c''(NQ+NP+2PQ)z=2NPQcc'c'' . \qquad (13)$$

Si, dans la vue de savoir en quel point le plan C rencontre l'axe des $z$, c'est-à-dire, la normale, on fait $x$ et $y$ égaux à zéro, cette dernière équation donnera

$$z=\frac{2NPQ}{P(N+Q)+Q(N+P)} ; \qquad (14)$$

résultat entièrement indépendant de la situation des droites D, D', D''. De là résulte le théorème que voici :

*THÉORÈME III. Si, à une surface du second ordre, on inscrit une suite de tétraèdres rectangles, ayant tous le sommet de leur angle droit trièdre situé en un même point quelconque de cette surface; leurs faces hypothénusales concourront toutes en un même point de la normale menée par le sommet commun de tous ces tétraèdres; d'où il suit encore, par la théorie des pôles, que les surfaces coniques circonscrites qui auront pour lignes de contact avec la surface dont il s'agit, ses intersections avec les plans des faces hypothénusales de ces tétraèdres, auront toutes leurs sommets situés sur un même plan.*

On voit par là que l'inscription à une surface du second ordre de trois tétraèdres rectangles, ayant tous le sommet de leur angle droit trièdre situé en un même point de cette surface, suffit pour déterminer la direction de la normale et conséquemment du plan tangent en ce point.

Concevons présentement une surface conique ayant son centre à l'origine, dont l'axe soit l'axe des $z$, c'est-à-dire, la normale, et dont les sections parallèles au plan tangent, elliptiques ou hyperboliques, aient leurs diamètres principaux respectivement proportionnels aux racines quarrées des rayons de plus grande et de moindre courbure au point que nous considérons; l'équation de cette surface conique sera de la forme

$$Qx^2+Py^2=\lambda z^2 \; ; \qquad (15)$$

$\lambda$ étant une indéterminée qui fixe la grandeur de cette surface conique. En combinant l'équation (15) avec l'équation (1), pour en éliminer $Qx^2+Py^2$, il vient, en divisant par $z$,

$$(N\lambda+2PQ)z-2PQ(Ax+By+N)=0 \; ; \qquad (16)$$

équation linéaire, qui nous montre que, quel que soit $\lambda$, l'intersection des deux surfaces est toujours une courbe plane.

Si, dans la vue de connaître suivant quelle droite le plan de cette courbe rencontre le plan tangent, on fait $z=0$, dans l'équation (16), elle deviendra

$$Ax+By+N=0 \; ; \qquad (17)$$

résultat tout à fait indépendant de $\lambda$ ; ce qui donne lieu au théorème que voici :

*THÉORÈME IV. Si une suite de surfaces coniques ont respectivement pour centre et pour axe commun un point pris arbitrairement sur une surface quelconque du second ordre et la normale à cette surface en ce point ; et si en outre les sections de ces surfaces coniques par des plans parallèles au plan tangent, lesquelles auront leur centre sur la normale, ont leurs diamètres principaux proportionnels aux racines quarrées des rayons de plus grande et de moindre courbure de la surface à leur sommet commun ; toutes ces surfaces coniques couperont la surface du second ordre suivant une série de courbes planes, dont les plans viendront tous passer par la droite intersection des plans tangens aux deux extrémités de la normale ; d'où il suit, par la théorie des pôles, que les surfaces coniques circonscrites, ayant ces courbes planes pour lignes de contact avec la surface du second ordre, auront toutes leurs sommets situés sur une même droite* (*).

(*) Donc aussi les cônes de révolution qui ont respectivement pour sommet et pour axe commun un ombilic d'une surface du second ordre et la normale qui lui répond, coupent cette surface suivant une série de cercles.

*J. D. G.*

Il est clair que, quelles que soient d'ailleurs les directions de nos trois droites D, D′, D″, pourvu qu'elles se trouvent situées toutes trois sur l'une quelconque de nos surfaces coniques, le plan C, passant par leurs extrémités, coupera toujours le plan tangent suivant une même droite, puisque ce plan ne sera autre que celui de la courbe plane intersection de la surface du second ordre avec la surface conique sur laquelle les trois droites seront situées.

Mais, pour exprimer que la droite D est sur la surface conique, il faut éliminer $x$, $y$, $z$ entre les équations (3) et (15). Exprimant ensuite la même condition pour les droites D′, D″, il en résultera les trois équations

$$\left.\begin{aligned} Qa^2+Pb^2&=\lambda c^2\ , \\ Qa'^2+Pb'^2&=\lambda c'^2\ , \\ Qa''^2+Pb''^2&=\lambda c''^2\ , \end{aligned}\right\}(18)$$

entre lesquelles éliminant $P$ et $Q$, ce qui fera aussi disparaître $\lambda$, on arrivera à la condition

$$c^2(a'^2b''^2-b'^2a''^2)+c'^2(a''^2b^2-b''^2a^2)+c''^2(a^2b'^2-a'^2b^2)=0\ . \tag{19}$$

laquelle, jointe aux trois autres,

$$\left.\begin{aligned} a^2+b^2+c^2&=1\ ; \\ a'^2+b'^2+c'^2&=1\ , \\ a''^2+b''^2+c''^2&=1\ , \end{aligned}\right\}(20)$$

donnera le système complet des conditions sous l'influence desquelles les droites D, D′, D″ peuvent varier de direction, sans que le plan que déterminent leurs extrémités cesse de passer par la section commune des plans tangens aux deux extrémités de la normale. Au surplus, la condition (19) peut être remplacée par la suivante :

$$a'^2b''^2-b'^2a''^2+a''^2b^2-b''^2a^2+a^2b'^2-b^2a'^2\,, \qquad (21)$$

que l'on en déduit en prenant la somme des produits des équations (20) par $a'^2b''^2-b'^2a''^2$, $a''^2b^2-b''^2a^2$, $a^2b'^2-b^2a'^2$, et ayant égard à cette même équation (19).

La démonstration analitique du *Théorème III* pouvant paraître un peu compliquée, il ne sera pas hors de propos de montrer, en terminant, comment, par des considérations purement géométriques, on peut le déduire du *Théorème I*.

Soient SABC et SA'B'C deux tétraèdres rectangles en S, inscrits à une surface du second ordre, et ayant l'arête SC commune; les plans ASB, A'SB' étant tous deux perpendiculaires à SC coïncideront et détermineront dans la surface une section qui sera une ligne du second ordre, à laquelle seront inscrits les deux triangles-rectangles de même sommet ASB, A'SB'. Soit P l'intersection des hypothénuses AB, A'B' de ces triangles; SP sera (*Théorème I*) la direction de la normale à la section au point S; et le point P sera, sur cette normale, un point tout à fait fixe et indépendant de la situation respective de nos deux tétraèdres. Soit T la tangente au point S de la section, laquelle est située sur le plan tangent à la surface courbe; si l'on mène CP, le triangle CSP sera rectangle en S; mais SC, étant perpendiculaire au plan de la section, doit aussi être perpendiculaire à la tangente T, qui est dans ce plan; donc cette tangente T est à la fois perpendiculaire à SC et SP; et conséquemment elle est perpendiculaire au plan du triangle; le plan tangent à la surface courbe en S, qui contient cette tangente T sera donc aussi perpendiculaire au plan CSP, et conséquemment ce dernier contiendra la normale à la surface courbe en S, laquelle coupera CP en quelque point Q, par lequel passeront également les deux faces hypothénusales ACB, A'CB', puisqu'elles se coupent suivant CP qui contient ce point Q.

Il est donc établi par là qu'en faisant tourner notre angle trièdre tri-rectangle $DD'D''$, autour de l'une quelconque de ses arêtes, le plan $C$ déterminé par les extrémités de ces mêmes arêtes ne cessera pas de couper la normale à la surface courbe en un même point fixe $Q$. Or, il est connu que tout changement de situation d'un angle trièdre tri-rectangle, autour de son sommet, revient à trois rotations successives autour de ses arêtes (*); donc, quelle que soit la situation de cet angle trièdre, le plan $C$ coupera toujours la normale au même point.

(*) Cette proposition, qui revient à dire que l'on peut toujours faire coïncider sur une sphère deux triangles sphériques tri-rectangles $ABC$, $A''B''C''$, au moyen de trois rotations successives du premier autour de ses sommets, peut se démontrer assez simplement comme il suit.

Soit $B'$ le point où se coupent les arcs de grands cercles $BC$ et $A''B''$; si l'on conduit un arc de grand cercle $AB'$ et un autre $AC''$, coupant $BC$ en $C'$, le point $B'$, étant distant d'un cadran des points $A$ et $C''$, sera le pôle de l'arc $AC'$; et, puisque d'ailleurs le point $A$ est le pôle de $B'C'$, il s'ensuit que le triangle $AB'C'$ sera tri-rectangle comme $ABC$, et pourra être considéré comme résultant de la rotation de celui-ci autour de son sommet $A$.

Soit $A'$ le point d'intersection des arcs de grands cercles $AC'$ et $A''B''$, si l'on conduit l'arc de grand cercle $B'C''$; $B'$ étant le pôle de l'arc $C'A$ et $C''$ celui de l'arc $A'B'$; il s'ensuit que le triangle $C''B'A'$ est tri-rectangle, comme le triangle $C'B'A$, et peut conséquemment être considéré comme résultant de la rotation de celui-ci autour de son sommet $B'$.

Enfin, le triangle $A''B''C''$ ayant le sommet $C''$ commun avec le triangle $A'B'C''$ peut pareillement être considéré comme résultant de la rotation de celui-ci autour de ce sommet commun $C''$; ce qui démontre complètement la proposition annoncée.

*J. D. G.*

# ANALISE.

## *Application de la méthode des moindres quarrés à l'interpolation des suites ;*

Par M. Gergonne.

Lorsqu'une fonction d'une seule variable est donnée, on peut toujours déterminer rigoureusement et directement les valeurs, tant de la fonction que de ses divers coefficiens différentiels, répondant à une valeur donnée de la variable indépendante ; tout comme, lorsqu'une ligne courbe est donnée, on peut toujours, pour l'une quelconque de ses abscisses, construire l'ordonnée, la tangente, le cercle osculateur, etc.

Mais, de même qu'au lieu de donner une courbe, on peut donner seulement un certain nombre de ses points, on peut aussi, au lieu de donner une fonction d'une variable, donner seulement les valeurs que prend cette fonction pour un certain nombre de valeurs de la variable indépendante, et demander ensuite d'assigner les valeurs, tant de cette fonction que de ses divers coefficiens différentiels, pour une autre valeur quelconque de cette variable ; tout comme on pourrait demander quelles sont, pour une abscisse donnée, l'ordonnée, la tangente, le cercle osculateur, etc., d'une courbe dont on connaîtrait seulement un certain nombre de points. C'est en cela que consiste le problème de l'*interpolation des suites*.

Ce problème se réduit évidemment à remonter des valeurs données à celle de la fonction à laquelle elles appartiennent, ou des points donnés au tracé de la courbe sur laquelle on les suppose situés :

or, par là même il est indéterminé ; car, par des points donnés, non consécutifs, même en nombre infini, on peut toujours faire passer une infinité de courbes différentes (*).

Ces courbes pourront fort bien, dans certaines parties de leur cours, différer les unes des autres d'une manière notable ; et la même différence devra se faire remarquer aussi dans les ordonnées, tangentes, cercles osculateurs, etc., qui répondront à une même abscisse. On conçoit pourtant que, si les points donnés sont assez voisins les uns des autres, les courbes qui les comprendront ne pourront différer notablement, dans l'intervalle embrassé par ces points, du moins si aucune d'elles n'a dans cet intervalle une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées ; on conçoit même que ces points pourront toujours être supposés assez multipliés, et, en même temps, assez voisins les uns des autres, pour que les différences entre ces courbes deviennent pour ainsi dire insensibles. Les ordonnées qui répondront à une même abscisse, comprise dans les limites de ces points, seront donc sensiblement égales ; mais la différence entre les tangentes pourra être plus sensible, celle entre les cercles osculateurs encore d'avantage, et ainsi de suite.

Concluons de là que, si des fonctions de formes diverses prennent les mêmes valeurs, pour certaines valeurs déterminées, et voisines les unes des autres, de la variable indépendante, sans devenir infinies pour aucune valeur comprise entre celles-là ; ces fonctions prendront des valeurs peu différentes, pour d'autres valeurs de cette variable, comprises dans les limites qu'embrassent les premières ; mais il n'en sera plus de même des coefficiens différentiels successifs qui, d'une fonction à l'autre, pourront différer de plus en plus, à mesure que l'ordre en sera plus élevé.

On pourra donc, sans erreur sensible, adopter indistinctement et arbitrairement l'une des fonctions pour la fonction cherchée ; tout

(*) On peut consulter sur ce sujet une dissertation qui se trouve à la page 252 du V.$^{e}$ volume de ce recueil.

comme, lorsque plusieurs courbes qui passent par les mêmes points ne présentent entre elles que des différences insensibles, on peut en regarder une quelconque comme étant réellement celle dont ces points font partie.

La courbe et la fonction pouvant ainsi être choisies d'une infinité de manières différentes, il sera convenable de s'arrêter aux plus simples, c'est-a-dire, à la courbe parabolique et à la fonction rationnelle et entière qu'elle représente graphiquement. Ce choix sera d'autant mieux fondé qu'il est connu que toute fonction qui ne devient infinie pour aucune valeur finie de la variable dont elle dépend, est toujours développable en série procédant suivant les puissances ascendantes de cette variable.

Le procédé auquel nous venons d'être conduit est aussi celui qu'on suit communément; on suppose que l'ordonnée de la courbe cherchée est une fonction complète, rationnelle et entière de l'abscisse, dans laquelle on admet autant de termes qu'il y a de systèmes de valeur donnés; les coefficiens de ces termes sont inconnus, et on les détermine en exprimant que la courbe passe par les points donnés. Ces coefficiens une fois déterminés, rien n'est plus facile ensuite que d'assigner l'ordonnée et les coefficiens différentiels qui répondent à une abscisse quelconque; mais on ne peut compter sur les valeurs que la formule leur assignera qu'autant qu'on n'en fera l'application qu'à une abscisse comprise entre celles des points donnés, et même ne se rapprochant pas trop de la plus grande ni de la plus petite.

Cette méthode qui, en particulier, a été employée par M. Laplace, dans son mémoire sur la *Recherche des orbites des comètes* (*), renferme une source d'erreur, dans la supposition, tout à fait gratuite, d'une courbe du genre parabolique. Néanmoins, si l'on pouvait compter en toute rigueur sur les valeurs données de la fonction, et si ces valeurs étaient très-multipliées et très-voisines, ce que

(*) Voyez les *Mémoires de l'académie des sciences* de Paris, pour 1780.

nous

nous avons dit ci-dessus, montre assez que l'erreur résultant de cette supposition ne serait jamais bien considérable.

Mais il n'en va pas ordinairement ainsi ; les valeurs discontinues de la fonction, sur lesquelles on s'appuie pour construire la formule, sont communément déduites d'expériences ou d'observations susceptibles d'une exactitude assez bornée ; et il arrive alors, comme M. Legendre l'a fort bien observé (*), que les erreurs qui les affectent peuvent avoir d'autant plus d'influence sur la formule finale et sur les résultats qu'on en déduit, que ces valeurs sont en plus grand nombre.

Concevons, en effet, qu'on ait tracé une courbe quelconque, et qu'on lui ait mené plusieurs ordonnées peu distantes les unes des autres ; si l'on vient à faire subir à ces ordonnées des altérations, très-légères d'ailleurs, tantôt en plus et tantôt en moins, et qu'ensuite on tente de faire passer une courbe continue par les extrémités de ces ordonnées ainsi altérées, on s'apercevra aisément que, si les altérations qu'elles ont subi n'ont qu'une faible influence sur la grandeur des ordonnées intermédiaires, il n'en est plus ainsi à l'égard de la direction de la tangente qui souvent pour une même abscisse aura pu subir un changement très-notable ; la différence pourra être plus sensible encore à l'égard de la grandeur du cercle osculateur.

Ces aperçus graphiques peuvent facilement être confirmés par le calcul. Supposons, en effet, un nombre impair d'ordonnées données, toutes équidistantes, et dont la distance commune soit prise pour unité. Soient $o$ l'abscisse et $b$ l'ordonnée du milieu ; $1, 2, 3, \ldots\ldots$ les abscisses et $b', b'', b''', \ldots\ldots$ les ordonnées qui les suivent ; $-1, -2, -3, \ldots\ldots$ les abscisses et $b_{\prime}, b_{\prime\prime}, b_{\prime\prime\prime}, \ldots$ les ordonnees qui les précèdent ; et cherchons les coefficiens différentiels qui repondent à l'ordonnée du milieu ; nous trouverons, pour le cas de trois ordonnées seulement,

(*) Voyez ses *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. Paris, 1806, (pag. *iv*)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{b'-b_{\prime}}{2}\,,\qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=(b'+b_{\prime})-2b\ ;$$

pour le cas de cinq ordonnées

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{8(b'-b_{\prime})-(b''-b_{\prime\prime})}{12}\,,\qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{30b-16(b'+b_{\prime})+(b''+b_{\prime\prime})}{12}\ ;$$

pour le cas de sept coordonnées

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{45(b'-b_{\prime})-9(b''-b_{\prime\prime})+(b'''-b_{\prime\prime\prime})}{60}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{490b-270(b'+b_{\prime})+27(b''+b_{\prime\prime})-2(b'''+b_{\prime\prime\prime})}{180}\ ;$$

et ainsi de suite.

Or, supposons que, toutes les autres ordonnées étant d'ailleurs exactes, l'ordonnée $b'$ seule soit en erreur d'une quantité $\beta$, et désignons par $\mathrm{E}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\mathrm{E}.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ les erreurs qui en résulteront sur les coefficiens différentiels ; il est aisé de voir qu'on aura, dans le cas de trois ordonnées,

$$\mathrm{E}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tfrac{1}{2}\beta\,,\qquad \mathrm{E}.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\tfrac{1}{1}\beta\ ;$$

dans le cas de cinq coordonnées

$$\mathrm{E}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tfrac{2}{3}\beta\,,\qquad \mathrm{E}.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\tfrac{4}{3}\beta\ ;$$

dans le cas de sept ordonnées

$$\mathrm{E}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tfrac{3}{4}\beta\,,\qquad \mathrm{E}.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\tfrac{6}{4}\beta\ ;$$

de sorte que les erreurs sur le coefficient différentiel du premier ordre croissent comme les nombres $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, .... et tendent ainsi sans cesse à devenir égales à l'erreur même commise sur l'ordonnée $b'$ ;

et que l'erreur commise sur le coefficient différentiel du second ordre est constamment double de celle-là.

M. Legendre a donc été fondé à dire qu'en multipliant les données on s'exposait à faire croître aussi les erreurs dans la même proportion. Il est pourtant juste de remarquer que c'est en supposant qu'il n'y a qu'une seule ordonnée fautive, ce qui exclut toute possibilité de compensation d'erreurs ; et en supposant de plus que l'ordonnée fautive est précisément celle dont la valeur, exacte ou non, exerce l'influence la plus notable sur nos deux coefficiens differentiels.

Quoi qu'il en soit, cette source d'erreur paraît n'avoir point échappé à l'attention de M. Laplace. Voici, en effet, comment il s'exprime (*Mécanique céleste*, tom. I, pag. 201): « Ces expressions sont » d'autant plus précises, qu'il y a plus d'observations, et que les » intervalles qui les séparent sont plus petits ; on pourrait donc » employer toutes les observations voisines de l'époque choisie, si » elles étaient exactes ; mais les erreurs dont elles sont toujours » susceptibles conduiraient à un résultat fautif ; ainsi, *pour diminuer* » *l'influence de ces erreurs, il faut augmenter l'intervalle des obser-* » *vations extrêmes, à mesure que l'on emploie plus d'observations.* »

Il serait peut-être plus exact de dire qu'*il faut employer des observations de plus en plus distantes entre elles, à mesure qu'on en emploie un plus grand nombre* ; et nous allons voir, en effet, qu'avec cette attention, on peut, à volonté, atténuer les erreurs. Soit $a$ l'intervalle, supposé constant, qui sépare les valeurs consécutives de $x$ ; intervalle que, ci-dessus, nous avions pris pour unité. Nos résultats deviendront alors

Pour 3 observations, $E.\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{\beta}{a}$, $E\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{2}\frac{\beta}{a^2}$ ;

Pour 5 observations, $E.\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}\frac{\beta}{a}$, $E\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4}{3}\frac{\beta}{a^2}$ ;

Pour 7 observations, $E.\frac{dy}{dx}=\frac{3}{4}\frac{\beta}{a}$, $E.\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6}{4}\frac{\beta}{a^2}$.

Pourvu donc que nous prenions pour $a$ des nombres qui croissent plus rapidement que ceux de la suite $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ nos erreurs iront continuellement en décroissant, à mesure que nous aurons recours à un plus grand nombre d'observations. Supposons, par exemple, que nous fassions croître les valeurs de $a$ suivant les nombres de la suite naturelle ; et prenons pour unité la valeur de cette quantité qui répond au cas de trois observations, nous aurons alors

Pour 3 observations, $E.\frac{1}{2}\beta$, $E.\frac{1}{1}\beta$ ;

Pour 5 observations, $E.\frac{1}{3}\beta$, $E.\frac{1}{3}\beta$ ;

Pour 7 observations, $E.\frac{1}{4}\beta$, $E.\frac{1}{6}\beta$ ;

d'où l'on voit qu'alors les erreurs sur les coefficiens différentiels du premier ordre décroîtront comme les inverses des nombres naturels, et que celles qui affecteront les coefficiens différentiels du second ordre décroîtront suivant la progression, plus rapide encore, des inverses des nombres triangulaires. La méthode de M. Laplace est donc, du moins de ce côté, tout à fait à l'abri du reproche.

Mais, supposons qu'on ait, entre deux limites fixes données, des observations assez nombreuses pour rendre très-petite la différence entre les valeurs consécutives de $x$. Suivant ce qui vient d'être dit, on devra rejeter un d'autant plus grand nombre de ces observations qu'on en voudra employer davantage dans la recherche de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$. Or, c'est là un inconvénient assez grave, sur-tout si l'on n'a aucun motif de suspecter plutôt les données que l'on rejette que celles dont on se propose de faire exclusivement usage ; puisqu'on se prive ainsi des compensations d'erreurs sur lesquelles on pourrait compter en les employant toutes.

En réfléchissant sur ce sujet, il m'a paru qu'il était possible de tout concilier, au moyen de la méthode des moindres quarrés (*),

(*) On sait que la méthode des moindres quarrés repose sur ce principe que la valeur moyenne, la plus probablement voisine de l'exactitude, d'une quantité et d'arriver par elle à toute la précision qu'il est possible d'espérer dans la recherche qui nous occupe. Voici pour cela de quelle manière je conçois qu'on en doit faire usage.

Soient $a$, $a'$, $a''$,.... des valeurs de $x$, en nombre quelconque, et soient $b$, $b'$, $b''$,.... les valeurs données et correspondantes de $y$. Soit posé

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots.. ; \qquad (1)$$

en prenant dans cette fonction autant de termes seulement qu'on en admettrait si, suivant ce qui vient d'être dit ci-dessus, on ne se proposait d'employer qu'une partie des valeurs correspondantes de $x$ et de $y$; il s'agira de déterminer les valeurs des coefficiens $A$, $B$, $C$, $D$,..... Si leur nombre était égal à celui des observations, on pourrait leur assigner des valeurs qui rendissent les erreurs tout à fait nulles; mais la chose sera impossible dans le cas actuel, et il faudra se contenter de rendre *minimum* la somme de leurs quarrés.

Ces erreurs étant respectivement

$$A+Ba+Ca^2+Da^3+\ldots\ldots-b \;,$$
$$A+Ba'+Ca'^2+Da'^3+\ldots\ldots-b' \;,$$
$$A+Ba''+Ca''^2+Da''^3+\ldots\ldots-b'' \;,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;,$$

il faudra faire

dont on a plusieurs valeurs approchées, est celle qui, étant supposée tout à fait exacte, rendrait *minimum* la somme des quarrés des erreurs dont les autres seraient alors affectées. Le premier ouvrage imprimé dans lequel il ait été fait mention de cette méthode est le mémoire de M. Legendre, déjà cité dans une précédente note (1806). Dans un ouvrage publié en 1809, M. Gauss a déclaré faire usage d'une semblable méthode depuis 1795; et M. Laplace a démontré postérieurement que cette méthode est rigoureusement conforme à la doctrine des probabilités.

$$\left.\begin{array}{l}(A+Ba\ +Ca\ ^2+Da\ ^3+\ldots\ldots-b\ )^2\\ +(A+Ba'\ +Ca'\ ^2+Da'\ ^3+\ldots\ldots-b'\ )^2\\ +(A+Ba''+Ca''^2+Da''^3+\ldots\ldots-b'')^2\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}=minimum\ ;$$

c'est-à-dire, en différentiant par rapport à $A$, $B$, $C$, $D$,.....

$$\left.\begin{array}{l}(A+Ba\ +Ca\ ^2+\ldots-b\ )(\mathrm{d}A+a\ \mathrm{d}B+a\ ^2\mathrm{d}C+\ldots)\\ +(A+Ba'\ +Ca'\ ^2+\ldots-b'\ )(\mathrm{d}A+a'\ \mathrm{d}B+a'\ ^2\mathrm{d}C+\ldots)\\ +(A+Ba''+Ca''^2+\ldots-b'')(\mathrm{d}A+a''\mathrm{d}B+a''^2\mathrm{d}C+\ldots)\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}=0\ .$$

A cause de l'indépendance entre $A$, $B$, $C$, ..... les multiplicateurs de d$A$, d$B$, d$C$,.... devront séparément être nuls ; faisant donc en général, pour abréger,

$$\Sigma a^m=a^m+a'^m+a''^m+\ldots\ldots\ ,$$
$$\Sigma a^m b=a^m b+a'^m b'+a''^m b''+\ldots\ldots\ ;$$

on aura cette suite d'équations

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma a^0.A+\Sigma a\ .B+\Sigma a^2.C+\Sigma a^3\ D+\ldots=\Sigma a^0 b\ ,\\ \Sigma a\ .A+\Sigma a^2.B+\Sigma a^3.C+\Sigma a^4.D+\ldots=\Sigma a\ b\ ,\\ \Sigma a^2.A+\Sigma a^3.B+\Sigma a^4.C+\Sigma a^5.D+\ldots=\Sigma a^2 b\ ,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ;\end{array}\right\}(1)$$

en nombre précisément égal à celui des coefficiens $A$, $B$, $C$, $D$,..... qu'il s'agit de déterminer ; et, tandis que les méthodes ordinaires donnent pour $y$ et ses coefficiens différentiels des valeurs d'une précision toujours un peu inférieure à celle des données d'après lesquelles on les calcule, on pourra le plus souvent espérer ici de l'emporter en précision sur ces données elles-mêmes.

Le cas le plus simple, et en même temps le plus fréquent, est celui où les valeurs de $x$ sont en progression par différences ; il est alors permis de substituer à cette progression la suite naturelle des nombres. Soit $2n+1$ le nombre des valeurs connues et correspondantes de $x$ et $y$, on pourra numéroter o la valeur de $x$ qui se trouvera occuper le milieu, de manière que le numérotage soit

$$-n\,,\ -(n-1)\,,\ldots -3\,,\ -2\,,\ -1\,,\ \mp 0\,,\ +1\,,\ +2\,,\ +3\,,\ldots +(n-1)\,,\ +n$$

si alors on désigne par $\Sigma n^m$ la somme des $m$.$^{\text{mes}}$ puissances des nombres de la suite naturelle, on aura

$$\Sigma a^0 = 2n+1\,,\quad \Sigma a = 0\,,\quad \Sigma a^2 = 2\Sigma n^2\,,\quad \Sigma a^3 = 0\,,\quad \Sigma a^4 = 2\Sigma n^4\,,\ldots;$$

au moyen de quoi les équations (1) deviendront

$$\begin{array}{ll}(2n+1)A + 2\Sigma n^2.C + \ldots = \Sigma b\,, & 2\Sigma n^2.B + 2\Sigma n^4.D + \ldots = \Sigma a\,b\,,\\ 2\Sigma n^2.A + 2\Sigma n^4.C + \ldots = \Sigma a^2 b\,, & 2\Sigma n^4.B + 2\Sigma n^6.D + \ldots = \Sigma a^3 b\,,\\ 2\Sigma n^4.A + 2\Sigma n^6.C + \ldots = \Sigma a^4 b\,, & 2\Sigma n^6.B + 2\Sigma n^8.D + \ldots = \Sigma a^5 b\,,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;\end{array}$$

ainsi, outre que les sommes de puissances semblables des nombres naturels sont données par des formules connues et générales, on aura ici l'avantage de pouvoir calculer séparément les coefficiens de rangs pairs et ceux de rangs impairs, ce qui simplifiera le travail d'une manière notable.

Dans le cas même où ni les valeurs de $x$ ni celles de $y$ ne marcheraient en progression par différences, on pourrait encore profiter de ces simplifications, en procédant comme il suit : on supposerait que $x$ et $y$ sont toutes deux fonctions d'une troisième variable $z$, dont les valeurs, tout à fait arbitraires, pourraient être numérotées comme nous l'avons dit ci-dessus à l'égard de $x$ ; on chercherait par notre procédé, les valeurs de $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$, $\frac{d^2y}{dz^2}$, ....; et on aurait ensuite par les formules connues, relatives au changement de la variable indépendante,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{d\lambda}{dx}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dz}\,\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\,\frac{d^2x}{dz^2}}{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2};$$

cette méthode me semblerait préférable à celle qui consiste à interpoler entre les observations, afin de les rendre équidistantes ; attendu qu'il peut être dangereux, dans un problème d'une nature aussi délicate, de dénaturer les données avant d'en faire usage.

Il nous paraît que l'introduction des procédés que nous venons d'indiquer, dans la méthode de M. Laplace, pour la détermination des orbites des comètes, ne peut qu'ajouter beaucoup à sa précision, du moins dans le cas où l'on peut disposer d'un grand nombre d'observations ; mais cette méthode, comme beaucoup d'autres, aura toujours le grave inconvénient de n'être, au fond, qu'un tatonnement bien dirigé.

Il resterait ici au surplus un autre problème à résoudre, lequel pourrait être énoncé comme il suit : *On sait que des points donnés, en nombre quelconque, sont* à peu près *situés sur une courbe parabolique d'un degré déterminé*, *mais inconnu* ; *et l'on demande de découvrir quel est le plus probablement le degré de cette courbe?* La solution de ce problème leverait complètement l'incertitude du calculateur qui, voulant appliquer la méthode de M. Laplace, se trouve pouvoir disposer d'un grand nombre d'observations.

TRIGONOMÉTRIE

# TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

*Recherche de la relation entre les six arcs de grands cercles qui joignent, deux à deux, quatre points de la surface d'une sphère;*

Par M. Bérard, principal et professeur de mathématiques du collége de Briançon, membre de plusieurs sociétés savantes.

M. Bret a donné, dans ce recueil (*), et MM. Français (**) et Carnot (***) avaient donné avant lui l'équation de relation entre les six arcs de grands cercles qui joignent, deux à deux, quatre points de la surface d'une sphère ou, ce qui revient au même, l'équation de relation entre les six angles que forment, deux à deux, quatre droites partant d'un même point et non situées dans un même plan. Je suis parvenu, de mon côté, à cette équation, par les considérations suivantes qui m'ont paru assez simples pour mériter d'être rendues publiques.

Soient OA, OB, OC, OD quatre droites indéfinies, partant d'un même point O, et ayant d'ailleurs des directions quelconques dans l'espace. Soient faits

(*) Tome V, page 334.

(**) Voyez la page 221 de ce volume.

(***) *Mémoire sur la relation entre cinq points dans l'espace*, page 35.

$$Ang.BOC=a\ ,\quad Ang.DOA=a'\ ,$$

$$Ang.COA=b\ ,\quad Ang.DOB=b'\ ,$$

$$Ang.AOB=c\ ,\quad Ang.DOC=c'\ .$$

Par OA, OB, OC prises deux à deux soient conduits trois plans. Soit prise sur OD une partie $OR=r$, et par le point R soient conduits trois nouveaux plans respectivement parallèles aux premiers ; ils formeront avec eux un parallélipipède dont $r$ sera la diagonale; désignons par $x$, $y$, $z$ respectivement, les arêtes de ce parallélipipède qui répondent à OA, OB, OC ; nous aurons ainsi

$$\text{Ang.}(y\,,\,z)=a\ ,\quad \text{Ang.}(r\,,\,x)=a'\ ;$$

$$\text{Ang.}(z\,,\,x)=b\ ,\quad \text{Ang.}(r\,,\,y)=b'\ ;$$

$$\text{Ang.}(x\,,\,y)=c\ ;\quad \text{Ang.}(r\,,\,z)=c'\ .$$

Or, il est connu que la projection d'une droite sur une autre est le produit de cette droite par le cosinus de son inclinaison sur l'autre ; en considérant donc les divers quadrilatères gauches que forment les arêtes consécutives $x$, $y$, $z$ avec la diagonale $r$, il viendra

$$r=x\text{Cos}.a'+y\text{Cos}.b'+z\text{Cos}.c'\ ; \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=r\text{Cos}.a'-y\text{Cos}.c-z\text{Cos}.b\ , \\ y=r\text{Cos}.b'-z\text{Cos}.a-x\text{Cos}.c\ , \\ z=r\text{Cos}.c'-x\text{Cos}.b-y\text{Cos}.a\ . \end{array}\right\} \quad (2)$$

Des trois dernières on tire

$$x=r\cdot\frac{\text{Sin.}^2a\text{Cos.}a'-\text{Cos.}b'(\text{Cos.}c-\text{Cos.}a\text{Cos.}b)-\text{Cos.}c'(\text{Cos.}b-\text{Cos.}c\text{Cos.}a)}{1-\text{Cos.}^2a-\text{Cos.}^2b-\text{Cos.}^2c+2\text{Cos.}a\text{Cos.}b\text{Cos.}c},$$

$$y=r\cdot\frac{\text{Sin.}^2b\text{Cos.}b'-\text{Cos.}c'(\text{Cos.}a-\text{Cos.}b\text{Cos.}c)-\text{Cos.}a'(\text{Cos.}c-\text{Cos.}a\text{Cos.}b)}{1-\text{Cos.}^2a-\text{Cos.}^2b-\text{Cos.}^2c+2\text{Cos.}a\text{Cos.}b\text{Cos.}c},$$

$$z=r\cdot\frac{\text{Sin.}^2c\text{Cos.}c'-\text{Cos.}a'(\text{Cos.}b-\text{Cos.}c\text{Cos.}a)-\text{Cos.}b'(\text{Cos.}a-\text{Cos.}b\text{Cos.}c)}{1-\text{Cos.}^2a-\text{Cos.}^2b-\text{Cos.}^2c+2\text{Cos.}a\text{Cos.}b\text{Cos.}c};$$

substituant donc ces valeurs dans l'équation (1), divisant par $r$ et chassant le dénominateur commun, on obtiendra

$$1-\text{Cos.}^2a-\text{Cos.}^2b-\text{Cos.}^2c+2\text{Cos.}a\text{Cos.}b\text{Cos.}c$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Sin.}^2a\text{Cos.}^2a'-2\text{Cos.}b'\text{Cos.}c'(\text{Cos.}a-\text{Cos.}b\text{Cos.}c)\\+\text{Sin.}^2b\text{Cos.}^2b'-2\text{Cos.}c'\text{Cos.}a'(\text{Cos.}b-\text{Cos.}c\text{Cos.}a)\\+\text{Sin.}^2c\text{Cos.}^2c'-2\text{Cos.}a'\text{Cos.}b'(\text{Cos.}c-\text{Cos.}a\text{Cos.}b)\end{array}\right\};\quad(3)$$

qui est précisément la relation donnée par MM. Bret, Carnot et Français.

# QUESTIONS PROPOSÉES.

## *Problème de Géométrie.*

CONSTRUIRE un quadrilatère dont les quatre côtés soient donnés, tant de grandeur que de disposition consécutive, et qui soit équivalent au quarré construit sur une droite donnée ?

## *Problème de statique.*

La démonstration des conditions d'équilibre sur la vis, que l'on trouve dans tous les traités élémentaires de statique, suppose essentiellement que le point de l'écrou que l'on considère tend à descendre suivant une tangente à l'hélice directrice du filet de la vis. Mais cette supposition, vraie pour la vis dans laquelle la section du filet par un plan passant par l'axe est rectangulaire, cesse de l'être lorsque cette section est un triangle ou un segment de cercle.

On proposerait donc, d'après cela, de dégager la recherche de l'équilibre dans la vis de toute supposition sur la figure du filet dont elle est revêtue ?

# ASTRONOMIE.

## *Examen de l'hypothèse d'un mouvement rectiligne et uniforme, considerée comme moyen de parvenir à la détermination des orbites des corps célestes;*

Par M. Gergonne.

I. Si un point mobile parcourt dans l'espace, d'un mouvement varié quelconque, une courbe plane ou à double courbure, et si l'on n'a à considérer les circonstances de son mouvement que durant un intervalle de temps assez court; il sera permis de supposer, sans crainte d'erreur sensible, que, durant cet intervalle de temps, le point dont il s'agit parcourt, d'un mouvement rectiligne et uniforme, la tangente à la trajectoire qu'il décrit réellement. Cette supposition, admise par tous les géomètres, et sur laquelle ils ont même fondé la méthode des tangentes, ne pourrait souffrir d'objection que dans le seul cas où la partie de trajectoire que l'on considère offrirait quelque point singulier, ou bien dans celui où la vitesse du mobile, entre les extrémités de cette portion de trajectoire, éprouverait quelque changement brusque et fini.

En admettant donc cette hypothèse, concevons que l'on ait trois observations complètes d'une planète, embrassant un intervalle de temps peu considérable; ces trois observations feront connaître la situation de trois rayons visuels, dirigés de l'observateur vers l'astre, ainsi que les temps qui leur correspondent; et, généralement parlant, ces trois rayons visuels ne seront point dans le même plan. Dans l'hypothèse que nous admettons ici, la droite supposée parcourue par l'astre, d'un mouvement uniforme, se trouvera donc assujettie à cette double condition, 1.° d'être coupée à la fois par les trois rayons visuels; 2.° d'être coupée par ces rayons en parties proportionnelles aux intervalles de temps écoulés entre les observations. Or, en vertu de cette double condition, la droite dont il s'agit se trouve déterminée et unique, et peut même être assignée par une analise fort simple.

