
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

Questions résolues. Ébauche de solution du problème de géométrie proposé à la page 128 de ce recueil

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 7 (1816-1817), p. 373-379

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1816-1817__7__373_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1816-1817, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS RÉSOLUES.

*Ébauche de solution du problème de géométrie proposé
à la page 128 de ce recueil ;*

Par un ABONNÉ.



ÉNONCÉ. Démontrer que, quelles que soient la nature et la situation respective de deux sections coniques, tracées sur un même plan, il est toujours permis de considérer leur système comme la perspective du système de deux cercles, tracés sur un autre plan ? Déterminer, en outre, toutes les diverses situations de l'œil qui donnent, en effet, le système de deux cercles pour perspective de ces deux courbes ?

Solution. Tout se réduit évidemment à trouver deux cônes de même sommet, ayant ces deux courbes pour bases, et qui soient tels que leurs sections, par un même plan, convenablement dirigé, soient deux cercles.

Soient pris des plans coordonnés rectangulaires, et supposons que le plan des xy soit celui des deux courbes dont il s'agit, soient a, b, c les coordonnées du sommet commun de deux cônes

ayant ces courbes pour bases. Si un même plan peut couper ces cônes suivant deux cercles, il devra en être de même de tout autre plan parallèle à celui-là; d'où il suit qu'il est toujours permis de supposer que le plan coupant passe par l'origine.

Soit donc prise pour équation de ce plan coupant

$$z = px + qy \quad (1)$$

Soient α , β , γ les coordonnées du centre du cercle résultant de la section de l'un des deux cônes par ce plan; on devra avoir

$$\gamma = p\alpha + q\beta \quad (2)$$

Si ensuite on désigne par r le rayon de ce cercle, il se trouvera être l'intersection du plan (1) avec la sphère ayant pour équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2 \quad (3)$$

Cela posé, soient

$$x - d = m(z - c), \quad y - b = n(z - c) \quad (4)$$

les équations d'une droite quelconque passant par le sommet du cône; en combinant ces équations avec l'équation (1), on trouvera, pour les coordonnées de l'intersection de la droite (4) et du plan (1),

$$\left. \begin{aligned} x &= a - m \cdot \frac{c - pa - qb}{1 - pm - qn} , \\ y &= b - n \cdot \frac{c - pa - qb}{1 - pm - qn} , \\ z &= c - \frac{c - pa - qb}{1 - pm - qn} . \end{aligned} \right\} (5)$$

Si donc on veut que la droite (4) soit une génératrice du cône ; il faudra que ces coordonnées satisfassent à l'équation de la sphère (3) ; ce qui donnera

$$\left\{ a - a - m \cdot \frac{c - pa - qb}{1 - pm - qn} \right\}^2 + \left\{ b - \beta - n \cdot \frac{c - pa - qb}{1 - pm - qn} \right\}^2 + \left\{ c - \gamma - \frac{c - pa - qb}{1 - pm - qn} \right\}^2 = r^2 ;$$

ou , en développant et rassemblant les termes de même nature

$$\begin{aligned} &\{(a - a)^2 + (b - \beta)^2 + (c - \gamma)^2 - r^2\} - 2\{m(a - a) + n(b - \beta) + (c - \gamma)\} \cdot \frac{c - pa - qb}{1 - pm - qn} \\ &+ (1 + m^2 + n^2) \left\{ \frac{c - pa - qb}{1 - pm - qn} \right\}^2 = 0 . \end{aligned}$$

ou encore

$$\left. \begin{aligned} &\{(a - a)^2 + (b - \beta)^2 + (c - \gamma)^2 - r^2\} (1 - pm - qn)^2 \\ &- 2\{m(a - a) + n(b - \beta) + (c - \gamma)\} (c - pa - qb) (1 - pm - qn) \\ &+ (c - pa - qb)^2 (1 + m^2 + n^2) = 0 . \end{aligned} \right\} (6)$$

Telle est donc la relation qui doit exister entre m et n pour que les équations (4) appartiennent à une génératrice du premier des deux cônes.

On obtiendra donc l'équation de ce premier cône, en éliminant m et n de l'équation (6), au moyen des équations (4); ce qui donnera, en chassant les dénominateurs,

$$\{(a-a)^2 + (b-\beta)^2 + (c-\gamma)^2 - r^2\} \{p(x-a) + q(y-b) - (z-c)\}^2$$

$$+ 2(c-pa-qb) \{p(x-a) + q(y-b) - (z-c)\} \{(a-a)(x-a) + (b-\beta)(y-b) + (c-\gamma)(z-c)\}$$

$$+ (c-pa-qb)^2 \{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\} = 0. \quad (7)$$

En faisant $z=0$, dans cette équation, on trouvera, pour l'intersection du cône avec le plan des xy

$$\{(a-a)^2 + (b-\beta)^2 + (c-\gamma)^2 - r^2\} \{p(x-a) + q(y-b) + c\}^2$$

$$+ 2(c-pa-qb) \{p(x-a) + q(y-b) + c\} \{(a-a)(x-a) + (b-\beta)(y-b) - (c-\gamma)c\}$$

$$+ (c-pa-qb)^2 \{(x-a)^2 + (y-b)^2 + c^2\} = 0;$$

ou, en développant, ordonnant et ayant égard à l'équation (2), on verra de laquelle

