ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

VECTEN
DURRANDE
FRÉGIER
FABRY
GERGONNE

Questions résolues. Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 116 de ce volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 9 (1818-1819), p. 277-284
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1818-1819__9__277_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 116 de ce volume;

Par MM. VECTEN, licencié ès sciences,
DURRANDE, professeur de mathématiques au collége royal de Cahors,
FRÉGIER, professeur de mathématiques au collége de Troyes, ancien élève de l'école polytechnique,
FABRY, aussi ancien élève de l'école polytechnique,
Et GERGONNE.

LES démonstrations données par MM. Durrande, Vecten et Frégier de ces deux théorèmes étant exactement les mêmes, nous allons les confondre dans une seule rédaction.

THÉORÈME I. Un point P *étant pris arbitrairement dans l'intérieur d'un triangle quelconque* ABC; *et* A', B', C' *étant respectivement les points où les côtés* BC, CA, AB *de ce triangle sont rencontrés par les prolongemens des droites* AP, BP, CP, *menées des sommets opposés au point* P, *on aura*

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}=1.$$

Démonstration. Des sommets A, B, C, soient abaissées des perpendiculaires AA'', BB'', CC'' sur les directions des côtés respectivement opposés ; et du point P soient abaissées, sur les mêmes directions, les perpendiculaires PA''', PB''', PC'''.

A cause des parallèles, on a les trois équations

$$\frac{PA'}{AA'}=\frac{PA'''}{AA''}\,,\quad \frac{PB'}{BB'}=\frac{PB'''}{PB''}\,,\quad \frac{PC'}{CC'}=\frac{PC'''}{CC''}\,;$$

mais, d'un autre côté, les triangles BPC, CPA, APB se trouvant avoir une base commune avec le triangle ABC, le rapport de leurs aires à la sienne doit être le même que celui des hauteurs ; c'est-à-dire, qu'on doit avoir

$$\frac{PA'''}{AA''}=\frac{BPC}{BAC}\,,\quad \frac{PB'''}{BB''}=\frac{CPA}{CBA}\,,\quad \frac{PC'''}{CC''}=\frac{APB}{ACB}\,;$$

au moyen de quoi les équations ci-dessus deviennent

$$\frac{PA'}{AA'}=\frac{BPC}{BAC}\,,\quad \frac{PB'}{BB'}=\frac{CPA}{CBA}\,,\quad \frac{PC'}{CC'}=\frac{APB}{ACB}\,;$$

ajoutant donc ces trois dernières équations membre à membre, en observant que

$$BPC+CPA+APB=ABC\,,$$

on aura

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}=1\,;$$

c'est-à-dire le théorème énoncé.

On a évidemment

$$\frac{AA'}{AA'}+\frac{BB'}{BB'}+\frac{CC'}{CC'}=3\,;$$

retranchant donc de cette équation celle du théorème, il viendra

$$\frac{PA}{AA'}+\frac{PB}{BB'}+\frac{PC}{CC'}=2\;;$$

équation qui peut aussi avoir son utilité. Cette remarque est due à M. Vecten.

THÉORÈME II. Un point P *étant pris arbitrairement dans l'intérieur d'un tétraèdre quelconque* ABCD ; *et* A′, B′, C′, D′ *étant respectivement les points où les faces* BCD, CDA, DAB, ABC *de ce tetraèdre sont rencontrées par les prolongemens des droites* AP, BP, CP, DP, *menées des sommets opposés au point* P ; *on aura*

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}+\frac{PD'}{DD'}=1\,.$$

Démonstration. Des sommets A, B, C, D, soient abaissées, sur les plans des faces opposées, les perpendiculaires AA″, BB″, CC″, DD″; et du point P soient abaissées, sur les mêmes plans, les perpendiculaires PA‴, PB‴, PC‴, PD‴.