Cette droite ainsi déterminée, le plan conduit par elle et par le centre du soleil peut être considéré comme le plan de l'orbite; les points où il est percé par les rayons visuels sont les lieux de l'astre aux époques des trois observations. On peut donc obtenir facilement, pour les mêmes époques, les trois rayons vecteurs, ainsi que les angles qu'ils forment deux à deux; or, il n'en faut pas davantage pour assigner les dimensions de l'orbite et la situation de la ligne des apsides (*). Ainsi, par un calcul tout à fait élémentaire, on obtiendra tous les élémens de l'astre, sauf cependant l'époque du périhélie, pour laquelle il faudra nécessairement recourir aux *lois de Képler*.

Voilà à quoi reviennent à peu près, pour le fond, une multitude des méthodes indiquées, à diverses époques, comme propres à la détermination approchée des élémens des astres, à commencer par celle que NEWTON a donnée, dans son *Arithmétique universelle*. A la vérité, aucune d'elles n'a réalisé, dans les applications, l'espoir qu'en avaient conçu leurs inventeurs; mais on a pu croire que leur non succès, dans la pratique, devait tenir ou au trop d'intervalle entre les observations, ou aux erreurs dont elles se trouvaient entachées; erreurs d'autant plus influentes que l'intervalle qu'embrassent les observations est moins considérable.

A la vérité, dans l'un de ses mémoires sur les comètes, LAGRANGE

(*) Ce problème a été élégamment résolu par M. le professeur Kramp, à la page 197 du IV.e volume de ce recueil.

a fait voir que, même dans l'infiniment petit, c'est-à-dire, à la limite, l'hypothèse d'un mouvement rectiligne et uniforme ne peut être admise; mais, soit que les motifs sur lesquels s'est appuyé cet illustre géomètre n'aient point frappé également tous les esprits; soit que l'idée qu'il a cherché à repousser ait paru trop séduisante à quelques-uns pour devoir être abandonnée; soit enfin que l'autorité de l'auteur de l'*Arithmétique universelle* ait exercé en ceci plus d'ascendant qu'il ne convient dans des matières de géométrie et de calcul; on a continué, bien postérieurement, à la publication des mémoires de Lagrange, et dans des ouvrages très-recommandables d'ailleurs, à indiquer la méthode de Newton comme propre, tout au moins, à fournir une première approximation.

Des géomètres très-distingués, sans admettre proprement l'hypothèse d'un mouvement rectiligne et uniforme, ont pourtant fait à peu près l'équivalent; c'est-à-dire, qu'après avoir d'abord attaqué le problème de front, par les principes de la gravitation, ils ont cherché, chemin faisant, à le simplifier, par diverses suppositions qui rentrent, pour le fond, dans l'hypothèse qu'ils semblaient vouloir éviter. Ils n'ont fait ainsi que parvenir, à travers les pénibles calculs que nécessite l'emploi des méthodes légitimes, à des résultats équivoques, qu'ils auraient pu se procurer directement à bien moins de frais (*).

Je pense donc qu'il pourra n'être pas tout à fait inutile de revenir de nouveau sur l'examen de l'hypothèse d'un mouvement sensiblement rectiligne et uniforme durant un intervalle de temps peu considérable, considérée comme moyen de parvenir aux élémens du mouvement des astres. Mais voyons d'abord quelles sont les formules analitiques qui résultent de cette hypothèse.

(*) Il importe aussi de remarquer que, dans les procédés approximatifs, il ne suffit pas de s'assurer que les quantités que l'on se permet de négliger sont fort petites, mais qu'il faut de plus qu'elles ne soient pas d'une petitesse comparable à celle des quantités vis-à-vis de qui on les néglige; et c'est là une chose à laquelle on ne fait pas toujours assez d'attention.

II. Soient prises respectivement pour axes des $x$, $y$, $z$ positifs les droites menées du centre du soleil à l'équinoxe du printemps, au solstice d'eté et au pôle boréal de l'écliptique. Soient alors respectivement

Pour les époques $t_{\prime}$, $t$, $t'$,

$r_{\prime}$, $r$, $r'$ les rayons vecteurs de la terre,

$\alpha_{\prime}$, $\alpha$, $\alpha'$ ses longitudes,

$\beta_{\prime}$, $\beta$, $\beta'$ les longitudes géocentriques d'un astre,

$\gamma_{\prime}$, $\gamma$, $\gamma'$ ses latitudes géocentriques.

$$\left.\begin{array}{l} X_{\prime}\,,\; X\,,\; X' \\ Y_{\prime}\,,\; Y\,,\; Y' \\ Z_{\prime}\,,\; Z\,,\; Z' \end{array}\right\} \text{ ses coordonnées ;}$$

$D_{\prime}$, $D$, $D'$ ses distances à la terre.

nous aurons d'abord

$$\left.\begin{array}{l} Z_{\prime}=D_{\prime}\operatorname{Sin}.\gamma_{\prime}\,, \\ Z\;=D\operatorname{Sin}.\gamma\,, \\ Z'=D'\operatorname{Sin}.\gamma'\,; \end{array}\right\} (1)$$

nous exprimerons ensuite que les trois lieux répondent aux trois rayons visuels, en écrivant

$$\left.\begin{array}{ll} X_{\prime}=r_{\prime}\operatorname{Cos}.\alpha_{\prime}+D_{\prime}\operatorname{Cos}.\beta_{\prime}\operatorname{Cos}.\gamma_{\prime}\,, & Y_{\prime}=r_{\prime}\operatorname{Sin}.\alpha_{\prime}+D_{\prime}\operatorname{Sin}.\beta_{\prime}\operatorname{Cos}.\gamma_{\prime}\,, \\ X=r\operatorname{Cos}.\alpha+D\operatorname{Cos}.\beta\operatorname{Cos}.\gamma\,, & Y=r\operatorname{Sin}.\alpha+D\operatorname{Sin}.\beta\operatorname{Cos}.\gamma\,; \\ X'=r'\operatorname{Cos}.\alpha'+D'\operatorname{Cos}.\beta'\operatorname{Cos}.\gamma'\,; & Y'=r'\operatorname{Sin}.\alpha'+D'\operatorname{Sin}.\beta'\operatorname{Cos}.\gamma'\,; \end{array}\right\} (2)$$

et tout cela aura lieu indépendamment de toute hypothèse sur la nature du mouvement de l'astre et sur la nature de la trajectoire qu'il décrit.

Si présentement on suppose que l'intervalle qui sépare les observations extrêmes $t_{\prime}$, $t'$ est assez court pour que, durant cet intervalle, on puisse considérer le mouvement de l'astre comme sensiblement rectiligne et uniforme, on aura

$$\frac{X-X_{,}}{t-t_{,}}=\frac{X'-X}{t'-t}\,; \quad \frac{Y-Y_{,}}{t-t_{,}}=\frac{Y'-Y}{t'-t}\,, \quad \frac{Z-Z'}{t-t'}=\frac{Z'-Z}{t'-t'}\,;$$

c'est-à-dire,

$$\left.\begin{array}{l}(t'-t)X_{,}-(t'-t_{,})X+(t-t_{,})X'=0\;;\\(t'-t)Y_{,}-(t'-t_{,})Y+(t-t_{,})Y'=0\;,\\(t'-t)Z_{,}-(t'-t_{,})Z+(t-t_{,})Z'=0\;.\end{array}\right\}(3)$$

Mettant dans ces dernières équations les valeurs données (2 et 3), elles deviendront

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}(t'-t)\text{Cos.}\beta_{,}\text{Cos.}\gamma_{,}.D_{,}+(t'-t)r_{,}\text{Cos.}\alpha_{,}\\-(t'-t_{,})\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma\,.D-(t'-t_{,})r\,\text{Cos.}\alpha\\+(t-t_{,})\text{Cos.}\beta'\text{Cos.}\gamma'.D'+(t-t_{,})r'\text{Cos.}\alpha'\end{array}\right\}=0\,,\\\left.\begin{array}{r}(t'-t)\text{Sin.}\beta_{,}\text{Cos.}\gamma_{,}.D_{,}+(t'-t)r_{,}\text{Sin.}\alpha_{,}\\-(t'-t_{,})\text{Sin.}\beta\text{Cos.}\gamma\,.D-(t'-t_{,})r\text{Sin.}\alpha\\+(t-t_{,})\text{Sin.}\beta'\text{Cos.}\gamma'.D'+(t-t_{,})r'\text{Sin.}\alpha'\end{array}\right\}=0\,,\\(t'-t)\text{Sin.}\gamma_{,}.D_{,}-(t'-t_{,})\text{Sin.}\gamma.D+(t-t_{,})\text{Sin.}\gamma'.D'=0\,;\end{array}\right\}(4)$$

desquelles il s'agira de tirer les valeurs de $D_{,}$, $D$, $D'$.

On simplifie un peu ces équations en posant

$$\left.\begin{array}{ll}(t'-t)D_{,}\text{Cos.}\gamma_{,}=\Delta_{,}\;, & (t'-t)r_{,}=\rho_{,}\;,\\(t'-t_{,})D\text{Cos.}\gamma=\Delta\;, & (t'-t_{,})r=\rho\;,\\(t-t_{,})D'\text{Cos.}\gamma'=\Delta'\;, & (t-t')r'=\rho'\;;\end{array}\right\}(5)$$

elles deviennent ainsi

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_{,}\text{Cos.}\beta_{,}-\Delta\text{Cos.}\beta+\Delta'\text{Cos.}\beta'+(\rho_{,}\text{Cos.}\alpha_{,}-\rho\text{Cos.}\alpha+\rho'\text{Cos.}\alpha')=0\,,\\\Delta_{,}\text{Sin.}\beta_{,}-\Delta\text{Sin.}\,\beta+\Delta'\text{Sin.}\,\beta'+(\rho_{,}\,\text{Sin.}\alpha_{,}-\rho\text{Sin.}\alpha+\rho'\,\text{Sin.}\,\alpha')=0\,,\\\Delta_{,}\text{Tang.}\gamma_{,}-\Delta\text{Tang.}\gamma+\Delta'\text{Tang.}\gamma'=0\;.\end{array}\right\}(6)$$

On en tire la valeur de $\Delta_{,}$ en prenant la somme de leurs produits respectifs par

$\text{Sin.}\beta\text{Tang.}\gamma'-\text{Sin.}\beta'\text{Tang.}\gamma$, $\text{Cos.}\beta'\text{Tang.}\gamma-\text{Cos.}\beta\text{Tang.}\gamma'$, $\text{Sin.}(\beta-\beta)$;

on en tire celle de $\Delta$, en prenant la somme de leurs produits respectifs par

$$\text{Sin.}\beta_{\prime}\text{Tang.}\gamma'-\text{Sin.}\beta'\text{Tang.}\gamma_{\prime},\ \text{Cos.}\beta'\text{Tang.}\gamma_{\prime}-\text{Cos.}\beta_{\prime}\text{Tang.}\gamma',\ \text{Sin.}(\beta'-\beta_{\prime});$$

on en tire enfin celle de $\Delta'$, en prenant la somme de leurs produits respectifs par

$$\text{Sin.}\beta_{\prime}\text{Tang.}\gamma-\text{Sin.}\beta\text{Tang.}\gamma_{\prime},\ \text{Cos.}\beta\text{Tang.}\gamma_{\prime}-\text{Cos.}\beta_{\prime}\text{Tang.}\gamma,\ \text{Sin.}(\beta-\beta_{\prime}).$$

En posant ensuite, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned}
&(t'-t)r_{\prime}\text{Sin.}(\alpha_{\prime}-\beta_{\prime})-(t'-t_{\prime})r\text{Sin.}(\alpha-\beta_{\prime})+(t-t_{\prime})r'\text{Sin.}(\alpha'-\beta_{\prime})=f_{\prime}\,,\\
&(t'-t)r_{\prime}\text{Sin.}(\alpha_{\prime}-\beta)-(t'-t_{\prime})r\text{Sin.}(\alpha-\beta)+(t-t_{\prime})r'\text{Sin.}(\alpha'-\beta)=f\,,\\
&(t'-t)r_{\prime}\text{Sin.}(\alpha_{\prime}-\beta')-(t'-t_{\prime})r\text{Sin.}(\alpha-\beta')+(t-t_{\prime})r'\text{Sin.}(\alpha'-\beta')=f'\,;
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$$\text{Sin.}(\beta'-\beta)\text{Tang.}\gamma_{\prime}-\text{Sin.}(\beta'-\beta_{\prime})\text{Tang.}\gamma+\text{Sin.}(\beta-\beta_{\prime})\text{Tang.}\gamma'=k\,;\qquad(8)$$

il vient

$$\left.\begin{aligned}
D_{\prime}&=\frac{f\text{Tang.}\gamma'-f'\text{Tang.}\gamma}{(t'-t)k\text{Cos.}\gamma_{\prime}}\,,\\
D&=\frac{f_{\prime}\text{Tang.}\gamma'-f'\text{Tang.}\gamma_{\prime}}{(t'-t_{\prime})k\text{Cos.}\gamma}\,,\\
D'&=\frac{f_{\prime}\text{Tang.}\gamma-f\text{Tang.}\gamma_{\prime}}{(t-t_{\prime})k\text{Cos.}\gamma'}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Ces valeurs étant calculées, les équations (1 et 2) feront connaître les coordonnées des trois lieux de l'astre. Considérant ensuite le plan de l'orbite comme un plan passant par l'origine et par les deux lieux extrêmes, on aura, pour son équation

$$(Z_{\prime}Y'-Y_{\prime}Z')x+(X_{\prime}Z'-Z_{\prime}X')y+(Y_{\prime}X'-X_{\prime}Y')z=0\,;\qquad(10)$$

ce plan se trouvera donc entièrement déterminé ; et on achèvera la solution comme il a été dit ci-dessus.

On pourra aussi poser, pour l'époque $t$ ;

$$\left.\begin{aligned} x&=X\,, & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=\frac{X'-X_{\prime}}{t'-t_{\prime}}\,,\\ y&=Y\,, & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=\frac{Y'-Y_{\prime}}{t'-t_{\prime}}\,,\\ z&=Z\,, & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}&=\frac{Z'-Z_{\prime}}{t'-t_{\prime}}\,; \end{aligned}\right\}(11)$$

et avec ces six quantités on déterminera complètement les élémens de l'astre suivant ce qui a été dit ( *Annales*, tome II, page 8 ).

III. Voyons présentement ce que deviennent ces résultats à la limite, c'est-à-dire, lorsque l'intervalle de temps qui sépare les observations extrêmes est infiniment petit ou nul. Posons d'abord, pour abréger,

$$\left.\begin{array}{llll} r_{\prime}\text{Cos.}\alpha_{\prime}=g_{\prime}\,, & r_{\prime}\text{Sin.}\alpha_{\prime}=h_{\prime}\,, & \text{Cos.}\beta_{\prime}\text{Cot.}\gamma_{\prime}=m_{\prime}\,, & \text{Sin.}\beta_{\prime}\text{Cot.}\gamma_{\prime}=n_{\prime}\,,\\ r\,\text{Cos.}\alpha=g\,, & r\,\text{Sin.}\alpha=h\,, & \text{Cos.}\beta\,\text{Cot.}\gamma=m\,, & \text{Sin.}\beta\,\text{Cot.}\gamma=n\,,\\ r'\text{Cos.}\alpha'=g'\,; & r'\text{Sin.}\alpha'=h'\,; & \text{Cos.}\beta'\text{Cot.}\gamma'=m'\,; & \text{Sin.}\beta'\text{Cot.}\gamma'=n'\,; \end{array}\right\}(12)$$

Nous aurons conséquemment

$$\left.\begin{array}{ll} r_{\prime}\text{Sin.}(\alpha_{\prime}-\beta_{\prime})=(m_{\prime}h_{\prime}-n_{\prime}g_{\prime})\text{Tang.}\gamma_{\prime} & ;\\ r\,\text{Sin.}(\alpha\,-\beta_{\prime})=(m_{\prime}h\,-n_{\prime}g\,)\text{Tang.}\gamma_{\prime} & ,\\ r'\text{Sin.}(\alpha'-\beta_{\prime})=(m_{\prime}h'-n_{\prime}g')\text{Tang.}\gamma_{\prime} & ;\\ r_{\prime}\text{Sin.}(\alpha_{\prime}-\beta\,)=(m\,h_{\prime}-n\,g_{\prime})\text{Tang.}\gamma & ,\\ r\,\text{Sin.}(\alpha\,-\beta\,)=(m\,h\,-n\,g\,)\text{Tang.}\gamma & ,\\ r'\text{Sin.}(\alpha'-\beta')=(m\,h'-n\,g')\text{Tang.}\gamma & ;\\ r_{\prime}\text{Sin.}(\alpha_{\prime}-\beta')=(m'h_{\prime}-n'g_{\prime})\text{Tang.}\gamma' & ,\\ r\,\text{Sin.}(\alpha\,-\beta')=(m'h\,-n'g\,)\text{Tang.}\gamma' & ,\\ r'\text{Sin.}(\alpha'-\beta')=(m'h'-n'g')\text{Tang.}\gamma' & , \end{array}\right\}(13)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sin.}(\beta'-\beta\,)=(m\,n'-m'n\,)\text{Tang.}\gamma'\text{Tang.}\gamma\;,\\ \text{Sin.}(\beta'-\beta_{\prime})=(m_{\prime}n'-m'n_{\prime})\text{Tang.}\gamma'\text{Tang.}\gamma_{\prime}\;,\\ \text{Sin.}(\beta\,-\beta_{\prime})=(m_{\prime}n\,-m\,n_{\prime})\text{Tang.}\gamma\,\text{Tang.}\gamma_{\prime}\;. \end{array}\right\}(14)$$

Supposons en outre que les observations soient équidistantes et posons

$$t'-t=t-t_{,}=i \quad , \quad \text{d'où} \quad t'-t_{,}=2i \;;$$

en substituant toutes ces valeurs dans les formules (7 et 8), elles deviendront

$$\left.\begin{aligned} f_{,}&=i\{m_{,}(h_{,}-2h+h')-n_{,}(g_{,}-2g+g')\}\text{Tang.}\gamma_{,}\,, \\ f&=i\{m\,(h_{,}-2h+h')-n\,(g_{,}-2g+g')\}\text{Tang.}\gamma\,, \\ f'&=i\{m'(h_{,}-2h+h')-n'(g_{,}-2g+g')\}\text{Tang.}\gamma'\,; \end{aligned}\right\}(15)$$

$$k=\{(mn'-m'n)-(m_{,}n'-m'n_{,})+(m_{,}n-mn_{,})\}\text{Tang.}\gamma'\text{Tang.}\gamma\text{Tang.}\gamma_{,}\,; \quad (16)$$

de sorte qu'en posant

$$(m-m_{,})(n'-n)-(m'-m)(n-n_{,})=(mn_{,}-m_{,}n)-(m'n_{,}-m_{,}n')+(m'n-mn')=K\,; \quad (17)$$

et substituant dans (9), il viendra

$$\left.\begin{aligned} D_{,}&=\frac{(m'-m)(h_{,}-2h+h')-(n'-n)(g_{,}-2g+g')}{K\text{Sin.}\gamma_{,}}\,, \\ D&=\frac{(m'-m_{,})(h_{,}-2h+h')-(n'-n_{,})(g_{,}-2g+g')}{2K\text{Sin.}\gamma}\,, \\ D'&=\frac{(m-m_{,})(h_{,}-2h+h')-(n-n_{,})(g_{,}-2g+g')}{K\text{Sin.}\gamma'}\,; \end{aligned}\right\}(18)$$

et par suite (1)

$$\left.\begin{aligned} -Z_{,}&=\frac{1}{K}\{(m'-m\,)(h_{,}-2h+h')-(n'-n\,)(g_{,}-2g+g')\}\,, \\ -Z&=\frac{1}{2K}\{(m'-m_{,})(h_{,}-2h+h')-(n'-n_{,})(g_{,}-2g+g')\}\,, \\ -Z'&=\frac{1}{K}\{(m-m_{,})(h_{,}-2h+h')-(n-n_{,})(g_{,}-2g+g')\}\,; \end{aligned}\right\}(19)$$

ce qui donne encore

$$-(Z'-Z_{,})=\frac{1}{K}\{(n_{,}-2n+n_{,})(g_{,}-2g+g')-(m_{,}-2m+m')(h_{,}-2h+h_{,})\}\,; \quad (20)$$

et l'on a ensuite

$$X=g+mZ \quad , \quad Y=h+nZ \;. \qquad (21)$$

Présentement

Présentement, $g$, $h$, $m$, $n$, $Z$ étant des fonctions de $t$, lesquelles deviennent $g_{,}$, $h_{,}$, $m_{,}$, $n_{,}$, $Z_{,}$ ou $g'$, $h'$, $m'$, $n'$, $Z'$, lorsque $t$ devient $t-i$ ou $t+i$, il s'ensuit qu'on doit avoir

$$g_{,}=g-\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\,\frac{i}{1}+\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{i^2}{1.2}-\frac{\mathrm{d}^3g}{\mathrm{d}t^3}\,\frac{i^3}{1.2.3}+G_{,}i^4\,,$$

$$g'=g+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\,\frac{i}{1}+\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{i^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3g}{\mathrm{d}t^3}\,\frac{i^3}{1.2.3}+G'i^4\,;$$

$$h_{,}=h-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\,\frac{i}{1}+\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{i^2}{1.2}-\frac{\mathrm{d}^3h}{\mathrm{d}t^3}\,\frac{i^3}{1.2.3}+H_{,}i^4\,,$$

$$h'=h+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\,\frac{i}{1}+\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{i^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3h}{\mathrm{d}t^3}\,\frac{i^3}{1.2.3}+H'i^4\,;$$

$$m_{,}=m-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,\frac{i}{1}+\frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{i^2}{1.2}-\frac{\mathrm{d}^3m}{\mathrm{d}t^3}\,\frac{i^3}{1.2.3}+M_{,}i^4\,,$$

$$m'=m+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,\frac{i}{1}+\frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{i^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3m}{\mathrm{d}t^3}\,\frac{i^3}{1.2.3}+M'i^4\,;$$

$$n_{,}=n-\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}\,\frac{i}{1}+\frac{\mathrm{d}^2n}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{i^2}{1.2}-\frac{\mathrm{d}^3n}{\mathrm{d}t^3}\,\frac{i^3}{1.2.3}+N_{,}i^4\,;$$

$$n'=n+\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}\,\frac{i}{1}+\frac{\mathrm{d}^2n}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{i^2}{1.2}-\frac{\mathrm{d}^3n}{\mathrm{d}t^3}\,\frac{i^3}{1.2.3}+N'i^4\,;$$

$$Z_{,}=Z-\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}\,\frac{i}{1}+\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{i^2}{1.2}-\frac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}t^3}\,\frac{i^3}{1.2.3}+\zeta_{,}i^4\,;$$

$$Z'=Z-\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}\,\frac{i}{1}+\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{i^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}t^3}\,\frac{i^3}{1.2.3}+\zeta'i^4\,;$$

$G_{,}$, $G'$, $H_{,}$, $H'$, $M_{,}$, $M'$, $N_{,}$, $N'$, $\zeta_{,}$, $\zeta'$ étant des fonctions de $t$ qui ne deviennent pas nulles lorsque $i$ est zéro.

On déduit de tout cela

$$g_{,}-2g+g_{,}=\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}^2t}\,i^2+(G'+G_{,})i^4\,;$$

$$h_{,}-2h+h'=\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}\,i^2+(H'+H_{,})i^4\,;$$

$$m_{,}-2m+m'=\frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}t^2}\,i^2+(M'+M_{,})i^4\,,$$

$$n_{,}-2n+n'=\frac{d^2n}{dt^2}\,i^2+(N'+N_{,})i^4\ ;$$

$$m'-m_{,}=2\,\frac{dm}{dt}\,i+\frac{d^3m}{dt^3}\,\frac{i^3}{3}+(M'-M_{,})i^4\ ,$$

$$n'-n_{,}=2\,\frac{dn}{dt}\,i+\frac{d^3n}{dt^3}\,\frac{i^3}{3}+(N'-N_{,})i^4\ ;$$

$$Z'-Z_{,}=2\,\frac{dZ}{dt}\,i+\frac{d^3Z}{dt^3}\,\frac{i^3}{3}+(\xi'-\xi_{,})\,i^4\ ;$$

$$m-m_{,}=\frac{dm}{dt}\,\frac{i}{1}-\frac{d^2m}{dt^2}\,\frac{i^2}{1.2}+\frac{d^3m}{dt^3}\,\frac{i^3}{1.2.3}-M_{,}i^4\ ,$$

$$n-n_{,}=\frac{dn}{dt}\,\frac{i}{1}-\frac{d^2n}{dt^2}\,\frac{i^2}{1.2}+\frac{d^3n}{dt^3}\,\frac{i^3}{1.2.3}-N_{,}i^4\ ;$$

$$m'-m=\frac{dm}{dt}\,\frac{i}{1}+\frac{d^2m}{dt^2}\,\frac{i^2}{1.2}+\frac{d^3m}{dt^3}\,\frac{i^3}{1.2.3}+M'i^4\ ,$$

$$n'-n=\frac{dn}{dt}\,\frac{i}{1}+\frac{d^2n}{dt^2}\,\frac{i^2}{1.2}+\frac{d^3n}{dt^3}\,\frac{i^3}{1.2.3}+N'i^4\ ;$$

d'après quoi, en posant pour abréger

$$S=(N'+N_{,})\frac{dm}{dt}-(M'+M_{,})\frac{dn}{dt}-\tfrac{1}{6}\left(\frac{d^2m}{dt^2}\,\frac{d^3n}{dt^3}-\frac{d^2n}{dt^2}\,\frac{d^3m}{dt^3}\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}\left\{(N'-N_{,})\,\frac{d^2m}{dt^2}-(M'-M_{,})\,\frac{d^2n}{dt^2}\right\}i$$
$$+\tfrac{1}{6}\left\{(N'+N_{,})\,\frac{d^3m}{dt^3}-(M'+M_{,})\,\frac{d^3n}{dt^3}\right\}i^2-(M_{,}N'-M'N_{,})i^3\ ;$$

$$F=2(H'+H_{,})\,\frac{dm}{dt}-2(G'+G_{,})\,\frac{dn}{dt}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{d^3m}{dt^3}\,\frac{d^2h}{dt^2}-\frac{d^3n}{dt^3}\,\frac{d^2g}{dt^2}\right)$$
$$+\left\{(M'-M_{,})\,\frac{d^2h}{dt^2}-(N'-N_{,})\,\frac{d^2g}{dt^2}\right\}i+\tfrac{1}{3}\left\{(H'+H_{,})\frac{d^3m}{dt^3}-(G'+G_{,})\frac{d^3n}{dt^3}\right\}i^2$$
$$+\{(M'-M_{,})(H'+H_{,})-(N'-N_{,})(G'+G_{,})\}i^3\ ;$$

$$V=(G'+G_{,})\frac{d^2n}{dt^2}-(H'+H_{,})\frac{d^2m}{dt^2}+(N'+N_{,})\frac{d^2g}{dt^2}-(M'+M_{,})\frac{d^2h}{dt^2}$$
$$-\{(M'+M_{,})(H'+H_{,})-(N'+N_{,})(G'+G_{,})\}i^2 ;$$

il viendra

$$K=\left\{\frac{dm}{dt}\,\frac{d^2n}{dt^2}-\frac{dn}{dt}\,\frac{d^2m}{dt^2}\right\}i^3+Si^5 ;$$

$$(m'-m_{,})(h'-2h+h')-(n'-n_{,})(g_{,}-2g+g')=2\left\{\frac{dm}{dt}\,\frac{d^2h}{dt^2}-\frac{dn}{dt}\,\frac{d^2g}{dt^2}\right\}i^3+Fi^5 ;$$

$$(n_{,}-2n+n')(g_{,}-2g+g')-(m_{,}-2m+m')(h_{,}-2h+h')=-\left\{\frac{d^2m}{dt^2}\,\frac{d^2h}{dt^2}-\frac{d^2n}{dt^2}\,\frac{d^2g}{dt^2}\right\}i^4+Vi^6 .$$

En conséquence, on aura (18 et 19)

$$\left.\begin{aligned}
Z&=-\frac{2\left\{\frac{dm}{dt}\,\frac{d^2h}{dt^2}-\frac{dn}{dt}\,\frac{d^2g}{dt^2}\right\}+Fi^2}{2\left\{\frac{dm}{dt}\,\frac{d^2n}{dt^2}-\frac{dn}{dt}\,\frac{d^2m}{dt^2}\right\}+2Si^2} ;\\
2\frac{dZ}{dt}+\left\{\frac{1}{3}\,\frac{d^3Z}{dt^3}+(\zeta'-\zeta_{,})i\right\}i^2&=+\frac{\left\{\frac{d^2m}{dt^2}\,\frac{d^2h}{dt^2}-\frac{d^2n}{dt^2}\,\frac{d^2g}{dt^2}\right\}-Vi^2}{\left\{\frac{dm}{dt}\,\frac{d^2n}{dt^2}-\frac{dn}{dt}\,\frac{d^2m}{dt^2}\right\}+Si^2} ;
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

résultats sur lesquels nous reviendrons tout à l'heure.

Si présentement on suppose que les observations coïncident, c'est-à-dire, si l'on suppose que l'intervalle de temps $i$ qui sépare l'observation moyenne des deux observations extrêmes est nul, il viendra, en adoptant, pour plus de simplicité les notations de Lagrange

$$Z=-\frac{m'h''-n'g''}{m'n''-n'm''} , \quad Z'=\frac{m''h''-n''g''}{2(m'n''-n'm'')} . \qquad (23)$$

IV. Si nous n'eussions eu en vue que de parvenir à ces derniers résultats, nous aurions pu les obtenir d'une manière incomparablement plus simple, ainsi que nous l'allons voir ; et il en serait résulté une nouvelle méthode qui, si l'hypothèse qui nous occupe pouvait être admise, paraîtrait devoir l'emporter de beaucoup sur la précédente, sous le rapport de la rigueur et de la brièveté.

Soient toujours, pour une époque quelconque $t$, $r$ le rayon vecteur de la terre, $\alpha$ sa longitude ou celle du soleil augmentée de six signes, $\beta$ la longitude et $\gamma$ la latitude géocentriques d'un astre; en posant, pour abréger, comme ci-dessus,

$$\left.\begin{array}{ll} r\mathrm{Cos}.\alpha=g\ , & \mathrm{Cos}.\beta\mathrm{Cot}.\gamma=m\ , \\ r\mathrm{Sin}.\alpha=h\ , & \mathrm{Sin}.\beta\mathrm{Cot}.\gamma=n\ ; \end{array}\right\} \quad (24)$$

$g$, $h$, $m$, $n$ seront des variables fonctions de $t$, et les équations des rayons visuels seront

$$x=g+mz\ , \quad y=h+nz\ ; \qquad (25)$$

or, en conservant toujours la notation des fonctions, l'hypothèse d'un mouvement rectiligne et uniforme revient à supposer à la fois

$$x''=0\ , \quad y''=0\ , \quad z''=0\ ;$$

différentiant donc deux fois consécutivement, sous ce point de vue, les équations (24), on en tirera

$$\left.\begin{array}{l} x'=g'+mz'+m'z\ , \\ y'=h'+nz'+n'z\ ; \end{array}\right\} (26) \qquad \left.\begin{array}{l} 0=g''+2m'z'+m''z\ , \\ 0=h''+2n'z'+n''z\ . \end{array}\right\} (27)$$

Les deux dernières donnent sur-le-champ

$$z=-\frac{m'h''-n'g''}{m'n''-m''n'}\ , \quad z'=+\frac{m''h''-n''g''}{2(m'n''-n'm'')}\ . \qquad (28)$$

On a ensuite, par les équations (26)

$$\left.\begin{array}{l} x'=g'+\dfrac{(mm''-2m'^2)h''-(mn''-2m'n')g''}{2(m'n''-n'm'')}\ , \\ y'=h'+\dfrac{(nm''-2m'n')h''-(nn''-2n'^2)g''}{2(m'n''-n'm'')}\ ; \end{array}\right\} (29)$$

et enfin, par les équations (25),

$$x=g-m.\frac{m'h''-n'g''}{m'n''-n'm''}\ , \quad y=h-n\frac{m'h''-n'g''}{m'n''-n'm''}\ . \qquad (30)$$

Voici comment on tirerait parti de ces formules. Au moyen de plusieurs observations peu distantes, au nombre de trois au moins, mais qu'il serait utile d'avoir en plus grand nombre, on se procurerait une suite de valeurs de $r$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $t$ et conséquemment de $g$, $h$, $m$, $n$. Par les méthodes connues d'interpolation, on déterminerait chacune de ces quatre dernières quantités en fonction de $t$, de manière qu'elles soient amenées à cette forme

$$\left.\begin{aligned}
g&=G_0+G_1t+G_2t^2+G_3t^3+\ldots\,,\\
h&=H_0+H_1t+H_2t^2+H_3t^3+\ldots\,,\\
m&=M_0+M_1t+M_2t^2+M_3t^3+\ldots\,,\\
n&=N_0+N_1t+N_2t^2+N_3t^3+\ldots\,.
\end{aligned}\right\}\quad(31)$$

Les coefficiens numériques une fois déterminés, on aurait

$$\left.\begin{aligned}
g'&=G_1+2G_2t+3G_3t^2+\ldots\,, & g''&=2(G_2+3G_3t+\ldots)\,,\\
h'&=H_1+2H_2t+3H_3t^2+\ldots\,, & h''&=2(H_2+3H_3t+\ldots)\,,\\
m'&=M_1+2M_2t+3M_3t^2+\ldots\,, & m''&=2(M_2+3M_3t+\ldots)\,,\\
n'&=N_1+2N_2t+3N_3t^2+\ldots\,; & n''&=2(N_2+3N_3t+\ldots)\,;
\end{aligned}\right\}\quad(32)$$

Prenant alors pour $t$ une époque qui soit à peu près moyenne entre celles des observations extrêmes, les formules ci-dessus feraient connaître, pour cette époque, les valeurs numériques de $g$, $g'$, $g''$, $h$, $h'$, $h''$, $m$, $m'$, $m''$, $n$, $n'$, $n''$, et on en conclurait, par les formules (28, 29, 30), les valeurs numériques de $x$, $x'$, $y$, $y'$, $z$, $z'$, desquelles enfin on déduirait (*Annales*, tom. II, pag. 8) tous les élémens du mouvement de l'astre.

On pourrait, au surplus, s'épargner la peine de deux interpolations en profitant des circonstances connues du mouvement de la terre pour exprimer $g$, $g'$, $g''$, $h$, $h'$, $h''$ en fonction de $r$ et $\alpha$, comme l'a fait M. Laplace, dans sa méthode pour les comètes. On pourrait aussi, à l'exemple du même géomètre, dans le cas où l'on saurait que l'orbite est parabolique, ou à peu près, profiter de l'équation de condition

$$4\mu^2=(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)^2$$

pour éliminer de nos formules celle des deux quantités $m''$, $n''$ que l'on soupçonnerait être déterminée de la manière la moins rigoureuse, à raison des variations trop peu sensibles des valeurs consécutives de $m$ ou de $n$. Ainsi, sous tous les rapports, cette méthode ne le cèderait à aucune autre, sous le double point de vue de la rigueur et de la brièveté, ainsi que sous celui de la simplicité et de l'élégance de la théorie qui y aurait conduit, si l'on pouvait faire quelque fond sur l'hypothèse qui lui sert de base. Voyons donc, d'une manière plus particulière, ce qu'on doit penser de cette hypothèse.

V. Nous avons déduit les formules (23) des formules (22), en supposant que l'intervalle de temps $i$ qui sépare les observations était tout à fait nul; mais, nous serions encore parvenus aux mêmes résultats, si nous eussions seulement supposé cet intervalle de temps assez petit pour qu'il fût permis d'en négliger les puissances supérieures à la première; car tous les termes négligés dans les formules (22), pour parvenir aux formules (23), sont affectés de $i^2$ au moins; donc, si les formules (23) étaient rigoureuses, dans le cas d'observations infiniment voisines, les formules (22), et conséquemment les formules (9), devraient s'éloigner peu de l'exactitude, lorsqu'on les appliquerait à des observations qui ne seraient point séparées les unes des autres par un intervalle de temps trop considérable; si donc alors elles conduisent à des résultats tout à fait défectueux, il faut en conclure qu'elles ne sont pas exactes, même à la limite, et qu'ainsi elles sont en défaut dans l'application, moins par le trop d'intervalle entre les observations, que par le principe même sur lequel elles reposent.

Si tout mouvement varié et curviligne peut, durant un intervalle de temps assez court, être considéré, sans erreur sensible, comme uniforme et rectiligne, nous pourrons supposer tel le mouvement de la terre, dans l'intervalle qu'embrassent les observations. On peut même remarquer que souvent cette supposition s'éloignera moins de la vérité pour la terre que pour l'astre observé, et c'est par exemple ce qui arrivera lorsque cet astre sera une planète inférieure ou une comète passant fort près du soleil. Voyons donc ce que deviennent nos formules dans cette hypothèse.

Si l'on pose, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned}(t-t_{\prime})g'-(t'-t_{\prime})g+(t'-t)g_{\prime}&=G\ ,\\(t-t_{\prime})h'-(t'-t_{\prime})h+(t'-t)h_{\prime}&=H\ ;\end{aligned}\right\}\quad(33)$$

les formules (7 et 8) deviendront, au moyen des transformations (13 et 14),

$$\left.\begin{aligned}f_{\prime}&=(m_{\prime}H-n_{\prime}G)\text{Tang}.\gamma_{\prime}\ ,\\f&=(m\,H-n\,G)\text{Tang}.\gamma\ ,\\f'&=(m'H-n'G)\text{Tang}.\gamma'\ .\end{aligned}\right\}(34)$$

$$K=\{(m'-m)(n-n_{\prime})-(m-m_{\prime})(n'-n)\}\text{Tang}.\gamma'\text{Tang}.\gamma\text{Tang}.\gamma_{\prime}\ ;\quad(35)$$

en conséquence de quoi les formules (9) deviendront

$$\left.\begin{aligned}D_{\prime}&=\frac{(m'-m)H-(n'-n)G}{\{(m'-m)(n-n_{\prime})-(m-m_{\prime})(n'-n)\}\text{Sin}.\gamma_{\prime}}\ ,\\D&=\frac{(m'-m_{\prime})H-(n'-n_{\prime})G}{\{(m'-m)(n-n_{\prime})-(m-m_{\prime})(n'-n)\}\text{Sin}.\gamma}\ ,\\D'&=\frac{(m-m_{\prime})H-(n-n_{\prime})G}{\{(m'-m)(n-n_{\prime})-(m-m_{\prime})(n'-n)\}\text{Sin}.\gamma'}\ .\end{aligned}\right\}(36)$$

Cela posé, pour exprimer que le mouvement de la terre est rectiligne et uniforme, il faudra écrire

$$\frac{g'-g}{t'-t}=\frac{g-g_{\prime}}{t-t_{\prime}}\ ,\quad\frac{h'-h}{t'-t}=\frac{h-h_{\prime}}{t-t_{\prime}}\ ,\qquad(37)$$

c'est-à-dire,

$$\left.\begin{aligned}(t-t_{\prime})g'-(t'-t_{\prime})g+(t'-t)g_{\prime}&=G=0\ ,\\(t-t_{\prime})h'-(t'-t_{\prime})h+(t'-t)h_{\prime}&=H=0\ ;\end{aligned}\right\}\quad(38)$$

cette supposition rend donc nuls les numérateurs des formules (36); nous allons voir qu'elle anéantit également leurs dénominateurs.