$$c - pa - qb = (c - \gamma) - p(a - \alpha) - q(b - \beta) ;$$

$$\begin{aligned} & \{ (1+p^2)(c-\gamma)^2 - 2q(b-\beta)(c-\gamma) + (p^2+q^2)(b-\beta)^2 - p^2r^2 \} (x-a)^2 \\ & + \{ (1+q^2)(c-\gamma)^2 - 2p(a-\alpha)(c-\gamma) + (p^2+q^2)(a-\alpha)^2 - q^2r^2 \} (y-b)^2 \\ & + 2 \{ pq(c-\gamma)^2 + p(b-\beta)(c-\gamma) + q(a-\alpha)(c-\gamma) - (p^2+q^2)(a-\alpha)(b-\beta) - pqr^2 \} (x-a)(y-b) \\ & + 2c \{ p(b-\beta)^2 + (1+p^2)(a-\alpha)(c-\gamma) + pq(b-\beta)(c-\gamma) - q(a-\alpha)(b-\beta) - pr^2 \} (x-a) \\ & + 2c \{ q(a-\alpha)^2 + (1+q^2)(b-\beta)(c-\gamma) + pq(a-\alpha)(c-\gamma) - p(a-\alpha)(b-\beta) - qr^2 \} (y-b) \\ & + c^2 \{ (1+p^2)(a-\alpha)^2 + 2pq(a-\alpha)(b-\beta) + (1+q^2)(b-\beta)^2 - r^2 \} = 0 . \quad (8) \end{aligned}$$

Cela posé, soient prises pour les équations de nos deux courbes, tracées sur le plan des xy ,

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0 , \quad (9)$$

$$A'x^2 + B'y^2 + 2C'xy + 2D'x + 2E'y + F' = 0 . \quad (10)$$

La première pourra être mise sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} & A(x-a)^2 + B(y-b)^2 + 2C(x-a)(y-b) \\ & + 2(Aa + Cb + D)(x-a) + 2(Bb + Ca + E)(y-b) \\ & + (Aa^2 + Bb^2 + 2Cab + 2Da + 2Eb + F) = 0 . \end{aligned} \right\} (11)$$

Cette équation ne devant différer au plus de l'équation (8) que par un certain facteur λ , on devra avoir

$$c\{(1+p^2)(c-\gamma)^2 - 2q(b-\beta)(c-\gamma) + (p^2+q^2)(b-\beta)^2 - p^2r^2\} = \lambda A, \quad (I)$$

$$c\{(1+q^2)(a-\alpha)^2 - 2p(a-\alpha)(c-\gamma) + (p^2+q^2)(a-\alpha)^2 - q^2r^2\} = \lambda B, \quad (II)$$

$$pq(c-\gamma)^2 + p(b-\beta)(c-\gamma) + q(a-\alpha)(c-\gamma) - (p^2+q^2)(a-\alpha)(b-\beta) - pqr^2 = \lambda C, \quad (III)$$

$$c\{p(b-\beta)^2 + (1+p^2)(a-\alpha)(c-\gamma) + pq(b-\beta)(c-\gamma) - q(a-\alpha)(b-\beta) - pr^2\} \\ = \lambda(Aa + Cb + D), \quad (IV)$$

$$c\{q(a-\alpha)^2 + (1+q^2)(b-\beta)(c-\gamma) + pq(a-\alpha)(c-\gamma) - p(a-\alpha)(b-\beta) - qr^2\} \\ = \lambda(Bb + Ca + E), \quad (V)$$

$$c\{(1+p^2)(a-\alpha)^2 + 2pq(a-\alpha)(b-\beta) + (1+q^2)(b-\beta)^2 - r^2\} \\ = \lambda(Aa^2 + Bb^2 + 2Cab + 2Da + 2Eb + F) \quad (VI)$$

équations, auxquelles il faudra joindre l'équation de condition

$$\gamma = p\alpha + q\beta. \quad (VII)$$

Si, entre ces sept équations, on élimine les cinq quantités α , β , γ , r , λ , on obtiendra deux équations entre a , b , c , p , q et les coefficients de l'équation (9), lesquelles pourront être représentées par

$$\left. \begin{aligned} \varphi(a, b, c, p, q, A, B, C, D, E, F) &= 0, \\ \psi(a, b, c, p, q, A, B, C, D, E, F) &= 0; \end{aligned} \right\} (12)$$

au moyen desquelles le sommet du cône étant donné, on déterminera les quantités p, q qui fixent la direction commune des plans qui donnent des sections circulaires. À l'inverse, la direction commune de ces plans étant donnée, en changeant, dans ces équations, a, b, c en x, y, z , respectivement, ces équations appartiendront à une courbe à double courbure dont chaque point pourra être pris indistinctement pour le sommet du cône donnant des sections circulaires.

En raisonnant sur la courbe (10) comme sur la courbe (9), on obtiendra deux autres équations

$$\left. \begin{aligned} \varphi(a, b, c, p, q, A', B', C', D', E', F') &= 0, \\ \psi(a, b, c, p, q, A', B', C', D', E', F') &= 0. \end{aligned} \right\} (13)$$

En éliminant p et q entre les quatre équations (12 et 13), et changeant a, b, c en x, y, z dans les équations résultantes; ces deux équations appartiendront à une courbe à double courbure lieu des sommets des cônes susceptibles d'être coupés circulairement par un même plan.

On voit par là que, généralement parlant, trois sections coniques tracées sur un même plan ne sauraient être considérées comme les perspectives de trois cercles tracés sur un autre plan; puisqu'il faudrait pour cela que le sommet commun des trois cônes se trouvât à la fois sur deux courbes à double courbure qui, en général, ne se coupent point dans l'espace.

On voit aussi qu'en général, tout théorème ou problème de la géométrie de la règle, relatif à deux cercles tracés sur un même plan, est applicable à deux sections coniques quelconques, tracées aussi sur un même plan.