A cause des parallèles, on a les quatre équations

$$\frac{PA'}{AA'}=\frac{PA'''}{AA''}\,,\quad \frac{PB'}{BB'}=\frac{PB'''}{BB''}\,,\quad \frac{PC'}{CC'}=\frac{PC'''}{CC''}\,,\quad \frac{PD'}{DD'}=\frac{PD'''}{DD''}\;;$$

mais, d'un autre côté, chacun des tétraèdres PBCD, PCDA, PDAB, PABC se trouvant avoir une base commune avec le tétraèdre ABCD, le rapport de leurs volumes doit être le même que celui de leurs hauteurs ; c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$\frac{PA'''}{AA''}=\frac{PBCD}{ABCD}\,,\;\frac{PB'''}{BB''}=\frac{PCDA}{BCDA}\,,\;\frac{PC'''}{CC''}=\frac{PDAB}{CDAB}\,,\;\frac{PD'''}{DD''}=\frac{PABC}{DABC}\;;$$

au moyen de quoi les équations ci-dessus deviennent

$$\frac{PA'}{AA'}=\frac{PBCD}{ABCD},\ \frac{PB'}{BB'}=\frac{PCDA}{BCDA},\ \frac{PC'}{CC'}=\frac{PDAB}{CDAB},\ \frac{PD'}{DD'}=\frac{PABC}{DABC}\ ;$$

ajoutant donc ces dernières membre à membre, en observant que

$$PBCD+PCDA+PDAB+PABC=ABCD\ ;$$

on aura

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}+\frac{PD'}{DD'}=1\ ;$$

c'est-à-dire le théorème énoncé.

On a évidemment

$$\frac{AA'}{AA'}+\frac{BB'}{BB'}+\frac{CC'}{CC'}+\frac{CD'}{DD'}=4\ ;$$

retranchant donc de cette équation celle du théorème, il viendra

$$\frac{PA}{AA'}+\frac{PB}{BB'}+\frac{PC}{CC'}+\frac{PD}{DD'}=3\ ;$$

équation qui peut aussi avoir son utilité. Cette remarque est due à M. Vecten.

Les démonstrations de M. Fabry ne diffèrent de celles-ci qu'en ce que, par le point P, il mène une droite ou un plan parallèle à l'un des côtés du triangle ou à l'une des faces du tétraèdre, ce qui établit des proportions faciles à reconnaître, et dont la combinaison conduit au résultat cherché; ses démonstrations ont ainsi l'avantage de ne dépendre aucunement des théorèmes sur la mesure des aires et des volumes.

Nous sommes tombés très-simplement sur ces deux théorèmes, en cherchant à décomposer une masse, supposée réduite à un point, en trois ou quatre autres situées aux sommets d'un triangle ou d'un tétraèdre, dans l'intérieur duquel la masse dont il s'agit se trouve située. Cette manière d'envisager les deux théorèmes en fournira une nouvelle démonstration fort simple, ainsi qu'on va le voir.

I. Soit p une masse située en P, dans l'intérieur d'un triangle ABC, et qu'il s'agit de décomposer en trois autres masses a, b, c, situées à ses sommets. Le problème est évidemment déterminé ; et conséquemment, de quelque manière d'ailleurs qu'on le résolve, on doit constamment parvenir au même résultat.

Or, la manière la plus simple et la plus naturelle de résoudre ce problème est la suivante : soit menée PA, prolongée jusqu'à la rencontre de BC en A' ; et soit décomposée la masse p en deux autres, l'une a située en A, et l'autre a' située en A'; il ne s'agira plus alors que de décomposer cette dernière en deux autres b, c, situées en B, C.

Or, par le principe des forces parallèles ou des centres de gravité, on aura

$$p.\frac{PA'}{AA'}=a\ ;$$

d'où l'on voit qu'en menant PB, PC, dont les prolongemens rencontrent respectivement CA, AB en B', C', on aura

$$p.\frac{PA'}{AA'}=a\ ;\quad p.\frac{PB'}{BB'}=b\ ,\quad p.\frac{PC'}{CC'}=c\ ;$$

ajoutant donc, et remarquant que $a+b+c=p$, il viendra

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}=1.$$

II. Soit p une masse située en P, dans l'intérieur d'un tétraèdre ABCD, et qu'il s'agisse de décomposer en quatre autres masses a, b, c, d, situées à ses sommets. Le problème est évidemment déterminé ; et conséquemment, de quelque manière d'ailleurs qu'on le résolve, on doit constamment parvenir au même résultat.

Or, la manière la plus simple et la plus naturelle de résoudre ce problème est la suivante : soit menée PA dont le prolongement rencontre en A′ le plan de la face BCD ; et soit decomposée la masse p en deux autres a et a' situées respectivement en A et A′; il ne s'agira plus ensuite que de decomposer cette dernière en trois autres b, c, d, situées respectivement en B, C, D.