On a, dans le cas actuel,

$$\left.\begin{array}{ll} X_{\prime}=g_{\prime}+m_{\prime}Z_{\prime}\ , & Y_{\prime}=h_{\prime}+n_{\prime}Z_{\prime}\ ; \\ X=g+m\,Z\ , & Y=h+n\,Z\ , \\ X'=g'+m'Z'\ ; & Y'=h'+n'Z'\ ; \end{array}\right\}\quad(39)$$

au moyen de quoi les équations (3) deviendront, en ayant égard aux équations (38),

$$(t-t_{\prime})m'Z'-(t'-t_{\prime})mZ+(t'-t)m'Z'=0\ ,$$
$$(t-t_{\prime})\,n'Z'-(t'-t_{\prime})\,nZ+(t'-t)\,n_{\prime}Z_{\prime}=0\ ,$$
$$(t-t_{\prime})\quad Z_{\prime}-(t'-t_{\prime})\quad Z+(t'-t)\quad Z_{\prime}=0\ .$$

Or, si, entre ces trois dernières équations, on élimine, comme inconnues, deux quelconques des trois quantités $(t-t_{\prime})Z'$, $(t'-t_{\prime})Z$, $(t'-t)Z_{\prime}$, la troisième disparaît aussi, et il vient pour résultat final

$$\frac{m'-m}{n'-n}=\frac{m-m_{\prime}}{n-n_{\prime}}\quad \text{ou}\quad (m'-m)(n-n_{\prime})-(m-m_{\prime})(n'-n)=0\ .$$

Il est donc certain que, dans l'hypothèse où le mouvement de la terre et celui de l'astre sont, l'un et l'autre, rectilignes et uniformes, les valeurs de $D_{\prime}$, $D$, $D'$, et par suite celles des coordonnées de cet astre, se présentent sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$; mais on sait que quelquefois cette forme n'est qu'une sorte de masque que prennent certaines formules très-déterminées, lorsqu'on les applique à des cas particuliers pour lesquels elles n'avaient point été calculées; il est donc nécessaire de faire voir que, dans le cas qui nous occupe, les valeurs de $D_{\prime}$, $D$, $D'$, doivent nécessairement être indéterminées; et c'est là une chose extrêmement facile.

Soient, en effet, $a$, $b$, $c$ trois lieux consécutifs de l'astre, et $a'$, $b'$, $c'$ les lieux correspondans de la terre; de manière que les rayons visuels dirigés de l'une à l'autre soient $a'a$, $b'b$, $c'c$. Si l'on suppose les mouvemens rectilignes et uniformes, on devra avoir

$$ab:a'b'::bc:b'c'\ .$$

Cela

Cela posé, concevons par $a'a$ et $b'b$ deux plans parallèles A, B, ce qui est toujours possible ; par le point $c$ concevons un troisième plan C, parallèle aux deux premiers ; et soit $d'$ le point où ce nouveau plan coupera la droite $a'b'c'$ ; par la propriété connue des droites coupées par des plans parallèles, on aura

$$ab : a'b' :: bc : b'd' ;$$

proportion qui, comparée avec la précédente, prouve que le point $d'$ n'est autre chose que le point $c'$ lui-même, et qu'ainsi le plan C contient la droite $c'c$. Il demeure donc établi par là que, lorsque deux points parcourent, d'un mouvement uniforme, deux droites non comprises dans un même plan, la droite qui va de l'un à l'autre demeure perpétuellement parallèle à un même plan fixe.

Or, soit présentement une droite quelconque $a''b''c''$, autre que $a'b'c'$ et $abc$, posant à la fois sur les trois rayons visuels $a'a$, $b'b$, $c'c$, et les coupant respectivement en $a''$, $b''$, $c''$ ; ces trois points seront aussi ceux où cette droite percera nos trois plans parallèles A, B, C ; on devra donc avoir

$$ab : a''b'' :: bc : b''c'' ;$$

donc, si un point se meut sur cette droite de manière à parvenir en $a''$, $b''$, $c''$, respectivement, en même temps que l'astre parvient réellement en $a'$, $b'$, $c'$, et la terre en $a$, $b$, $c$, ce point sera mu aussi d'un mouvement rectiligne et uniforme ; donc enfin, en admettant le mouvement rectiligne et uniforme de la terre, la supposition que l'astre observé se meut uniformément sur une ligne droite, assujettit simplement cette droite à poser à la fois sur les trois rayons visuels, sans en fixer aucunement la situation.

Le calcul différentiel confirme parfaitement cette conclusion, et même d'une manière fort simple. Nous avons déjà vu (24) que les équations du rayon visuel variable étaient

$$x = g + mz, \quad y = h + nz, \qquad (38)$$

or, dans l'hypothèse du double mouvement rectiligne et uniforme de la terre et de l'astre observé, on doit avoir

$$x''=0\ ,\ y''=0\ ,\ z''=0\ ,\ g''=0\ ,\ h''=0\ ; \qquad (39)$$

différentiant donc deux fois consécutivement les équations (38), en ayant égard à ces conditions, il viendra

$$\left.\begin{aligned} x'&=g'+mz'+m'z\ , \quad 0=2m'z'+m''z\ , \\ y'&=h'+nz'+n'z\ ; \quad 0=2n'z'+n''z\ . \end{aligned}\right\}(40)$$

Or, les deux dernières équations ne suffisent plus alors pour déterminer $z$ et $z'$ ; et elles ne peuvent plus subsister ensemble que sous la condition

$$m'n''-n'm''=0\ ,$$

qui, jointe aux deux conditions $g''=0$, $h''=0$, réduisent en effet les valeurs (28, 29, 30) à $\frac{0}{0}$.

Que doit-on donc penser de la validité d'une hypothèse qui, appliquée, dans une même question, à deux cas tout à fait semblables, donne, comme absolument indéterminées, des quantités qui, de leur nature, sont déterminées et uniques. En vain dirait-on que, du moins en n'appliquant cette hypothèse qu'à un seul des deux cas, on doit se promettre d'approcher mieux du but; dès lors, en effet, qu'elle est défectueuse, on perd, en n'y recourant qu'une seule fois, la chance des compensations d'erreurs qu'on aurait pu du moins se promettre de son double emploi.

Mais voici de nouvelles considérations qui nous paraissent de nature à mettre dans le plus grand jour tout le vide de l'hypothèse dont nous cherchons à écarter l'usage. Considérons l'ensemble des rayons visuels dirigés sans cesse de la terre en mouvement vers un astre aussi en mouvement ; ces rayons visuels, considérés comme indéfinis, engendreront dans l'espace une certaine surface gauche, dont la nature dépendra de celle du mouvement simultané des deux astres. Soient tracées sur cette surface tant de courbes continues qu'on voudra, de manière que ces courbes, d'ailleurs quelconques, ne présentent, dans leur cours, aucun point de rebroussement. Soient alors une suite d'astres fictifs parcourant ces différentes courbes de telle manière qu'ils parviennent tous, en même temps que l'astre réel, sur chacun des élémens rectilignes de la surface gauche; c'est-à-dire, de manière que, pour l'observateur, ils cachent sans cesse cet astre réel ou soient sans cesse cachés par lui. Les données fournies par l'observation seront constamment les mêmes pour tous. Or, s'il était permis, du moins pendant un intervalle de temps peu considérable, de supposer le mouvement de l'un d'eux sensiblement rectiligne et uniforme, on devrait incontestablement jouir de la même liberté à l'égard de tous les autres. Or, en soumettant cette hypothèse au calcul, et ayant d'ailleurs égard au mouvement varié et curviligne de la terre, on trouverait que, pour un instant quelconque, ces astres sont tous situés au même point de l'espace, et qu'ainsi ils suivent perpétuellement la même route. L'hypothèse d'un mouvement sensiblement rectiligne et uniforme, pendant un temps très-court, ne saurait donc être admise, puisqu'elle tend à faire juger égales des quantités qui peuvent être d'ailleurs fort différentes.

Quelques géomètres ont pensé pouvoir du moins admettre cette hypothèse dans la recherche du plan de l'orbite, sauf ensuite à procéder d'une manière plus rigoureuse dans la recherche des dimensions de cette orbite et de sa position sur ce plan. Mais, ces derniers élémens étant inévitablement subordonnés au premier, cela revient à peu près à achever, avec beaucoup de soin et de précision, un calcul entrepris sur de fausses données.

D'autres ont cru faire une moindre erreur, en supposant seulement le mouvement de l'astre rectiligne sans le supposer uniforme; mais cette hypothèse, se trouvant en contradiction formelle avec le principe des aires, semble devoir être plus fautive encore que la première. Si l'on faisait l'inverse, c'est-à-dire, si l'on supposait le mouvement uniforme, mais non rectiligne, cette hypothèse, combinée avec le principe des aires, reviendrait à attribuer à l'astre un mouvement circulaire autour du soleil; et l'on sent qu'excepté dans le voisinage des apsides, cette hypothèse serait tout à fait insoutenable.

Les équations du mouvement d'une planète ou d'une comète sont, comme l'on sait,

$$x''=-\frac{\mu x}{r^3}\,,\quad y''=-\frac{\mu y}{r^3}\,,\quad z'''=-\frac{\mu z}{r^3}\,;$$

or, on voit que l'hypothèse d'un mouvement rectiligne et uniforme revenant à supposer $x''=0$, $y''=0$, $z''=0$, cette hypothèse ne pourrait être admise, en toute rigueur, que pour le seul cas de $r=\infty$. Nous ne disconviendrons donc pas que cette hypothèse ne puisse être tolérable, pour une comète encore fort éloignée de son périhélie, et nous pensons que dans ce cas il serait bon de ne point faire usage d'observations trop rapprochées; mais, comme d'ordinaire ce n'est point dans ces circonstances que les comètes peuvent être observées, la méthode ne pourrait être alors appliquée que dans des cas extrêmement peu fréquens.

---

# GÉOMÉTRIE DES SURFACES COURBES.

## *Démonstration et application d'un théorème relatif à l'intersection des surfaces du second ordre*;

Par M. Bérard, principal et professeur de mathématiques du collége de Briançon, membre de plusieurs sociétés savantes.

Théorème. *Si deux surfaces du second ordre se coupent, suivant le système de deux lignes courbes, isolées l'une de l'autre, et si l'une de ces courbes est une courbe plane, l'autre sera également une courbe plane.*

*Démonstration.* Imaginons que l'on projette l'ensemble des deux intersections sur un plan quelconque, non perpendiculaire à celui de la section supposée plane ; le système des deux projections pourra être exprimé par une équation unique qui sera du 4.ᵉ degré au plus ; mais la section supposée plane étant du 2.ᵉ degré aura pour sa projection une équation de ce degré, laquelle devra diviser l'équation du 4.ᵉ degré, et donnera pour quotient une équation du 2.ᵉ degré au plus, laquelle appartiendra à la projection de l'autre intersection ; cette intersection ne saurait donc être elle-même une courbe d'un degré supérieur au second ; elle est donc l'intersection de l'une des surfaces dont il s'agit par un plan, c'est-à-dire, une courbe plane.

*Application.* Soit un vase, figuré en portion de surface du second ordre, dont le bord soit déterminé par la section de cette surface par un plan. Si ce vase est exposé soit aux rayons du soleil soit à ceux d'une lumière voisine, son bord formera dans son intérieur une ombre dont la limite sera l'intersection de la surface de ce vase avec une surface cylindrique ou conique, dont les élémens rectilignes passeront constamment par le bord du vase. Or, ce bord est une ligne du second ordre, puisqu'il est l'intersection d'une surface du second ordre avec un plan ; donc le cylindre ou le cône est une surface du même ordre, coupant celle du vase suivant deux courbes dont l'une est le bord même de ce vase et l'autre la limite de l'ombre projetée par ce bord dans son intérieur ; puis donc que la première de ces deux lignes est une courbe plane, l'autre doit en être une aussi.

*Remarque.* En général, deux surfaces de l'ordre $m$ se coupant réciproquement, suivant le système de deux courbes isolées, l'équation de la projection de l'ensemble de ces deux courbes sur un plan quelconque sera du degré $m^2$. Si l'une des intersections est plane, sa projection sera du degré $m$ ; l'autre ne sera donc généralement plane qu'autant qu'on aura $m^2-m=m$ ou $m=2$, comme ci-dessus.

# QUESTIONS RÉSOLUES.

*Solution des deux problèmes de géométrie proposés à la page 356 du V.e volume des* Annales ; (*)

Par M. J. B. Durrande.

**Problème I.** *Construire un triangle dans lequel on connaît seulement les distances des sommets au centre du cercle inscrit ?*

*Solution.* Tout se réduit évidemment à trouver le rayon du cercle inscrit. Soit donc $R$ ce rayon ; soient A, B, C les sommets du triangle et $a$, $b$, $c$ leurs distances respectives au centre du cercle ; on aura

$$R=a\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\ ,\quad R=b\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\ ,\quad R=c\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C\ ;\qquad (1)$$

mais on sait que, A, B, C étant les trois angles d'un triangle, on a

$$2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C+\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A+\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B+\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}C-1=0\ ;$$

substituant dans cette dernière équation les valeurs données par les équations (1), il viendra, toutes réductions faites,

(*) Ces problèmes ont déjà été résolus à la page 129 de ce volume ; mais les solutions que l'on va lire nous ont paru différer assez des premières pour mériter d'être mentionnées.

J. D. G.

$$2abbR^3+(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)R^2-a^2b^2c^2=0 \,;$$

En mettant cette équation sous la forme

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{R}\right)^3-(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)\left(\frac{1}{R}\right)-2abc=0 \,.$$

et considérant $\frac{1}{R}$ comme l'inconnue, elle sera sans second terme.

*PROBLÈME II. Construire un triangle dans lequel on connaît seulement les distances des côtés au centre du cercle circonscrit?*

*Solution.* Tout se réduit encore évidemment ici à trouver le rayon du cercle circonscrit. Soit donc $R$ ce rayon; soient **A**, **B**, **C** les sommets du triangle et $a$, $b$, $c$ les perpendiculaires abaissées respectivement du centre du cercle sur les côtés qui leur sont respectivement opposés; on aura

$$R\text{Cos.A}=a \,,\quad R\text{Cos.B}=b \,,\quad R\text{Cos.C}=c \,; \qquad (1)$$

on aura de plus

$$1-\text{Cos.}^2\text{A}-\text{Cos.}^2\text{B}-\text{Cos.}^2\text{B}-2\text{Cos.A}\,\text{Cos.B}\,\text{Cos.C}=0 \quad;$$

substituant donc, dans cette dernière équation, les valeurs données par les équations (1), elle deviendra, toutes réductions faites,

$$R^3-(a^2+b^2+c^2)R-2abc=0 \,;$$

équation du troisième degré sans second terme.

# QUESTIONS PROPOSÉES.

## *Problème de Géométrie.*

Deux sections coniques coexistant d'une manière quelconque sur un même plan ; on demande, 1.° quel est le lieu des pôles de chacune qui correspondent à toutes les tangentes à l'autre ? 2.° à quelle courbe sont tangentes toutes les droites qui, considérées par rapport à chacune, ont leur pôle sur l'autre ?

## *Problème d'Hydro-dynamique.*

Un vase, en forme de cône tronqué à bases parallèles ; ayant son axe vertical, est rempli d'un fluide pesant et incompressible. On pratique à la surface de ce vase une fente latérale dont les côtés, supposés rectilignes, vont concourir au sommet du cône, et qui s'étend sur toute la longueur du vase. Le liquide s'écoule de tous les points de cette ouverture, avec des vitesses proportionnelles aux racines quarrées des hauteurs de la surface de niveau au-dessus de chacun de ces points. On demande d'après cela quelle sera la loi d'abaissement de cette surface de niveau ?

# ANALISE TRANSCENDANTE.

## *Formules nouvelles, pour l'intégration approchée de toute fonction différentielle d'une seule variable, entre deux limites données quelconques;*

Par M. le professeur Kramp, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

L'OBJET que nous nous proposons dans ce mémoire est d'enseigner à déterminer, entre des limites données quelconques, l'intégrale de toute différentielle de la forme $Xdx$, quelle que puisse être d'ailleurs la forme de la fonction de $x$ désignée par $X$. La méthode que nous allons faire connaître a cela de particulier qu'elle est, en quelque sorte, étrangère aux principes du calcul intégral et à la notion des infinimens petits; elle ne suppose que les principes connus de l'algèbre élémentaire; elle s'étend à toutes les fonctions quelconques, à celles même qui se sont constamment refusées jusqu'ici à tous les moyens d'intégration connus; elle donne l'intégrale demandée, moyennant un nombre très-limité de termes, avec une précision bien supérieure à tout ce qu'on pourrait se promettre de l'usage des suites infinies.

1. On sait que l'intégration de toute formule $Xdx$, entre des limites données, $x=a$ et $x=a'$, par exemple, revient à quarrer l'aire mixtiligne terminée d'une part par la courbe dont l'équation serait $y=X$, d'une autre par l'axe des $x$, et enfin par les ordonnées

$b$, $b'$ de cette courbe répondant respectivement aux abscisses $a$ et $a'$. C'est même de là que ce problème a été appelé *problème des quadratures*, et c'est sous ce point de vue que nous l'envisagerons constamment, dans tout ce qui va suivre.

2. Soit fait, pour abréger $a'-a=c$; et, pour fixer les idées, imaginons que l'on ait divisé l'intervalle $c$ en *douze* parties égales; désignons par $a_0$, $a_1$, $a_2$,..... $a_{10}$, $a_{11}$, $a_{12}$ les abscisses qui répondent aux *treize* points de divisions; au moyen de l'équation $y=X$, nous pourrons calculer les ordonnées qui leur correspondent; représentons-les respectivement par $b_0$, $b_1$, $b_2$,.... $b_{10}$, $b_{11}$, $b_{12}$; nous connaîtrons ainsi treize points de la courbe qu'il s'agit de quarrer entre les limites $x=a_0$ et $x=a_{12}$, pour lesquelles on a respectivement $y=b_0$, $y=b_{12}$.

3. Soient joints les deux points extrêmes $(a_0, b_0)$, $(a_{12}, b_{12})$ par *une* corde, cette corde, avec sa projection $c$ et les *deux* ordonnées extrêmes formera *un* trapèze; en désignant son aire par $S_{12}$, et posant

$$12(\tfrac{1}{2}b_0+\tfrac{1}{2}b_{12})=b'_{12} ;$$

nous aurons

$$S_{12}=\tfrac{1}{12}cb'_{12} .$$

4. Soient joints consécutivement les *trois* points $(a_0, b_0)$, $(a_6, b_6)$, $(a_{12}, b_{12})$ par *deux* cordes; ces cordes formeront, avec $c$ et les *trois* ordonnées $b_0$, $b_6$, $b_{12}$, *deux* trapèzes; en désignant la somme de leurs aires par $S_6$, et posant

$$6(\tfrac{1}{2}b_0+b_6+\tfrac{1}{2}b_{12})=b'_6 ,$$

nous aurons

$$S_6=\tfrac{1}{12}cb'_6 .$$

5. Soient joints consécutivement les *quatre* points $(a_0, b_0)$, $(a_4, b_4)$, $(a_8, b_8)$, $(a_{12}, b_{12})$ par *trois* cordes; ces cordes formeront, avec $c$ et les *quatre* ordonnées $b_0$, $b_4$, $b_8$, $b_{12}$, *trois* trapèzes; en désignant la somme de leurs aires par $S_4$, et posant

$$4(\tfrac{1}{2}b_0+b_4+b_8+\tfrac{1}{2}b_{12})=b'_4\ ,$$

nous aurons

$$S_4=\tfrac{1}{12}cb'_4\ .$$

6. Soient joints consécutivement les *cinq* points $(a_0\,,b_0)$, $(a_3\,,b_3)$, $(a_6\,,b_6)$, $(a_9\,,b_9)$, $(a_{12}\,,b_{12})$ par *quatre* cordes ; ces cordes formeront, avec $c$ et les *cinq* ordonnées $b_0$, $b_3$, $b_6$, $b_9$, $b_{12}$, *quatre* trapèzes ; en désignant la somme de leurs aires par $S_3$, et posant

$$3(\tfrac{1}{2}b_0+b_3+b_6+b_9+\tfrac{1}{2}b_{12})=b'_3\ ,$$

nous aurons

$$S_3=\tfrac{1}{12}cb'_3\ .$$

7. Soient joints consécutivement les *sept* points $(a_0\,,b_0)$, $(a_2\,,b_2)$, $(a_4\,,b_4)$, $(a_6\,,b_6)$, $(a_8\,,b_8)$, $(a_{10}\,,b_{10})$, $(a_{12}\,,b_{12})$ par *six* cordes ; ces cordes formeront, avec $c$ et les *sept* ordonnées $b_0$, $b_2$, $b_4$, $b_6$, $b_8$, $b_{10}$, $b_{12}$, *six* trapèzes ; en désignant la somme de leurs aires par $S_2$, et posant

$$2(\tfrac{1}{2}b_0+b_2+b_4+b_6+b_8+b_{10}+\tfrac{1}{2}b_{12})=b'_2\ ,$$

nous aurons

$$S_2=\tfrac{1}{12}cb'_2\ .$$

8. Enfin, soient joints consécutivement tous les *treize* points de la courbe par *douze* cordes ; ces cordes formeront, avec $c$ et les *treize* ordonnées, *douze* trapèzes ; en désignant la somme de leurs aires par $S_1$, et posant

$$\tfrac{1}{2}b_0+b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8+b_9+b_{10}+b_{11}+\tfrac{1}{2}b_{12}=b'_1\ ,$$

nous aurons

$$S_1=\tfrac{1}{12}cb'_1\ .$$

9. Aucune des aires $S_{12}$, $S_6$, $S_4$, $S_3$, $S_2$, $S_1$ n'est l'aire demandée ; mais il résulte évidemment de notre procédé que ces aires convergent de plus en plus vers celle-là. Donc aussi la ligne par

laquelle il faut multiplier $\frac{1}{12}c$ pour avoir l'aire demandée n'est aucune des lignes $b'_{12}$, $b'_6$, $b'_4$, $b'_3$, $b'_2$, $b'_1$, mais une ligne vers laquelle celles-là convergent de plus en plus.

10. Portons les ordonnées $b'_{12}$, $b'_6$, $b'_4$, $b'_3$, $b'_2$, $b'_1$ sur leurs correspondantes $b_{12}$, $b_6$, $b_4$, $b_3$, $b_2$, $b_1$ ; et imaginons une courbe située au-dessus de la première, passant par les *six* points $(a_1, b'_1)$, $(a_2, b'_2)$, $(a_3, b'_3)$, $(a_4, b'_4)$, $(a_6, b'_6)$, $(a_{12}, b_{12})$; cette courbe prolongée rencontrera le prolongement de l'ordonnee $b_0$ en quelque point, en désignant par $b'_0$ son ordonnée qui répond à celle-là, et conséquemment à l'abscisse $a_0$ les ordonnées $b'_{12}$, $b'_6$, $b'_4$, $b'_3$, $b'_2$, $b'_1$ tendant continuellement vers la ligne par laquelle il faut multiplier $\frac{1}{12}c$ pour avoir l'aire cherchée, en désignant cette aire par $S_0$, nous pourrons prendre sensiblement

$$S_0 = \tfrac{1}{12}cb'_0 ;$$

et tout se réduira à trouver $b'_0$ ; problème qui rentre dans les méthodes connues d'interpolation. Par la nature même de ces méthodes, et de l'espèce d'arbitraire auquel elles sont inévitablement assujetties, la valeur que nous trouverons pour $b'_0$ ne sera point proprement la véritable ; mais sa différence avec elle sera comparable à celle qui existe entre le rayon et le *sinus-verse* d'un très-petit angle, tel que serait, par exemple, celui d'une minute ou même d'une seconde. Effectivement nous verrons bientôt que, dans tous les cas ordinaires d'intégration, cette différence n'est sensible qu'à la dixième ou à la douzième décimale. D'ailleurs on peut la diminuer à volonté, en augmentant le nombre des parties égales de $c$ qu'on pourra porter à 18, 24, 30, 36, 48 ou 60 au lieu de 12.

11. Il est facile de voir, par la nature de la courbe dont les ordonnées sont $b'_{12}$, $b'_6$, $b'_4$, $b'_3$, $b'_2$, $b'_1$, qu'elle doit couper perpendiculairement l'ordonnée $b'_0$, c'est-à-dire, en d'autres termes, qu'en prenant $y'$ pour le symbole général des ordonnées de cette courbe, et faisant répondre l'origine à l'ordonnée $b'_0$, on doit avoir

en même temps $x=0$, $\frac{dy'}{dx}=0$; ce qui exige que l'expression de $y'$ ne renferme point la première puissance de $x$. Pour plus d'uniformité, nous en exclurons également toutes les autres puissances impaires, et nous poserons simplement

$$y'=A+Bx^2+Cx^4+Dx^6+Ex^8+\ldots\ldots;$$

il s'agira donc de déterminer le coefficient $A$, auquel se réduit $y'$ lorsque $x=0$.

12. En prenant $\frac{1}{12}c$ pour unité, il faudra donc qu'aux valeurs $1, 2, 3, 4, 6, 12$ de $x$, répondent pour $y'$ les valeurs $b'_1$, $b'_2$, $b'_3$, $b'_4$, $b'_6$, $b_{12}$, ce qui donnera

$$\begin{aligned}
b'_1 &=A+\;B+\;C+\;D+\;E+\;F\,,\\
b'_2 &=A+2^2B+2^4C+2^6D+2^8E+2^{10}F\,,\\
b'_3 &=A+3^2B+3^4C+3^6D+3^8E+3^{10}F\,,\\
b'_4 &=A+4^2B+4^4C+4^6D+4^8E+4^{10}F\,,\\
b'_6 &=A+6^2B+6^4C+6^6D+6^8E+6^{10}F\,,\\
b'_{12} &=A+12^2B+12^4C+12^6D+12^8E+12^{10}F\,;
\end{aligned}$$

et, en éliminant, entre ces six équations, les cinq coefficiens $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, la valeur de $A$ que l'on tirera de l'équation finale, en fonction de $b'_1$, $b'_2$, $b'_3$, $b'_4$, $b'_6$, $b'_{12}$, sera, pour $c=12$, l'intégrale demandée; nous avons vu d'ailleurs qu'on a

$$\begin{aligned}
b'_1 &=\tfrac{1}{2}b_0+b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8+b_9+b_{10}+b_{11}+\tfrac{1}{2}b_{12}\,;\\
b'_2 &=b_0+2b_2+2b_4+2b_6+2b_8+2b_{10}+b_{12}\,;\\
b'_3 &=\tfrac{3}{2}b_0+3b_3+3b_6+3b_9+\tfrac{3}{2}b_{12}\,,\\
b'_4 &=2b_0+4b_4+4b_8+2b_{12}\,,\\
b'_6 &=3b_0+6b_6+3b_{12}\,,\\
b'_{12} &=6b_0+6b_{12}\,.\;(*)
\end{aligned}$$

(*) Je dois l'idée, très-ingénieuse, qui sert de fondement à cette nouvelle méthode d'intégration à M. D'OBENHEIM, ancien sous-directeur des fortifications

13. Les équations qu'il s'agit de résoudre étant au nombre de six, nous allons les présenter sous la forme plus générale que voici

$$a' = A + Ba + Ca^2 + Da^3 + Ea^4 + Fa^5 \;,$$
$$b' = A + Bb + Cb^2 + Db^3 + Eb^4 + Fb^5 \;,$$
$$c' = A + Bc + Cc^2 + Dc^3 + Ec^4 + Fc^5 \;,$$
$$d' = A + Bd + Cd^2 + Dd^3 + Ed^4 + Fd^5 \;,$$
$$e' = A + Be + Ce^2 + De^3 + Ee^4 + Fe^5 \;,$$
$$f' = A + Bf + Cf^2 + Df^3 + Ef^4 + Ff^5 \;.$$

Les quantités $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, $e'$, $f'$, de même que $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, sont regardées comme données, et il s'agit uniquement d'obtenir la valeur de $A$ ; de sorte que les cinq autres quantités $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ sont tout à fait indifférentes au problème qui nous occupe. Or, on trouve

$$\begin{aligned} A = & \frac{bcdefa'}{(b-a)(c-a)(d-a)(e-a)(f-a)} \\ & + \frac{cdefab'}{(c-b)(d-b)(e-b)(f-b)(a-b)} \\ & + \frac{defabc'}{(d-c)(e-c)(f-c)(a-c)(b-c)} \\ & + \frac{efabcd'}{(e-d)(f-d)(a-d)(b-d)(c-d)} \\ & + \frac{fabcde'}{(f-e)(a-c)(b-e)(c-e)(d-e)} \\ & + \frac{abcdef'}{(a-f)(b-f)(c-f)(d-f)(e-f)} \end{aligned}$$

---

professeur de mathématiques à l'école d'artillerie de Strasbourg. Il l'a exposée dans un ouvrage qu'il vient de publier sous le titre de BALISTIQUE ou *Indication de quelques expériences propres à compléter la théorie du mouvement des projectiles de l'artillerie* ; mais je crois pouvoir en revendiquer les développemens et applications qui vont suivre, lesquels sont entièrement mon ouvrage.

( *Note de M.* KRAMP. )

La loi que suit cette expression générale est évidente, et on peut aisément l'étendre au cas où l'on aurait un plus grand nombre d'équations.

14. J'appellerai *diviseur général* le nombre des parties égales dans lesquelles on aura divisé l'intervalle $c$ qui sépare les ordonnées extrêmes qui terminent l'espace mixtiligne qu'il s'agit de quarrer ; nombre qui a constamment été supposé 12 dans ce qui précède. Le choix de ce nombre n'est point indifférent ; et à grandeur à peu près égale, on doit donner la préférence à celui qui a le plus grand nombre de petits diviseurs, tel que 6, 12, 18, 24, 30, 36, 48, 60,..... Nous allons voir, au surplus, que, dans les applications pratiques, il doit être à peu près superflu d'aller au-delà de 24 ; attendu qu'en se bornant à ce nombre, on peut, dans les cas ordinaires, obtenir les intégrales avec *douze* chiffres décimaux exacts, au moins.

15. Le diviseur général étant choisi, le nombre et la nature des parties aliquotes à employer sont encore arbitraires. Il convient de ne jamais donner l'exclusion aux aliquotes 1, 2, 3 ; et le plus exact sera de les employer toutes ; mais il en résultera nécessairement plus de peine pour le calculateur ; d'ailleurs en n'allant pas même au-delà de 6, on peut obtenir des résultats qui, pour la précision, excèdent déjà les besoins ordinaires de l'analise.

16. *Première formule.* Prenons d'abord pour diviseur général le nombre 6, en employant tous les aliquotes 1, 2, 3, 6 ; nous aurons simplement ici

$$A=\frac{bcda'}{(b-a)(c-a)(d-a)}+\frac{cdab'}{(c-b)(d-b)(e-b)}+\frac{dabc'}{(d-c)(a-c)(b-c)}+\frac{abcd'}{(a-d)(a-d)(c-d)}\,;$$

Or, on a, dans le cas actuel, $a=1$, $b=4$, $c=9$, $d=36$, ce qui donne, en substituant,

$$A=\frac{1296a'-567b'+112c'-d'}{840}\,;$$

et, en prenant pour unité l'intervalle entre deux ordonnées consécutives, ce sera là l'intégrale demandée.

17. Pour plus de simplicité, appelons les sept ordonnées du cas actuel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\zeta$, $\eta$; nous aurons

$$a'=\tfrac{1}{2}\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\tfrac{1}{2}\eta\,,$$

$$b'=\alpha+2\gamma+2\varepsilon+\eta\,,$$

$$c'=\tfrac{1}{2}\alpha+3\delta+\tfrac{1}{2}\eta\,,$$

$$d'=3\alpha+3\eta\,;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$A=\frac{246(\alpha+\eta)+1296(\beta+\zeta)+162(\gamma+\varepsilon)+1632\delta}{840}.$$

En prenant donc l'intervalle entier qui sépare les ordonnées extrêmes $\alpha$ et $\eta$ pour unité; on aura finalement pour l'intégrale cherchée

$$\int X\mathrm{d}x=\frac{41(\alpha+\eta)+216(\beta+\zeta)+27(\gamma+\varepsilon)+272\delta}{840}. \qquad \text{(I)}$$

Si, dans cette dernière formule, on fait $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\varepsilon=\zeta=\eta=1$, elle devient $\int X\mathrm{d}x=1$, ainsi que cela doit être.

18. *Exemple premier.* On demande le logarithme naturel de *deux*?

Le logarithme d'un nombre quelconque $n$ est l'intégrale de $\frac{\mathrm{d}x}{x}$, depuis $x=1$ jusqu'à $x=n$. En divisant donc en *six* parties égales l'intervalle compris entre *un* et *deux*, et remarquant qu'ici $X=\frac{1}{x}$, nous aurons d'abord

$$\alpha=\tfrac{6}{6}=1{,}00000000\,,\quad \alpha+\eta=1{,}50000000\,;$$

$$\beta=\tfrac{6}{7}=0.85714286\,,\quad \beta+\zeta=1{,}40259740\,;$$

$$\gamma=\tfrac{6}{8}=0{,}75000000\,,\quad \gamma+\varepsilon=1{,}35000000\,,$$

$$\delta=\tfrac{6}{9}=0{,}66666667\,;\quad 2\delta=1{,}33333333\,.$$

$\varepsilon=\frac{6}{10}=0,60000000$ ,

$\zeta=\frac{6}{11}=0\;54545455$ ,

$\eta=\frac{6}{12}=0,50000000$ ;

Ces valeurs étant substituées dans la formule (I), on aura

$$\text{Log}.2=0,69314806 \ .$$

La valeur rigoureuse est

$$\text{Log}.2=0\;69314718 \ .$$

La différence est donc $+0,00000088$, moindre qu'*un millionième.*

19. *Exemple II.* On demande la longueur du demi-quadrans $=\frac{\pi}{4}$ ?

La longueur de l'arc dont la tangente est $t$ est l'intégrale de $\frac{dx}{1+x^2}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=t$; celle de l'arc $\frac{\pi}{4}$ sera donc cette même intégrale, prise entre *zéro* et *un*; divisant donc cet intervalle en *six* parties égales, et remarquant qu'ici $X=\frac{1}{1+x^2}$, il viendra

$\alpha=1=1,00000000$ , $\quad\alpha+\eta=1,50000000$ ,

$\beta=\frac{36}{37}=0,97297297$ , $\quad\beta+\zeta=1,56313690$ ,

$\gamma=\frac{36}{40}=0,90000000$ , $\quad\gamma+\varepsilon=1,59230769$ ,

$\delta=\frac{36}{45}=0,80000000$ , $\quad 2\delta=1,60000000$ .

$\varepsilon=\frac{36}{52}=0,69230769$ ,

$\zeta=\frac{36}{61}=0,59016393$ ,

$\eta=\frac{36}{72}=0,50000000$ ;

Ces valeurs étant substituées dans la formule (I), on aura

$$\frac{\pi}{4}=0,78539271 \ .$$

La valeur rigoureuse est

$$\frac{\pi}{4}=0{,}78539816\ .$$

Ainsi l'erreur est $-0{,}00000545$, moindre que *un cent millième.*

20. Cette première formule (17) est la plus simple et la plus aisée de toutes ; c'est celle qui exige le moins de calculs ; mais c'est aussi celle qui donne les résultats les moins approchés. Celles qui vont suivre seront beaucoup plus exactes.

21. *Deuxième formule.* Prenons 12 pour diviseur général, mais n'admettons d'abord que les parties aliquotes 1, 2, 3, 4, 6 ; cela donnera

$$A=\frac{bcdea'}{(b-a)(c-a)(d-a)(e-a)}+\frac{cdeab'}{(c-b)(d-b)(e-b)(a-b)}+\frac{deabc'}{(d-c)(e-c)(f-c)(g-c)}$$
$$+\frac{eabcd'}{(e-d)(a-d)(b-d)(c-d)}+\frac{abcde'}{(a-e)(b-e)(c-e)(d-e)}\ .$$

Or, nous avons ici $a=1$, $b=4$, $c=9$, $d=16$, $e=36$, nous aurons donc, en prenant pour unité l'intervalle entre les deux ordonnées extrêmes,

$$A=\frac{1728a'-945b'+320c'-54d'+e'}{12600}\ ;$$

mais on a, dans le cas actuel,

$$a'=\tfrac{1}{2}\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta+\theta+\iota+\varkappa+\lambda+\mu+\tfrac{1}{2}\nu\ ,$$
$$b'=\alpha+2\gamma+2\varepsilon+2\eta+2\iota+2\lambda+\nu\ ,$$
$$c'=\tfrac{3}{2}\alpha+3\delta+3\eta+2\varkappa+\tfrac{3}{2}\nu\ ,$$
$$d'=2\alpha+4\varepsilon+4\iota+2\nu\ ,$$
$$e'=3\alpha+6\eta+3\nu\ ;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\int X\mathrm{d}x=\frac{49(\alpha+\nu)+288(\beta+\mu)-27(\gamma+\lambda)+448(\delta+\varkappa)-63(\varepsilon+\iota)+288(\zeta+\theta)+134\eta}{2100}\ .$$

22. *Exemple I.* On demande de nouveau le logarithme de *deux* ?

