ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

FRÉDÉRIC SARRUS

Analise transcendante. Essai sur le développement, en fractions continues, des racines des équations du troisième degré, et sur l'approximation graphique du problème de la trisection de l'angle

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 10 (1819-1820), p. 189-201
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__189_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Essai sur le développement, en fractions continues, des racines des equations du troisieme degre, et sur l'approximation graphique du probleme de la trisection de l'angle.

Par M. Frédéric Sarrus.

I. Nous allons prouver, en premier lieu, que la résolution d'une équation quelconque du troisième degré peut toujours être ramenée à celle d'une autre équation de la forme

$$4x^3-3x=a\ ,$$

où a est un nombre positif.

En effet, la proposée ne saurait être, après l'évanouissement du second terme, que de l'une ou de l'autre de ces deux formes

$$y^3-py+q=0\ , \qquad y^3+py+q=0\ ,$$

où il est permis de supposer que p et q sont des nombres entiers ; et où q est un nombre essentiellement positif.

Si c'est la première forme qui a lieu, il suffira de poser

$$y=\pm 2x\sqrt{\frac{p}{3}}\ ,$$

le signe supérieur ou le signe inférieur ayant lieu suivant que q

est négatif ou positif. En substituant et divisant ensuite par $\pm\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}$, il viendra, en effet, en transposant,

$$4x^3-3x=\sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}};$$

qui, en faisant $\sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}}=a$, devient, en effet,

$$4x^3-3x=a.$$

Si l'équation est de la seconde forme, on posera d'abord

$$y=\pm 2z\sqrt{\frac{p}{3}};$$

ce qui donnera, en substituant et divisant toujours par $\pm\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}$,

$$4z^3+3z\pm\sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}}=0.$$

posant ensuite, dans celle-ci

$$z=\sqrt{x^2-1};$$

ce qui revient, au surplus, à faire immédiatement

$$y=\pm 2\sqrt{\frac{p}{3}(x^2-1)},$$

elle deviendra

$$(4x^2-1)\sqrt{x^2-1}=\mp\frac{3q}{2p\sqrt{\frac{p}{3}}};$$

ou, en quarrant

$$(4x^2-1)^2(x^2-1)=\frac{27q^2}{4p^3};$$

ou, en développant

$$(4x^3-3x)^2-1=\frac{27q^2}{4p^3} ;$$

ou enfin, en transposant et extrayant la racine quarrée des deux membres.

$$4x^3-3x=\sqrt{1+\frac{27q^2}{4p^3}} ;$$

équation qui, en posant, $\sqrt{1+\frac{27q^2}{4p^3}}=a$, revient encore à

$$4x^3-3x=a .$$

Il n'y aurait donc d'exception que pour le seul cas où la proposée aurait ses trois racines égales. Alors, en effet, p, qui entre comme denominateur dans nos formules, se trouve nul, ce qui y introduit des grandeurs infinies.

Soit, par exemple, l'équation

$$y^3-7y+7=0 ,$$

qui se rapporte à la première forme, en posant

$$y=-2x\sqrt{\tfrac{7}{3}} ,$$

elle deviendra

$$4x^3-3x=\frac{3\sqrt{21}}{14} ,$$

où $a=\frac{3\sqrt{21}}{14}$.

Soit encore l'équation

$$y^3+y-10=0 ;$$

qui se rapporte à la seconde forme ; en posant

$$y=2\sqrt{\frac{y^2-1}{3}}\,,$$

elle deviendra

$$4y^3-3y=26\;;$$

ou $a=26$.