Or, par le principe des forces parallèles ou des centres de gravité, on aura

$$p.\frac{PA'}{AA'}=a;$$

d'où l'on voit qu'en menant PB, PC, PD, dont les prolongemens rencontrent respectivement CDA, DAB, ABC en B′, C′, D′, on aura

$$p.\frac{PA'}{AA'}=a,\quad p.\frac{PB'}{BB'}=b,\quad p.\frac{PC'}{CC'}=c,\quad p.\frac{PD'}{DD'}=d;$$

ajoutant donc, et remarquant que $a+b+c+d=p$, il viendra

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}+\frac{PD'}{DD'}=1.$$

III. Cette manière d'envisager les deux théorèmes, nous permet de trouver facilement l'analogue du premier pour le triangle sphérique. Soit, en effet, une puissance p agissant sur le centre S d'une sphère, et dont la direction passe par un point P de la surface de cette sphère, situé dans l'intérieur d'un triangle sphérique ABC ; et proposons nous de decomposer cette puissance en trois autres a, b, c, ayant respectivement les directions SA, SB, SC. Soit mené par A et P un arc de grand cercle coupant en A′ le côté BC ; et soit d'abord décomposée la puissance p en deux autres

a, a' respectivement dirigées suivant SA, SA'; il ne s'agira plus ensuite que de décomposer cette dernière en deux autres bc, dirigées suivant SB, SC.

Or, par le principe du parallélogramme des forces, on aura

$$p \cdot \frac{Sin.PA'}{Sin.AA'} = a\,;$$

d'où l'on voit qu'en menant les arcs de grands cercles PB, PC, rencontrant respectivement en B', C' les côtés CA, AB, on aura

$$p \cdot \frac{Sin\ PA'}{Sin.AA'} = a\,, \quad p \cdot \frac{Sin.PB'}{Sin.BB'} = b\,, \quad p \cdot \frac{Sin.PC'}{Sin.CC'} = c\,.$$

Mais, par le principe du parallelipipède des forces, on a (Voyez la pag. 55 du présent volume.)

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\,\mathrm{Cos.BC} + 2ca\,\mathrm{Cos.CA} + 2ab\,\mathrm{Cos.AB} = p^2\,;$$

substituant donc, et divisant par p^2, on aura

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{Sin.PA'}{Sin.AA'}\right)^2 + 2 \cdot \dfrac{Sin.PB'}{Sin.BB'} \cdot \dfrac{Sin.PC'}{Sin.CC'}\mathrm{Cos.BC} \\ + \left(\dfrac{Sin.PB'}{Sin.BB'}\right)^2 + 2 \cdot \dfrac{Sin.PC'}{Sin.CC'} \cdot \dfrac{Sin.PA'}{Sin.AA'}\mathrm{Cos.CA} \\ + \left(\dfrac{Sin.BC'}{Sin.CC'}\right)^2 + 2 \cdot \dfrac{Sin.PA'}{Sin.AA'} \cdot \dfrac{Sin.PB'}{Sin.BB'}\mathrm{Cos.AB} \end{array}\right\} = 1\,;$$

équation d'où il serait facile ensuite de déduire celle qui est relative au triangle rectiligne, en supposant le rayon de la sphère infini.

IV. Dans tout ce qui précède, nous avons formellement supposé que le point P était intérieur au triangle ou au tétraèdre. S'il lui était exterieur, il en résulterait de simples changemens de signes dans nos formules ; et l'on trouverait, soit par les raisonnemens de MM. Vecten et Durrande, soit par les nôtres que ces changemens de signes sont assujettis à cette seule règle, savoir qu'un terme du premier membre de l'équation relative, soit au triangle rectiligne, soit au tétraèdre, doit être positif ou négatif, suivant que le point P regarde l'intérieur ou l'extérieur du côté du triangle ou de la face du tétraèdre auquel ce terme se rapporte.

V. D'après cela, si dans le cas du triangle, et du point P, toujours supposé intérieur, on considère successivement et respectivement les points A, B, C comme points extérieurs aux triangles BPC, CPA, APB ; outre l'équation

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}=1,$$

on devra encore avoir

$$\frac{AA'}{PA'}-\frac{AC'}{BC'}-\frac{AB'}{CB'}=1,$$

$$\frac{BB'}{PB'}-\frac{BA'}{CA'}-\frac{BC'}{AC'}=1,$$

$$\frac{CC'}{PC'}-\frac{CB'}{AB'}-\frac{CA'}{BA'}=1;$$

équations auxquelles on peut joindre d'ailleurs toutes celles que donne la théorie des transversales.

On pourrait parvenir, pour le tétraèdre à des relations analogues.

Démonstration