En divisant en douze parties égales l'intervalle entre *un* et *deux*, nous aurons

$$\alpha=\tfrac{12}{12}=1{,}0000000000\,, \qquad \alpha+\nu=1{,}5000000000\,,$$
$$\beta=\tfrac{12}{13}=0{,}9230769231\,, \qquad \beta+\mu=1{,}4448160535\,,$$
$$\gamma=\tfrac{12}{14}=0{,}8571428571\,, \qquad \gamma+\lambda=1{,}4025974026\,,$$
$$\delta=\tfrac{12}{15}=0{,}8000000000\,, \qquad \delta+\varkappa=1{,}3714285714\,,$$
$$\varepsilon=\tfrac{12}{16}=0{,}7500000000\,, \qquad \varepsilon+\iota=1{,}3500000000\,,$$
$$\zeta=\tfrac{12}{17}=0{,}7058823529\,, \qquad \zeta+\theta=1{,}3374613003\,,$$
$$\eta=\tfrac{12}{18}=0{,}6666666667\,, \qquad 2\eta=1.3333333333\,;$$
$$\theta=\tfrac{12}{19}=0{,}6315789474\,,$$
$$\iota=\tfrac{12}{20}=0{,}6000000000\,,$$
$$\varkappa=\tfrac{12}{21}=0{,}5714285714\,;$$
$$\lambda=\tfrac{12}{22}=0{,}5454545455\,,$$
$$\mu=\tfrac{12}{23}=0{,}5217391304\,;$$
$$\nu=\tfrac{12}{24}=0{,}5000000000\,;$$

ce qui donnera, en substituant dans la formule (II)

$$\text{Log.}2=0.6931471816\,;$$

la valeur rigoureuse est

$$\text{Log.}2=0{,}6931471806\,;$$

l'erreur est donc

$$0{,}0000000010\,,$$

c'est-à-dire, que cette valeur est exacte dans les *huit* premiers chiffres décimaux.

23. *Remarque.* Avec le seul logarithme de *deux* on peut facile-

ment trouver tous les autres. Soit $m$ un nombre absolument quelconque dont il faille chercher le logarithme. Soit $2^n$ la puissance de *deux* qui lui est immédiatement inférieure ; et soit $1+h$ le quotient qu'on obtient en divisant le premier de ces deux nombres par le second. Comme $h$ sera certainement un nombre moindre que l'unité, la formule (I) suffira pour déterminer le logarithme de $1+h$ ; divisant donc $h$ en *six* parties égales on aura $\alpha=\frac{6}{6}$, $\beta=\frac{6}{6+h}$, $\gamma=\frac{6}{6+2h}$, $\delta=\frac{6}{6+3h}$, $\varepsilon=\frac{6}{6+4h}$, $\zeta=\frac{6}{6+5h}$, $\eta=\frac{6}{6+6h}=\frac{1}{1+h}$. Il faudra multiplier par $h$ l'intégrale obtenue par la formule ; on aura alors le logarithme de $1+h$, auquel ajoutant $n$ fois celui de *deux*, on aura celui de $m$ avec une erreur qui ne tombera pas au-dessus de la *huitième* ou même de la neuvième décimale.

24. *Exemple II.* On demande le logarithme naturel de 10000 ?

La puissance de *deux* immédiatement inférieure à 10000 est $8192=2^{13}$. On aura ainsi $m=10000$, $n=13$, $1+h=\frac{10000}{8192}=1+\frac{1808}{8192}=1+\frac{113}{512}$ ; on aura donc

$$\text{Log.}10000=13\text{Log.}2+\text{Log}(1+\tfrac{113}{512}).$$

Pour trouver ce dernier logarithme, on fera

$$\alpha=\tfrac{3072}{3072},\ \beta=\tfrac{3072}{3185},\ \gamma=\tfrac{3072}{3298},\ \delta=\tfrac{3072}{3411},\ \varepsilon=\tfrac{3072}{3524},\ \zeta=\tfrac{3072}{3637},\ \eta=\tfrac{3072}{3350}.$$

On trouvera ensuite

$$\begin{aligned}
41(\alpha+\eta)&=\ 74{,}58720000\,,\\
216(\beta+\zeta)&=390{,}78145008\,,\\
27(\gamma+\varepsilon)&=\ 48{,}68667756\,,\\
272\ \ \delta\ &=244{.}96745680\,.
\end{aligned}$$

La somme 759.02278444 de ces quatre nombres, divisée par 840, et multipliée par $h=\frac{113}{512}$ donne pour le logarithme de $1+h$ ou $\frac{625}{512}$, 0,1994270243. La valeur rigoureuse est 0,1994270243 ; la différence est donc seulement de *quatre* unités décimales du *dixième* ordre.

25. D'un autre côté, ayant trouvé Log 2=0,6931471816, on aura 13Log.2=9.0109133608. Ajoutant celui qu'on vient de trouver,

il en résultera le logarithme de 10000 égal à 9,2103403851. En prenant le quart de ce logarithme, on aura, pour le module de nos tables vulgaires

$$\text{Log.}10 = 2,3025850963 \ .$$

La valeur rigoureuse étant

$$\text{Log.}10 = 2,3025850930 \ ;$$

on voit que l'erreur est au-dessous de *quatre* unités décimales du *neuvième* ordre.

26. *Exemple III.* On demande la longueur de tout arc dont on connaît la tangente ?

L'arc dont la tangente est $t$ est l'intégrale de $\frac{dx}{1+x^2}$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=t$. En se servant de la formule (II) les quantités qu'il faudra y substituer pour $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \lambda, \mu, \nu$ seront des fractions ayant pour numérateur commun 144, et pour dénominateurs respectifs les nombres 144, $144+t^2$, $144+4t^2$, $144+9t^2$, $144+16t^2$, $144+100t^2$, $144+121t^2$, $144+144t^2$ ; et l'arc cherché sera la valeur qui en résultera pour $A$, multipliée par $t$. L'exemple suivant nous fera juger du degré d'exactitude de ce procédé.

27. *Exemple IV.* On demande, suivant la formule précédente, la longueur de l'arc $\frac{\varpi}{4}$ ?

Les dénominateurs de nos quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots. \lambda, \mu, \nu$ sont ici 144, 145, 148, 153, 160, 169 180, 193, 208, 225, 244, 265, 288, ce qui donnera

$$\alpha+\nu = \tfrac{144}{144} + \tfrac{144}{288} = \tfrac{3}{2} = 1,5000000000 \ ;$$

$$\beta+\mu = \tfrac{144}{145} + \tfrac{144}{265} = \tfrac{11808}{5\cdot29\cdot53} = 1,5364996746 \ ,$$

$$\gamma+\lambda = \tfrac{144}{148} + \tfrac{144}{244} = \tfrac{3528}{37\cdot61} = 1,5631369074 \ ,$$

$$\delta+\kappa = \tfrac{144}{153} + \tfrac{144}{225} = \tfrac{672}{17\cdot25} = 1,5811764706 \ ,$$

$$\varepsilon+\iota = \tfrac{144}{160} + \tfrac{144}{208} = \tfrac{207}{130} = 1,5923076923 \ ,$$

$$\zeta+\theta=\tfrac{144}{169}+\tfrac{144}{193}=\tfrac{52128}{169\cdot 193}=1,5981849955\ ;$$

$$2\quad\eta=\tfrac{144}{180}+\tfrac{144}{180}=\quad\tfrac{8}{5}\quad=1,6000000000\ .$$

d'où on conclura finalement

$$\frac{\pi}{4}=0,7853981727\ .$$

La valeur rigoureuse étant

$$\frac{\pi}{4}=0,7853981634\ ,$$

il s'ensuit que l'erreur tombe au-dessous d'une unité décimale du *huitième* ordre.

28. *Exemple V.* Rectification générale de l'ellipse.

Ce célèbre problème qui exerce, depuis plus d'un siècle, le génie de nos plus grands analistes, rentre de lui-même dans nos formules générales, dont il ne présente qu'un cas très-particulier. Soient $a$, $b$ les deux demi-axes, et proposons-nous de rectifier l'arc compris depuis l'extrémité de $a$ jusqu'au point dont la normale fait avec $a$ un angle $\lambda$; la formule à intégrer sera

$$\frac{a^2b^2\mathrm{d}\lambda}{(a^2\mathrm{Cos.}^2\lambda+b^2\mathrm{Sin.}^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}\ ,$$

depuis $\lambda=0$. Si l'on veut se contenter de la première formule, on remplacera successivement la lettre $\lambda$, dans

$$\frac{a^2b^2}{(a^2\mathrm{Cos.}^2\lambda+b^2\mathrm{Sin.}^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}\ ,$$

d'abord par zéro et ensuite par $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{6}$ de $\lambda$. On aura ainsi les valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\zeta$, $\eta$, d'où on conclura celles de $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, et par suite celle de $A$ qui, multipliée par l'arc entier $\lambda$, exprimé en parties du rayon, fera connaître la longueur de l'arc cherché.

29. Supposons, par exemple, qu'il soit question d'assigner la

longueur du quart de l'ellipse ; $\lambda$ sera un angle droit, et devra conséquemment devenir successivement $0^\circ$, $15^\circ$, $30^\circ$, $45^\circ$, $60^\circ$, $75^\circ$, $90^\circ$. Or, on sait que

$$\text{Sin.}^2\,0 = \text{Cos.}^2 90^\circ = 0\,,$$
$$\text{Cos.}^2\,0 = \text{Sin.}^2 90^\circ = 1\,,$$
$$\text{Sin.}^2 15^\circ = \text{Cos.}^2 75^\circ = \tfrac{2-\sqrt{3}}{4}\,,$$
$$\text{Cos.}^2 15^\circ = \text{Sin.}^2 75^\circ = \tfrac{2+\sqrt{3}}{4}\,,$$
$$\text{Sin.}^2 30^\circ = \text{Cos.}^2 60^\circ = \tfrac{1}{4}\,,$$
$$\text{Cos.}^2 30^\circ = \text{Sin.}^2 60^\circ = \tfrac{3}{4}\,,$$
$$\text{Sin.}^2 45^\circ = \text{Cos.}^2 45^\circ = \tfrac{1}{2}\,.$$

Il viendra donc, en posant pour abréger le quarré $a^2-b^2$ de l'excentricité $=c^2$,

$$\alpha = \frac{b^2}{a}\,,$$
$$\beta = \frac{a^2b^2}{\left(a^2-\frac{2-\sqrt{3}}{4}c^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,,$$
$$\gamma = \frac{a^2b^2}{\left(a^2-\frac{1}{4}c^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,,$$
$$\delta = \frac{a^2b^2}{\left(a^2-\frac{1}{2}c^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,,$$
$$\varepsilon = \frac{a^2b^2}{\left(a^2-\frac{3}{4}c^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,,$$
$$\zeta = \frac{a^2b^2}{\left(a^2-\frac{2+\sqrt{3}}{4}c^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,,$$
$$\eta = \frac{a^2}{b}\,.$$

Ayant obtenu la valeur de $A$, on la multipliera par $\frac{\varpi}{2} = 1{,}5708$, et l'on aura ainsi une valeur du quart d'ellipse qui, dans les cas ordinaires, ne sera pas fautive d'un *cent-millième*.

30. *Exemple VI.* On demande l'intégrale de $e^{-t^2}dt$, depuis $t=0$ jusqu'à $t=3$ ?

L'intervalle étant divisé en *douze* parties égales, on aura

| | |
|---|---|
| Pour $t=0{,}00$, | la fonction $e^{-t^2}=1{,}0000000$, |
| 0,25 | 0,9394332, |
| 0,50 | 0,7788009, |
| 0,75 | 0,5697828, |
| 1,00 | 0,3678794, |
| 1,25 | 0,2096113, |
| 1,50 | 0,1053992, |
| 1,75 | 0,0467706, |
| 2,00 | 0,0183156, |
| 2,25 | 0,0063297, |
| 2,50 | 0,0013904, |
| 2,75 | 0,0005244, |
| 3,00 | 0,0001234. |

En employant la formule (II), on trouve, pour le numérateur de l'intégrale. . . . . . . . . . . . . . . . 620,3635233,
et pour son dénominateur . . . . 2100 ;
mais, à cause de l'intervalle 3, il faudra diviser par 700 seulement, ce qui donnera finalement

$$\int e^{-t^2}dt=0{,}8862336 .$$

31. Dans mon *Analise des réfractions astronomiques*, j'ai donné une table des intégrales de $e^{-t^2}dt$, prises jusqu'à l'infini. J'y trouve

Depuis $t=0$, . . . . . 0,88622692,

Depuis $t=3$, . . . . . 0,00001958 ;

Elle est donc de 0 à 3, . . . . . 0,88620734 ;

la différence avec la précédente n'excède guère *un quarante-millième* d'unité.

32.

32. *Exemple VII.* On demande l'intégrale de $\frac{e^x dx}{x}$, depuis $x=1$ jusqu'à une valeur quelconque de $x$?

La courbe dont l'équation est $y=\frac{e^x}{x}$ n'a aucun de ses points situé dans les angles des coordonnées de signes contraires; mais elle a, dans chacun des angles des coordonnées de mêmes signes, une partie qui présente deux branches infinies. Les axes sont les asymptotes de la partie située dans l'angle des coordonnées négatives; quant à l'autre partie, elle n'a qu'une seule asymptote qui est l'axe des $y$; elle a une ordonnée *minimum* qui répond au point pour lequel on a $x=1$, et conséquemment $y=e$; et, à partir de ce point jusqu'à l'origine, l'accroissement de l'ordonnée est très-rapide, et s'élève à un ordre d'infini qu'il n'est pas même possible de déterminer; de sorte que cette branche ne peut approcher indéfiniment d'aucune courbe connue, à moins peut-être que ce ne soit la branche curviligne de la *Logistique* ordinaire.

33. Cherchons, par la première formule, l'aire de la courbe, d'abord entre 1 et 7, puis entre 7 et 13; et nous chercherons ensuite, par la seconde formule, l'aire totale entre 1 et 13, laquelle doit être rigoureusement égale à la somme des deux premières. La différence que nous trouverons entre les deux résultats nous mettra à même d'apprécier l'erreur que notre méthode laisse subsister, dans le cas particulier de ce problème.

34. On trouve, dans les *Tables logarithmiques* de SCHULZE (Berlin, 1778), une table des puissances de $e=2{,}71828...$, depuis la première jusqu'à la vingt-quatrième. Divisant donc les *treize* premiers par leurs exposans respectifs, nous aurons nos treize ordonnées ainsi qu'il suit :

$$\alpha = 2{,}718282\,,$$
$$\beta = 3{,}694528\,,$$
$$\gamma = 6{,}695178\,,$$

$$\begin{aligned}
\delta &= 13,649537\,, \\
\varepsilon &= 29,682632\,, \\
\zeta &= 67,238132\,, \\
\eta &= 156,661880\,, \\
\theta &= 372,619748\,, \\
\iota &= 900,342659\,, \\
\varkappa &= 2202,646579\,, \\
\lambda &= 5443,103792\,, \\
\mu &= 13562,899285\,, \\
\nu &= 34031,769385\,.
\end{aligned}$$

35. On aura d'abord, par la formule (I), pour l'aire comprise entre 1 et 7,

$$\frac{41(\alpha+\eta)+216(\beta+\zeta)+27(\gamma+\varepsilon)+272\delta}{140};$$

et pour l'aire comprise entre 7 et 13,

$$\frac{41(\eta+\nu)+216(\theta+\mu)+27(\iota+\lambda)+272\varkappa}{140}.$$

On trouvera ensuite, par la formule (II), pour l'aire totale, comprise entre 1 et 13,

$$\tfrac{7}{25}(\alpha+\nu)+\tfrac{288}{175}(\beta+\zeta+\theta+\mu)-\tfrac{27}{175}(\gamma+\lambda)+\tfrac{64}{25}(\delta+\varkappa)-\tfrac{2}{25}(\varepsilon+\iota)+\tfrac{134}{175}\eta\,.$$

36. On aura ainsi,

Pour l'aire entre 1 et 7 . . . . . 189,649401,

Pour l'aire entre 7 et 13, . . . . 37015,696762,

Pour l'aire entre 1 et 13, . . . . 37198,443648.

Cette dernière est un peu moindre que la somme des deux autres; et elle doit naturellement être réputée plus exacte; la différence est 8,902515; c'est environ la 4200[me] partie de l'intégrale entière.

Cette différence est un peu plus sensible que celles de tous les problèmes précédens ; mais il faut considérer aussi à quelle intégrale on avait à faire. Celle de $\frac{e^x dx}{x}$ tient une des premières places parmi ces intégrales éminemment réfractaires, qui se sont constamment jusqu'ici montrées rebelles à tous les moyens d'intégration connus, sans même en exclure l'emploi des séries infinies. *Hinc ergo natura hujus functionis transcendentis parum cognoscitur*, dit EULER (*Calc. intég.*, vol. 1, n.° 228).

37. Egalant entre elles la somme des deux formules qui nous ont donné les aires partielles et celle qui nous a donné l'aire totale, on est conduit à cette nouvelle égalité très-remarquable

$$(\alpha+\nu)-8(\beta+\mu)+27(\gamma+\lambda)-48(\lambda+\varkappa)+43(\varepsilon+\iota)-8(\zeta+\theta)=14\eta:$$

C'est l'équation de condition, pour que le point du milieu, ou bien tout autre de nos *treize* points, se trouve sur la courbe déterminée par les *douze* autres. Elle est rigoureusement satisfaite, dans le cas où nos treize ordonnées sont égales entre elles : elle est rigoureusement remplie encore dans une infinité d'autres courbes dont il serait trop long de faire ici l'énumération. Elle est remplie, quoiqu'avec une différence presque insensible, lorsque la portion de courbe qui est comprise entre les limites de l'intégrale, est sans asymptote, sans imaginaires, sans point d'inflexion ni de rebroussement ; lorsqu'enfin elle ne s'écarte pas trop de quelque courbe rentrante, telle que sont les ellipses de différens degrés. Ces sortes d'équation de condition, nouvelles dans l'analise, sont essentielles dans la théorie de l'interpolation ; elles pourront être le sujet d'un mémoire particulier.

38. *Troisième formule.* En conservant le diviseur général 12, ajoutons aux cinq premiers aliquotes 1, 2, 3, 4, 6, le nombre 12 lui-même. Nous aurons alors $a=1$, $b=4$, $c=9$, $d=16$, $e=36$, $f=144$ ; et ensuite (13)

$$\begin{aligned}21621600A=2985984a'&-1667952b'\\+585728c'&-104247d'\\+2288e'&-f' :\end{aligned}$$

ce qui donnera

$$\begin{aligned}1801800A=41833(\alpha+\nu)&+248832(\beta+\zeta+\theta+\mu)\\-29160(\gamma+\lambda)&+395264(\delta+\kappa)\\-63909(\varepsilon+\iota)&+118416\eta\ .\end{aligned}$$

Le calcul d'après cette formule est beaucoup plus compliqué, mais aussi elle réduit à peu près au quart l'erreur de l'autre.

39. *Quatrième formule.* En prenant pour diviseur général 18, et pour ses parties aliquotes 1, 2, 3, 6, 9, d'où $a=1$, $b=4$, $c=9$; $d=36$, $e=81$, on obtient d'abord (21)

$$277200A=24057a'-10935b'+2310c'-33d'+e'\ ,$$

et ensuite

$$\begin{aligned}30800A=496(\alpha+\tau)&+2673(\beta+\zeta+\theta+\mu+o+\sigma)\\+243(\gamma+\varepsilon+\iota+\lambda+\zeta+\rho)&+3443(\delta+\varpi)\\+991(\eta+\nu)&+3444\kappa\ ,\end{aligned}$$

40. *Cinquième formule.* En prenant pour diviseur général 24; et pour ses aliquotes 1, 2, 3, 4, 6, d'où $a=1$, $b=4$, $c=9$, $d=16$, $e=36$, on obtient d'abord

$$25200A=1728a'-945b'=320c'-54d'+e'\ :$$

Cette formule paraît être, au dénominateur près, qui est double, identique avec notre seconde formule; elle ne l'est pourtant pas; parce que le nombre des ordonnées étant double, les lettres $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, $e'$, en acquièrent des valeurs entièrement différentes. On trouve, en effet, en désignant par ȣ la 25.ᵉ ordonnée

$$\begin{aligned}4200A=49(\alpha+\text{ȣ})&+288(\beta+\zeta+\theta+\mu+\xi+\sigma+\upsilon+\omega)\\-27(\gamma+\lambda+o+\psi)&+448(\delta+\kappa+\varpi+\chi)\\-63(\varepsilon+\iota+\varrho+\phi)&+134(\eta+\tau)+98\nu\ .\end{aligned}$$

L'erreur que cette formule laisse subsister dans le calcul de l'arc $\frac{\varpi}{4}$, laquelle est soustractive, n'est sensible qu'à la onzième décimale.

41. *Sixième formule.* Le diviseur général étant encore 24 ; si l'on emploie les parties aliquotes 1, 2, 3, 4, 6, 8 ; ce qui donne $a=1$, $b=4$, $c=9$, $d=16$, $e=36$, $f=64$ ; on aura d'abord (13)

$$970200A=67584a'-38808b'+14336c'-2772d'+88e'-3f' \;;$$

et ensuite

$$\begin{aligned}80850A=933(\alpha+\text{ȣ})&+5632(\beta+\zeta+\theta+\mu+\xi+\sigma+\upsilon+\omega)\\ &-836(\gamma+\lambda+o+\psi)+9216(\delta+\kappa+\varpi+\chi)\\ &-1760(\varepsilon+\varphi)+2792(\eta+\tau)-1762(\iota+\varrho)+1868\nu\,.\end{aligned}$$

L'usage de cette formule réduit au quart l'erreur que la précédente avait laissé subsister.

42. *Septième formule.* Le diviseur général étant toujours 24, prenons ses aliquotes 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 ; ce qui donnera $a=1$, $b=4$, $c=9$, $d=16$, $e=36$, $f=64$, $g=144$ ; on aura d'abord

$$\begin{aligned}15765750A=26542080a'&-15567552b'+5963776c'\\ &-1216215d'+45760e'-2106f'+7g' \;;\end{aligned}$$

et ensuite

$$\begin{aligned}315310500A=362135(\alpha+\text{ȣ})&+2211840(\beta+\zeta+\theta+\mu+\xi+\sigma+\upsilon+\omega)\\ &-382782(\gamma+\lambda+o+\psi)+3702784(\delta+\kappa+\varpi+\chi)\\ &-788157(\varepsilon+\varphi)+1131072(\eta+\tau)-789561(\iota+\varrho)+725674\nu \;;\end{aligned}$$

Par l'usage de cette formule l'erreur du calcul de $\frac{\varpi}{4}$ ne devient sensible que sur la *douzième* décimale.

43. *Huitième formule.* Prenons pour diviseur général 60, et pour ses aliquotes 1, 2, 3, 4, 5 ; d'où $a=1$, $b=4$, $c=9$, $d=16$, $e=25$ ; cela donnera d'abord

$$126A = 210a' - 120b' + 45c' - 10d' + e' .$$

Comme nous avons ici 61 ordonnées, nous représenterons

Les vingt premières par $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ , . . . . . $\sigma$ , $\tau$ , $\upsilon$ ,
Les vingt suivantes par $\alpha'$ , $\beta'$ , $\gamma'$ , . . . . . $\sigma'$ , $\tau'$ , $\upsilon'$ ,
Les vingt autres par $\alpha''$ , $\beta''$ , $\gamma''$ , . . . . . $\sigma''$ , $\tau''$ , $\upsilon''$ ,
Et enfin la dernière par $\alpha'''$. Il viendra ainsi

$$\begin{aligned}1512A = 7(\alpha + \alpha''') &+ 42(\beta + \theta + \mu + \xi + \sigma + \upsilon + \delta' + \varkappa' + \mu' + \sigma' \\ &+ \beta'' + \delta'' + \theta'' + \varkappa'' + \xi'' + \upsilon'') - 6(\varepsilon + o + \gamma' + \eta' + o' + \tau' + \eta'' + \tau'') \\ &+ 69(\delta + \varkappa + \beta' + \delta' + \xi' + \upsilon' + \mu'' + \sigma'') - 14(\varepsilon + \iota + \varrho + \iota' + \nu' + \varepsilon'' + \nu'' + \varrho'') \\ &+ 43(\zeta + \zeta' + \varpi' + \varpi'') + 21(\eta + \tau + \gamma'' + o'') - 5(\lambda + \lambda'') \\ &+ 13(\iota + \varepsilon' + \varrho' + \tau'') + 70(\varpi + \zeta'') - 13(\alpha' + \alpha'') + 110\lambda' .\end{aligned}$$

Nous n'avons point mis cette formule à l'épreuve ; mais on peut présumer que dans le calcul de $\frac{\varpi}{4}$, l'erreur qu'entraînerait son usage tomberait au-delà de la *vingtième* décimale.

44. Nous ne craignons pas d'avancer qu'à l'aide de ces diverses formules, toute intégrale quelconque, de la forme $\int X\mathrm{d}x$, peut être évaluée numériquement, entre les limites données, moyennant un nombre fini et très-limité de termes, indépendamment du calcul intégral, et de toute notion d'infiniment petit, par les seuls moyens que fournit l'algèbre élémentaire, et avec toute la précision que l'on veut donner à son calcul ; pourvu seulement que la fonction $X$ ne devienne ni infinie ni imaginaire, dans l'étendue de l'intégration. Toute fonction intégrale d'une seule variable, telle que $\int X\mathrm{d}x$, doit donc être comprise désormais dans la classe des quantités entièrement connues.

## *Réflexions sur la méthode qui sert de base au précédent mémoire, et applications diverses de cette méthode ;*

Par M. GERGONNE.

La méthode dont M. Kramp vient de faire usage, dans le précédent mémoire, pour résoudre le *problème des quadratures*, est extrêmement remarquable, et nous paraît tout-à-fait digne de l'attention des géomètres. Elle semble devoir être très-féconde en applications curieuses et utiles ; et nous n'hésitons pas à la regarder comme une des plus belles et des plus ingénieuses inventions d'analise qui aient eu lieu dans ces derniers temps.

L'esprit de cette méthode consiste proprement à chercher, à dessein, des résultats moins approchés que celui dont on est déjà en possession, et à les employer à perfectionner celui-là. C'est exactement *prendre de l'élan* ; c'est *réculer pour mieux sauter*. Les détails dans lesquels nous allons entrer pourront faire entrevoir de combien d'applications variées cette méthode peut être susceptible ; ils montreront en même-temps que l'approximation qu'elle est capable de fournir, dans tous les cas, n'a pour ainsi dire d'autre limite que celles de la patience du calculateur. Mais, avant d'entrer en matière, arrêtons-nous encore un moment sur le problème des quadratures.

I. Quelque rapide que puisse être un procédé approximatif, ce procédé doit être jugé imparfait, s'il ne renferme pas en soi quelque moyen d'apprécier l'erreur à laquelle son usage peut exposer. Or, telle serait la méthode des quadratures, développées dans le précédent mémoire, si on ne lui faisait pas subir une légère modification. Cette modification consiste à substituer successivement aux trapèzes des rectangles inscrits et des rectangles circonscrits. Cela conduira à deux résultats, l'un plus grand et l'autre plus petit que le véritable, et dont la différence donnera conséquemment la limite de l'erreur dont chacun d'eux se trouvera affecté. A la vérité, toutes choses égales d'ailleurs, ces résultats seront moins approchés que ceux qu'on déduirait de l'usage des trapèzes; mais il nous paraît qu'on ne doit pas balancer à sacrifier quelque chose du côté de la précision et de la rapidité, lorsqu'il s'agit de remplir une condition sans laquelle aucun procédé approximatif ne saurait être employé avec quelque sécurité. Nous verrons d'ailleurs bientôt que cet inconvénient disparaît presque totalement, par un emploi convenable de la méthode.

Ceci suppose, au surplus, qu'entre les limites de l'intégrale, les ordonnées de la courbe qu'il s'agit de quarrer sont toujours croissantes ou toujours décroissantes; mais on sait que, dans le cas contraire, on peut toujours décomposer l'intégrale en plusieurs parties telles que, pour chacune d'elles, cette condition se trouve remplie.

Nous appliquerons uniquement ces réflexions au cas où le diviseur général est 6, et ses aliquotes 1, 2, 3, 6. Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\zeta$, $\eta$, les *sept* ordonnées équidistantes que, pour fixer les idées, nous supposerons perpétuellement croissantes; prenons de plus pour unité, comme dans le précédent mémoire, l'intervalle qui sépare les ordonnées extrêmes. En considérant les rectangles inscrits dont les bases sont successivement $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1, nous aurons, pour la somme de leurs aires,

Bases $=\frac{1}{6}$, 6 rectangles..... $\frac{1}{6}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)=\frac{1}{6}a'$,

Bases $=\frac{1}{3}$, 3 rectangles..... $\frac{2}{6}(\alpha+\gamma+\varepsilon)=\frac{1}{6}b'$,

Bases $=\frac{1}{2}$, 2 rectangles..... $\frac{3}{6}(\alpha+\delta)=\frac{1}{6}c'$,

Bases $=1$, 1 rectangle..... $\frac{6}{6}\alpha=\frac{1}{6}d'$.

Si nous passons ensuite aux rectangles circonscrits, nous trouverons les sommes d'aires ainsi qu'il suit

Bases

Bases $=\frac{1}{6}$ , 6 rectangles.... $\frac{1}{6}(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta)=\frac{1}{6}a'$ ,

Bases $=\frac{1}{3}$ , 3 rectangles.... $\frac{1}{6}(\gamma+\varepsilon+\eta)=\frac{1}{6}b'$ ,

Bases $=\frac{1}{2}$ , 2 rectangles.... $\frac{1}{6}(\delta+\eta)=\frac{1}{6}c'$ ,

Base $=1$ , 1 rectangle..... $\frac{1}{6}\eta=\frac{1}{6}d'$ .

Nous aurons toujours d'ailleurs la formule

$$A=\frac{1296a'-567b'+112c'-d'}{5040};$$

en y faisant donc successivement les deux substitutions, il viendra

$$\int X\mathrm{d}x>\frac{82\alpha+216(\beta+\zeta)+27(\gamma+\varepsilon)+272\delta}{840}.$$

$$\int X\mathrm{d}x<\frac{216(\beta+\zeta)+27(\gamma+\varepsilon)+272\delta+82\eta}{840}.$$

La différence

$$\frac{41(\eta-\alpha)}{420},$$

est la limite de l'erreur que pourra entraîner l'emploi de l'une ou de l'autre de ces deux formules, dont la demi-somme est précisément la formule de M. Kramp, ainsi que ce cela doit être.

Si l'on applique ces formules aux deux exemples de l'auteur, c'est-à-dire, à la recherche du logarithme naturel de $2$; et à celle du nombre $\frac{\varpi}{4}$; comme, dans l'un et dans l'autre cas, on a $\alpha=1$ et $\eta=0,5$, on aura $\eta-\alpha=-\frac{1}{2}$; de sorte que la limite de l'erreur est $\frac{41}{840}$; ou environ $\frac{1}{20}$. Nous allons voir au surplus que la résolution du problème des quadratures peut encore être présentée sous une autre forme qui, sans exiger un grand nombre de divisions de l'étendue de l'intégrale, est néanmoins susceptible d'une approximation presque illimitée.

Supposons toujours qu'il soit question d'obtenir $\frac{\varpi}{4}$ ou, ce qui revient au même, l'intégrale de $\frac{dx}{1+x^2}$ entre o et 1 en posant $y=\frac{1}{1+x^2}$, et divisant d'abord l'intervalle en cinq parties égales seulement; nous aurons

$$\text{Pour } x=0\,,\ \tfrac{1}{5}\,,\ \tfrac{2}{5}\,,\ \tfrac{3}{5}\,,\ \tfrac{4}{5}\,,\ 1\,,$$
$$y=1\,,\ \tfrac{25}{26}\,,\ \tfrac{25}{29}\,,\ \tfrac{25}{34}\,,\ \tfrac{25}{41}\,,\ \tfrac{1}{2}\,.$$

Comme ici les ordonnées sont continuellement décroissantes, les rectangles inscrits, auxquels nous nous bornerons, et qui, ayant $\frac{1}{5}$ pour base commune, auront successivement pour hauteur les *cinq dernières* ordonnées, seront

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{Premier} \ldots\ldots & \frac{1}{5}\cdot\frac{25}{26}=\frac{5}{26}=0{,}1923077 & , \\
\text{Deuxième} \ldots\ldots & \frac{1}{5}\cdot\frac{25}{29}=\frac{5}{29}=0{,}1724138 & , \\
\text{Troisième} \ldots\ldots & \frac{1}{5}\cdot\frac{25}{34}=\frac{5}{34}=0{,}1470588 & , \\
\text{Quatrième} \ldots\ldots & \frac{1}{5}\cdot\frac{25}{41}=\frac{5}{41}=0{,}1219512 & , \\
\text{Cinquième} \ldots\ldots & \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{10}=0{,}1000000 & .
\end{array}\right\}\text{somme }=0{,}6337315.$$

En multipliant ce résultat par 4, on obtiendra pour première valeur approchée du nombre $\varpi$

$$\varpi=2{,}9349260=A\,.$$

Pour obtenir une valeur plus approchée, cherchons-en une suite d'autres qui le soient moins. Soit d'abord divisée l'étendue de l'intégrale en quatre parties égales; nos quatre rectangles inscrits seront alors tels qu'il suit :

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Premier} \ldots\ldots & \frac{1}{4}\cdot\frac{16}{17}=\frac{4}{17}=0{,}2352941\,, \\
\text{Deuxième} \ldots\ldots & \frac{1}{4}\cdot\frac{16}{20}=\frac{1}{5}=0{,}2000000\,, \\
\text{Troisième} \ldots\ldots & \frac{1}{4}\cdot\frac{16}{25}=\frac{4}{25}=0{,}1600000\,, \\
\text{Quatrième} \ldots\ldots & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=0{,}1250000\,.
\end{array}\right\}\text{somme }=0{,}7202941\,.$$

Ce résultat, multiplié par 4, donnera pour seconde valeur moins approchée de $\varpi$

$$\varpi = 2,8811764 = B .$$

Divisons le même intervalle en trois parties égales seulement, les rectangles inscrits résultans seront

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Premier.} \dots & \frac{1}{3}.\frac{9}{10} = \frac{3}{10} = 0,3000000 , \\ \text{Deuxième.} \dots & \frac{1}{3}.\frac{9}{13} = \frac{3}{13} = 0,2307692 , \\ \text{Troisième.} \dots & \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6} = 0,1666667 . \end{array}\right\} \text{somme } = 0,6974359 .$$

Ce résultat, multiplié par 4, donnera pour troisième valeur, moins approché que la précédente, du nombre $\varpi$

$$\varpi = 2,7897436 = C .$$

Divisons ensuite cet intervalle en deux parties égales seulement, les deux rectangles inscrits correspondans seront

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Premier.} \dots & \frac{1}{2}.\frac{4}{5} = \frac{2}{5} = 0,4000000 , \\ \text{Deuxième.} \dots & \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,2500000 . \end{array}\right\} \text{somme } = 0,6500000 ;$$

résultat qui, multiplié par 4, donne, pour quatrième valeur encore moins approchée du nombre $\varpi$,

$$\varpi = 2,6000000 = D .$$

Considérant enfin l'intervalle entier, nous aurons pour le rectangle inscrit $1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5000000$ qui, multiplié par 4, donnera, pour la dernière valeur, la moins approchée de $\varpi$,

$$\varpi = 2,0000000 = E .$$

Il est évident qu'aucune des quantités $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ n'est la valeur de $\varpi$, et qu'elles sont toutes plus petites que cette valeur; mais, si on les considère comme répondant respectivement aux indices 5, 4, 3, 2, 1, il est clair que la valeur de $\varpi$ répondra à l'indice $\infty$; puisque, pour cet indice, on sera dans le même cas que si l'on avait considéré une infinité de rectangles inscrits infiniment petits. Donc, à l'inverse, si l'on considère respectivement $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ comme une suite de termes répondant aux indices $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1 ; le terme de cette suite répondant à l'indice $\frac{1}{\infty}$ ou *zéro* sera la valeur exacte de $\varpi$; et, comme il en sera encore evidemment de même en rendant tous les indices 60 fois plus grands ; il s'ensuit que, si l'on construit une courbe telle qu'aux abscisses 12, 15, 20, 30, 60 répondent respectivement les ordonnées $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, la valeur de $\varpi$ sera l'ordonnée de cette courbe repondant à l'abscisse *zéro*.

Or, on a vu, dans le précedent mémoire, qu'en supposant, pour plus de simplicité, que cette courbe est parabolique, et que son équation ne renferme que des puissances paires de l'abscisse, si $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ représentent les quarrés des abscisses qui répondent respectivement aux ordonnées $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, on doit avoir sensiblement

$$\varpi = \frac{bcdeA}{(b-a)(c-a)(d-a)(e-a)} + \frac{cdeaB}{(c-b)(d-b)(e-b)(a-b)} + \frac{deabC}{(d-c)(e-c)(a-c)(b-c)} + \frac{eabcD}{(e-d)(a-d)(b-d)(c-d)} + \frac{abcdE}{(a-e)(b-e)(c-e)(d-e)} ; \qquad \text{(V)}$$

Faisant donc, dans cette formule, $A=144$, $b=225$, $c=400$, $d=900$, $e=3600$, elle deviendra, toutes réductions faites

$$\varpi = \frac{1953125A - 2097152B + 531441C - 24576D + 42E}{7.8.8.9.9.10} ; \qquad \text{(V')}$$

formule dans laquelle il n'est plus question que de substituer les valeurs ci-dessus. On trouve ainsi

$$\left.\begin{array}{r} 1953125A = 5732277,3437500, \\ 531441\,C = 1482584,1285276, \\ 42E = \quad 84,0000000; \end{array}\right\} \quad 7214945,4722776,$$

$$\left.\begin{array}{r} 2097152B = 6042264,8496128, \\ 24576D = \quad 63897,6000000; \end{array}\right\} \quad 6106162,4496128.$$

$$\text{Donc } 7.8.8.9.9\,10\varpi = \quad 1108783,0226648.$$

$$\text{d'où} \quad \varpi = 3,0555088 = A'.$$

Cette valeur est encore peu approchée ; mais on doit en être peu surpris, si l'on considère que d'abord nous avons substitué des rectangles aux trapèzes, et qu'en outre nous n'en avons employé que *cinq* au plus.

On se tromperait toutefois si l'on se figurait que c'est là tout le degré d'approximation auquel il soit possible de parvenir, avec d'aussi faibles moyens. On peut, en effet, traiter ce nouveau résultat $A'$ comme nous avons traité le premier $A$ ; c'est-à-dire, chercher des résultats moins approchés que lui et les employer à le perfectionner.