II. Nous allons prouver présentement que l'on peut faire dépendre la résolution de l'équation $4x^3-3x=a$ de celle d'une équation de la même forme, dans laquelle le second membre sera si voisin de l'unité qu'on voudra. Posons, en effet,

$$x=2x_1^{\,2}-1\,,$$

en substituant dans

$$4x^3-3x=a\;;$$

elle deviendra

$$(4x_1^{\,3}-3x_1)^2=\frac{1+a}{2}\;;$$

de sorte qu'en posant, pour abréger,

$$\sqrt{\frac{1+a}{2}}=a_1\,,$$

et extrayant la racine quarrée, l'équation à résoudre sera

$$4x_1^{\,3}-3x_1=a_1\,,$$

équation exactement de même forme que la proposée. Or, de l'équation

$$\sqrt{\frac{1+a}{2}}=a_1\,,$$

on tire, en quarrant, chassant le dénominateur et transposant

$$2a_1^2=a+1\ ,$$

ou

$$2(a_1^2-1)=a-1\ ;$$

d'où

$$\frac{a_1-1}{a-1}=\frac{1}{2(a_1+1)}\ ,$$

et par conséquent

$$\frac{a_1-1}{a-1}<\tfrac{1}{2}\quad \text{ou}\quad a_1-1<\tfrac{1}{2}(a-1)\ ,$$

la différence de a_1 avec l'unité sera donc moindre que la moitié de la différence de a avec l'unité.

Donc, si l'on pose successivement

$$\begin{array}{ll}
x=2x_1^2-1\ , & a_1=\sqrt{\frac{1+a}{2}}\ , \\
x_1=2x_2^2-1\ , & a_2=\sqrt{\frac{1+a_1}{2}}\ , \\
x_2=2x_3^2-1\ , & a_3=\sqrt{\frac{1+a_2}{2}}\ , \\
\ldots\ldots\ldots ; & \ldots\ldots\ldots \\
x_{n-1}=2x_n^2-1\ , & a_n=\sqrt{\frac{1+a_{n-1}}{2}}\ ;
\end{array}$$

on aura, quel que soit d'ailleurs l'indice n,

$$4x_n^3-3x_n=a_n\ ;$$

et la série a, a_1, a_2, ... a_n sera telle que la différence de chacun de ses termes avec l'unité sera moindre que la moitié de la différence avec cette même unité du terme qui le précédera immédiatement.

Il n'est pas même difficile de voir que, passé le premier terme dans la serie des différences $a-1$, a_1-1, a_2-1, ... a_n-1, chaque terme sera reellement moindre que le tiers de celui qui le precedera immediatement. En effet, il resulte des relations ci-dessus qu'aucun des termes a_1, a_2, a_3, ... a_n ne saurait être inferieur à $\frac{1}{2}$ et qu'ils seront meme toujours plus grands que cette fraction; on a donc

$$a_n > \tfrac{1}{2},$$

d'où

$$a_n + 1 > \tfrac{3}{2},$$

et

$$2(a_n+1) > 3,$$

donc

$$\frac{1}{2(a_n+1)} < \tfrac{1}{3};$$

mais on a, en général, par ce qui précède,

$$\frac{a_n-1}{a_{n-1}-1} < \frac{1}{2(a_n+1)};$$

donc, *à fortiori*,

$$\frac{a_n-1}{a_{n-1}-1} < \tfrac{1}{3}, \quad \text{ou} \quad a_n - 1 < \tfrac{1}{3}(a_{n-1}-1).$$

comme nous l'avions annoncé.

Cette circonstance facilite singulièrement le calcul des quantités a_1, a_2, a_3, ... a_n. On sait, en effet, que, lorsque i est une très-petite fraction, on a sensiblement $\sqrt{1 \pm i} = 1 \pm \frac{1}{2} i$; d'où l'on voit que, lorsqu'on sera parvenu à des termes tres-peu différens de l'unité, on pourra poursuivre en remplaçant l'extraction de la racine de la quantité sous le radical par la réduction à moitié de sa différence avec l'unité.

