GERGONNE

Questions résolues. Solution du problème de statique proposé à la page 72 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 8 (1817-1818), p. 196-200

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1817-1818__8__196_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème de statique proposé à la page 72 de ce volume ;

Par un ABONNÉ. Gergonne

PROBLÈME. *Déterminer l'état d'équilibre le plus prochain du mouvement, pour une échelle posée, par son extrémité inférieure sur un plan horizontal, et appuyée, par son extrémité supérieure, contre un mur vertical ; en ayant égard au frottement, et en le supposant une fraction déterminée de la pression ?*

Solution. Une échelle étant d'ordinaire sensiblement symétrique par rapport à la droite qui joint les milieux des deux échelons extrêmes, il nous sera permis, dans la solution du problème proposé, de substituer à l'échelle une ligne mathématique et pesante d'une d'une longueur égale à la longueur commune de ses deux montans. Mais, attendu que l'on est communément dans l'usage de donner plus de masse aux échelles à leur partie inférieure qu'à leur partie supérieure, nous ne supposerons pas notre ligne droite uniformément pesante; c'est-à-dire que nous ne supposerons pas que son centre de gravité soit nécessairement en son milieu.

Comme d'ailleurs l'énoncé du problème semble supposer tacitement que la droite qui joint les milieux des deux échelons extrêmes est située dans un plan vertical; nous pouvons aussi supposer que la droite que nous substituons ici à l'échelle est ainsi située. Alors ce plan vertical coupera la muraille et le pavé suivant deux droites fixes sur lesquelles notre droite mobile sera censée appuyée; et le problème se trouvera ainsi ramené à un simple problème de géométrie plane.

Soit donc (fig. 3) AB notre droite mobile et pesante, ayant son centre de gravité en G, et posant sur l'horizontale OX, par son extrémité inférieure A, et sur la verticale OY par son extrémité supérieure B.

Soit R le poids de AB, faisons $GA=a$, $GB=b$, l'angle $BAO=x$, et soit f l'angle du frottement.

Soit décomposé le poids R de la droite, appliqué verticalement en G, en deux autres forces verticales M et N, respectivement appliquées à ses extrémités A et B; nous aurons, par le principe de la composition des forces parallèles,

$$M=\frac{b}{a+b}R\,, \qquad N=\frac{a}{a+b}R\,;$$

Soit décomposée la force M, appliquée en A, en deux autres P et T, dont la première P soit dans la direction AB et dont la seconde T fasse avec M un angle MAT égal à l'angle du frottement.

Soit pareillement décomposée la force N, appliquée en B, en deux autres Q et U, dont la première Q soit dans la direction BA, et dont la seconde U fasse, avec l'horizontale conduite par B, un angle égal à celui du frottement.

Les forces T et U, quelle que puisse être d'ailleurs leur intensité, se trouvant respectivement détruites par la résistance des droites fixes OX et OY; il sera nécessaire et il suffira en même temps pour l'équilibre que les forces P et Q se détruisent; et, comme elles sont déjà opposées, il suffira pour cela que leurs intensités soient égales. Cherchons donc les valeurs de ces forces, afin de les égaler entre elles.

Pour cela remarquons d'abord qu'on a

$$\mathit{Ang}.\mathrm{PAT}=x+\tfrac{1}{2}\varpi+f=\tfrac{1}{2}\varpi+x+f\,,$$

$$\mathit{Ang}.\mathrm{MAT}=f\,,$$

$$\mathit{Ang}.\mathrm{QBU}=(\tfrac{1}{2}\varpi-x)+(\tfrac{1}{2}\varpi-f)=\varpi-(x+f)\,,$$

$$\mathit{Ang}.\mathrm{NBU}=\tfrac{1}{2}\varpi-f\,.$$

Mais, lorsqu'on a deux composantes et leur résultante, chacune d'elles peut être représentée en intensité par le sinus de l'angle que forment les directions des deux autres; on aura donc, d'après cela,

$$\mathit{Sin}.\mathrm{PAT}:\mathit{Sin}.\mathrm{MAT}::M:P\,,$$

$$\mathit{Sin}.\mathrm{QBU}:\mathit{Sin}.\mathrm{NBU}::N:Q\,;$$

c'est-à-dire,

$$\mathrm{Sin}.(\tfrac{1}{2}\varpi+x+f):\mathrm{Sin}.f::M:P\,,$$

$$\mathrm{Sin}.(\varpi-x-f):\mathrm{Sin}.(\tfrac{1}{2}\varpi-f)::N:Q\,;$$

ou bien

$$\mathrm{Cos}.(x+f):\mathrm{Sin}.f::M:P=M.\frac{\mathrm{Sin}.f}{\mathrm{Cos}.(x+f)}\,,$$

$$\mathrm{Sin}.(x+f):\mathrm{Cos}.f::N:Q=N.\frac{\mathrm{Cos}.f}{\mathrm{Sin}.(x+f)}\,.$$

Egalant donc ces valeurs de P et Q, on obtiendra, pour l'équation du problème

$$M.\frac{\text{Sin.}f}{\text{Cos.}(x+f)}=N.\frac{\text{Cos.}f}{\text{Sin.}(x+f)}\ ;$$

ou encore

$$\text{Tang.}f\ \text{Tang.}(x+f)=\frac{N}{M}\ .$$

Mettant pour M et N, dans cette dernière équation, les valeurs trouvées ci-dessus, elle deviendra, toutes réductions faites,

$$\text{Tang.}f\,\text{Tang.}(x+f)=\frac{a}{b}\ ;$$

ou bien

$$b\text{Tang.}f\ .\frac{\text{Tang.}x+\text{Tang.}f}{1-\text{Tang.}f\ \text{Tang}x}=a\ ;$$

ou encore

$$b(\text{Tang.}x+\text{Tang.}f)\text{Tang.}f=a(1-\text{Tang.}f\,\text{Tang.}x)\ ;$$

ou enfin, en développant et transposant

$$(a+b)\text{Tang.}f\,\text{Tang.}x=a-b\text{Tang.}^2f\ ;$$

d'où on tire

$$\text{Tang.}x=\frac{a-b\ \text{Tang.}^2f}{(a+b)\text{Tang.}f}\ ;$$

et telle est la valeur de l'inconnue.

Si l'on suppose que le frottement soit une fraction $\frac{1}{n}$ de la pression, on aura $\text{Tang.}f=\frac{1}{n}$, et par suite

$$\text{Tang.}x=\frac{n^2a-b}{n(a+b)}\ .$$

On admet communément que le frottement est le tiers de la pression. Si, pour nous conformer à cette donnée d'expérience, nous posons $n=3$, notre formule deviendra

$$\text{Tang.}x=\frac{9a-b}{3(a+b)}\ .$$

Si, de plus, nous supposons l'échelle uniformément pesante, comme il arrive pour la plupart des petites échelles, employées dans les appartemens, nous aurons $b=a$, et par suite $\text{Tang.}x=\frac{4}{3}$, c'est-à-dire qu'il ne faut pas que le *pied* qu'on donne à l'echellé excède alors les $\frac{3}{5}$ de sa longueur. On conçoit même qu'il y aurait de l'imprudence à lui faire atteindre cette limite.

Dans les grandes échelles, employées par les maçons, on peut, sans trop s'écarter de la vérité, supposer $b=2a$; et l'on trouve d'après cela $\text{Tang.}x=\frac{7}{9}$; d'où l'on voit que le poids, croissant de haut en bas, de ces sortes d'échelles, en permettant de leur donner plus de *pied*, contribue ainsi à assurer leur stabilité (*).