Supposons donc que nous n'ayons pas été au-delà de *quatre* divisions ; c'est-à-dire, faisons abstraction de la valeur $A$ ; nous pourrons alors considérer $B$, $C$, $D$, $E$, comme repondant respectivement aux indices $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $1$, ou, en multipliant par $12$, comme répondant aux indices $3$, $4$, $6$, $12$ ; nous aurons alors à employer la formule

$$\varpi=\frac{cdeB}{(c-b)(d-b)(e-b)}+\frac{debC}{(d-c)(a-c)(b-c)}+\frac{ebcD}{(e-d)(b-d)(c-d)}+\frac{bcdE}{(b-e)(c-e)(d-e)}\,; \quad \text{(IV)}$$

dans laquelle il faudra faire $b=9$, $c=16$, $d=36$, $e=144$ ; ce qui donnera

$$\varpi=\frac{8192B-6561C+896D-7E}{5.7.8.9}\,. \qquad \text{(IV')}$$

En substituant donc nous aurons

$$\left.\begin{aligned} 8192B&=23602{,}5970688\,, \\ 896D&=\phantom{0}2329{,}6000000\,; \end{aligned}\right\}\ 25932{,}1970688\,,$$

$$\left.\begin{aligned} 6561\,C&=18303{,}5077596\,, \\ 7E&=\phantom{000}14{,}0000000\,; \end{aligned}\right\}\ 18317{,}5077596\,;$$

$$\text{Donc } 5.7.8.9\ \varpi=7614{,}6893092\,;$$

$$\text{d'où } \varpi=\ 3{,}0217025=B'\,.$$

En n'allant pas au-delà de *trois* divisions ; c'est-à-dire, en faisant abstraction des valeurs $A$, $B$, nous pourrons considérer $C$, $D$, $E$ comme répondant respectivement aux indices $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $1$, ou, en multipliant par $6$, comme répondant aux indices $2$, $3$, $6$ ; nous aurons alors à employer la formule

$$\varpi=\frac{deC}{(d-c)(e-c)}+\frac{ecD}{(e-d)(c-d)}+\frac{cdE}{(c-e)(d-e)}\,; \qquad \text{(III)}$$

dans laquelle il faudra faire $a=4$, $b=9$, $c=16$ ; ce qui donnera

$$\varpi=\frac{243C-128D+5E}{4.5.6}\,. \qquad \text{(III')}$$

En substituant donc, nous aurons

$$\begin{array}{rlr}
243C= & 677,9076948\,, & \multirow{2}{*}{$\left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right\}\ 687,9076948$} \\
5E= & \phantom{0}10,0000000\,; & \\
128D= & & 332,8000000 \\
\hline
\text{Donc } 4.5.6\ \varpi= & & 355,1076948 \\
\text{d'où}\quad \varpi= & & 2,9592308=C'\,.
\end{array}$$

En ne faisant ensuite que deux divisions, nous aurons

$$\varpi=\frac{eD}{e-d}+\frac{dE}{d-e}\,,\quad \text{(II)} \quad \text{ou} \quad \varpi=\frac{4D-E}{3}\,; \qquad \text{(II')}$$

ce qui donnera

$$\begin{array}{rl}
4D= & 10,4000000 \\
E= & \phantom{0}2,0000000 \\
\hline
\text{d'où } 3\varpi= & \phantom{0}8,4000000 \\
\text{et}\quad \varpi= & \phantom{0}2,8000000=D'\,.
\end{array}$$

En ne considérant enfin qu'un seul rectangle inscrit, nous aurons de nouveau, comme ci-dessus,

$$\varpi=2,000000=E' \;.$$

Nous pouvons présentement traiter les valeurs de moins en moins approchées $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$, comme nous avions traité les valeurs $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, c'est-à-dire, les substituer dans la formule

$$\varpi=\frac{1953125A'-2097152B'+531441C'-24576D'+42E'}{7.8.8.9.9.10} \;;$$

ce qui donnera

$$\left.\begin{aligned} 1953125A' &= 5967790{,}6250000 \;, \\ 531441C' &= 1572656{,}5755828 \;, \\ 42E' &= \phantom{00}84{,}0000000 \;; \end{aligned}\right\} 7540531{,}2005828 \;,$$

$$\left.\begin{aligned} 2097152B' &= 6336969{,}4412800 \;, \\ 24576D' &= \phantom{0}68812{,}8000000 \;; \end{aligned}\right\} 6405782{,}2412800 \;;$$

$$\text{Donc } 7.8.8.9.9.10\;\varpi=1134748{,}9593028 \;;$$

$$\text{d'où } \varpi= 3{,}1270639=A'' \;.$$

Voilà présentement une valeur un peu plus approchée que les valeurs $A'$ et $A$ ; or, de même que nous avons déduit $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$ de $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, nous pourrons déduire $A''$, $B''$ $C''$ $D''$ $E''$ de $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$ ; et, en continuant toujours ainsi, nous parviendrons à des valeurs de plus en plus approchées ; à la vérité, le procédé peut paraître un peu long ; mais il l'aurait été beaucoup moins, si nous ne nous étions, dès l'abord, bornés à dessein à *cinq* divisions de l'intégrale.

En procédant, comme il vient d'être dit, on aura

$$A''=3{,}1270639 \;,$$

$$B''=3{,}1083625 \;,$$

$$C''=3{,}0891090 \;,$$

$$D''=3{,}0666667\ ,$$

$$E''=2.0000000\ ;$$

d'où on conclura, par la formule (V'), une nouvelle valeur de $\varpi$.

Si, ne connaissant pas, à l'avance, la valeur exacte de $\varpi$, on voulait juger du degré d'approximation obtenu après un certain nombre de pareilles opérations, il ne s'agirait que de faire un semblable calcul sur les rectangles circonscrits. On n'adopterait alors dans la valeur de $\varpi$ que les chiffres décimaux communs aux deux résultats. Nous allons voir, au surplus, qu'en suivant toujours l'esprit de la même méthode on peut se procurer bien plus rapidement une valeur approchée du nombre $\varpi$, et ce sera là notre première application.

II. Supposons, pour un moment, que la géométrie n'offre absolument aucun moyen de calculer, même par approximation, les périmètres des polygones réguliers au-delà de six côtés. Nous allons voir que, tandis que les procédés ordinaires, étendus jusqu'au polygone de 96 côtés, donnent une valeur qui n'est exacte que dans les *deux* premiers chiffres décimaux, notre méthode, au contraire, bornée à l'hexagone, donne un résultat qui n'est fautif que dans la sixième décimale seulement.

Observons auparavant que deux diamètres qui se confondent, dans un cercle dont le rayon est *un*, forment un véritable polygone régulier inscrit de *deux* côtés, dont le périmètre est *quatre*. En conséquence, nous aurons les demi-périmètres des polygones réguliers inscrits au cercle dont le rayon est *un* ainsi qu'il suit :

| | | |
|---|---|---|
| De *deux* côtés. . . . | $2$ | $=2{,}0000000=E$ , |
| De *trois*. . . . . . . . | $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ | $=2{,}5980762=D$ , |
| De *quatre* . . . . . . | $2\sqrt{2}$ | $=2{,}8284272=C$ , |
| De *cinq*. . . . . . . . | $\frac{5}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ | $=2{,}9389265=B$ , |
| De *six* . . . . . . . . | $3$ | $=3{,}0000000=A$ . |

Si

Si l'on considère les demi-périmètres $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ comme répondant respectivement aux indices $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, le nombre $\varpi$ devra répondre à l'indice $\frac{1}{\infty}=0$, et il en sera encore de même, en prenant les indices 60 fois plus grands 10, 12, 15, 20, 30. Faisant donc, dans la formule (V) $a=100$, $b=144$, $c=225$, $d=400$, $e=900$; elle deviendra

$$\varpi=\frac{1469664A-1953125B+720896C-72171D+1056E}{6.6.6.7.10.11};$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\left.\begin{array}{r}1469664A=4408992,0000000\,,\\ 720966C=2039001,8547712\,,\\ 1056E=\quad 2112,0000000\,;\end{array}\right\}\ 6450105,8547712\,,$$

$$\left.\begin{array}{r}1953125B=5740090,8203125\,,\\ 72171D=\ 187505,7554302\,;\end{array}\right\}\ 5927596,5757427\,:$$

$$\text{Donc } 6.6.6.7.10.11\ \varpi=\ 522509,2790285$$

$$\text{d'où }\ \varpi=\ 3,1415902=A'\,;$$

résultat qui ne commence à être fautif qu'à la *sixième* décimale.

Si, ne connaissant point à l'avance la valeur exacte du nombre $\varpi$, on voulait juger du degré d'approximation de ce résultat, il suffirait de faire un semblable calcul relativement aux polygones circonscrits; et l'on n'admettrait ensuite, dans la valeur approchée du nombre $\varpi$, que les chiffres décimaux communs aux deux résultats.

On aurait tort de penser au surplus que l'approximation à laquelle nous venons de parvenir est toute celle que peut donner la considération des *cinq* premiers polygones réguliers; si, en effet, nous nous arrêtons successivement au 4.e, au 3.e, au 2.e et au 1.er; en désignant respectivement par $B'$, $C'$, $D'$, $E'$ les valeurs approchées de $\varpi$ résultant de leur considération; nous pourrons considérer $A'$,

$B'$, $C'$, $D'$, $E'$, comme des termes répondant respectivement aux indices $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1 ; et, en cherchant, comme ci-dessus, le terme qui répond à l'indice $\frac{1}{\infty}$ ou o, ce sera une valeur plus approchée de $\varpi$.

III. Notre deuxième application aura encore pour objet la recherche du nombre $\varpi$, mais nous y procèderons de manière à faire voir comment la méthode dont nous cherchons ici à étendre l'usage s'applique à la sommation des séries convergentes, dont on connaît seulement un petit nombre des premiers termes, sans que même il soit aucunement besoin d'en connaître la loi.

Prenons la série connue de Leibnitz.

$$\varpi=4(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{11}+\ldots\ldots) ;$$

en réduisant chaque terme de rang pair avec le terme de rang impair qui le précède immédiatement, elle deviendra

$$\varpi=8(\tfrac{1}{1.3}+\tfrac{1}{5.7}+\tfrac{1}{9.11}+\tfrac{1}{13.15}+\ldots\ldots)$$

Nous allons essayer de la sommer au moyen de ses *six* premiers termes seulement.

On a

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.er terme | $\frac{1}{1.3}=0{,}3333333$, | 1.er | $=0{,}3333333=F$, |
| 2.e . . . . | $\frac{1}{5.7}=0{,}0285714$, | Som. des deux 1.ers | $=0{,}3619047=E$, |
| 3.e . . . | $\frac{1}{9.11}=0{,}0101010$, | des trois 1.ers | $=0{,}3720057=D$, |
| 4.e . . . | $\frac{1}{13.15}=0{,}0051282$, | des quatre 1.ers | $=0{,}3771339=C$, |
| 5.e . . . | $\frac{1}{17.19}=0{,}0030960$, | des cinq 1.ers | $=0{,}3802299=B$; |
| 6.e . . . | $\frac{1}{21.23}=0{,}0020704$; | des six 1.ers | $=0{,}3823003=A$. |

Si nous considérons ces nombres $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ comme répondant respectivement aux indices $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1, il est évident que $\frac{\pi}{8}$ devra répondre à l'indice $\frac{1}{\infty}=0$ et qu'il en sera encore de même pour les indices 60 fois plus grands 10, 12, 15, 20, 30, 60. Faisant donc, dans la formule du n.° 13 du précédent mémoire, $a=100$, $b=144$, $c=225$, $d=400$, $e=900$, $f=3600$, on aura

$$4.7.9.9.10.10.11\pi=$$

$$181398528A-244140625B+92274688C$$

$$-9743085D+168960E-66F\ ;$$

ce qui donnera en substituant

$$\left.\begin{array}{r}181398528A=69348711{,}6739584\ ,\\ 92274688C=34799912{,}9567232\ ,\\ 168960E=\phantom{0}61147{,}4181120\ ;\end{array}\right\}\ 104209772{,}0487936\ ;$$

$$\left.\begin{array}{r}244140625B=92829565{,}4296875\ ,\\ 9743085D=\phantom{0}3624483{,}1555845\ ,\\ 66F=\phantom{000000}22{,}0000000\ ;\end{array}\right\}\ 96454070{,}5852720\ ;$$

$$\text{Donc } 4.7.9.9.10.10.11\ \pi=\ 7755701{,}4635216\ ;$$

$$\text{d'où}\quad \pi=\ 3{,}1087468=A'.$$

On ne sera pas surpris du peu d'exactitude de cette valeur, si l'on fait attention à l'extrême lenteur de la série, qui tend sans cesse à n'être plus convergente.

Il est d'ailleurs aisé ici, comme dans les précédens exemples, de se procurer une valeur plus approchée, en en cherchant d'autres qui le soient moins; si, en effet, on désigne respectivement par $B'$, $C'$, $D'$, $E'$, $F'$ les valeurs qu'on obtient, en se bornant successivement à cinq, quatre, trois, deux et un termes, on aura

$$A'=3,1087468\ ,$$

$$B'=3,0985080\ ,$$

$$C'=3,0815390\ ;$$

$$D'=3,0493500\ ,$$

$$E'=2,9714280\ ,$$

$$F'=2,6666666\ .$$

En substituant ces valeurs dans la précédente formule à la place de $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ et divisant le résultat par 8, attendu qu'elles n'expriment plus ici $\frac{\varpi}{8}$, mais $\varpi$ lui-même, on obtiendra

$$\varpi=3,1360361=A''\ ,$$

valeur plus approchée que la précédente, et de laquelle il serait facile, par les mêmes moyens, d'en déduire d'autres qui le soient davantage encore. Ainsi, malgré le peu de convergence de la série, il ne faudra qu'un peu de patience pour obtenir, à l'aide de ses six premiers termes seulement, des valeurs de plus en plus approchées de la somme de tous ses termes.

Si, ne connaissant pas à l'avance la valeur rigoureuse du nombre $\varpi$, on voulait juger de la précision des résultats successivement obtenus, on remarquerait que la série de Leibnitz peut aussi être mise sous cette autre forme

$$\frac{\varpi}{8}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{7\cdot9}+\frac{1}{11\cdot13}+\frac{1}{15\cdot17}+\ldots\ldots\right)\ ;$$

faisant donc le calcul du nombre $\varpi$ par cette nouvelle série, comme par la première, on n'admettrait, dans sa valeur définitive, que les chiffres décimaux communs aux deux résultats.

IV. Pour troisième application, nous choisirons le problème important et délicat de l'interpolation des suites; mais ici les formes de l'application de la méthode pouvant être variées d'une multitude de manières differentes; nous insisterons principalement sur quelques procédés, en nous bornant par rapport aux autres à une briève indication.

On sait que le problème qui nous occupe se réduit à former l'équation d'une courbe parabolique passant par un certain nombre de points dont on connaît les coordonnées, ou du moins s'écartant le moins possible de ces points, que l'on peut supposer n'être qu'à peu près sur la courbe qu'on cherche. Supposons donc, en premier lieu, pour suivre exactement l'esprit du procédé de M. Kramp, que l'on ait *sept* ordonnées équidistantes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\zeta$, $\eta$; on pourra chercher successivement l'expression générale de l'ordonnée de la parabole 1.° du *sixième* degré, passant par les extrémités de ces ordonnées; 2.° du *troisième* degré, passant par les extrémités des mêmes ordonnées prises de deux en deux seulement; 3.° du *deuxième* degré, passant par leurs extrémités, de trois en trois; 4.° enfin du *premier* degré, passant uniquement par les extrémités des deux ordonnées extrêmes.

Désignant alors respectivement ces expressions par $A$, $B$, $C$, $D$ et les considérant comme répondant aux indices respectifs $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $1$, ou, ce qui revient au même, aux indices $1$, $2$, $3$, $6$; le terme qui répondra à l'indice zéro équivaudra sensiblement à la valeur générale de l'ordonnée qui répondrait au cas où on aurait fait entrer en considération une infinité d'ordonnées intermédiaires entre les ordonnées extrêmes, et sera conséquemment une expression plus exacte de l'ordonnée générale que celle qu'avait fourni la considération des sept points donnés.

L'application de ce procédé exige que le nombre des points donnés diminué d'une unité, ait le plus grand nombre possible de diviseurs. Voici un autre procédé qui n'est point sujet à cette limitation.

Lorsque les ordonnées données sont équidistantes et en nombre impair, on peut toujours, pour plus de simplicité, prendre leur commune distance pour unité, et supposer en outre que l'ordonnée moyenne répond à l'origine. Supposons donc qu'on ait les cinq ordonnées consécutives $\beta_{\prime\prime}$, $\beta_{\prime}$, $\beta$, $\beta'$, $\beta''$, répondant respectivement aux abscisses $-2$, $-1$, $\mp 0$, $+1$, $+2$ ; et proposons-nous de trouver l'ordonnée $y$ qui doit répondre à l'abscisse quelconque $x$.

1.° Ne considérons d'abord que l'ordonnée $\beta_{\prime\prime}$, et posons

$$E=\beta_{\prime\prime} .$$

2.° Considérons en second lieu les deux ordonnées $\beta_{\prime\prime}$, $\beta_{\prime}$ ; en désignant par $D$ l'ordonnée générale de la droite qui joint leurs extrémités supérieures, nous aurons

$$D=(2\beta_{\prime}-\beta_{\prime\prime})+(\beta_{\prime}-\beta_{\prime\prime})x ;$$

3.° Considérons ensuite les trois ordonnées $\beta_{\prime\prime}$, $\beta_{\prime}$, $\beta$ ; en désignant par $C$ l'ordonnnée générale de la parabole ordinaire qui joint leurs extrémités supérieures, nous aurons

$$C=\beta+\tfrac{1}{2}(3\beta-4\beta_{\prime}+\beta_{\prime\prime})x+\tfrac{1}{2}(\beta-2\beta_{\prime}+\beta_{\prime\prime})x^2 .$$

4.° Appelant de même $B$ l'ordonnée générale de la parabole du troisième degré qui joint les extrémités supérieures des quatre ordonnées $\beta_{\prime\prime}$, $\beta_{\prime}$, $\beta$, $\beta'$, nous aurons

$$B=\beta+\tfrac{1}{6}(2\beta'+3\beta-6\beta_{\prime}+\beta_{\prime\prime})x+\tfrac{1}{2}(\beta'-2\beta+\beta_{\prime})x^2$$
$$+\tfrac{1}{6}(\beta'-3\beta+3\beta_{\prime}-\beta_{\prime\prime})x^3 .$$

5.° Appelant enfin $A$ l'ordonnée générale de la parabole du quatrième degré qui résulte de l'emploi total de cinq données $\beta_{\prime\prime}$, $\beta_{\prime}$, $\beta$, $\beta'$, $\beta''$, on aura

$$A=\beta-\tfrac{1}{12}(\beta''-8\beta'+8\beta_{\prime}-\beta_{\prime\prime})x-\tfrac{1}{24}(\beta''-8\beta'+14\beta-8\beta_{\prime}+\beta_{\prime\prime})x^2$$
$$+\tfrac{1}{2}(\beta''-2\beta'+2\beta_{\prime}-\beta_{\prime\prime})x^3+\tfrac{1}{24}(\beta''-2\beta'+2\beta-2\beta_{\prime}+\beta_{\prime\prime})x^4 .$$

Si présentement on considère les valeurs successives $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ comme répondant suceessivement aux indices $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1, ou, ce qui revient au même, aux indices 60 fois plus grands 12, 15, 20, 30, 60, le terme répondant à l'indice o sera sensiblement ce qu'on obtiendrait pour $y$, en ayant égard à une infinité d'autres ordonnées qui seraient censées suivre $\beta''$ suivant la loi qui régit les premières ; on trouve dans ce cas, comme nous l'avons déjà vu,

$$y=\frac{1953125A-2097152B+531441C-24576D+42E}{7.8.8.9.9.10};$$

et il ne restera plus que les substitutions à exécuter.

On pourra ensuite procéder d'une manière inverse ; c'est-à-dire, prendre successivement une, deux, trois, quatre et cinq ordonnées en allant de $\beta''$ vers $\beta_{//}$; on obtiendra ainsi une nouvelle expression de $y$, qui ne diffèrera au surplus de la précédente qu'en ce que $\alpha''$ et $\beta'$ y seront respectivement changés en $\beta_{//}$ et $\beta_{/}$, et réciproquement. Cette nouvelle sera relative à l'hypothèse où l'on aurait eu égard à une infinité d'ordonnées précédant $\beta_{//}$. La demi-somme de ces expressions donnera l'expression la plus convenable à employer. Leur différence qui sera nécessairement très-petite fera connaître sensiblement l'erreur dans laquelle l'emploi de chacune d'elles peut entraîner.

Mais de toutes les manières d'appliquer la nouvelle méthode à l'interpolation des suites la plus exacte paraît devoir être la suivante. Soient $n+1$ le nombre des valeurs données et correspondantes de $x$ et de $y$. Soient $A$, $B$, $C$, $D$,..... les fonctions des degrés $n$, $n-1$, $n-2$, $n-3$.... représentant le plus exactement possible les valeurs données ; ces fonctions étant obtenues par la méthode des moindres quarrés, ainsi qu'il a été expliqué dans ce volume (pag. 242 et suiv.). On considérera $A$, $B$, $C$, $D$,.... comme répondant respectivement aux indices $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n-1}$, $\frac{1}{n-2}$, $\frac{1}{n-3}$.....; et cherchant, comme ci-dessus, le terme qui doit répondre à l'indice *zéro*, on prendra ce terme pour la valeur de $y$.

Nous n'entrerons point actuellement dans plus de détails à ce sujet; sur lequel nous pourrons peut-être revenir une autre fois. Il nous suffit pour le présent d'avoir montré que l'analise possède, dans la méthode développée par M. Kramp, un nouvel instrument, susceptible sans doute de perfectionnement; mais qui, tel qu'il est, peut déjà, dans un grand nombre de circonstances, devenir d'un usage très-précieux.

# QUESTIONS PROPOSÉES.

## *Problème physico-mathématique.*

Soit un globe, d'un rayon connu, également lumineux dans toute sa surface. Soit de plus, dans le voisinage de ce globe, un très-petit corps que, pour plus de simplicité, nous supposerons réduit à un point. Si l'on imagine un cone circonscrit au globe, dont le sommet soit le point dont il s'agit; sa ligne de contact, qui sera un cercle, partagera la surface du globe en deux calottes sphériques inégales, dont la plus petite seule éclairera le petit corps; et cette calotte, d'autant plus petite que ce corps sera plus voisin du globe, ne pourra devenir une hémisphère qu'autant que le même corps sera infiniment éloigné.

Il est aisé de concevoir, d'après cela que, soit que le corps dont il s'agit soit très-voisin du globe, soit qu'au contraire il en soit très-éloigné, ce globe, dans l'un et dans l'autre cas, ne pourra l'éclairer que faiblement.

Il y a donc une certaine distance à laquelle le petit corps recevra du globe la plus grande lumière possible; et ce que nous proposons ici, c'est d'assigner cette distance?

# GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

*Théorèmes nouveaux sur les lignes et surfaces du second ordre;*

Par M. Frégier, ancien élève de l'école polytechnique.

J'ai démontré, à la page 229 de ce volume, quatre théorèmes assez remarquables, relatifs aux lignes et surfaces du second ordre. Mais j'ai remarqué postérieurement que le premier et le troisième n'étaient que des cas très-particuliers de deux autres théorèmes beaucoup plus généraux. Ce sont ces derniers que je me propose ici de démontrer.

On a vu (pag. 130) qu'en prenant respectivement pour axes des $x$ et des $y$ la tangente et la normale en un point quelconque d'une ligne du second ordre, désignant par $N$ la longueur de la partie de cette normale interceptée par la courbe, par $P$ le rayon de courbure; et supposant que l'équation de la tangente à l'extrémité de la normale opposée à l'origine fût

$$y=Ax+N\ ;$$

nous avons vu, dis-je, que l'équation de la courbe était alors

$$Nx^2+2Py(y-Ax-N)=0\ . \qquad (1)$$

Nous avons vu, en outre, qu'en menant par l'origine deux droites D, D', ayant respectivement pour équations, savoir :

$$\mathrm{D}\,,\quad ay=bx\;;\quad \mathrm{D}'\,,\quad a'y=b'x\,, \tag{2}$$

ce qui permet de supposer

$$a^2+b^2=1\;,\quad a'^2+b'^2=1\;, \tag{3}$$

l'équation de la corde C qui joint les points de rencontre de ces droites avec la courbe est

$$\{N(ab'+ba')-2APbb'\}x+(2Pbb'-Naa')y=2NPbb'\;; \tag{4}$$

d'où nous avons conclu que cette corde rencontre l'axe des $y$, c'est-à-dire, la normale, en un point pour lequel on doit avoir

$$y=\frac{2NPbb'}{2Pbb'-Naa'}\;. \tag{5}$$

Cela posé, concevons une seconde ligne du second ordre dont les axes des coordonnées soient les diamètres principaux ; et concevons de plus que D, D$'$ soient deux diamètres conjugués quelconques de cette seconde courbe ; nous exprimerons cette circonstance par l'équation

$$\alpha aa'+\beta bb'=0\;; \tag{6}$$

dans laquelle $\alpha$ et $\beta$ sont deux constantes, ne dépendant que des dimensions de la seconde courbe.

Or, si l'on élimine $bb'$ de la formule (5), au moyen de la relation (6), $aa'$ disparaîtra de lui-même, et il viendra

$$y=\frac{2\alpha NP}{\beta N-2\alpha P}\;; \tag{7}$$

quantité constante. De là résulte ce théorème :

*THÉORÈME I. Si l'on conçoit, sur un même plan, deux lignes quelconques du second ordre, telles que le centre de la seconde soit un point quelconque du périmètre de la première, et que ses diamètres principaux soient dirigés suivant la tangente et la normale à cette première courbe au point dont il s'agit ; de quelque manière que l'on mène deux diamètres conjugués à la seconde courbe,* *la corde de la première qui joindra leurs points de rencontre avec elle coupera constamment la normale au même point ; d'où il suit encore, par la propriété connue des pôles, que les tangentes aux extrémités de cette corde concourront toujours sur une même droite.*

La forme du résultat (7) prouve, en outre, que, pourvu que la seconde courbe demeure constamment semblable à elle-même, elle pourra varier de grandeur, sans que la corde C cesse pour cela de couper la normale au même point.

Ce théorème est sur-tout remarquable, lorsque la seconde courbe est un cercle ; tous les diamètres conjugués sont alors rectangulaires, et il en résulte notre théorème de la page 231, duquel nous avons déduit le moyen de construire, avec un équerre pour tout instrument, la tangente et la normale en un point quelconque d'une ligne du second ordre.

Nous avons vu (page 234) qu'en prenant respectivement pour axes des $x$, des $y$ et des $z$ les deux tangentes principales et la normale en un point quelconque d'une surface du second ordre, désignant par $N$ la longueur de la partie de cette normale interceptée par la surface, par $P$ et $Q$ les deux rayons de courbure principaux, et supposant que l'équation du plan tangent à l'extrémité de la normale opposée à l'origine fût

$$z=Ax+By+N\ ;$$

nous avons vu, dis-je, que l'équation de la surface était alors

$$N(Qx^2+Py^2)+2PQz(z-Ax-By-N)=0\ . \qquad (1)$$

Nous avons vu, en outre, qu'en menant par l'origine trois droites D, D', D'', ayant respectivement pour équations, savoir :

$$\mathrm{D}\left\{\begin{array}{l} cx=az\ , \\ cy=bz\ ; \end{array}\right. \quad \mathrm{D}'\left\{\begin{array}{l} c'x=a'z\ , \\ c'y=b'z\ ; \end{array}\right. \quad \mathrm{D}''\left\{\begin{array}{l} c''x=a''z\ , \\ c''y=b''z\ ; \end{array}\right. \qquad (2)$$

ce qui permet de supposer

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2+c^2=1\,, \\ a'^2+b'^2+c'^2=1\,, \\ a''^2+b''^2+c''^2=1\,; \end{array}\right\} (3$$

l'équation du plan C qui joint les points de rencontre de ces droîtes avec la surface est

$$\left\{\begin{array}{l} cc'(bc'-cb')(NQa''^2+NPb''^2-2APQa''c'') \\ +c'c''(b'c''-c'b'')(NQa^2+NPb^2-2APQac) \\ +c''c(b''c-c''b)(NQa'^2+NPb'^2-2APQa'c') \end{array}\right\} x$$

$$+\left\{\begin{array}{l} cc'(ca'-ac')(NQa''^2+NPb''^2-2BPQb''c'') \\ +c'c''(c'a''-a'c'')(NQa^2+NPb^2-2BPQbc) \\ +c''c(c''a-a''c)(NQa'^2+NPb'^2-2BPQb'c') \end{array}\right\} y$$

$$+\left\{\begin{array}{l} cc'(ab'-ba')(NQa''^2+NPb''^2+2PQc''^2) \\ +c'c''(a'b''-b'a'')(NQa''^2+NPb^2+2PQc^2) \\ +c''c(a''b-b''a)(NQa''^2+NPQb'^2+2PQc'^2) \end{array}\right\} z$$

$$=2NPQcc'c''(ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'')\,; \quad (4)$$

d'où nous avons conclu que ce plan rencontre l'axe des $z$, c'est-à-dire, la normale, en un point dont on obtient la distance à l'origine, en posant, dans cette équation $x=0$ et $y=0$.

En posant, pour abréger,

$$\left.\begin{array}{l} a^2c'c''(a'b''-b'a'')+a'^2c''c(a''b-b''a)+a''^2cc'(ab'-ba')=d\,, \\ b^2c'c''(a'b''-b'a'')+b'^2c''c(a''b-b''a)+b''^2cc'(ab'-ba')=e\,, \\ c^2c'c''(a'b''-b'a'')+c'^2c'c''(a''b-b''a)+c''^2cc'(ab'-ba')=f\,; \end{array}\right\} (5)$$

cette distance sera donnée par la formule

$$z=\frac{2fNPQ}{dNQ+eNP+2fPQ}\,. \qquad (6)$$

Cela posé, concevons une seconde surface du second ordre dont les axes des coordonnées soient les diamètres principaux ; et concevons de plus que D , D', D'' soient trois diamètres conjugués quelconques de cette seconde surface ; nous exprimerons cette circonstance par les trois équations de condition

$$\left.\begin{array}{l}\alpha a'a''+\beta b'b''+\gamma c'c''=0\ ,\\ \alpha a''a+\beta b''b+\gamma c''c=0\ ,\\ \alpha a\,a'+\beta b\,b'+\gamma c\,c'=0\ ,\end{array}\right\}(7)$$

dans lesquelles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont trois constantes ne dépendant que des dimensions de la seconde surface.

Si l'on prend successivement les différences deux à deux des produits respectifs de ces equations d'abord par $b$, $b'$, $b''$, puis par $a$, $a'$, $a''$, il viendra

$$\left.\begin{array}{l}\alpha a''(a\,b'-b\,a')=\gamma c''(b\,c'-c\,b')\ ,\\ \alpha a\ (a'b''-b'a'')=\gamma c\ (b'c''-c'b'')\ ,\\ \alpha a'(a''b\ -b''a\ )=\gamma c'\ (b''c\ -c''b\ )\ ;\end{array}\right\}(8)$$

$$\left.\begin{array}{l}\beta b''(a\,b'-b\,a')=\gamma c''(c\,a'-a\,c')\ ,\\ \beta b\ (a'b''-b'a'')=\gamma c\ (c'a''-a'c'')\ ,\\ \beta b'(a''b\ -b''a\ )=\gamma c'(c''a\ -a''c\ )\ .\end{array}\right\}(9)$$

En prenant la somme des produits respectifs des équations (8) par $a''cc'$, $ac'c''$, $a'c''c$, et la somme des produits respectifs des équations (9) par $b''cc'$, $bc'c''$, $b'c''c$, et ayant égard aux équations (5), il vient simplement

$$\alpha d=\gamma f\ ,\quad \beta e=\gamma f\ ; \qquad (10)$$

éliminant enfin $d$ et $e$ de la formule (6) ; au moyen de ces deux dernières équations, $f$ disparaîtra aussi de lui-même, et il viendra

$$z=\frac{2\alpha\beta NPQ}{\beta\gamma NQ+\alpha\gamma NP+2\alpha\beta PQ}\ ; \qquad (11)$$

quantité constante. De là résulte ce théorème :

*THÉORÈME II. Si l'on conçoit, dans l'espace, deux surfaces quelconques du second ordre, telles que le centre de la seconde* *soit un point quelconque de la première, et que ses diamètres principaux soient dirigés suivant les deux tangentes principales et la normale à cette première surface, au point dont il s'agit; de quelque manière que l'on mène trois diamètres conjugués à la seconde surface, le plan qui contiendra leurs intersections avec la première coupera constamment la normale au même point, d'où il suit encore, par la propriété connue des pôles, que le cône circonscrit à la première surface de manière qu'il la touche suivant son intersection avec le plan dont il s'agit, aura toujours son sommet sur un même plan.*

La forme du résultat (11) montre en outre que, pourvu que la seconde surface demeure constamment semblable à elle-même, elle pourra varier de grandeur sans que le plan C cesse pour cela de couper la normale au même point.

Ce théorème est sur-tout remarquable, lorsque la seconde surface est une sphère; tous les systèmes de diamètres conjugués sont alors rectangulaires, et il en résulte notre théorème de la page 237, parfaitement analogue à celui de la page 231.

# QUESTIONS RÉSOLUES.

## *Démonstration des deux théorèmes énoncés à la page 172 de ce volume, et de quelques autres théorèmes analogues;*

Par M. J. B. Durrande.

Soient $a$, $b$, $c$ les cosinus des angles que forme avec trois axes rectangulaires, l'axe d'un cône droit qui a son sommet à l'origine, et dont l'angle générateur est $r$; ce qui donnera

$$a^2+b^2+c^2=1\ . \qquad (1)$$

les équations de cet axe seront

$$cx=az\ ,\quad cy=bz\ . \qquad (2)$$

Soient

$$Cx=Az\ ,\quad Cy=Bz\ , \qquad (3)$$

les équations d'une génératrice quelconque $A$, $B$, $C$ étant les cosinns des angles que forme cette génératrice avec les mêmes axes ; ce qui donne

$$A^2+B^2+C^2=1\ . \qquad (4)$$

$A$, $B$, $C$, seront indéterminés ; et le cosinus de l'angle de la génératrice avec l'axe sera, en ayant égard aux conditions (1 et 4),

$$aA+bB+cC\ ;$$

mais cet angle doit être constant et égal à $r$ ; donc

$$aA+bB+cC=\mathrm{Cos}.r\ . \qquad (5)$$

D'un autre côté, les équations ( 3 et 4 ) donnent

$$A=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ ,\quad B=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ ,\quad C=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ ;$$

substituant donc dans l'équation (5), quarrant et chassant le dénominateur, il viendra finalement pour l'équation du cône dont il s'agit

$$(ax+by+cz)^2=(x^2+y^2+z^2)\mathrm{Cos.}^2r\ . \qquad (C)$$

Désignons ce cône par $C$. Pour un autre cône $C'$, de même sommet que le premier, l'équation sera

$$(a'x+b'y+c'z)^2=(x^2+y^2+z^2)\mathrm{Cos.}^2r'\ , \qquad (C')$$

avec la condition

$$a'^2+b'^2+c'^2=1\ . \qquad (6)$$

Nos deux cônes $C$, $C'$ se coupent, en général, suivant deux droites passant par l'origine; et toute combinaison de leurs équations doit être l'équation d'une surface passant par ces deux droites : telle est donc, en particulier, l'équation qu'on obtient en multipliant celles-là en croix, et qui devient, par la suppression du facteur commun et l'extraction de la racine quarrée

$$(ax+by+cz)\text{Cos}.r'=\pm(a'x+b'y+c'z)\text{Cos}.r\ .$$

Cette équation appartient, comme on le voit, à deux plans passant l'un et l'autre par l'origine, et dont l'un seulement contient les intersections des deux cônes; on le reconnaîtra facilement, en supposant pour un moment que les deux cônes deviennent égaux et coïncidens; l'équation doit alors se réduire à $0=0$; ce qui ne peut avoir lieu qu'en prenant le signe supérieur. Ainsi, il est certain que l'équation du plan qui contient les deux intersections des deux cônes est

$$(ax+by+cz)\text{Cos}.r'=(a'x+b'y+c'z)\text{Cos}.r\ . \qquad (k'')$$

Cette équation est aussi celle de leur plan tangent commun, lorsqu'il se touche; et on voit, en outre, que dans le cas où, n'ayant que le sommet commun, ils sont tout-à-fait extérieurs ou intérieurs l'un à l'autre, le plan $(k'')$ n'en existe pas moins. Nous nommerons ce plan $(k'')$, à l'avenir, le *Plan radical* des deux cônes $C$ et $C'$.

Concevons un troisième cône $C''$ ayant même sommet que les deux autres et ayant son axe dans l'axe des $z$; ce nouveau cône aura aussi des plans radicaux ($k'$ et $k$) avec $C$ et $C'$; et on déduira les équations de ces plans de celle du plan $(k'')$, en supposant successivement, dans celle-ci, que $C'$ et ensuite $C$ devient $C''$; c'est-à-dire, en y supposant d'abord $a'=0$, $b'=0$, $c'=1$, $r'=r''$, puis ensuite $a=0$, $b=0$, $c=1$, $r=r''$. Cela donnera

$$(a\,x+b\,y+c\,z)\text{Cos}.r''=z\text{Cos}.r\ , \qquad (k')$$

$$(a'x+b'y+c'z)\text{Cos}.r''=z\text{Cos}.r'\ . \qquad (k\,)$$

Toute combinaison de ces deux équations appartiendra à un plan

plan qui contiendra l'intersection des plans ($k$ et $k'$); et puisque, par l'élimination de $r''$ entre elles, on retombe sur l'équation ($k''$), il en résulte le théorème suivant :

*THÉORÈME I. Les plans radicaux de trois cônes droits de même sommet, pris deux à deux, se coupent tous trois suivant une même droite.*

Nous appellerons à l'avenir cette droite l'*axe radical* des trois cônes.

*Corollaire.* Donc si l'on conçoit que l'un des cônes seulement, ayant toujours d'ailleurs son sommet commun avec les deux autres, varie de grandeur et de situation dans l'espace, l'intersection de ses plans radicaux, déterminés par rapport aux deux autres, variable comme lui, ne sortira pas néanmoins d'un même plan, lequel sera le plan radical de ces deux-ci.

Si l'on conçoit une sphère qui ait son centre au sommet commun des trois cônes, leurs intersections avec elles seront de petits cercles; tandis que les intersections des plans radicaux avec elle seront de grands cercles, que l'on pourra appeler *axes radicaux* des deux cercles auxquels chacun d'eux sera relatif. L'axe radical de deux cercles sera en particulier l'arc de grand cercle qui passera par leur leur intersection, lorsque ces deux cercles se couperont; et l'on aura ce théorème :

*THÉORÈME II. Les axes radicaux de trois cercles quelconques d'une même sphère, pris deux à deux, se coupent tous trois en un même point.* (*)

Nous appellerons à l'avenir ce point le *centre radical* de trois cercles.