Il résulte de là que dans la série $a-1$, a_1-1, a_2-1, ... a_n-1, chaque terme, que nous venons déjà de démontrer être moindre que le tiers de celui qui le précède immédiatement, tend sans cesse à n'en être plus que le quart. Soit, en effet, $a_{n-1}=1+i$, i étant une très-petite fraction, nous aurons

$$a_n=\sqrt{\frac{1+a_{n-1}}{2}}=\sqrt{\frac{2+i}{2}}=\sqrt{1+\tfrac{1}{2}i}\ ;$$

ce qui donnera sensiblement $a_n=1+\frac{1}{4}i$; on aura donc, aussi sensiblement,

$$\frac{a_n-1}{a_{n-1}-1}=\frac{\frac{1}{4}i}{i}=\frac{1}{4}\ ;$$

ainsi, parvenue à ce point, la série $a-1$, a_1-1, a_2-1, ... a_n-1 sera facile à continuer, et on en conclura ensuite les termes correspondans à la série a, a_1, a_2, a_3, ... a_n.

On peut remarquer présentement que, si l'on avait rigoureusement

$$4x_n^3-3x_n=1\ ,$$

on en conclurait, en transposant et décomposant,

$$(2x_n+1)^2(x_n-1)=0\ ;$$

d'où l'on voit que, tandis que l'une des racines des diverses transformées converge sans cesse vers l'unité; les deux autres convergent en même temps vers la fraction $-\frac{1}{2}$. On pourra donc, passé un certain terme, tirer un parti avantageux de la méthode d'approximation de *Newton*, pour résoudre la dernière transformée, et remonter ensuite à la valeur de x, au moyen des relations établies ci-dessus entre x, x_1, x_2, x_3, ... x_n.

III. A l'aide de ces relations, la valeur de x peut être developpée en fraction continue d'une forme fort élégante. L'équation $4x_n^3-3x_n=a_n$ donne, en transposant,

$$4x_n^3=3x_n+a_n\ ;$$

mais l'équation $x_{n-1}=2x_n^2-1$, donne aussi, en transposant,

$$2x_n^2=x_{n-1}+1\ ;$$

divisant donc la première par la seconde, il viendra

$$2x_n=\frac{3x_n+a_n}{x_{n-1}+1}\ ;$$

ou, en chassant le dénominateur, réduisant et transposant

$$2x_nx_{n-1}=x_n+a_n\ ;$$

d'où on tire

$$2x_{n-1}=1+\frac{a_n}{x_n}=1+\frac{2a_n}{2x_n}\ ;$$

on aura donc cette suite d'équations

$$2x=1+\frac{2a_1}{2x_1}\ ,$$

$$2x_1=1+\frac{2a_2}{2x_2}\ ,$$

$$2x_2=1+\frac{2a_3}{2x_3}\ ,$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ,$$

$$2x_{n-1}=1+\frac{2a_n}{2x_n}\ ;$$

d'où on conclura facilement

$2x=1+$

$$2x=1+\cfrac{2a_1}{1+\cfrac{2a_2}{1+\cfrac{2a_3}{1+\cdots\cdots\cdots+\cfrac{2a_{n-1}}{1+\cfrac{2a_n}{2x_n}}}}}\ ;$$

fraction continue qui tendra continuellement à se résoudre dans la fraction périodique

$$1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cdots\cdots\cdots}}}$$

que l'on trouve être égale à 2 ; de sorte qu'en poussant le développement assez loin, on peut, sans erreur sensible, écrire

$$2x=1+\cfrac{2a_1}{1+\cfrac{2a_2}{1+\cfrac{2a_3}{1+\cdots\cdots\cdots+\cfrac{2a_{n-1}}{1+a_n}}}}\ .$$

IV. Le problème de la trisection de l'angle se réduisant, comme l'on sait, à la résolution d'une équation du troisième degré, dans le cas irréductible ; les formules que nous venons d'obtenir sembleraient pouvoir en offrir une solution approchée ; mais elle ne saurait être d'aucune utilité dans l'application aux arts. Heureusement on peut obtenir de ce problème une solution graphique à la fois très-simple et très-convergente.

