GÉOMÉTRIE DES SURFACES COURBES.

Démonstration et application d'un théoréme relatif à l'intersection des surfaces du second ordre ;

Par M. Bérard, principal et professeur de mathématiques du collége de Briançon, membre de plusieurs sociétés savantes.

THÉORÈME. *Si deux surfaces du second ordre se coupent, suivant le système de deux lignes courbes, isolées l'une de l'autre, et si l'une de ces courbes est une courbe plane, l'autre sera également une courbe plane.*

Démonstration. Imaginons que l'on projette l'ensemble des deux intersections sur un plan quelconque, non perpendiculaire à celui de la section supposée plane; le système des deux projections pourra être exprimé par une équation unique qui sera du 4.^{e} degré au plus; mais la section supposée plane étant du 2.^{e} degré aura pour sa projection une équation de ce degré, laquelle devra diviser l'équation du 4.^{e} degré, et donnera pour quotient une équation du 2.^{e} degré au plus, laquelle appartiendra à la projection de l'autre intersection; cette intersection ne saurait donc être elle-même une courbe d'un degré supérieur au second; elle est donc l'intersection de l'une des surfaces dont il s'agit par un plan, c'est-à-dire, une courbe plane.

Application. Soit un vase, figuré en portion de surface du second ordre, dont le bord soit déterminé par la section de cette surface par un plan. Si ce vase est exposé soit aux rayons du soleil soit à ceux d'une lumière voisine, son bord formera dans son intérieur une ombre dont la limite sera l'intersection de la surface de ce vase avec une surface cylindrique ou conique, dont les élémens rectilignes passeront constamment par le bord du vase. Or, ce bord est une ligne du second ordre, puisqu'il est l'intersection d'une surface du second ordre avec un plan; donc le cylindre ou le cône est une surface du même ordre, coupant celle du vase suivant deux courbes dont l'une est le bord même de ce vase et l'autre la limite de l'ombre projetée par ce bord dans son intérieur; puis donc que la première de ces deux lignes est une courbe plane, l'autre doit en être une aussi.

Remarque. En général, deux surfaces de l'ordre m se coupant réciproquement, suivant le système de deux courbes isolées, l'équation de la projection de l'ensemble de ces deux courbes sur un plan quelconque sera du degré m^2. Si l'une des intersections est plane, sa projection sera du degré m; l'autre ne sera donc généralement plane qu'autant qu'on aura $m^2-m=m$ ou $m=2$, comme ci-dessus.