*Corollaire.* Donc, si l'on conçoit que l'un des cercles seulement varie de grandeur et de situation sur la sphère, le point de concours de ses axes radicaux, déterminés par rapport aux deux autres, variables comme lui, ne sortira pas néanmoins d'un grand cercle, lequel sera l'axe radical de ces deux-ci.

(*) C'est le premier des deux théorèmes de la page 172

De là résulte un moyen facile d'obtenir l'axe radical de deux cercles d'une sphere, lorsque ces cercles ne se coupent pas. Il consiste à décrire d'abord un cercle qui coupe ces deux-là ; en conduisant deux grands cercles par leurs intersections avec lui, ces grands cercles se couperont en un point de l'axe radical cherche ; renouvelant donc l'opération pour un autre cercle différent du premier et coupant encore les deux autres, on obtiendra un second point de cet axe radical, et il ne sera plus question que de faire passer un grand cercle par ces deux points (*). On peut donc aussi facilement obtenir le centre radical de trois cercles d'une sphère.

Tout ce que nous venons de dire, relativement à la sphère, étant

(*) On demandera peut-être comment on peut faire passer un arc de grand cercle par deux points donnés sur une sphère ? il est aisé de voir que cette question se réduit à déterminer l'un de ses pôles ; et il est tout aussi facile de voir que ce pôle est à l'intersection de deux arcs décrits de ces deux points comme pôles, et avec une ouverture de compas égale à l'hypothénuse d'un triangle-rectangle isocèle, dont les deux côtés de l'angle droit sont égaux au rayon de la sphère.

Mais, dira-t-on, ceci suppose que l'on connaît le rayon de la sphère ; et comment pourra-t-on le déterminer ? Voici la méthode, très-simple, que THÉODOSE indique pour cela, dans ses *Sphériques* ; elle porte avec elle sa démonstration :

Décrivez sur la sphère un cercle quelconque, en gardant en réserve l'ouverture de compas qui aura servi à le décrire. Marquez sur la circonférence de ce cercle trois points arbitraires, dont vous prendrez, avec le compas, les distances deux à deux. De ces trois distances faites, sur un plan, les trois côtés d'un triangle rectiligne, auquel ensuite vous circonscrirez un cercle, dont le rayon sera évidemment égal à celui du cercle tracé sur la sphère. Construisez ensuite un triangle-rectangle dont l'hypothénuse soit votre ouverture de compas, mise en réserve, et l'un des côtés de l'angle droit le rayon de votre cercle. Prolongez l'autre côté de l'angle droit, jusqu'à sa rencontre avec la perpendiculaire menée à l'hypothénuse du sommet opposé. Vous formerez ainsi un plus grand triangle-rectangle dont le premier fera partie, et dont l'hypothénuse sera le diamètre de la sphère.

On a lieu d'être surpris qu'un problème aussi majeur et d'une construction si facile ne soit traité dans aucun de nos livres élémentaires.

*J. D. G.*

indépendant de son rayon, doit être vrai aussi pour le plan, qui n'est autre chose qu'une sphère dont le rayon est infini ; on a donc le théorème suivant :

*THÉORÈME III. Les axes radicaux de trois cercles tracés sur un même plan, et pris successivement deux à deux, se coupent tous trois en un même point.*

*Corollaire.* Donc, si l'on conçoit que l'un seulement des trois cercles varie à la fois de grandeur et de situation sur le plan, le point de concours de ses axes radicaux, déterminés par rapport aux deux autres, variable comme lui, ne sortira pas néanmoins d'une ligne droite, laquelle sera l'axe radical de ces deux-ci.

On peut donc, en opérant comme il a été dit pour la sphère, construire facilement l'axe radical de deux cercles qui ne se coupent pas.

Si l'on conçoit que l'on fasse tourner le système de deux cercles et de leur axe radical autour de la droite qui joint leurs centres, les deux cercles engendreront des sphères, et l'axe radical engendrera un plan qu'on pourra appeler le *plan radical* de ces deux sphères. Or, de là et de ce qui précède, résulte le théorème suivant :

*THÉORÈME IV. Les plans radicaux de trois sphères, considérées successivement deux à deux, se coupent tous trois suivant une même droite.*

Cette droite, évidemment perpendiculaire au plan qui contient les trois centres, est ce que nous appellerons à l'avenir l'*axe radical* des trois sphères.

De là il est encore aisé de conclure ce théorème-ci :

*THÉORÈME V. Les six plans radicaux qui naissent de la considération de quatre sphères prises deux à deux, et les quatre axes radicaux qui naissent de la considération des mêmes sphères prises trois à trois, concourent en un même point.*

Ce point est ce que nous appellerons le *centre radical* des quatre sphères.

*Corollaire.* Donc, si l'on conçoit que l'une seulement de ces sphères varie à la fois de grandeur et de situation dans l'espace, le point de concours de ses plans radicaux, déterminés par rapport aux trois autres, variable comme elle, ne sortira pas néanmoins d'une ligne droite, laquelle sera l'axe radical de ces trois-ci.

Retournons présentement à nos trois cônes. Supposons que $C$ et $C''$ soient tangents l'un à l'autre ; leur plan radical $(k')$ deviendra leur plan tangent commun, dont l'intersection avec le plan des axes déterminera la ligne de contact des deux cones. Mais, l'équation de ce dernier plan est

$$ay=bx\ ,$$

et sa combinaison avec l'équation $(k')$ donne

$$(a^2+b^2)x\text{Cos.}r''=az(\text{Cos.}r-c\text{Cos.}r'')\ ,$$
$$(a^2+b^2)y\text{Cos.}r''=bz(\text{Cos.}r-c\text{Cos.}r'')\ ;$$

ainsi, voilà les deux équations de la ligne de contact des deux cônes $C$ et $C''$. Mais, l'angle de leurs axes devant être égal à la somme ou à la différence de leurs angles générateurs, on doit avoir

$$c=\text{Cos.}(r''+r)\ ,\quad \text{d'où}\quad a^2+b^2=1-c^2=\text{Sin.}^2(r''+r)\ ;$$

$r$ devant être pris *positivement* ou *négativement*, suivant que les deux cônes se touchent *extérieurement* ou *intérieurement*. On a d'après cela

$$\text{Cos.}r-c\text{Cos.}r''=\text{Cos.}r-\text{Cos.}r''.\text{Cos.}(r''+r)=\text{Sin.}r''\text{Sin.}(r''+r)\ ;$$

au moyen de quoi nos deux équations deviennent

$$x=\frac{az\text{Tang.}r''}{\text{Sin.}(r''+r)}\ ,\qquad y=\frac{bz\text{Tang.}r''}{\text{Sin.}(r''+r)}\ . \qquad (l')$$

On trouvera semblablement, pour les équations de la ligne de contact de $C''$ et $C'$

$$x=\frac{a'z\text{Tang.}r''}{\text{Sin.}(r''+r')}\ ,\qquad y=\frac{b'z\text{Tang.}r''}{\text{Sin.}(r''+r')}\ . \qquad (l)$$

Si l'on conduit un plan par ces deux droites, son équation sera

$b\text{Sin.}(r''+r')-b'\text{Sin.}(r''+r)\}x-\{a'\text{Sin.}(r''+r)-a\text{Sin.}(r''+r')\}y+(ab'-ba')\text{Tang.}r''=0$ ;

ou, en développant

$$\begin{aligned}&\{(b\text{Sin.}r'-b'\text{Sin.}r)\text{Cos.}r''+(b\text{Cos.}r'-b'\text{Cos.}r)\text{Sin.}r''\}x\\ &-\{(a\text{Sin.}r'-a'\text{Sin.}r)\text{Cos.}r''+(a\text{Cos.}r'-a'\text{Cos.}r)\text{Sin.}r''\}y \qquad (\text{T}'')\\ &+(ab'-ba')z\text{Tang.}r''=0\ .\end{aligned}$$

D'un autre côté, l'équation du plan qui contient les axes de $C$ et $C'$ est

$$(bc'-cb')x+(ca'-ac')y+(ab'-ba')z=0\ ; \qquad (7)$$

laquelle, à cause de

$$c=\text{Cos.}(r''+r)\ ; \qquad c'=\text{Cos.}(r''+r')\ ,$$

devient, en substituant et développant,

$$\begin{aligned}&\{(b\text{Sin.}r'-b'\text{Sin.}r)\text{Sin.}r''-(b\text{Cos.}r'-b'\text{Cos.}r)\text{Cos.}r''\}x\\ &-\{(a\text{Sin.}r'-a'\text{Sin.}r)\text{Sin.}r''-(a\text{Cos.}r'-a'\text{Cos.}r)\text{Cos.}r''\}y\\ &-(ab'-ba')z=0\ .\end{aligned}$$

Ces deux plans se coupent, en général; et, toute équation déduite de la combinaison des leurs doit appartenir à une surface qui contient leur intersection : telle sera donc, en particulier celle qu'on obtiendra en ajoutant à l'équation (T$''$) le produit de cette dernière par Tang.$r''$; cette équation est

$$(b\text{Sin.}r'-b'\text{Sin.}r)x=(a\text{Sin.}r'-a'\text{Sin.}r)y\ ; \qquad (8)$$

c'est donc celle d'un plan qui concourt en une même droite avec les deux autres, et dont conséquemment la ligne d'intersection est déterminée par cette dernière équation et par l'équation (7) ; or, elles ne contiennent, ni l'une ni l'autre, rien de relatif au cône $C''$, et seraient encore les mêmes si $r''$ était infini ; on a donc ce théorème :

*THÉORÈME VI. Si un cône variable de grandeur est constamment tangent à deux autres cônes, de grandeur et de situation invariable, le plan qui contiendra ses lignes de contact avec eux,* *variable comme lui, coupera toujours néanmoins le plan de leurs axes suivant une même droite, laquelle ne sera autre que l'intersection de ce dernier plan avec le plan tangent commun aux deux cônes.*

Nous appellerons à l'avenir cette droite l'*axe de similitude* des deux cônes fixes.

En considérant le sommet commun des trois cônes comme le centre d'une sphère d'un rayon quelconque, on obtient cet autre théorème :

*THÉORÈME VIII. Si un cercle tracé sur une sphère, variable de grandeur, est constamment tangent à deux autres cercles de la même sphère, de grandeur et de situation invariable, l'arc de grand cercle conduit par ses points de contact avec eux, variable comme lui, coupera toujours néanmoins l'arc de grand cercle qui joint leurs pôles en un même point, lequel ne sera autre que l'intersection de cet arc de grand cercle avec l'arc de grand cercle tangent à la fois aux deux cercles.*

Ce point, que nous appellerons à l'avenir le *centre de similitude* des deux cercles, est facile à assigner, lorsqu'on peut conduire un arc de grand cercle qui les touche tous deux. Dans le cas contraire, en décrivant un petit cercle qui les touche l'un et l'autre, et conduisant ensuite un grand cercle par les deux points de contact, ce grand cercle contiendra le centre de similitude ; en répétant donc la même opération pour un autre petit cercle, touchant encore les deux cercles dont il s'agit, on obtiendra un nouveau grand cercle, dont l'intersection avec le premier donnera le point cherché. On doit seulement remarquer qu'ici on aura deux centres de similitude placés aux deux extrémités d'un même diamètre de la sphère.

Tout ceci étant indépendant de la grandeur du rayon de la sphère devra être vrai aussi lorsque ce rayon sera infini, c'est-à-dire, lorsque la sphère deviendra un plan ; on a donc ce théorème :

*THÉORÈME VIII. Si un cercle variable de grandeur sur un plan est constamment tangent à deux autres cercles, de grandeur* *et de situation invariable, tracés sur le même plan*; *la droite conduite par ses points de contact avec eux, variable comme lui, coupera toujours néanmoins la droite qui joint les centres en un même point, lequel ne sera autre que celui où cette droite est coupée par la tangente commune aux deux cercles.*

Ce point, que nous appellerons à l'avenir le *centre de similitude* des deux cercles, peut être déterminé, lors même qu'on ne peut mener à ces deux cercles une tangente commune, en suivant exactement ce que nous venons de dire pour deux cercles d'une sphère.

De ce théorème il est encore facile de déduire le suivant :

*THÉORÈME IX. Si une sphère variable de grandeur est constamment tangente à deux autres sphères, de grandeur et de situation invariable, la droite conduite par les points de contact, variable comme elle, coupera toujours néanmoins la droite qui joint les centres, et la coupera toujours en un même point, lequel ne sera autre que le sommet du cône circonscrit à la fois aux deux sphères fixes.*

Nous appellerons à l'avenir ce point le *centre de similitude* des deux sphères.

Revenons encore à nos cônes. D'après ce qui a été dit ci-dessus, en obtiendra l'axe de similitude des deux cônes $C$, $C'$, en combinant entre elles les deux équations (7 et 8), ce qui donnera

$$x=\frac{a\text{Sin}.r'-a'\text{Sin}.r}{c\text{Sin}.r'-c'\text{Sin}.r}z\,,\quad y=\frac{b\text{Sin}.r'-b'\text{Sin}.r}{c\text{Sin}.r'-c'\text{Sin}.r}z\,. \qquad (e'')$$

Mais il faut remarquer que tout ceci est relatif à l'hypothèse où le cône $C''$ touche les deux autres extérieurement. Ces formules conviennent également au cas où ce même cône les enveloppe tous deux, car elles ne changent pas par le changement simultané des signes de $r$ et $r'$. En conséquence, la droite $(e'')$ est celle suivant laquelle le plan des axes de $C$ et $C'$ est coupé par leurs plans tangens *extérieurs*. Pour obtenir celles suivant lesquelles le même plan est coupé par leurs plans tangens communs *intérieurs*, il suffira de changer, dans ces formules, le signe de l'un quelconque des deux angles $r$, $r'$, ce qui donnera également

$$x=\frac{a\text{Sin}.r'+a'\text{Sin}.r}{c\text{Sin}.r'+c'\text{Sin}.r}z\,,\quad y=\frac{b\text{Sin}.r'+b'\text{Sin}.r}{c\text{Sin}.r'+c'\text{Sin}.r}z\,. \qquad (i'')$$

Pour distinguer ces deux axes de similitude l'un de l'autre, nous appellerons le premier axe de similitude *externe*, et le second axe de similitude *interne*. Nous admettrons des dénominateurs analogues, soit pour deux cercles tracés sur une même sphère ou sur un plan, soit pour deux sphères dans l'espace.

En considérant ensuite successivement le système des deux cercles $C$, $C''$ et celui des deux cercles $C'$, $C''$, on devra trouver également à chaque système un axe de similitude externe et un axe de similitude interne. Désignons respectivement ces axes par $(e')$ et $(i')$ pour le premier système, et par $(e)$ et $(i)$ pour le second.

On conclura les équations de $(e')$ et $(i')$ de celles de $(e'')$ et $(i'')$, en supposant, dans celles-ci, que $C'$ devient $C''$; c'est-à-dire, en supposant $a'=0$, $b'=0$, $c'=1$, $r'=r''$. On conclura semblablement les équations de $(e)$ et $(i)$ de celles de $(e'')$ et $(i'')$, en supposant, dans celles-ci, que $C$ devient $C''$; c'est-à-dire, en supposant $a=0$, $b=0$, $c=1$, $r=r''$. Il viendra ainsi

$$x=\frac{a\text{Sin}.r''}{c\text{Sin}.r''-\text{Sin}\,r}z\,,\quad y=\frac{b\text{Sin}.r''}{c\text{Sin}.r''-\text{Sin}.r}z\,; \qquad (e')$$

$$x=\frac{a\text{Sin}.r''}{c\text{Sin}.r''+\text{Sin}.r}z\,,\quad y=\frac{b\text{Sin}.r''}{c\text{Sin}.r''+\text{Sin}.r}z\,; \qquad (i')$$

$$x=\frac{a'\text{Sin}.r''}{c'\text{Sin}.r''-\text{Sin}.r'}z\,,\quad y=\frac{b'\text{Sin}.r''}{c'\text{Sin}.r''-\text{Sin}.r'}z\,; \qquad (e)$$

$$x=\frac{a'\text{Sin}.r''}{c'\text{Sin}.r''+\text{Sin}.r'}z\,,\quad y=\frac{b'\text{Sin}.r''}{c'\text{Sin}.r''+\text{Sin}.r'}z\,; \qquad (i)$$

Si l'on fait passer un plan par les droites $(e)$, $(e')$ son équation sera

$\{(bc'-cb')$

$$\begin{aligned}&\{(bc'-cb')\text{Sin}.r''-(b\text{Sin}.r'-b'\text{Sin}.r)\}x\\-&\{(ae'-ca')\text{Sin}.r''-(a\text{Sin}.r'-a'\text{Sin}.r)\}y\\+&(ab'-ba')z\text{Sin}.r''=0\ ;\end{aligned}\qquad (E)$$

si l'on veut savoir suivant quelle droite ce plan coupe celui des axes des cônes $C$, $C'$, il faudra combiner son équation avec celle de ce dernier plan, qui est, comme nous l'avons déjà vu

$$(bc'-cb')x+(ca'-ac')y+(ab'-ba')z=0\ ; \qquad (7)$$

mais en retranchant de la première le produit de cette dernière par $\text{Sin}.r''$, elle se réduit simplement à

$$(b\text{Sin}.r'-b'\text{Sin}.r)x=(a\text{Sin}.r'-a'\text{Sin}.r)y\ ;$$

équation qui a évidemment lieu en même temps que les équations $(e'')$, d'où il suit que cette dernière droite est sur le plan $(E)$

Mais, puisque $(i)$, $(i')$, $(i'')$ se déduisent respectivement de $(e)$, $(e')$, $(e'')$, par le seul changement du signe $r$ ou de $r'$, on doit en conclure que les trois équations qu'on déduira de l'équation $(E)$ par les changemens successif et simultané de ces signes, sont les équations de trois plans $(I)$, $(I')$, $(I'')$, dont le premier contient $(e)$, $(i')$, $(i'')$, le second $(i)$, $(e')$, $(i'')$ et le troisième $(i)$, $(i')$, $(e'')$. On a donc le théorème que voici :

*THÉORÈME X. Les axes de similitude externes de trois cônes de même sommet, considérés successivement deux à deux, sont tous trois sur un même plan : chacun d'eux est sur un même plan avec deux des axes de similitude internes ; de sorte que ces six axes sont sur quatre plans.*

On peut appeler les quatre plans qui contiennent les six axes de similitude de trois cônes les *plans de similitude* de ces trois cônes. Un seulement est *externe*, et les trois autres sont *internes*.

En considérant le sommet commun des trois cônes comme le centre d'une sphère, d'un rayon quelconque, on obtiendra cet autre théorème :

*THÉORÈME XI. Les centres de similitude externes de trois cercles d'une sphère, considérés successivement deux à deux, sont tous trois sur un même arc de grand cercle : chacun d'eux est sur un même arc de grand cercle avec deux des centres de similitude internes; de sorte que ces six centres sont sur quatre arcs de grands cercles.* (*)

On peut appeler ces grands cercles les *axes de similitude* des trois cercles dont il s'agit; un seul est *externe*, et les trois autres sont *internes*.

La vérité de ce théorème étant indépendante de la grandeur du rayon de la sphère, il sera vrai encore lorsque ce rayon sera infini; on a donc cet autre théorème :

*THÉORÈME XII. Les centres de similitude externes de trois cercles tracés sur un même plan, et considérés successivement deux à deux, sont tous trois sur une même ligne droite : chacun d'eux est en ligne droite avec deux des centres de similitude internes; de sorte que ces six centres sont sur quatre droites.*

On peut appeler ces droites les *axes de similitude* des trois cercles; un seul est *externe* et les trois autres sont *internes*.

De là il est encore aisé de déduire les trois théorèmes que voici:

*THÉORÈME XIII. Les centres de similitude externes de trois sphères, prises successivement deux à deux, sont tous trois situés sur une même ligne droite, contenue dans le plan de leurs centres : chacun d'eux est en ligne droite avec deux des centres de similitude internes, de sorte que ces six points, tous situés sur le plan des centres, sont sur quatre droites tracées sur ce plan.*

---

(*) C'est le deuxième théorème de la page 172.

On peut appeler ces quatre droites les *axes de similitude* des trois sphères; un seul est *externe*, et les trois autres sont *internes*.

*THÉORÈME XIV. Si une sphère variable de grandeur dans l'espace est constamment tangente à trois sphères de grandeur et de situation invariable ; le plan conduit par ses points de contact avec elles, variable comme elle, coupera toujours néanmoins le plan des centres suivant une même droite, laquelle ne sera autre que l'axe de similitude des trois sphères.*

On doit remarquer que l'axe dont il s'agit est *externe*, lorsque la sphère variable touche extérieurement ou enveloppe à la fois les trois sphères fixes ; et qu'au contraire il est *interne* lorsque la sphère variable touche l'une des sphères fixes extérieurement et enveloppe les deux autres, ou encore lorsque, touchant ces deux-ci extérieurement, elle enveloppe la première.

*THÉORÈME XV. Les six centres de similitude externes de quatre sphères considérées successivement deux à deux, et conséquemment les quatre axes de similitude externes de ces mêmes sphères considérées successivement trois à trois sont situés sur un même plan : chacun de ces axes est dans un même plan avec trois des six centres de similitude internes; de sorte que les douze centres sont sur seize droites qui sont elles-mêmes situées sur cinq plans.*

On peut appeler ces plans les *plans de similitude* des quatre sphères; un seul est *externe* tandis que les quatre autres sont *internes*.

Les théorèmes que nous venons d'énoncer sont connus, pour la plupart; mais il n'était pas inutile de faire voir comment, en établissant entre eux une subordination convenable, on parvient facilement à les démontrer. Ce qu'on trouve à la page 349 du IV.e volume de ce recueil suffira pour en faire sentir l'importance et l'utilité.

## *Solution des deux problèmes proposés à la page 200 de ce volume ;*

### Par M. J. B. Durrande.

I. Deux figures planes, tracées sur deux plans différens, et d'un seul côté de chacun de ces plans seulement, peuvent être égales de deux manières que, dans une multitude de circonstances, on est obligé de bien distinguer. Il peut arriver, en effet, que, pour faire coïncider les deux figures, il faille appliquer les deux plans l'un sur l'autre de manière que ces figures soient toutes deux en dessus ou toutes deux en dessous, ou, ce qui revient au même, de manière que l'*endroit* de l'une soit appliqué contre l'*envers* de l'autre; ou bien il peut se faire que, pour les faire coïncider, il faille au contraire appliquer les deux plans où elles sont tracées l'un contre l'autre de telle sorte que les deux figures soient l'une et l'autre en dedans ou l'une et l'autre en dehors de ces deux plans. Une gravure et la planche d'où on l'a tirée sont dans le dernier de ces deux cas : deux épreuves d'une même gravure sont dans le premier.

Pour distinguer ces deux cas par des dénominations différentes, nous dirons que deux figures égales, tracées sur un même plan, sont *identiques*, lorsqu'il suffira de faire glisser ou tourner l'une d'elles sur ce plan, sans le quitter, pour l'amener à couvrir exactement l'autre. Nous dirons au contraire que deux figures égales, tracées sur un même plan sont *symétriques*, lorsqu'on ne pourra les amener à coïncider qu'en renversant préalablement l'une d'elles, de manière que la face qu'elle montrait d'abord extérieurement soit appliquée contre le plan. Il est aisé de voir, 1.° que deux figures identiques ou symétriques par rapport à une troisième sont identiques entre elles; 2.° mais que si, de deux figures, l'une est identique et l'autre symétrique par rapport à une troisième, elles seront symetriques l'une à l'autre.

Il importe de remarquer qu'il y a des figures égales qui sont à la fois identiques et symétriques l'une à l'autre : ce sont celles qu'une droite partage en deux parties égales symétriquement disposées par rapport à elle ; de telle sorte que cette droite soit perpendiculaire sur le milieu de toute droite qui joindra deux points homologues des deux parties ; c'est, par exemple, le cas du *triangle isocèle*, et c'est encore le cas d'un quadrilatère formé de deux triangles isocèles, opposés base à base. Le dessein géométral de la façade d'un édifice tout-à-fait régulier est également dans ce cas : l'épreuve d'un tel dessein ne diffère aucunement de la planche d'où elle est tirée. Nous dirons à l'avenir qu'une figure est *symétrique par rapport à elle-même*, lorsqu'elle se trouvera dans ce cas.

Il importe encore de remarquer que, si l'on décompose deux polygones égaux en triangles, par des diagonales homologues ; suivant que les polygones seront identiques ou symétriques, les triangles homologues seront eux-mêmes identiques ou symétriques.

D'après cette dernière remarque le premier des deux problèmes proposés peut être réduit à ce qui suit :

*PROBLÈME. Décomposer un triangle donné quelconque en parties symétriques par rapport à elles-mêmes?*

*Solution.* Du centre du cercle inscrit au triangle soient abaissées des perpendiculaires sur ses côtés ; ces perpendiculaires seront égales, et les pieds de deux quelconques seront également distants du sommet de l'angle sur les côtés duquel elles tomberont.

Ces perpendiculaires diviseront donc le triangle en trois quadrilatères dont chacun sera formé de deux triangles isocèles, opposés base à base, et qui conséquemment seront symétriques à eux-mêmes ; le problème sera donc complètement résolu.

Lorsque le triangle dont il s'agit est rectangle, le problème peut être fort simplement résolu, en joignant le sommet de l'angle droit au milieu de l'hypothénuse par une droite qui divise le triangle en deux triangles isocèles, et conséquemment symétriques par rapport à eux-mêmes.

Si le triangle est acutangle; en joignant le centre du cercle circonscrit aux trois sommets par des droites; ces droites le diviseront en trois triangles isocèles, et conséquemment symétriques par rapport à eux-mêmes.

Si enfin le triangle est obtusangle; la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle obtus sur le côté opposé le divisera en deux triangles rectangles dont chacun pourra ensuite être ultérieurement divisé en deux triangles isocèles et conséquemment symétriques par rapport à eux-memes. On aura donc en tout quatre de ces triangles.

Mais la première solution que nous avons donnée a l'avantage de s'appliquer uniformément et sans distinction à tous les cas.

On voit, par ce qui précède, que, deux polygones symétriques, chacun de $m$ côtés, étant donnés, on peut toujours décomposer l'un d'eux en $3(m-2)$ parties au plus qui, différemment disposées entre elles, forment un polygone identique avec l'autre.

II. Étendons présentement cette théorie aux figures tracées sur une sphère; elles présentent exactement les mêmes distinctions, mais avec cette circonstance particulière qu'ici deux figures symétriques ne peuvent, en aucune sorte, être superposées, du moins en général. La raison en est que, lorsqu'on veut tenter la superposition de deux pareilles figures, elles opposent leur convexité ou leur concavité l'une à l'autre, de sorte qu'elles ne peuvent se convenir que dans leurs sommets ou dans un point de leur intérieur.

Mais il est sur la sphère, comme sur un plan, des figures *symétriques à elles-mêmes*; ce sont celles que le plan d'un grand cercle divise en deux parties égales, tellement disposées par rapport à ce plan qu'il se trouve à la fois perpendiculaire sur le milieu de toutes les droites qui joignent leurs points homologues. De ce nombre est, en particulier, le triangle sphèrique isocèle ; et de ce nombre est encore le quadrilatère sphérique formé de deux triangles sphériques isocèles, opposés base à base.

On peut remarquer de plus que, si l'on décompose deux polygones sphériques égaux en triangles sphériques, par des diagonales homologues ; suivant que les polygones seront identiques ou symétriques, les triangles sphériques homologues seront eux-mêmes identiques ou symétriques.

En conséquence, le problème où l'on demanderait de couvrir un polygone sphèrique avec les parties d'un autre polygone sphérique qui lui serait symétriques se réduit au suivant :

*PROBLÈME. Décomposer un triangle sphérique quelconque en parties symétriques par rapport à elles-mêmes ?*

*Solution.* La solution de ce problème est tout-à-fait analogue à celle que nous avons donnée relativement au triangle rectiligne. On voit en effet que, si l'on abaisse du pôle du cercle inscrit des arcs de grands cercles perpendiculaires sur les trois côtés du triangle, ces arcs le partageront en trois quadrilatères sphériques symétriques à eux-mêmes, comme étant tous trois formés de deux triangles sphériques isocèles, opposés base à base.

On pourrait encore chercher à imiter ici les autres solutions que nous avons données relativement au triangle rectiligne ; mais on ignore dans quel cas le pôle du cercle circonscrit au triangle sphérique tombe dans ce triangle, sur l'un de ses côtés ou hors de lui, et il n'est pas démontré que, dans ce dernier cas, le triangle puisse toujours être décomposé en d'autres pour lesquels le pôle du cercle circonscrit ne soit point extérieur.

Il résulte de ceci que deux polygones de $m$ côtés, symétriques l'un à l'autre, étant tracés sur une même sphère, on peut toujours décomposer l'un d'eux en $3(m-2)$ parties au plus qui, disposées convenablement, couvriront exactement l'autre.

III. Il est presque superflu de faire remarquer que tout ce que nous venons de dire (II) s'applique, sans restrictions, aux angles polyèdres égaux, lesquels peuvent aussi être tantôt identiques et tantôt symétriques. Nous aurons seulement à observer ici que les développemens de deux angles polyèdres symétriques sont toujours superposables, soit par un côté soit par l'autre; de sorte que deux tels angles polyèdres ne diffèrent uniquement que par la partie de leur développement qui en a formé la surface intérieure, lorsqu'on a plié ces développemens pour les former.

Ainsi, en résumé, il y a des angles polyèdres symétriques à eux-mêmes; et ce sont ceux qu'un plan passant par leur sommet partage en deux parties égales tellement situées, que ce plan est à la fois perpendiculaire sur le milieu de toutes les droites qui joignent leurs points homologues. Tels sont, en particulier, l'angle trièdre isocèle et l'angle tétraèdre formé de la réunion de deux angles trièdres isocèles, opposés base à base. Enfin, si l'on décompose deux angles polyèdres égaux en un même nombre d'angles trièdres, par des plans diagonaux homologues; suivant que ces angles polyèdres seront identiques ou symétriques, les angles trièdres résultant de leur décomposition seront eux-mêmes identiques ou symétriques.

On voit d'après cela que, si l'on veut remplir un angle polyèdre avec les parties d'un autre angle polyèdre qui lui est symétrique, tout se réduira à savoir décomposer un angle trièdre en parties symétriques à elles-mêmes. Pour résoudre ce dernier problème il suffit de conduire par l'axe du cône inscrit des plans perpendiculaires aux faces; ces plans partageront l'angle trièdre en trois angles tétraèdres symétriques à eux-mêmes, par ce qui précède.

On pourrait aussi recourir ici à la considération du cône circonscrit; mais il faudrait savoir auparavant dans quel cas l'axe d'un tel cône tombe dans l'intérieur de l'angle trièdre sur l'une de ses faces ou extérieurement; et il faudrait en outre qu'il fût démontré que, dans ce dernier cas, l'angle trièdre est toujours décomposable en d'autres tels que, pour aucun d'eux, l'axe du cône circonscrit n'est extérieur.

Il résulte de ceci que, deux angles polyèdres symétriques de $m$ faces chacun étant donnés, on peut toujours décomposer l'un d'eux en $3(m-2)$ parties au plus qui, convenablement disposées entre elles, remplissent exactement l'autre.

IV. Passons enfin à la considération des corps égaux et appelons encore corps *identiques* ceux qui sont superposables, et peuvent conséquemment être conçus comme ayant été coulés dans un moule commun. Appelons au contraire corps *symétriques*, ceux qui, malgré leur parfaite égalité, ne sauraient être superposés, ni conséquemment conçus coulés dans un moule commun. On peut citer nos deux mains comme l'exemple le plus commun des corps de ce dernier genre; quelque parfaite égalité qu'on suppose exister entre elles, jamais une main droite ne saurait être convenablement remplacée par une main gauche; aussi le gant d'une main ne peut-il servir à l'autre qu'en le retournant, le dedans en dehors.

Observons encore qu'ici un corps peut être symétrique à lui-même; c'est ce qui arrive toutes les fois qu'un plan le divise en deux parties égales, tellement disposées l'une par rapport à l'autre, que ce plan est à la fois perpendiculaire sur le milieu de toutes les droites qui joignent leurs points homologues. C'est, par exemple, le cas d'un tétraèdre dont deux faces sont des triangles isocèles ayant leur base commune; et c'est encore le cas d'une pyramide quadrangulaire qui, ayant pour base un quadrilatère symétrique à lui-même, serait décomposable, par un plan diagonal, en deux semblables tétraèdres.

Observons enfin que, si l'on décompose deux polyèdres égaux quelconques en un même nombre de tétraèdres, par des plans diagonaux homologues; suivant que les deux polyèdres seront identiques ou symétriques, les tétraèdres résultant de leur décomposition seront eux-mêmes identiques ou symétriques.

Il résulte évidemment de là que la question qui consiste à décomposer un polyèdre quelconque en parties qui, disposées entre elles d'une autre manière, forment un polyèdre symétrique par rapport au premier, se réduit, en dernière analise, au problème suivant :

*PROBLÈME. Décomposer un tétraèdre donné quelconque en parties symétriques par rapport à elles-mêmes ?*

*Solution.* Soient A, B, C, D les sommets du tétraèdre, et O le centre de la sphère inscrite; de ce centre soient abaissées sur les faces des perpendiculaires dont les pieds soient respectivement A′, B′, C′, D′; par ces perpendiculaires, prises deux à deux, soient fait passés six plans; ces plans diviseront le tetraèdre en quatre *exaèdres octogones* à faces quadrilatères. Bornons-nous à considérer l'un d'eux : celui qui contient le sommet D, et dont conséquemment les trois arêtes de l'angle opposé sont OA′, OB′, OC′. Nommons $a$, $b$, $c$ les trois sommets non encore désignés; en sorte que les arêtes D$a$, D$b$, D$c$ soient respectivement opposées à celles que nous venons de nommer.

Menons la diagonale DO, ainsi que les diagonales des faces DA′, DB′, DC′; par la première et par chacune des autres soient conduits trois plans; ces plans diviseront l'exaèdre en trois pyramides triangulaires ayant leur sommet commun en D, et ayant pour bases les trois faces de l'angle O. Bornons-nous à considérer l'une d'elles : celle dont la base est OA′$c$B′.

A′ et B′ étant les points de contact de la sphère inscrite avec deux des faces du tétraèdre, il s'ensuit d'abord que OA′=OB′; il s'ensuit en outre que DA′=DB′, comme tangentes menées à une sphère d'un même point extérieur; et, comme d'ailleurs les deux triangles D$c$A′, D$c$B′, qui ont le côté D$c$ commun, sont l'un et l'autre rectangles en $c$; il s'ensuit que $c$B′=$c$A′.

Ainsi notre pyramide quadrangulaire se trouve être du genre de celles que nous avons signalées plus haut comme étant symétriques à elles-mêmes; et, comme on prouverait la même chose des deux autres, il s'ensuit que notre exaèdre est composé de trois parties symétriques à elles-mêmes; et, attendu qu'on en peut dire autant des trois autres exaèdres, il en résulte finalement que notre tétraèdre est décomposable en douze pyramides quadrangulaires symétriques à elles-mêmes.

On pourrait, à l'exemple de M. Legendre, recourir aussi à la considération de la sphère circonscrite, laquelle, dans certains cas, offrirait le moyen de décomposer le tétraèdre en douze autres, symétriques à eux-mêmes; mais on ne sait pas dans quel cas le centre d'une telle sphère est intérieur au tétraèdre, à sa surface ou hors de lui, et il n'est point démontré que, dans ce dernier cas, le tétraèdre puisse être décomposé en d'autres pour chacun desquels le centre de la sphère circonscrite ne soit point extérieur; tandis que notre procédé ne souffre absolument aucune sorte d'exception.

Il est aisé de conclure de ceci que tout polyèdre est décomposable en douze fois autant de parties symétriques à elles-mêmes qu'il peut fournir de tétraèdres par sa décomposition.

*Remarque I.* Au moyen de la théorie qui précède, on pourrait, en géométrie, démontrer l'égalité des triangles sphériques, angles trièdres et tétraèdres par la superposition; sauf ensuite à prouver, comme ci-dessus, que, lorsque cette superposition ne peut avoir lieu en masse, on peut du moins l'effectuer par parties.

*Remarque II.* De même que l'on distingue deux sortes d'égalité, on peut aussi distinguer deux sortes de similitude; elles donnent exactement lieu aux mêmes considérations.

# QUESTIONS PROPOSÉES.

## *Problèmes de Géométrie.*

I. DÉTERMINER dans quels cas le pôle du cercle circonscrit à un triangle sphérique *donné* est intérieur au triangle, dans quel cas il se trouve sur l'un de ses côtés, et dans quel cas il lui est extérieur.

Démontrer en outre, s'il est possible, que, dans ce dernier cas, le triangle sphérique est toujours décomposable en d'autres tels que, pour aucun d'eux, le pôle du cercle circonscrit ne lui est extérieur?

II. Determiner dans quels cas le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre *donné* est intérieur au tétraèdre, dans quel cas il se trouve sur sa surface, et dans quel cas il lui est extérieur. Démontrer en outre, s'il est possible, que, dans ce dernier cas, le tétraèdre est toujours décomposable en d'autres tels que, pour aucun d'eux, le centre de la sphère circonscrite ne lui est extérieur?

## *Théorèmes de Géométrie.*

On sait que, lorsque deux golygones semblables sont semblablement situés sur un même plan, c'est-à-dire, lorsqu'ils ont leurs côtés homologues parallèles, les droites qui joignent leurs sommets homologues concourent en un même point, qu'on peut appeler le *centre de similitude* des deux polygones. On peut de plus appeler *axe radical* des mêmes polygones la droite qui joint les intersections de deux qualconques des côtés du premier avec leurs homologues dans le second.

Ces démonstrations admises, on propose de démontrer les deux théorèmes suivans :

Trois polygônes semblables étant semblablement placés sur un même plan; 1.° les trois centres de similitude qui résultent de leur combinaison deux à deux sont situés sur une même ligne droite; 2.° les trois axes radicaux qui résultent de la même combinaison se coupent en un même point.

# ASTRONOMIE.

## *Mémoire sur les éclipses de soleil ;*

Par M. le professeur KRAMP, doyen de la faculté des sciences de Strasbourg.