On a, en effet, par les théorèmes connus,

$$\text{Sin}.3a\text{Cos}.a-\text{Cos}.3a\text{Sin}.a=\text{Sin}.(3a-a)=\text{Sin}.2a=2\text{Sin}.a\text{Cos}.a\ ,$$

ou bien, en transposant,

$$\text{Sin}.a(2\text{Cos}.a+\text{Cos}.3a)=\text{Cos}.a\text{Sin}.3a\ ,$$

d'où

$$\text{Sin}.a=\frac{\text{Sin}.3a\text{Cos}.a}{2\text{Cos}.a+\text{Cos}.3a}=\frac{\text{Sin}.3a}{2+\frac{\text{Cos}.3a}{\text{Cos}.a}}\ . \qquad (1)$$

Cela posé, considérons la formule

$$\text{Sin}.x_1=\frac{\text{Sin}.3a}{2+\frac{\text{Cos}.3a}{\text{Cos}.x}}\ ; \qquad (2)$$

on en tirera, en prenant les différentielles logarithmiques

$$\frac{\text{d}x_1\text{Cos}.x_1}{\text{Sin}.x_1}=-\frac{\text{d}x\text{Cos}.3a\text{Sin}.x}{\left(2+\frac{\text{Cos}.3a}{\text{Cos}.x}\right)\text{Cos}.^2x}\ ;$$

ou en mettant pour $2+\frac{\text{Cos}.3a}{\text{Cos}.x}$ sa valeur donnée par l'équation (1), et tirant la valeur de $\frac{\text{d}x_1}{\text{d}x}$,

$$\frac{\text{d}x_1}{\text{d}x}=-\frac{\text{Cos}.3a}{\text{Sin}.3a}\cdot\frac{\text{Sin}.x\ \text{Sin}.^2x_1}{\text{Cos}.^2x\text{Cos}.x_1}\ ;$$

mais, en comparant les équations (1, 2), on voit que, lorsque $x=a$, on a $x_1=x=a$; donc, dans ce même cas, la valeur de $\frac{\text{d}x_1}{\text{d}x}$ devient

$$-\frac{\text{Tang}.^3a}{\text{Tang}.3a}\ .$$

Donc si, dans la formule (1), on fait $x=a+g$ et $x_1=a-h$, g étant un très-petit arc, on aura sensiblement

$$h=g\,.\,\frac{\text{Tang.}^3 a}{\text{Tang.}3a}\,.$$

Cette expression devenant également nulle, soit que $3a$ soit nul, soit qu'il soit égal à l'angle droit; elle doit être susceptible d'un *maximum* entre ces deux limites. Si, dans la vue de le déterminer, on égale à zéro la différentielle de $\frac{\text{Tang.}^3 a}{\text{Tang.}3a}$, il viendra, en supprimant le dénominateur et divisant par $\text{Sin.}^2 a\text{Cos.}^2 a$,

$$(\text{Cos.}3a\text{Cos.}a-\text{Sin.}3a\text{Sin.}a)(\text{Sin.}3a\text{Cos.}a-\text{Cos.}3a\text{Sin.}a)=0\,;$$

ou bien

$$\text{Sin.}2a\text{Cos.}4a=0\,;$$

ou simplement

$$\text{Cos.}4a=0\,,$$

puisque $\text{Sin.}2a=0$ répondrait au *minimum*. On aura donc, dans le cas du *maximum*,

$$4a=\tfrac{1}{2}\pi\,,\quad \text{d'où}\quad \text{Cos.}2a=\text{Cos.}\tfrac{1}{4}\pi=\frac{1}{\sqrt{2}}\,;$$

de là

$$\text{Tang.}a=\sqrt{\frac{1-\text{Cos.}2a}{1+\text{Cos.}2a}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\sqrt{2}-1\,;$$