( *Deuxième partie.* ) (*)

62. L'ÉQUATION différentielle complète, entre d$y$, d$z$, d$t$, nous fait voir que tous les problèmes concernant les éclipses, dans lesquels le moment d'une plus grande phase, ou d'une phase quelconque, de grandeur donnée est au nombre des inconnues, ne sauraient admettre aucune solution directe, attendu qu'ils mènent à des équations très-compliquées, et de plus éminemment transcendantes. La solution directe est restreinte aux cas où le temps est au nombre des quantités données, ce qui permet de supposer d$t$=o. La question de déterminer l'instant de la plus grande phase, pour un endroit dont la position géographique est connue, ne peut être résolu qu'en employant les fausses positions. Nous allons en donner un exemple, en déterminant l'instant de la plus grande phase, pour l'observatoire de Berlin.

Nous avons déterminé la distance des centres pour les trois momens de $9^h.30'$, $9^h.45'$, $10^h.0'$, temps vrai à Paris, égale à 461, 122, 376. On pourra les représenter par un trinôme, tel que $A+Bt+Ct^2$;

(*) Voyez la page 133 de ce volume.

en comptant le temps $t$ depuis $9^h.30'$, et en prenant un quart d'heure ou $15'$ pour unité de temps; de manière que

$$\begin{array}{rccc} \text{pour } t = & 0\,, & 1\,, & 2\,, \\ \text{on ait la distance } = & 461\,, & 122\,, & 376\,; \end{array}$$

ce qui donne $A=461$, $2B=-1271$, $2C=593$. La moindre distance répondra à $t=-\frac{B}{2C}=\frac{1271}{1186}=16'.4''$. Le milieu de l'éclipse arrivera donc à $9^h.46'.4''$, temps de Paris; ce qui équivaut à $10^h.30'.12''$, temps de Berlin. La moindre distance des centres sera $A-\frac{B^2}{4C}$; ce qui, dans le cas actuel, fait $120''$ ou $2'$ de degré.

On aura une approximation encore plus parfaite, en comprenant dans cette interpolation les cinq ordonnées 876, 461, 122, 376, 756, qui répondent aux époques $9^h.15'$, $9^h.30'$, $9^h.45'$, $10^h.0'$, $10^h.15'$. En designant par $t$ le temps exprimé en quart d'heures, et compté depuis $9^h.45'$, tant en avant qu'en arrière, on trouve la distance des centres égale à

$$732-280t+2025t^2+25t^3-246t^4\,;$$

en conséquence, le temps $t$ auquel appartient la moindre distance des centres, sera la racine de l'équation

$$0=-280+4050t+75t^2-984t^3\,;$$

Elle donne $t=\frac{28}{405}$ d'un quart d'heure, ou $\frac{28}{27}$ d'une minute; ou enfin $1'.2''$. Le milieu de l'éclipse arrivera donc à $9^h.46'2''$, temps vrai de *Paris*, équivalant à $10^h.30'.10''$, temps vrai de *Berlin*; ce qui ne diffère que de *deux secondes* de l'approximation déjà employée. Le temps $t$ de nos formules, depuis le n.° 39, sera donc 0,4418; et, si l'on emploie cette fonction numérique pour déterminer les coordonnées, on trouvera les trois rapports $q:r$, $q':r'$, $y:z$, rigoureusement égaux entre eux.

63. *PROBLÈME VIII. On demande la position géographique du lieu où l'éclipse doit paraître centrale dans un instant donné?*

64. *Solution*. L'instant donné fera connaître les deux coordonnées $q'$, $r'$, moyennant les formules $q'=M+mt$, $r'=N+nt$. La condition d'une éclipse centrale donne $q=0$, $r=0$ : on aura donc (8), en supprimant $x$ dans $A-x$, ce que la nature du problème nous permet de faire, $y=\frac{Bq'}{A-B}$, $z=\frac{Br'}{A-B}$, et ensuite $x=\sqrt{c^2-y^2-z^2}$. Nous avons donné les valeurs numériques de $M$, $N$, $m$, $n$, en secondes d'un cercle dont le rayon était la distance $A$ du centre de la terre à celui du soleil, savoir : (40)

$$M=-5207'', \quad m=+8210'',$$
$$N=+3562, \quad n=-804''.$$

Il faudra exprimer de même le rayon $C$ de la terre, lequel par conséquent deviendra égal à 8'',7345 qui constitue (44) la parallaxe horizontale du soleil.

65. Le commencement et la fin de l'éclipse centrale sont marqués par les deux limites extrêmes au-delà desquelles la coordonnée $x$ n'a plus de valeur réelle. On aura donc, pour ces deux instans, $c^2=y^2+z^2$. Ainsi, en faisant, pour abréger, $\frac{A}{B}-1=h$, ce qui rend $h=413,1056$ (44), on aura l'équation $h^2c^2=(M+mt)^2+(N+nt)^2$ ; ou bien

$$(m^2+n^2)t^2+2(Mm+Nn)t+(M^2+N^2)=h^2c^2.$$

Donc, si, pour abréger, on fait

$$R^2=(m^2+n^2)h^2c^2-(Mn-Nm)^2 ;$$

que de plus on désigne par $t$ le commencement de l'éclipse, par $t'$ sa fin, et qu'on en fasse autant pour les coordonnées $y$ et $z$ qui s'y rapportent, on aura

$$t=-\frac{(Mm+Nn)+R}{m^2+n^2}, \quad t'=-\frac{(Mm+Nn)-R}{m^2+n^2};$$

$$hy=+\frac{n(Mn-Nm)-mR}{m^2+n^2}, \quad hy'=+\frac{n(Mn-Nm)+mR}{m^2+n^2};$$

$$hz=-\frac{m(Mn-Nm)+nR}{m^2+n^2}\,,\quad hz'=-\frac{m(Mn-Nm)-nR}{m^2+n^2}\,;$$

Il en résulte que $ny-mz$, aussi bien que $ny'-mz'$, est égal à $\frac{Mn-Nm}{h}$.

66. Les quatre dernières formules font connaître les coordonnées $y$ et $z$, en parties décimales de la parallaxe horizontale; et, pour les réduire en parties décimales du rayon de la terre, il faut encore les diviser par 8,7345. Le temps $t$ est compté depuis huit heures du matin, ayant pour unité l'intervalle de quatre heures.

67. Dans l'éclipse de 1816, on trouve

$$m^2+n^2=+68050516\,,$$
$$ch\sqrt{m^2+n^2}=+29765611\,,$$
$$Mm+Nn=-45613318\,,$$
$$Mn-Nn=-25057592\,,$$
$$R=+16062648\,;$$

ce qui donne

$$t=+0{,}434246\;;\quad t'=+0{,}906326\;;$$
$$y=-0{,}4550212\;;\quad y'=+0{,}6191160\;;$$
$$z=+0{,}8904171\;;\quad z'=+0{,}7852276\;;$$

ce qui fixe le commencement de l'éclipse à $9^h.44'.13''$, et sa fin à $11^h.37'.3''$, temps vrai de Paris; d'où résulte, pour sa durée totale, $1^h.52'.50''$.

68. Des coordonnées $x$, $y$, $z$, dont la première est *zéro*, il faut passer aux coordonnées $X$, $Y$, $Z$, moyennant les formules du n.° 28, lesquelles deviennent ici

$$X=-y\,\mathrm{Sin.}\alpha\,,$$
$$Y=+y\,\mathrm{Cos.}\varepsilon\,\mathrm{Cos.}\alpha-z\,\mathrm{Sin.}\varepsilon\,;$$
$$Z=+y\,\mathrm{Sin.}\varepsilon\,\mathrm{Cos.}\alpha+z\,\mathrm{Cos.}\varepsilon\,.$$

Les longitudes $\alpha$ et $\alpha'$, calculées d'après les formules du n.° 36; savoir

$$\alpha=180^\circ+56^\circ.54'.35''+607''t\ ,$$

donnent, pour les deux époques du commencement et do la fin de l'éclipse,

$$\alpha\ =180^\circ+56^\circ.58'.54''\ ;$$
$$\alpha'=180^\circ+57^\circ.\ 3'.41''\ :$$

On en tire, pour le commencement et pour la fin de l'éclipse;

$$X=-0{,}3816174\ ;\quad X'=+0{,}5196770\ ;$$
$$Y=-0{,}1270458\ ;\quad Y'=-0{,}6215034\ ;$$
$$Z=+0{,}9155471\ ;\quad Z'=+0{,}5862338\ .$$

69. Des coordonnées $X$, $Y$, $Z$ et $X'$, $Y'$, $Z'$; on passe aux latitudes $\lambda$, $\lambda'$, ainsi qu'aux angles horaires $\mu$, $\mu'$, à l'aide des formules $\text{Sin.}\lambda=Z$, $\text{Sin.}\lambda'=Z'$, $\text{Tang.}\mu=\frac{Y}{X}$; $\text{Tang.}\mu'=\frac{Y'}{X'}$; d'où il résulte

$$\lambda=\ 66^\circ.43'.17''\ ;\quad \lambda'=\ 35^\circ.53'.24''\ ;$$
$$\mu=198^\circ.24'.48''\ ;\quad \mu'=129^\circ.54'.\ 4''\ .$$

L'expression de l'angle horaire $\mu$, compté depuis huit heures du matin, en prenant l'intervalle de quatre heures pour unité de temps; est (45) $\mu=174^\circ.36'.36''+216626''t+D$. On aura donc, pour le cas actuel,

$$\mu\ =200^\circ.19'.57''+D\ ;$$
$$\mu'=228^\circ.44'.44''+D'\ ;$$

70. On aura donc, pour les latitudes,

$$\lambda=65^\circ.47'\ ;\quad \lambda'=35^\circ.3'\ ;$$

Pour les angles horaires, il faudra prendre,

$$\mu=180^\circ+18^\circ.24'.48''\ ,\quad \mu'=180^\circ+129^\circ.54'.4''\ ;$$

donc

$D = -1^\circ.55'.9''$ ; $D' = 81^\circ.9'.24''$ :

Le commencement de l'éclipse centrale aura donc lieu, à près de deux degrés, à l'occident de Paris, sous la latitude de 65°.47'; et sa fin à 81° environ, à l'orient de Paris, sous la latitude de 35°.3'.

71. En poursuivant la courbe de l'éclipse centrale, de quart d'heure en quart d'heure, on trouvera

| | | | |
|---|---|---|---|
| Commencem.t | $X = -0{,}3816174$, | $Y = -0{,}1270458$, | $Z = +0{,}9155471$ |
| 9h.45' ...... | $-0{,}4243338$, | $-0{,}0996840$, | $+0{,}8832180$ |
| 10. 0 ...... | $-0{,}4597629$, | $-0{,}4836834$, | $+0{,}7447607$ |
| 10.15 ...... | $-0{,}3983856$, | $-0{,}6310864$, | $+0{,}6655960$ |
| 10.30 ...... | $-0{,}3059972$, | $-0{,}7347272$, | $+0{,}6054293$ |
| 10.45 ...... | $-0{,}1912901$, | $-0{,}8068382$, | $+0{,}5589459$ |
| 11. 0 ...... | $-0{,}0554173$, | $-0{,}8490128$, | $+0{,}5254575$ |
| 11.15 ...... | $+0{,}1068099$, | $-0{,}8549988$, | $+0{,}5076834$ |
| 11.30 ...... | $+0{,}3135564$, | $-0{,}7956789$, | $+0{,}5182441$ |
| fin. ........ | $+0{,}5196770$, | $-0{,}6215034$, | $+0{,}5862338$ |

72. De ces coordonnées on passera aux latitudes $\lambda$, aux angles horaires $\mu$, et de là aux différences de méridiens $D$. On aura, de quart d'heure en quart d'heure, les angles qui suivent,

| | | | |
|---|---|---|---|
| Commencem.t | $\lambda = 66^\circ.17'.0''$, | $\mu = 198^\circ.24'.48''$, | $D = -1^\circ.55'.9''$ |
| 9h.45' ..... | 62. 1.59, | 205.12. 3, | + 4.15.54 |
| 10. 0 ..... | 48. 8.19, | 226.27. 8, | +21.45.20 |
| 10.15 ..... | 41.43.41, | 237.44.13, | +29.16.46 |
| 10.30 ..... | 37.15.37, | 247.23.22, | +35.10.16 |
| 10.45 ..... | 33.58.58, | 256.39.44, | +40.40.59 |
| 11. 0 ..... | 31.41.56, | 266.45.56; | +46.31.32 |
| 11.15 ..... | 30.30.35, | 277. 7.15; | +53.37.12 |
| 11.30 ..... | 31.12.52, | 291.30.29, | +64.14.47 |
| fin. ....... | 35.53.42, | 309.54. 4, | +81. 9.24 |

La courbe tracée d'après ces données sera conforme à celle des *Ephémérides* de *Berlin*. (Année 1816.)

73. *PROBLÈME IX. Déterminer la position géographique du point du globe d'où l'on peut voir, dans un instant donné, quelque plus grande phase d'une grandeur donnée?*

74. *Solution.* Le but du problème est de tracer sur le globe les courbes des plus grandes phases, ainsi que des attouchemens des bords du soleil et de la lune qui indiquent les progrès successifs de l'éclipse. Les quantités données du problème sont les coordonnées $q'$, $r'$ du centre de la lune, vu géocentriquement sur le disque solaire, et qui sont des fonctions connues du temps $t$, et de plus $f$, distance apparente des centres au moment de la plus grande phase. Les inconnues sont les coordonnées $q$, $r$ du centre de la lune, vu sur le disque solaire, d'un point de la surface du globe dont on demande les coordonnées $x$, $y$, $z$.

75. Les cinq équations seront; savoir, les deux premières (8)

$$A(A-B)y=(A-x)Bq'-Aq(B-x)\ ;$$
$$A(A-B)z=(A-x)Br'-Ar(B-x)\ ;$$

la troisième

$$x^2+y^2+z^2=c^2\ ;$$

équation de la sphère; et la quatrième

$$q^2+r^2=f^2\ ;$$

qui exprime la relation entre la distance des centres et les coordonnées. La cinquième résulte de l'égalité des rapports $q:r$, $q':r'$, $y:z$, qui indiquent l'époque du milieu de l'éclipse ou celle de la plus grande phase.

76. Cette égalité nous permet de supposer

$$q=mq'\ ,\quad y=nq'\ ;$$
$$r=mr'\ ,\quad z=nr'\ .$$

Faisant de plus, pour abréger, $p^2=q'^2+r'^2$; ce qui rend $p$ égal à la distance apparente des centres du soleil et de la lune, vus géocentriquement; et ce qui en fait ainsi une quantité entièrement connue, ainsi que le facteur $m=\frac{f}{p}$; il ne reste plus que les deux inconnues $n$ et $x$, pour lesquelles nous avons les deux équations

$$nA(A-B)p=AB(p-f)+(Af-Bp)x\,;$$
$$c^2=x^2+n^2p^2\,.$$

77. Voici les formules qui contiennent la solution finale du problème. Faites

$$P=AB(p-f)\,,$$
$$Q=A(A-B)\,,$$
$$R=Af-Bp\,,$$
$$\Pi^2=c^2(Q^2+R^2)-P^2\,;$$

et alors les coordonnées inconnues du problème; savoir, $x$, $y$, $z$ seront exprimées comme il suit :

$$x=-\frac{PR-Q\Pi}{Q^2+R^2}\,;$$
$$y=+\frac{PQ+R\Pi}{Q^2+R^2}\cdot\frac{q'}{p}\,;$$
$$z=+\frac{PQ+R\Pi}{Q^2+R^2}\cdot\frac{r'}{p}\,.$$

On a d'ailleurs

$$q=\frac{fq'}{p}\,,\qquad r=\frac{fr'}{p}\,;$$

ainsi, le problème est résolu.

78. Le commencement et la fin d'une plus grande phase de grandeur donnée, et telle que la distance apparente des centres soit $f=\sqrt{q^2+r^2}$, est encore indiqué par les deux limites au-delà desquelles l'ordonnée $x$ n'a plus de valeur réelle. On aura, dans ce cas, $PR=Q\Pi$ ; d'où l'on tire

$$p=\sqrt{q'^2+r'^2}=\sqrt{(M+mt)^2+(N+nt)^2}=hc+f\,.$$

On aura de plus

$y=$

$$y = \frac{Pq'}{Qp} = \frac{cq'}{p} = \frac{B(p-f)q}{(A-B)p} = \frac{(p-f)q}{hp};$$

$$z = \frac{Pr'}{Qp} = \frac{cr'}{p} = \frac{B(p-f)r}{(A-B)p} = \frac{(p-f)r}{hp};$$

en conservant la notation $h = \frac{A}{B} - 1$ ; ce qui, dans le cas actuel (44), rend $h = 413,1056$. La solution (17) sera applicable au problème plus général que nous traitons, en remplaçant simplement $h$ par $hc + f$.

79. Le quarré que nous avons désigné par $R^2$ (65) deviendra ainsi $(hc+f)^2(m^2+n^2) - (Mn - Nm)^2$ ; et, à l'aide du radical $R$, on déterminera, par les formules qui suivent, les inconnues $t$, $y$, $z$, de même que $t'$, $y'$, $z'$, dont les unes se rapportent au commencement et les autres à la fin de la plus grande phase. Les temps seront exprimés en parties décimales de l'intervalle de quatre heures; et les coordonnées en parties décimales du rayon du globe terrestre.

$$t = -\frac{(Mm+Nn)+R}{m^2+n^2}, \qquad t' = -\frac{(Mm+Nn)+R}{m^2+n^2},$$

$$\frac{y}{c} = +\frac{n(Mn-Nm)-mR}{(hc+f)(m^2+n^2)}, \qquad \frac{y'}{c} = +\frac{n(Mn-Nm)+mR}{(hc+f)(m^2+n^2)},$$

$$\frac{z}{c} = -\frac{m(Mn-Nm)+nR}{(hc+f)(m^2+n^2)}; \qquad \frac{z'}{c} = -\frac{m(Mn-Nm)-nR}{(hc+f)(m^2+n^2)}.$$

80. La grandeur de l'éclipse, ou la largeur de la partie éclipsée du soleil, est égale à la somme des deux demi-diamètres moins la distance des centres ou, dans le cas actuel, à $1960'' - f$. On l'exprime ordinairement en *douzièmes* du diamètre entier du soleil, dont chacun prend le nom de *doigt* ; si on en exprime le nombre par $n$, on aura $f = 1960'' - \frac{1947''}{12} n$, ou $f = 1960 - 162,25$. Le produit $hc$ étant $3608''$, on aura la table qui suit :

| | | |
|---|---|---|
| o doigts | $f=1960''$ | $hc+f=5568''$ |
| III | 1473 | 5081 |
| VI | 987 | 4595 |
| IX | 500 | 4108 |
| XII | 13 | 3621 |
| —IX | 474 | 3134 |

81. Passant de là au radical $R$, et aux temps $t$ et $t'$, qui indiquent le commencement et la fin de la phase, on aura cette autre table

| | | | |
|---|---|---|---|
| o doigts | $R=38504793$ | $t=0{,}2510409$ | $t'=1{,}3830624$ |
| III | 33610097 | 0,3233365 | 1,3111352 |
| VI | 28441820 | 0,3992842 | 1,2351873 |
| IX | 22814787 | 0,4819732 | 1,1524983 |
| XII | 16259486 | 0,5783032 | 1,0561684 |
| —IX | 6364441 | 0,7237105 | 0,9107610 |

82. Le radical $R$ s'évanouit, et les deux valeurs de $t$ qui se rapportent au commencement et à la fin de la plus grande phase se confondent en une seule, lorsque $hc+f=\frac{Mn-Nm}{\sqrt{m^2+n^2}}$; ce qui fait $hc+f=3038$. On en tire $f=-570$. Otant cette quantité de la somme des deux demi-diamètres apparens qui est 1960, on aura la largeur de la partie éclipsée égale à 1390; et, si l'on compare cette largeur au diamètre apparent du soleil, qui est 1947, on trouvera que la phase est, dans ce moment, de 8 doigts 34'; chaque doigt étant supposé, selon l'usage, divisé en 60'.

83. Les coordonnées $y$ et $z$ de chaque point de la courbe de la plus grande phase, au lever ou au coucher du soleil, se trouvent, à l'aide des formules (79), qui deviennent, pour le cas particulier de l'éclipse de 1816,

$$y=\frac{2453874-R}{(hc+f)8288,735}, \quad y'=\frac{2453874+R}{(hc+f)8288,735},$$

$$z=\frac{255874167+R}{(hc+f)84639,945}, \quad z'=\frac{255874167-R}{(hc+f)84639,945}.$$

On aura ainsi, pour la branche occidentale,

| | | |
|---|---|---|
| o doigts. | $y=-0,7809997$, | $z=0,6245312$, |
| III. | $-0,7396425$, | $0,6729998$, |
| VI. | $-0,6823358$, | $0,7310387$, |
| IX. | $-0,5979688$, | $0,8015192$, |
| XII. | $-0,4599799$, | $0,8879292$, |
| —IX. | $-0,1505402$, | $0,9886037$, |
| Coïncidence. | $-0,0974631$, | $0,9952392$; |

et pour la branche orientale,

| | | |
|---|---|---|
| o doigts. | $y=0,8873201$, | $z=0,4611537$, |
| III. | $0,8561515$, | $0,5167247$, |
| VI. | $0,8111929$, | $0,5847784$, |
| IX. | $0,7421019$, | $0,6072869$, |
| XII. | $0,6234979$, | $0,7818249$, |
| —IX | $0,3394676$, | $0,9406176$, |
| Coïncidence. | $-0,0974631$, | $0,9952392$. |

84. Le moment de coïncidence est celui où, par la position géographique du lieu, le moment du lever et celui du coucher du soleil sont confondus ensemble, ce qui ne peut arriver que dans quelque point de l'une des deux zônes glaciales. Le temps $t$ qui indique ce moment, compté depuis huit heures du matin, temps vrai de Paris, en fraction de l'intervalle de quatre heures est exprimé par $t=t'=-\frac{Mm+Nn}{m^2+n^2}$; ce qui, dans l'exemple actuel fait 0,67028.

ou $2^h.40'.52''$. Ce moment arrivera donc à $10^h.40'.52''$, temps vrai de *Paris*, ou $11^h.28'$, temps vrai de Berlin. Les coordonnées de cet endroit seront

$$y=y'=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}\,; \quad z=z'=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}\,,$$

ce qui fait, dans l'exemple actuel

$$y=y'=-0{,}0974631\,, \quad z=z'=+0{,}9952392\,;$$

85. Des coordonnées $y$, $z$, on passera aux coordonnées $X$, $Y$, $Z$, moyennant les formules

$$X=-y\text{Sin.}\alpha\,,$$
$$Y=+y\text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha-z\text{Sin.}\varepsilon\,;$$
$$Z=+y\text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha+z\text{Cos.}\varepsilon\,.$$

La longitude $\alpha$ est égale à $180°+56°.54'.33''+607''t$; et on trouve les valeurs numériques de $t$ déjà calculées (81). On a ainsi

| | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| o doigts. | $X=-0{,}6546446$, | $Y=+0{,}1420239$, | $Z=+0{,}7424754$; |
| III . . . . . | $-0{,}6200787$, | $+0{,}1024262$, | $+0{,}7778471$; |
| VI . . . . . | $-0{,}5721055$, | $+0{,}0500345$, | $+0{,}8186517$, |
| IX . . . . . | $-0{,}5014467$, | $-0{,}0203208$, | $+0{,}8649496$, |
| XII. . . . . | $-0{,}3858032$, | $-0{,}1237846$, | $+0{,}9142386$, |
| —IX . . . . . | $-0{,}1262989$, | $-0{,}3184869$, | $+0{,}9394753$, |
| Coïncidence. | $-0{,}0817834$, | $-0{,}3476458$, | $+0{,}9340527$, |
| —IX . . . . . | $+0{,}2849049$, | $-0{,}5438384$, | $+0{,}7893480$, |
| XII. . . . . | $+0{,}5234290$, | $-0{,}6220665$, | $+0{,}5822844$; |
| IX . . . . . | $+0{,}6231110$, | $-0{,}6366098$, | $+0{,}4543796$, |
| VI. . . . . | $+0{,}6812303$, | $-0{,}6358336$, | $+0{,}3610662$, |
| III. . . . . | $+0{,}7190900$, | $-0{,}6319792$, | $+0{,}2889810$, |
| o . . . . . . | $+0{,}7453713$, | $-0{,}6252237$, | $+0{,}2313369$. |

86. On a de plus (31) $\text{Sin.}\lambda=z$; $\text{Tang.}\mu=\dfrac{Y}{X}$. Ces deux for-

mules feront connaître, pour chacune de ces plus grandes phases, la latitude $\lambda$, et l'angle horaire $\mu$, où elle peut être observée. De ce dernier angle on parvient à la différence $D$ des méridiens, moyennant la formule (45). On trouve

| | | | |
|---|---|---|---|
| o doigts, | $\lambda = 47°.56'.34''$, | $\mu = 167°.45'.34''$, | $D = -21°.57'.24''$, |
| III . . . . . . | 51 . 3 .50, | 170 .37 .14, | −23 .26 .45, |
| VI . . . . . . | 54 .57 . 0, | 175 . 0 . 7, | −23 .38 .11, |
| IX . . . . . . | 59 .52 .37, | 182 .19 .12, | −21 .17 .32, |
| XII. . . . . . | 66 . 5 .52, | 197 .47 .20, | −11 .37 .11, |
| —IX . . . . . . | 69 .57 .49, | 248 .22 . 7, | +30 .12 .37, |
| Coïncidence . | 69 . 4 .32, | 256 .45 .43, | +32 .58 .33, |
| —IX . . . . . . | 52 . 7 .28, | 297 .38 .57, | +68 .14 . 7, |
| XII. . . . . . | 35 .36 .41, | 310 . 4 .42, | +71 .54 .43, |
| IX . . . . . . | 27 . 1 .30, | 314 .23 .10, | +70 .25 .33, |
| VI . . . . . . | 21 . 9 .56, | 316 .55 .45, | +67 .59 .35; |
| III . . . . . . | 16 .47 .49, | 318 .41 .21, | +64 .10 .59, |
| o . . . . . . . | 13 .22 .33, | 320 . 0 .35, | +62 .10 .32, |

87. La courbe des plus grandes phases qui peuvent avoir lieu au lever et au coucher du soleil, commencera donc, dans sa branche occidentale, située dans l'océan atlantique, à quelques degrés au-dessus des Isles Açores; elle suivra la direction du premier méridien, jusqu'à la latitude de l'Isle d'Islande; elle traversera cette Isle; elle passera au nord du continent de la Scandinavie, traversera la mer blanche à l'est d'Archangel, traversera ensuite tout le continent de l'asie, du nord au sud, et passera à l'ouest de *Diu*. Sa branche orientale sera terminée dans l'océan Indien, près des Isles Lakedives.

88. Le point de la courbe où la branche orientale se réunit à l'occidentale, et qu'on peut considérer comme constituant le sommet de cette courbe, ou comme celui de tous ses points qui approche le plus du pôle boréal, est celui où le soleil, pendant son mou-

vement diurne, ne fait qu'effleurer l'horizon, et où par conséquent les deux momens du lever et du coucher de cet astre coïncident ensemble. Ce point diffère de celui où le radical $R$ s'évanouit, et que nous avons déterminé (84) par les deux coordonnées

$$y=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}, \quad z=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Pour déterminer sa position, pour laquelle la latitude $\lambda$, ainsi que son sinus, ou la coordonnée $Z$ devient un *minimum*, il faut prendre l'expression de cette coordonnée ou

$$Z=y\,\text{Sin.}\varepsilon\,\text{Cos.}\alpha+z\,\text{Cos.}\varepsilon$$

et en égaler à zéro la différentielle, prise en regardant $p=hc+f$ comme la variable du problème. Cette ligne est fonction du temps $t$; la longitude $\alpha$ du soleil en dépend aussi; et la solution rigoureuse du problème exigerait qu'on eût égard à cette variation. Mais, comme alors on aurait à faire à une équation finale entièrement transcendente; comme d'ailleurs cette longitude, dans l'intervalle de deux ou de trois heures, ne varie effectivement que de quelques minutes, quantité que la nature du problème nous permet de négliger, nous assignerons à cette longitude, pour valeur constante et moyenne, celle qu'elle a au moment où le radical $R$ s'évanouit, et qui a lieu à $11^h.25'$, temps vrai de Berlin; on aura ainsi $\alpha=57^\circ.2'.51''$.

89. Faisons, pour abréger, $\frac{\text{Sin.}\varepsilon\,\text{Cos.}\alpha}{\text{Cos}\,\varepsilon}$ ou $\text{Tang.}\varepsilon\,\text{Cos.}\alpha=t$; et considérons ce produit comme la tangente d'un nouvel angle $\varphi$; tellement que $\text{Tang.}\varphi=\text{Tang.}\varepsilon\,\text{Cos.}\alpha$. Alors, égalant à zéro (88) la différentielle de $Z$, on aura l'équation fort simple $0=t\,dy+dz$, qui, après avoir été duement développée, conduit à la formule finale

$$hc+f=p=\frac{Mn-Nm}{m\,\text{Cos.}\varphi-n\,\text{Sin.}\varphi}.$$

Dans l'éclipse de 1816, on trouve $\varphi=-13^\circ.7'.4''$; d'où il résulte $hc+f=p=3065''$. Et, comme $hc=3608''$, on aura $f$, ou la distance des centres dans ce même moment, égale à 543″. Cela donne, pour la largeur de la partie éclipsée, 1417″, et pour la grandeur de l'éclipse 8 doigts 44′.

90. *PROBLÈME X. On demande de tracer, sur la surface du globe, la courbe des plus grandes phases, vues dans un même instant, des différens points de cette surface?*

91. *Solution.* Le moment de ces observations, étant le même pour tous, est supposé donné; les coordonnées $q'$, $r'$, de même que la racine de la somme de leurs quarrés, que nous avons désignée par $p$, et qui est la distance apparente des centres du soleil et de la lune, vue de celui de la terre, et de plus la longitude $\alpha$ du soleil, au moment de toutes ces observations, seront les quantités connues du problème. Les inconnues sont au nombre de cinq : ce sont les coordonnées $q$, $r$, du centre de la lune, vu sur le disque du soleil, des différens endroits de la terre, dont les coordonnées sont $x$, $y$, $z$. Le problème, en effet, ne diffère du précédent que par les moyens approximatifs que sa nature nous permet d'employer.

92. La nature des plus grandes phases nous permet de faire encore

$$q=mq', \quad y=nq',$$
$$r=mr', \quad z=nr'.$$

On aura ainsi $c^2=x^2+n^2p^2$, et $f=mp$, ce qui fait encore de $m$ une quantité entièrement connue. D'ailleurs, en supprimant $x$ dans $B-x$, et à plus forte raison dans $A-x$, l'autre équation deviendra $hnp=p-f$; d'où il résulte

$$n=\frac{p-f}{hp}; \quad y=\frac{(p-f)q'}{hp}; \quad z=\frac{(p-f)r'}{hp};$$

et enfin

$$x^2=c^2-\frac{(p-f)^2}{h^2}=\frac{(hc+f-p)(hc-f+p)}{h^2}.$$

On a d'ailleurs

$$q=\frac{fq'}{p}; \quad r=\frac{fr'}{p};$$

ainsi le problème est approximativement résolu. D'ailleurs, comme les coordonnées $q'$ et $r'$ sont ici des quantités constantes, la proportion $y : z = q' : r'$ nous fait voir que la projection de la courbe demandée, sur le plan mené par le centre de la terre, perpendiculairement au rayon dirigé vers le centre du soleil, est une ligne droite qui passe par le centre de la terre, et qu'ainsi la courbe elle-même est un grand cercle du globe terrestre.

93. Pour montrer l'application de nos formules, essayons de déterminer les points du globe où l'on pourra observer toutes les plus grandes phases qui devront avoir lieu au moment du midi vrai, *temps de Berlin*, équivalant à $11^h.15'.52''$, temps vrai de Paris. Ce temps, compté depuis huit heures du matin, et exprimé en parties décimales de l'intervalle de quatre heures, donnera $t=0,816111$; d'où il résulte

$$q' = M + mt = +1493'',27 \,;$$
$$r' = N + nt = +2905\,,85 \,;$$

et par conséquent $p = \ldots\ldots +3267\,,08$.

La quantité $p-f$ doit être regardée comme variable, parce qu'elle dépend de la grandeur de la phase. Tirant les $f$, ou les distances apparentes des deux centres, des formules (80), on aura la table suivante :

| | |
|---|---|
| o doigts. . . . . $p-f=$ | $1307''$, |
| III. . . . . . . . . . . . . | 1794, |
| VI. . . . . . . . . . . . . | 2281, |
| IX. . . . . . . . . . . . . | 2767, |
| XII . . . . . . . . . . . . | 3254, |
| —IX. . . . . . . . . . . . | 3741. |

On a d'ailleurs $h=413,1056$; donc

$$hp = 1349649\,,$$
$$\frac{q'}{chp} = 0,0001266716\,,$$
$$\frac{r'}{chp} = 0,0002464984\,.$$

Il en résulte la table suivante des coordonnées $x$, $y$, $z$, désignant la position géographique des endroits qu'on demande,

| | | | |
|---|---|---|---|
| o doigts. . . | $x=0{,}932083$, . . | $y=0{,}1655699$, . . | $z=0{,}3221931$, |
| III. . . . . . . . . | 0,867668, . . . . | 0,2272273, . . . . | 0,4421762, |
| VI. . . . . . . . . | 0,774934, . . . . | 0,2888847, . . . . | 0,5621593, |
| IX. . . . . . . . . | 0,641718, . . . . | 0,3505421, . . . . | 0,6821424; |
| XII . . . . . . . . | 0,431904, . . . . | 0,4121995, . . . . | 0,8021255, |
| —IX . . . . . . . | Imaginaire . . . . | 0,4738569, . . . . | 0,9221086. |

94. A l'aide des formules déjà connues; savoir :

$$X = x\text{Cos.}\alpha \quad - y\text{Sin.}\alpha\,,$$

$$Y = x\text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}\alpha + y\text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha - z\text{Sin.}\varepsilon\,,$$

$$Z = x\text{Sin.}\varepsilon\text{Sin.}\alpha + y\text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha + z\text{Cos.}\varepsilon\,,$$

on passera de là aux coordonnées $X$, $Y$, $Z$. On aura, au moment demandé, qui est celui du midi vrai de *Berlin*,

$$\text{Long. du soleil} = \alpha = 180° + 57°.2'.50''\,;$$

d'où on conclura

| | | | |
|---|---|---|---|
| o doigts . . | $X=-0{,}3680712$, | $Y=-0{,}9283573$, | $Z=-0{,}0517300$, |
| III . . . . . . . . | $-0{,}2812956$, | $-0{,}9573141$, | $+0{,}0665001$, |
| VI . . . . . . . . | $-0{,}1791135$, | $-0{,}9644726$, | $+0{,}1941914$, |
| IX . . . . . . . . | $-0{,}0549145$, | $-0{,}9404805$, | $+0{,}3354086$, |
| XII. . . . . . . . | $-0{,}1109516$, | $-0{,}8575093$, | $+0{,}5022183$. |

95. De là il n'y a qu'un pas à faire pour déterminer la latitude $\lambda$, l'angle horaire $\mu$ et la distance $D$ des méridiens, pour les endroits qu'on demande, et par lesquels notre courbe doit passer, $D$ étant comptée depuis le méridien de Paris. On trouve

| | | | |
|---|---|---|---|
| o doigts. | $\lambda = -\ 2^\circ.57'.57''$ , | $\mu = 248^\circ.22'.22''$ , | $D = 24^\circ.39'.15''$ ; |
| III. . . . . . | $+\ 3\ .48\ .46$ , | $253\ .37\ .30$ , | $29\ .54\ .23$ , |
| VI. . . . . . | $+11\ .11\ .51$ , | $259\ .28\ .45$ , | $35\ .45\ .38$ , |
| IX. . . . . . | $+19\ .35\ .50$ , | $266\ .30\ .30$ , | $42\ .47\ .23$ , |
| XII . . . . . | $+30\ .\ 8\ .48$ , | $277\ .22\ .20$ , | $53\ .39\ .13$ . |

96. La courbe se termine vers le nord, au point qui est indiqué par $x=0$, au-delà duquel cette limite n'a plus que des valeurs imaginaires. On a alors $p-f=ch$, ou $f=p-3608''$; et, comme $p=3267''$, il en résulte $f=-341''$. La largeur de la partie éclipsée sera donc $1960''-341''=1619''$; ce qui donne, pour la grandeur de l'éclipse, la fraction $\frac{1619}{1947}$ ou 10 doigts environ. Les coordonnées $y$ et $z$ de l'endroit du globe qui est le dernier de tous ceux où l'on puisse voir quelque plus grande phase d'éclipse, qui sera ici celle de dix doigts, au moment du midi vrai de Berlin, deviendront dans ce cas $y=\frac{cq'}{p}$, $z=\frac{cr'}{p}$; on aura de plus, pour les coordonnées $X$, $Y$, $Z$, les formules suivantes :

$$pX=-cq'\text{Sin.}\alpha\ ,$$

$$pY=+cq'\text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha-cr'\text{Sin.}\varepsilon\ ,$$

$$pZ=+cq'\,\text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha+cr'\text{Cos.}\varepsilon\ ,$$

d'où il résulte

$$\text{Sin.}\lambda=\frac{q'\text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha+r'\text{Cos.}\varepsilon}{p}\ ;\quad \text{Tang.}\mu=\frac{q'\text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha-r'\text{Sin.}\varepsilon}{p\text{Sin.}\alpha}\ .$$

ce qui donne finalement

$$\lambda=\ 45^\circ.47'.58''\ ,$$

$$\mu=315\ .29\ .45\ ,$$

$$D=\ 91\ .44\ .38\ ,$$

à l'orient de Paris.

97. En appliquant au *Problème IX* la méthode approximative qui a été employée ici, et en supprimant $x$ dans $B-x$, et, à plus forte raison, dans $A-x$, l'équation $nA(A-B)p=AB(p-f)+(Af-Bp)x$ deviendra $nhp=p-f$; ce qui donne

$$n=\frac{p-f}{hp}; \quad \text{d'où} \left\{ \begin{array}{ll} y=\frac{p-f}{h}\cdot\frac{q'}{p}, & q=\frac{fq'}{p}, \\ z=\frac{p-f}{h}\cdot\frac{r'}{p}, & r=\frac{fr'}{p}; \end{array} \right.$$

et on a de plus

$$y^2+z^2=\frac{(p-f)^2}{h^2}, \quad x^2=\frac{(ch+p-f)(ch-p+f)}{h^2}.$$

98. *PROBLÈME XI. Connaissant la latitude du lieu et l'heure de la plus grande phase, on demande la longitude du premier et la quantité de l'autre?*

99. *Solution.* DIONIS DU SÉJOUR (*Mém. de l'acad. des sciences de Paris*, 1765, pag. 306), a attaché quelque importance à ce problème qui, sans aucun emploi de nouveaux principes, se résout facilement à l'aide de nos formules. Le temps étant donné, la longitude $\alpha$ du soleil devra être considérée comme donnée aussi. Il faut en dire autant des lignes $q'$, $r'$, coordonnées du centre de la lune, vu géocentriquement sur le disque solaire, ainsi que de la ligne $p$, distance géocentrique des centres du soleil et de la lune, égale à $\sqrt{q'^2+r'^2}$.

100. On a de plus les deux équations

$$f^2=q^2+r^2, \quad c^2=x^2+y^2+z^2;$$

qui ne renferment que des quantités inconnues, à l'exception du seul rayon $c$ de la terre. Il faudra d'ailleurs (8) se rappeler (8) les deux équations

$$A(A-B)y=(A-x)Bq'-(B-x)Aq;$$
$$A(A-B)z=(A-x)Br'-(B-x)Ar.$$

101. La condition de la plus grande phase donne $q:r=q':r'=y:z$. Il en résulte

$$q=\frac{fq'}{p}\ ,\quad y=\frac{q'}{p}\sqrt{c^2-x^2}\ ,$$
$$r=\frac{fr'}{r}\ ,\quad z=\frac{r'}{p}\sqrt{c^2-x^2}\ .$$

substituant ces valeurs dans les deux dernières équations (100), on obtiendra celle-ci :

$$A(A-B)\sqrt{c^2-x^2}=(A-x)Bp-(B-x)Af\ ;$$

elle ne renferme plus que les deux seules inconnues $f$ et $x$.

102. On a de plus les équations déjà connues

$$X=c\text{Cos.}\lambda\text{Cos.}\mu\ ,$$
$$Y=c\text{Cos.}\lambda\text{Sin.}\mu\ ,$$
$$Z=c\text{Sin.}\lambda\ ;$$

de même que celles-ci :

$$X=x\text{Cos.}\alpha\qquad -y\text{Sin.}\alpha\ ;$$
$$Y=x\text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}\alpha+y\text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha-z\,\text{Sin.}\varepsilon\ ,$$
$$Z=x\text{Sin.}\varepsilon\text{Sin.}\alpha+y\text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha+z\text{Cos.}\varepsilon\ .$$

Substituant dans les trois dernières les valeurs de $y$ et $z$ (101), elles deviendront

$$cp\text{Cos.}\lambda\text{Cos.}\mu=px\text{Cos.}\alpha\qquad -q'\,\text{Sin.}\alpha\sqrt{c^2-x^2}\ ,$$
$$cp\text{Cos.}\lambda\text{Cos.}\mu=px\text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}\alpha+(q'\text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha-r'\text{Sin.}\varepsilon)\sqrt{c^2-x^2}\ ,$$
$$cp\,\text{Sin.}\lambda\qquad =px\text{Sin.}\varepsilon\,\text{Sin.}\alpha+(q'\text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha+r'\text{Cos.}\varepsilon)\sqrt{c^2-x^2}\ .$$

103. Comme la latitude du lieu est au nombre des quantités connues, la troisième de ces équations ne renfermera que la seule inconnue $x$. Il faudra donc résoudre cette équation ; mais, pour présenter l'inconnue $x$ sous la forme la plus simple, faisons, pour abréger,

$$A = q'\text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha + r'\text{Cos.}\varepsilon\ ;$$

$$B = p\ \text{Sin.}\varepsilon\text{Sin.}\alpha\ ,$$

$$C = p\ \text{Sin.}\lambda\ ;$$

et enfin, $R^2 = A^2 + B^2 - C^2$. On aura alors

$$(A^2+B^2)x \qquad = (BC - AR)c\ ,$$

$$(A^2+B^2)\sqrt{c^2-x^2} = (AC+BR)c\ .$$

On pourra remarquer que

$$A^2+C^2 = (q'\text{Sin.}\varepsilon + r'\text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha)^2 + r'^2\text{Sin.}^2\alpha\ ;$$

104. De la coordonnée $x$ en passera facilement aux deux autres $y$, $z$ (101). On aura de même la distance des centres $f$, qu'on tirera de l'équation

$$A(A-B)\sqrt{c^2-x^2} = (A-x)Bp - (B-x)Af\ .$$

En supprimant ici $x$, dans $A-x$ et $B-y$, ce que la nature du problème nous permet de faire, on aura, pour valeur suffisamment approchée de $f$, celle qui suit :

$$f = p - h\sqrt{c^2-x^2} = p - \frac{h(AC+BR)}{A^2+B^2}\ ;$$

105. Reste donc à déterminer l'angle horaire $\mu$, duquel dépend ensuite la longitude du lieu. En reprenant les trois équations (102), et en divisant la seconde par la première, on trouvera

$$\text{Tang.}\mu = \frac{p\,r\text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}\alpha + (q'\text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha - r'\text{Sin.}\varepsilon)\sqrt{c^2-x^2}}{px\text{Cos.}\alpha - q'\text{Sin.}\alpha\sqrt{c^2-x^2}}\ ;$$

106. Pour présenter encore les deux termes de cette fraction sous la forme la plus simple, employons les nouvelles notations $a$, $b$, $c$, pour designer les quantités qui suivent

$$a = q'\text{Cos.}\varepsilon - r'\text{Sin.}\varepsilon\,\text{Cos.}\alpha\ ;$$

$$b=q'\,\text{Sin.}\epsilon+r'\text{Cos.}\epsilon\,\text{Cos.}\alpha\;,$$

$$c=\qquad +r'\text{Sin.}\alpha\;;$$

d'où il résulte

$$a^2+b^2+c^2=p^2\;,$$

$$a^2+b^2=q'^2+r'^2\text{Cos.}^2\alpha\;,$$

$$b^2+c^2=A^2+B^2\;.$$

En conséquence

$$R^2=b^2+c^2-p^2\text{Sin.}^2\lambda=p^2\text{Cos.}^2\lambda-a^2=(b^2+c^2)\text{Cos.}^2\lambda-a^2\text{Sin.}^2\lambda.$$

107. A l'aide de ces notations, l'angle horaire $\mu$ pourra être déterminé, à l'aide de l'une des trois formules qui suivent :

$$\text{Tang.}\mu=-\frac{ab\,\text{Sin.}\lambda-cR}{ac\,\text{Sin.}\lambda+bR}\;,$$

$$\text{Sin.}\mu=-\frac{ab\,\text{Sin.}\lambda-cR}{(b^2+c^2)\text{Cos.}\lambda}\;,$$

$$\text{Cos.}\mu=+\frac{ac\,\text{Sin.}\lambda+bR}{(b^2+c^2)\text{Cos.}\lambda}\;.$$

Le problème sera résolu.

108. *EXEMPLE. On demande, sous la latitude de* 50°, *la position de l'endroit où l'on verra le milieu de l'éclipse au moment du midi vrai de Berlin, qui répond à* $11^h.15'.52''$, *temps vrai de Paris?*

109. On trouvera ici (93), $t=0,816111$, compté depuis huit heures du matin; d'où il résulte

$$q'=M+mt=+1493'',27\;,\qquad p=+3267'',08\;.$$
$$r'=N+nt=+2905'',85\;,$$

La longitude du soleil sera, au même instant, en vertu des formules connues, $\alpha=180^\circ+57^\circ.2'.50''$.

110. On tire de ces données les valeurs numériques suivantes des quantités que nous avons désignées par $A$, $B$, $C$, $R$ (103)

$$A=+2342,15\ ,\quad A^2+B^2=6677192\ ,$$
$$B=-1091,57\ ,\quad R^2=413534\ ,$$
$$C=+2502,73\ ,\quad R=643,066\ .$$

111. Passant de là à celles que nous avons désignées par $a$, $b$, $c$ (106), on trouvera

$$a=+1999,155\ ,\quad b=-855,353\ ,\quad c=-2438,354\ ,$$
$$b^2+c^2=6677174\ ,\quad a\text{Sin}.\lambda=1531,442\ :$$

La latitude $\lambda=50^\circ$, en vertu de l'énoncé du problême.

112. Il en résulte pour Tang.$\mu$ les deux valeurs

$$\text{Log.Tang.}\mu=8,4463652\ ;\quad \text{donc}\quad \mu=1^\circ.36'.3''\ ;$$
$$\text{ou Log.Tang.}\mu=0,2120112\ ;\quad \text{ou}\quad \mu=58^\circ.27'.40''\ .$$

Il faudra s'attacher à la seconde des deux valeurs qui, augmentée de $180^\circ$, deviendra $\mu=238^\circ.27'.40''$.

113. Le même angle horaire est, en vertu de la formule générale; $\mu=174^\circ.36'.36''+216626''t+D$; ce qui fait, dans le cas actuel, $\mu=223^\circ.43'.7''+D$. La différence des méridiens deviendra ainsi $D=14^\circ.44'.33''$. L'endroit demandé sera donc à près de 15 degrés à l'orient de Paris, sous la latitude boréale de $50^\circ$. C'est à très-peu près le méridien de Breslau en Silésie. L'éclipse de soleil, au moment du midi vrai à Berlin, sera donc totale à l'endroit qu'on vient de déterminer, et qui se trouve à un degré au nord de Breslau.

# ANALISE TRANSCENDANTE.

## *Deuxième recueil de formules, servant à intégrer toute différentielle quelconque proposée;*

Par M. le professeur KRAMP, doyen de la faculté des sciences de Strasbourg.

1. LE problème indéterminé d'intégrer numériquement, par approximation, une différentielle quelconque, entre des limites données, admet plusieurs solutions. Celle que nous avons donnée, dans un précédent mémoire (*), était fondée sur la simple considération des trapèzes rectilignes. La solution que nous donnerons actuellement sera établie sur l'analise des lignes courbes; et l'on sent bien qu'en précision elle doit l'emporter sur l'autre.

2. *PROBLÈME. Une ligne courbe n'étant connue que par les grandeurs d'un certain nombre d'ordonnées équidistantes, et par l'intervalle qui les sépare; on demande l'aire mixtiligne comprise entre cette courbe, les deux ordonnées extrêmes et l'axe des* x?

3. *Solution.* Comme par des points donnés on peut toujours faire passer une infinité de courbes différentes, le problème, pris à la rigueur, est indéterminé et ne peut cesser de l'être qu'en assignant une relation générale, mais arbitraire, entre l'abscisse $x$ et l'ordonnée $y$. Celle qui se présente le plus naturellement est $y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots$. Alors, en prenant pour *unité* l'intervalle constant qui

(*) Voyez la page 281 de ce volume.

sépare

sépare les ordonnées, supposant que la première se confond avec l'axe des $y$, et les représentant consécutivement par $a$, $b$, $c$, $d$,...., notre hypothèse nous fournit, pour déterminer les coefficiens $A$, $B$, $C$, $D$,...., les équations suivantes

$$\begin{aligned}
a&=A\,,\\
b&=A+B+C+D+\ldots\,,\\
c&=A+2B+4C+8D+\ldots\,,\\
d&=A+3B+9C+27D+\ldots\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,
\end{aligned}$$

en nombre égal à celui des points donnés.

4. Il est d'ailleurs connu, comme nous l'avons déjà observé, dans un précédent mémoire (*), qu'en représentant respectivement par $\Delta a$, $2\Delta^2 a$, $6\Delta^3 a$,.... les premières, secondes, troisièmes,...., différences des ordonnées; c'est-à-dire, en posant

$$\begin{aligned}
\Delta a&=b-a\,,\\
1.2\Delta^2 a&=c-2b+a\,,\\
1.2.3\Delta^3 a&=d-3c+3b-a\,,\\
1.2.3.4\Delta^4 a&=e-4d+6c-4b+a\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned}
A&=a\\
B&=\Delta a-\Delta^2 a+2\Delta^3 a-6\Delta^4 a+24\Delta^5 a-\ldots\,,\\
C&=\Delta^2 a-3\Delta^3 a+11\Delta^4 a-50\Delta^5 a+\ldots\,,\\
D&=\Delta^3 a-6\Delta^4 a+35\Delta^5 a-\ldots\,,\\
E&=\Delta^4 a-10\Delta^5 a+\ldots\,,\\
F&=\Delta^5 a-\ldots\,;
\end{aligned}$$

ce qui donne

(*) Voyez la page 153 de ce volume.

$$y=a+x\Delta a+x(x-1)\Delta^2 a+x(x-1)(x-2)\Delta^3 a+x(x-1)(x-2)(x-3)\Delta^4 a$$
$$+x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\Delta^5 a+\ldots\ldots$$

formule dont la loi est évidente.

5. En conséquence, l'aire demandée qui, en général est $\int y\,dx$; sera l'intégrale de

$$A\,dx+Bx\,dx+Cx^2\,dx+Dx^3\,dx+Ex^4\,dx+\ldots.$$

c'est-à-dire,

$$Ax+\tfrac{1}{2}Bx^2+\tfrac{1}{3}Cx^3+\tfrac{1}{4}Dx^4+\tfrac{1}{5}Ex^5+\ldots.;$$

ou bien

$$\begin{aligned}\int y\,dx=\;&ax\\ &+\Delta a\int x\,dx\\ &+\Delta^2 a\int x(x-1)\,dx\\ &+\Delta^3 a\int x(x-1)(x-2)\,dx\\ &+\Delta^4 a\int x(x-1)(x-2)(x-3)\,dx\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{aligned}$$

ce qui donne également en développant

$$\begin{aligned}\frac{\int y\,dx-ax}{x^2}=\;&\tfrac{1}{2}\Delta a\\ &+\left(\tfrac{x}{3}-\tfrac{1}{2}\right)\Delta^2 a\\ &+\left(\tfrac{x^2}{4}-\tfrac{3}{3}x+\tfrac{2}{2}\right)\Delta^3 a\\ &+\left(\tfrac{x^3}{5}-\tfrac{6}{4}x^2+\tfrac{11}{3}x-\tfrac{6}{2}\right)\Delta^4 a\\ &+\left(\tfrac{x^4}{6}-\tfrac{10}{5}x^3+\tfrac{35}{4}x^2-\tfrac{50}{3}x+\tfrac{24}{2}\right)\Delta^5 a\\ &+\left(\tfrac{x^5}{7}-\tfrac{15}{6}x^4+\tfrac{85}{5}x^3-\tfrac{225}{4}x^2+\tfrac{274}{3}x-\tfrac{120}{2}\right)\Delta^6 a\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{aligned}$$

6. Cette intégrale, qui s'évanouit avec $x$, doit être prise jusqu'à cette même quantité $x$, qui désigne le nombre des divisions de l'axe

des $x$ qui se trouvent comprises entre les limites de l'intégrale, et qui est ainsi arbitraire. Il est entendu d'ailleurs que, dans la dernière formule ci-dessus, si l'on fait $x=n$, que nous appellerons le *diviseur général*, ou simplement le *diviseur*, il faudra s'arrêter à la différence $\Delta^n a$. Enfin, comme nous avons pris jusqu'ici pour unité l'intervalle constant entre les ordonnées; si, comme il paraît plus convenable de le faire, on veut prendre pour unité l'intervalle entier entre les limites de l'intégrale, il faudra diviser le résultat obtenu par $n$; sauf ensuite, dans les applications, à multiplier par ce même intervalle, lorsqu'il se trouvera différent de l'unité.

7. Voici présentement, d'après toutes ces attentions, la série des formules finales qu'on obtient, en prenant successivement pour *diviseur* tous les nombres de *un* à *douze*.

*Première formule*, diviseur *un*,

$$2\int X\mathrm{d}x = a+b\ .$$

*II.e Formule*, diviseur *deux*,

$$\begin{aligned}6\int X\mathrm{d}x = {} & a+c \\ & +4b\ .\end{aligned}$$

*III.e Formule*, diviseur *trois*,

$$\begin{aligned}8\int X\mathrm{d}x = {} & a+d \\ & +3(b+c)\ .\end{aligned}$$

*IV.e Formule*, diviseur *quatre*,

$$\begin{aligned}90\int X\mathrm{d}x = {} & 7(a+e) \\ & +32(b+d) \\ & +12c\ .\end{aligned}$$

*V.e Formule*, diviseur *cinq*,

$$\begin{aligned}288\int X\mathrm{d}x = {} & 19(a+f) \\ & +75(b+e) \\ & +50(c+d)\ .\end{aligned}$$

*VI.e Formule*, diviseur *six* ;

$$840\int X dx = 41(a+g) + 216(b+f) + 27(c+e) + 272d.$$

*VII.e Formule*, diviseur *sept* ;

$$17280\int X dx = 751(a+h) + 3577(b+g) + 1324(c+f) + 2986(d+e)$$

*VIII.e Formule*, diviseur *huit*,

$$89600\int X dx = 989(a+i) + 5888(b+h) - 928(c+g) + 10496(d+f) - 4540e.$$

*IX.e Formule*, diviseur *neuf*,

$$89600\int X dx = 2857(a+k) + 15741(b+i) + 1080(c+h) + 19344(d+g) + 5778(e+f);$$

*X.<sup>e</sup> Formule*, diviseur *dix*,

$$598752\int X\mathrm{d}x = 16067\,(a+l) + 106300(b+k) - 48525(c+i) + 272400(d+h) - 260550(e+g) + 427368f\,.$$

*XI.<sup>e</sup> Formule*, diviseur *onze*,

$$87091200\int X\mathrm{d}x = 2171465(a+m) + 13486539(b+l) - 3237113(c+k) + 25226685(d+i) - 9595542(e+h) + 15493566(f+g)\,;$$

*XII.<sup>e</sup> Formule*, diviseur *douze*,

$$2425500\int X\mathrm{d}x = 53143(a+n) + 373014(b+m) - 248517(c+l) + 1229630(d+k) - 1655505(e+i) + 2846124(f+h) - 2770278g\,.$$

8. Il est clair qu'en supposant toutes les coordonnées $a, b, c, d, \ldots$ égales entre elles et à l'unité, l'aire demandée deviendra un simple quarré,

égal lui-même à l'unité ; ainsi, dans ce cas, les valeurs de $\int X dx$, déduites des formules précédentes, doivent toutes se réduire à l'unité ; ce qui peut servir, au besoin, à vérifier simplement l'exactitude des coefficiens de nos formules.

9. Faisons l'essai de ces formules à quelques cas connus ; et cherchons, par le moyen de l'une d'elles, le rapport du diamètre à la circonférence. On sait que l'intégrale de $\frac{dt}{1+t^2}$ est l'arc qui a pour tangente le nombre désigné par $t$, et qu'en y supposant $t$ égal à l'unité, cette intégrale doit faire connaître la longueur de l'arc de $45^\circ$ ou $\frac{\varpi}{4}$. Prenant, par exemple, *sept* pour diviseur général, on aura

$$a=1\,,\quad h=\tfrac{1}{2}\,,$$
$$b=\tfrac{49}{50}\,,\quad g=\tfrac{49}{85}\,,$$
$$c=\tfrac{49}{53}\,,\quad f=\tfrac{49}{74}\,,$$
$$d=\tfrac{49}{58}\,,\quad e=\tfrac{49}{65}\,;$$

ce qui donne

$$a+h=\tfrac{3}{2}\quad=\tfrac{3}{2}\,;$$
$$b+g=\tfrac{49\cdot135}{50\cdot85}=\tfrac{1323}{850}\,,$$
$$c+f=\tfrac{49\cdot127}{53\cdot74}=\tfrac{6223}{3922}\,,$$
$$d+e=\tfrac{49\cdot123}{58\cdot65}=\tfrac{6027}{3770}\,;$$

donc

$$751(a+h)=1126{,}5000000000\,,$$
$$3577(b+g)=5567{,}4952941176\,,$$
$$1323(c+f)=2099{,}1914839368\,,$$
$$2989(d+e)=4778{,}4358090186\,.$$

$$17280\,\tfrac{\varpi}{4}=13571{,}6225870730\,;$$

$$\text{d'où}\quad \tfrac{\varpi}{4}=0{,}7853948256\,.$$

Sa longueur réelle est $\quad 0{,}7853981634$ ;

l'erreur est donc $\quad -0{,}0000033378$, c'est-à-dire moins de *trois* unités décimales du *sixième* ordre.

10. En employant successivement toutes nos *douze* formules, et mettant en regard de chaque résultat l'erreur dont il se trouve affecté, on obtient le tableau suivant :

| | | | |
|---|---|---|---|
| I. | $\frac{\pi}{4}=0{,}7500000000$, | Erreur = | $-0{,}0353981634$, |
| II. | 0,7833333333, | | $-0{,}0020648301$, |
| III. | 0,7846153846, | | $-0{,}0007827788$, |
| IV. | 0,7855294118, | | $+0{,}0001312484$, |
| V. | 0,7854696045, | | $+0{,}0000714411$, |
| VI. | 0,7853927139, | | $-0{,}0000054495$, |
| VII. | 0,7853948256, | | $-0{,}0000033378$, |
| VIII. | 0,7853981685, | | $+0{,}0000000051$, |
| IX. | 0,7853981740, | | $+0{,}0000000106$, |
| X. | 0,7853981874, | | $+0{,}0000000240$, |
| XI. | 0,7853981785, | | $+0{,}0000000151$, |
| XII. | 0,7853981630, | | $-0{,}0000000004$. |

11. La série de ces erreurs est beaucoup plus irrégulière que la nature du problème, et les moyens de solution que nous y avons appliqués, ne sembleraient devoir le comporter. On pouvait présumer que, plus on emploîrait de points pour y faire passer la courbe, et plus on la ferait coïncider avec la valeur rigoureuse de ce qu'on cherchait, et qu'ainsi la série des erreurs serait constamment décroissante. Cependant le calcul fait, et répété plusieurs fois avec soin, prouve le contraire ; les diviseurs *neuf*, *dix*, *onze* donnent des résultats moins exacts que le diviseur huit qui ne laisse qu'une erreur d'environ une demi-unité décimale du 8.e ordre. Cette irrégularité nous met dans l'impossibilité d'appliquer ici l'ingénieuse

méthode d'approximation dont nous nous sommes servis avec succès dans le mémoire cité au commencement de celui-ci. Il y avait alors une limite asymptotique, rigoureusement assignable par le calcul; tandis qu'ici la série de valeurs à laquelle nous venons de parvenir ne permet guère de rien soupçonner de semblable (*).

12. Heureusement la nouvelle méthode que nous proposons est, toutes choses égales d'ailleurs, susceptible de fournir d'elle-même, et sans auxiliaires quelconques, des résultats beaucoup plus exacts que ceux qu'on déduit de l'autre. Pour le prouver, du moins par des exemples, cherchons encore, d'après les deux méthodes, la longueur de l'arc de $45^\circ=\frac{\varpi}{4}$, en ne prenant d'abord pour diviseur général que *huit* avec ses aliquotes 1, 2, 4, 8. En suivant la marche indiquée dans le précédent mémoire, on trouvera, en général,

$$\begin{aligned}5670\int X\mathrm{d}x= &\ 217(a+i)\\ &+1024(b+d+f+h)\\ &+352(c+g)\\ &+436e\,.\end{aligned}$$

Or, on a ici

$$a=1\,;\qquad i=\tfrac{1}{2}\,,$$
$$b=\tfrac{64}{65}\,,\qquad h=\tfrac{64}{113}\,,$$
$$c=\tfrac{64}{68}\,,\qquad g=\tfrac{64}{100}\,,$$
$$d=\tfrac{64}{80}\,,\qquad f=\tfrac{64}{89}\,,$$
$$e=\tfrac{64}{80}\,;$$

en conséquence, on aura

$$a+i=\tfrac{3}{2}\,,$$
$$b+h=\tfrac{64\cdot178}{65\cdot113}\,,$$

(*) Les mêmes considérations n'infirmeraient-elles pas ce que nous avons dit sur l'interpolation des suites (page 317 de ce volume)? ce serait là une chose intéressante à examiner.

J. D. G.

$$c+g=\frac{16\cdot 42}{17\cdot 25}\ ,$$

$$d+f=\frac{64\cdot 162}{73\cdot 89}\ ,$$

$$e=\frac{4}{5}\ ;$$

il en résultera

$$\frac{\varpi}{4}=0,7853964459\ .$$

La valeur rigoureuse étant . . . 0,7853981634 ,

l'erreur sera $\qquad -0,0000017175$ ;

tandis que, par notre 8.me formule, l'erreur est simplement

$$+0,0000000051\ ;$$

c'est-à-dire, environ 338 fois moindre.

13. Faisons encore, sur le même arc $\frac{\varpi}{4}$, l'essai du diviseur général 12, avec ses aliquotes 1, 2, 3, 4, 6, 12. Nous aurons d'abord

$$\begin{aligned}1801800\int X\mathrm{d}x= {} & 41833(a+n)\\ & +248832(b+f+h+m)\\ & -29160(c+l)\\ & +395264(d+k)\\ & -63909(e+i)\\ & +118416g\ .\end{aligned}$$

Or, dans le cas présent,

$$a=1\ ,\qquad\qquad n=\frac{1}{2}\ ;$$

$$b=\frac{144}{145}\ ,\qquad\qquad m=\frac{144}{265}\ ,$$

$$c=\frac{144}{148}\ ,\qquad\qquad l=\frac{144}{244}\ ,$$

$$d=\frac{144}{153}\ ,\qquad\qquad k=\frac{144}{225}\ ,$$

$$e=\frac{144}{160}\,, \qquad i=\frac{144}{168}\,;$$

$$f=\frac{144}{169}\,; \qquad h=\frac{144}{191}\,;$$

$$g=\frac{14}{180}\,.$$

Achevant le calcul, on trouvera finalement

$$\frac{\varpi}{4}=0,7853981728\,,$$

$$\text{valeur exacte}\quad =0,7853981634\,,$$

$$\text{erreur}\quad +0,0000000094\,.$$

L'erreur de notre douzième formule est seulement

$$-0,0000000003\,;$$

c'est-à-dire, environ trente fois moindre.

14. Dans le calcul des formules générales (7), je me suis arrêté au diviseur 12. J'aurais désiré de pouvoir continuer cette table jusqu'au diviseur 24 ; mais l'immensité du travail m'a effrayé. Il doit sans doute y avoir quelque méthode beaucoup plus abrégée que celle que nous avons suivie; mais jusqu'ici, au moins, je l'ai cherchée vainement. Nous allons voir, au surplus, qu'à l'aide de ces formules (7), on peut aisément parvenir à d'autres, beaucoup plus approchées, en partageant l'intervalle entier qui sépare les deux ordonnées extrêmes, en plusieurs autres intervalles égaux entre eux.

15. En continuant de désigner les ordonnées, séparées les unes des autres par des intervalles égaux entre eux, par les lettres $a$, $b$, $c$, $d$,..... se succédant constamment suivant l'ordre alphabétique, sans omission d'aucune lettre intermédiaire ; on voit qu'une portion quelconque de notre aire curviligne sera clairement désignée par les deux ordonnées extrêmes qui la comprendront. Convenons donc, par exemple, que le symbole (DN) représentera l'aire curviligne terminée par les deux ordonnées $d$ et $n$; en employant des lettres majuscules de préférence aux autres, pour prévenir l'équivoque, et renfermant le tout entre deux parenthèses.

16. En conséquence de cette notation, on aura ( *Formule I* )

$$(AB)=\frac{a+b}{2},\ (BC)=\frac{b+c}{2},\ (CD)=\frac{c+d}{2},\ (DE)=\frac{d+e}{2},\ldots.$$

d'où, par addition, en prenant l'intervalle entier pour unité

$$2(AB)=(a+b)\ ,$$
$$4(AC)=(a+c)+2b\ ,$$
$$6(AD)=(a+d)+2(b+c)\ ,$$
$$8(AE)=(a+e)+2(b+c+d)\ ;$$
$$\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ;$$

ainsi qu'il résulte de la simple addition des trapèzes rectilignes.

17. La formule II donne ensuite

$$6(AC)=a+4b+c\ ,\ 6(CE)=c+4d+e\ ,\ 6(EG)=e+4f+g\ ,\ldots.$$

d'où, par addition, en prenant l'intervalle entier pour unité,

$$6(AC)=(a+c)+4b\ ,$$
$$12(AE)=(a+e)+4(b+d)+2c\ ;$$
$$18(AG)=(a+g)+4(b+d+f)+2(c+e)\ ,$$
$$24(AI)=(a+i)+4(b+d+f+h)+2(c+e+g)\ ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

formules fort simples, dont la loi est manifeste ; elles supposent nécessairement un diviseur multiple de *deux*, et se recommandent par l'exactitude des résultats qu'on en déduit.

18. En opérant d'une manière semblable sur la formule III, on obtiendra successivement

$$8(AD)=(a+d)+3(b+c)\ ,$$
$$16(AG)=(a+g)+3(b+c+e+f)+2d\ ,$$
$$24(AK)=(a+k)+3(b+c+e+f+h+i)+2(d+g)\ .$$

$$32(AN)=(a+n)+3(b+c+e+f+h+i+l+m)+2(d+g+k);$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

formules applicables au seul cas où le diviseur est multiple de *trois*.

19. La formule IV donne de même

$$90(AE)=7(a+e)+32(b+d)+12c,$$

$$180(AI)=7(a+i)+32(b+d+f+h)+12(c+g)+14e,$$

$$270(AN)=7(a+n)+32(b+d+f+h+k+m)+12(c+g+l)+14(e+i),$$

$$360(AR)=7(a+r)+32(b+d+f+h+k+m+o+q)+12(c+g+l+p)+14(e+i+n),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

formules applicables à tout diviseur multiple de *quatre*.

20. De la formule V, on tirera semblablement

$$288(AF)=19(a+f)+75(b+e)+50(c+d),$$

$$576(AL)=19(a+l)+75(b+e+g+k)+50(c+d+h+i)+38f,$$

$$854(AQ)=19(a+q)+75(b+e+g+k+m+p)+50(c+d+h+i+n+o)+38(f+l);$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

21. En employant consécutivement les lettres $v$, $w$, la formule VI donnera

$$840(AG)=41(a+g)+216(b+f)+27(c+e)+272d,$$

$$1680(AN)=41(a+n)+216(b+f+h+m)+27(c+e+i+l)+773(d+k)+82g,$$

$$3360(AT)=41(a+t)+216(b+f+h+m+o+s)+27(c+e+i+l+p+r)$$
$$+272(d+k+q)+82(g+n),$$

$$4200(AZ)=41(a+z)+216(b+f+h+m+o+s+u+y)$$
$$+27(c+e+i+l+p+r+v+x)+272(d+k+q+w)+82(g+n+t),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

22. La formule VIII donne

$$28350(AI)=989(a+i)+5888(b+h)-928(c+g)+10496(d+f)-4540e,$$

$$56700(AR)=989(a+r)+5888(b+h+k+q)-928(c+g+l+p)$$
$$+10496(d+f+m+o)-4540(e+n)+1978i,$$

$$85050(AZ)=989(a+z)+5888(b+h+k+q+s+y)$$
$$-928(c+g+l+p+t+x)+10496(d+f+m+o+u+w)$$
$$-4540(e+n+v)+1978(i+r) ,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

23. On pourra continuer ainsi pour les formules IX, X, XI, jusqu'à la douzième qui donnera finalement

$$2425500(AN)= 53143(a+n)+ 373014(b+m)$$
$$-248517(c+l)+1229630(d+k)$$
$$-1655505(e+i)+2846124(f+h)$$
$$-2770278g ,$$

$$4851000(AZ)=53143(a+z)+373014(b+m+o+y)$$
$$-248517(c+l+p+x)+1229630(d+k+q+w)$$
$$-1655505(e+i+r+v)+2846124(f+h+s+u)$$
$$-2770278(g+t)+106286n ;$$

cette dernière se trouve ainsi composée de 24 trapèzes curvilignes.

24. On voit que, pour rédiger en assez peu de temps un gros recueil de ces formules intégrales, il n'en coûterait presque que la peine d'écrire. Nous allons faire l'application de celles que nous croyons les plus remarquables, pour déterminer la longueur de l'arc de $45°=\frac{\varpi}{4}$, dont la valeur rigoureuse, calculée à douze décimales, est

$$\frac{\varpi}{4}=0,7853\ 9816\ 3397 :$$

Nous avons déjà vu que cet arc est l'intégrale de $\frac{dt}{1+t^2}$, prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=1$. En supposant cet intervalle divisé en 24 parties égales, et désignant par $a$, $b$, $c$, ....$z$ les valeurs numériques correspondantes de la fraction $\frac{1}{1+t^2}$, depuis la première 1, jusqu'à la *vingt-cinquième* 0,5 ; on aura la table suivante :

$$
\begin{aligned}
a+z &= 1{,}5000\ 0000\ 0000\ ,\\
b+y &= 1{,}5195\ 3386\ 6073\ ,\\
c+x &= 1{,}5364\ 9967\ 4691\ ,\\
d+w &= 1{,}5509\ 8706\ 6031\ ,\\
e+v &= 1{,}5631\ 3690\ 7399\ ,\\
f+u &= 1{,}5731\ 3051\ 7086\ ,\\
g+t &= 1{,}5811\ 7647\ 0588\ ,\\
h+s &= 1{,}5874\ 9595\ 3757\ ,\\
i+r &= 1{,}5928\ 0769\ 2308\ ,\\
k+q &= 1{,}5958\ 1345\ 2363\ ,\\
l+p &= 1{,}5981\ 8499\ 5554\ ,\\
m+o &= 1{,}5995\ 5321\ 4640\ ,\\
2n &= 1{,}6000\ 0000\ 0000\ .
\end{aligned}
$$

25. Essayons d'abord la division de l'intervalle entier en *six* parties égales. Nous pourrons employer la *troisième* formule (17), la *deuxième* (18) ou la *première* (21). Voici le tableau des résultats qu'on en obtient et des erreurs qui les affectent, rapportées à la douzième décimale comme unité.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.re | 0,7853 9794 5234 , | ...... | − 22 8163 ; |
| 2.me | 0,7853 9586 2445 , | ...... | −230 0952 , |
| 3.me | 0,7853 9271 3917 , | ...... | −544 9480 . |

Le premier de ces résultats, qui répond à la très-simple formule (17), est donc exact dans les *six* premiers chiffres décimaux.

26. Essayons, en second lieu, la division de l'intervalle en *douze* parties égales. Les aliquotes 2, 3, 4, 6, 12 nous permettent d'employer les formules qui suivent; savoir: la *sixième* (17), la *quatrième* (18), la *troisième* (19), la *première* (21) et la *première* (23). Il en résulte les cinq valeurs approchées qui suivent, vis-à-vis de quelles nous avons placé, comme ci-dessus, les erreurs qui les affectent,

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.re | 0,7853 9816 0076 , …… | — 3321 | , |
| 2.me | 0,7853 9814 8470 , …… | —14927 | , |
| 3.me | 0,7853 9817 4399 , ….. | +11002 | , |
| 4.me | 0,7853 9815 0574 , …… | —12823 | , |
| 5.me | 0,7053 9816 3064 , …… | — 333 | . |

On voit qu'ici encore le premier résultat, qui répond à la formule (17) est plus exact que les trois qui suivent ; mais le plus exact de tous est le dernier, qui répond à la formule (23). L'erreur ne s'y manifeste qu'à la *dixième* décimale seulement.

27. Employons enfin la division de l'intervalle entier en 24 parties égales. La considération des aliquotes 12, 8, 6, 4, 3, 2 nous permettra d'employer par voie d'addition les formules II, III, IV, VI, VIII, XII ; il en résulte, pour l'arc $\frac{\varpi}{4}$ les valeurs approchées qui suivent, affectées des erreurs placées en regard de chacune d'elles

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.re | 0,7853 9816 3346 , …… | — 52 | ; |
| 2.me | 0,7853 9816 3164 , …… | — 34 | ; |
| 3.me | 0,7853 9816 3563 , …… | +166 | ; |
| 4.me | 0,7853 9816 3397 , …… | + 0 | ; |
| 5.me | 0,7853 9816 3398 , …… | + 1 | ; |
| 6.me | 0,7853 9816 3397 , …… | — 1 | . |

Notre *deuxième* formule maintient donc encore sa supériorité parmi les trois premières, sous le rapport de l'exactitude ; mais on voit en même temps que la quatrième est exacte dans les *douze* premières décimales.

# QUESTIONS PROPOSÉES.

## *Problème d'astronomie.*

Tous nos annuaires nous donnent l'heure du lever et celle du coucher du soleil et de la lune pour l'observatoire de Paris ; mais les indications qu'ils fournissent sont fautives, pour les autres points de la France, et cela d'autant plus, qu'ils se trouvent plus eloignés de la Capitale. L'erreur est sur-tout sensible pour la lune, à raison de la grande déclinaison dont elle est susceptible.

Cependant comme il serait trop pénible de calculer en entier, jour par jour, les heures du lever et du coucher de ces astres pour chaque localité, on peut désirer de mettre à profit les calculs déjà faits pour Paris, en appliquant à leurs résultats les corrections convenables. Cela donne lieu au problème général que voici :

Connaissant la déclinaison d'un astre, ainsi que l'heure de son lever ou de son coucher, pour un point déterminé du globe terrestre, déterminer la correction qui doit être appliquée à l'heure indiquée pour la reudre propre à un autre point déterminé du globe peu distant du premier ?

FIN DU SIXIÈME VOLUME.

# TABLE

*Des matières contenues dans le VI.e volume des* Annales.

## ANALISE ALGÉBRIQUE.



## ANALISE TRANSCENDANTE.

## ARITHMÉTIQUE POLITIQUE.



## ASTRONOMIE.



## COMBINAISONS.



## DYNAMIQUE.



## GEOMETRIE ANALITIQUE.

## GEOMÉTRIE ELEMENTAIRE.



## GEOMETRIE TRANSCENDANTE.



## PHILOSOPHIE MATHEMATIQUE.

## TRIGONOMETRIE.

## CORRESPONDANCE

*Entre les* questions proposées *et les* questions résolues.

# ERRATA

## *Pour le sixième volume des* Annales.

### *Pour le texte.*

PAGE 142, lignes 4 et 8, en remontant, —$\alpha$; *lisez* : $\sigma$.
Page 143, lignes 3 et 5 —$\alpha$; *lisez* : $\sigma$.
Page 144, ligne 12, en remontant; —L; *lisez* : $\alpha$.
Page 146, ligne 8 —13′.24″; *lisez* : 45′.58″.
Page 147, ligne 13 — 787″; *lisez* : 987″.
Page 149, tableau, titre de la dernière colonne —$\mu=189^\circ+$; *lisez* : $\mu=180^\circ+$.
La page 213 est marquée 113.
Page 348, ligne 11 —goligones; *lisez* : polygones.
Ligne 19 —démonstrations; *lisez* : dénominations.

### *Pour les planches.*

Planche III, fig. 2, des trois arcs qui partent du point S l'intermédiaire doit être prolongé jusqu'au point A.