d'où

$$\text{Tang.}^3 a=5\sqrt{2}-7\,;$$

on aura d'ailleurs, dans ce cas,

$$\text{Tang.}3a=\text{Cot.}a=\frac{1}{\text{Tang.}a}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1\,;$$

donc finalement on aura, dans le cas du *maximum*;

$$\frac{\text{Tang.}^3 a}{\text{Tang.} 3a}=(5\sqrt{2}-7)(\sqrt{2}-1)=17-12\sqrt{2}<0{,}0294<\tfrac{1}{11}\;;$$

c'est à-dire

$$h<\frac{g}{33}\;;$$

d'où il suit que, dans la formule (2), en mettant pour x une valeur qui diffère peu de a, la valeur qui en résultera pour x_1 ne différera de a que d'une quantité au moins 33 fois plus petite; de sorte qu'en remettant cette nouvelle valeur pour x dans la même formule, et poursuivant toujours ainsi, on obtiendra une suite de valeurs x, x_1, x_2, x_3, ... convergente vers a, telles que, dans le cas même le plus défavorable, la différence de chacune avec a sera plus de 33 fois moindre que la différence avec le même arc de celle qui la précédera immédiatement.

Il n'est donc plus question que de trouver une construction qui réponde à ces indications, et représente la formule (2); or, c'est là une chose extrêmement facile. Soit, en effet, ASB (fig. 1) un angle donné égal à $3a$, qu'il soit question de diviser en trois parties égales. De son sommet S comme centre, et avec un rayon arbitraire, soit décrit, entre ses côtés, un arc MN. Par le même sommet, soit élevée à l'un quelconque SA de ses côtés, et dans le sens de l'autre, la perpendiculaire SC, sur laquelle soit prise, à partir du point S une partie SD à peu près égale à la corde des deux tiers de l'arc MN; aux deux tiers de sa corde, par exemple. Du point D comme centre, et avec un rayon double de SM=SN, soit décrit un arc coupant en E le prolongement de SA; et soit menée NE, coupant SC en D_1; alors SD_1 sera une valeur plus approchée de la corde des deux tiers de l'arc MN; substituant donc le point D_1 au point D, on obtiendra, par un semblable procédé, un nouveau point D_2, tel que SD_2 sera une valeur beaucoup plus approchée encore ; en poursuivant donc toujours ainsi, un parviendra très-rapidement à une valeur extrêmement approchée de la corde des deux tiers de MN.

Cette construction est extrêmement facile à justifier ; soit, en effet, mené le sinus NP, et soit pris pour unité de longueur le rayon $SM=SN$; d'où $DE=2$; en nommant $2x$ et $2x_1$ les arcs qui répondent aux cordes dont les longueurs sont SD et SD_1, on aura

$$2\text{Sin}.x_1=SD_1=NP.\frac{SE}{PE}=\text{Sin}.3a\frac{SE}{SE+\text{Cos}.3a}=\frac{2\text{Sin}.3a}{2+\dfrac{2\text{Cos}.3a}{SE}} ;$$

mais on a

$$SE=\sqrt{\overline{DE}^2-\overline{SD}^2}=\sqrt{4-4\text{Sin}.^2x}=2\text{Cos}.x ;$$

donc, en substituant et réduisant,

$$\text{Sin}.x_1=\frac{\text{Sin}.3a}{2+\dfrac{\text{Cos}.3a}{\text{Cos}.x}} ,$$

qui est précisément notre formule (2)

Dans cette trisection, qui est plus simple, en quelque sorte, qu'une bissection, on pent, sans inconvénient, placer, dès l'abord, le point D d'une manière tout-à-fait arbitraire, et conséquemment le placer en S, ce qui est plus simple ; et dès la seconde opération, l'erreur sera déjà peu sensible. On voit par là que, si l'on s'était trompé dans quelque opération, l'opération qui suivrait corrigerait aussitôt ce que celle-là aurait donné de défectueux ; ainsi qu'il arrive dans la méthode d'approximation de Newton pour les racines incommensurables des équations numériques.