ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

FRÉDÉRIC SARRUS

Analise appliquée. Problème général des engrenages à axes fixes

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 10 (1819-1820), p. 299-314
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__299_0>

ANALISE APPLIQUÉE.

Problème général des engrenages à axes fixes ;

Par M. FRÉDÉRIC SARRUS.

JE me propose de montrer ici comment le problème des engrenages à axes fixes peut être facilement ramené aux procédés généraux de l'analise mathématique. Je pourrais aborder immédiatement le cas le plus général de ce problème ; mais, pour en rendre la solution plus facile à saisir, je pense qu'il ne sera pas hors de propos de traiter d'abord un cas beaucoup plus simple : c'est celui où l'axe du pignon ou de la lanterne étant parallèle à celui de la roue, toutes les sections faites dans l'un et l'autre corps par des plans perpendiculaires à la direction commune de leurs axes sont des courbes égales, semblablement situées, et ayant pour points homologues les points où leurs plans sont rencontrés par leurs axes ; c'est-à-dire, en d'autres termes, le cas où la roue et le pignon ou lanterne sont des surfaces cylindriques, ayant leurs élémens rectilignes parallèles à la direction commune de leurs axes. Tout se réduit alors, en effet, à remplir les conditions qui doivent être satisfaites, pour l'un quelconque des plans perpendiculaires aux axes ; et on a alors à résoudre simplement un problème de géometrie plane qui peut être énoncé comme il suit :

PROBLÈME. Deux surfaces planes S, S', *situées dans un* *même plan, où elles doivent demeurer constamment, ne peuvent prendre d'autre mouvement qu'un mouvement de rotation autour de deux points fixes* P, P′ *du plan où elles sont situées. La courbe qui termine la surface* S′ *étant donnée, on demande par quelle courbe doit être terminée la surface* S, *pour que, ces deux courbes, tournant librement autour de leurs centres de rotation respectifs, avec des vitesses données quelconques, constantes ou variables, les courbes qui les terminent se trouvent continuellement tangentes l'une à l'autre ?*

Solution. De quelque manière que soient mus les différens corps d'un système, lorsqu'on n'a à s'occuper que de leur mouvement relatif, il est toujours permis de supposer l'un d'eux immobile, pourvu que l'on transporte aux autres son mouvement en sens contraire. On peut, en effet, imaginer tout le système renfermé dans un espace clos que l'on fait mouvoir dans l'espace indéfini, de telle sorte que le corps que l'on veut supposer immobile le soit en effet, dans ce dernier espace; d'où l'on voit qu'alors les autres corps du système, outre le mouvement qu'on avait d'abord attribué à chacun d'eux, auront encore un mouvement commun, égal à celui de l'espace clos, et par conséquent contraire au mouvement effectif du corps que l'on suppose immobile.

Pour appliquer ces considérations au problème qui nous occupe, supposons que la surface *S* soit immobile; il nous faudra, pour légitimer cette supposition, attribuer au point P′ un mouvement circulaire autour du point P; et alors notre problème se trouvera simplement réduit au suivant :

Pendant qu'une surface plane S′, *terminée par une courbe donnée, tourne sur un plan, autour de l'un quelconque* P′ *de ses points, avec une vitesse donnée quelconque, constante ou variable, le point* P′ *décrit, dans le même plan, une circonférence d'un rayon donné, ayant pour centre un autre point* P *de ce plan, avec une vitesse constante ou variable, également donnée et quelconque; on demande* *quelle est la courbe* S *à laquelle, dans ce mouvement, la courbe* S′ *est continuellement tangente ?*

Or, le problème, ainsi envisagé, n'est qu'un cas particulier du problème des enveloppes planes, et peut être facilement résolu comme il suit.

Soit a la distance constante entre les deux points P, P′. Soit rapportée la courbe fixe cherchée S à des coordonnées rectangulaires x, y, fixes sur le plan des deux courbes, et dont, pour plus de simplicité, nous supposerons l'origine en P.

Soit rapportée la courbe mobile donnée S' à des coordonnées x, y, fixes sur cette courbe, mais mobiles avec elle sur le plan des deux surfaces, tant autour du point P′ qu'autour du point P; en prenant encore, pour plus de simplicité, le point P′ pour origine.

Soit, pour une époque quelconque, t l'angle variable que fait la droite mobile PP′$=a$ avec l'axe des x; les équations du point P′, par rapport au premier système de coordonnees, seront ainsi, pour la même époque,

$$x=a\text{Cos}.t\ , \qquad y=a\text{Sin}\ t\ .$$

Si, dans la vue d'obtenir la courbe, lieu du point P′, dans toutes ses positions autour du point P, on élimine t entre ces deux équations, il viendra

$$x^2+y^2=a^2\ ;$$

équation d'un cercle, comme on pouvait bien s'y attendre.

A la même époque, l'axe des x', qui varie sans cesse de position, fera, avec la droite mobile a, un angle fonction de l'angle t, dont la grandeur dépendra du rapport des vitesses de rotation des deux surfaces; nous représenterons cet angle par T; d'où l'on voit que l'angle des axes des x' et des x sera $T+t$.

Par les formules connues à l'aide desquelles on passe, sur un plan, d'un système rectangulaire à un autre système qui l'est également, on aura

$$x'=+(x-a\text{Cos}.t)\text{Cos}.(T+t)+(y-a\text{Sin}.t)\text{Sin}.(T+t) \;,$$

$$y'=-(x-a\text{Cos}.t)\text{Sin}.(T+t)+(y-a\text{Sin}.t)\text{Cos}.(T+t) \;;$$

ou, en développant et réduisant,

$$x'=+x\text{Cos}.(T+t)+y\text{Sin}.(T+t)-a\text{Cos}.T \;,$$

$$y'=-x\text{Sin}.(T+t)+y\text{Cos}.(T+t)+a\text{Sin}.T \;.$$

Cela posé, soit

$$f'(x',y')=S'=0 \;,$$

l'équation de la courbe S', rapportée à ses propres axes, et que l'on suppose donnée, dans l'énoncé du problème, en y substituant pour x', y' les valeurs que nous venons de trouver en x, y, l'équation résultante, de la forme

$$f(x,y,t)=0 \;;$$

sera celle de cette même courbe S', dans toutes les positions qu'elle peut prendre par rapport à la courbe S; ou, ce qui revient même, cette équation sera l'équation commune à une infinité de courbes, dont chacune sera une des positions de la courbe S' par rapport à la courbe S, et qu'on en déduirait en faisant varier la valeur du paramètre t. Puis donc que, dans toutes ces positions, la courbe S' doit continuellement être tangente à la courbe S, cette dernière ne sera autre chose que l'enveloppe de l'espace parcouru par la première. En conséquence, et d'après la théorie connue des enveloppes (*), si l'on élimine t entre cette dernière équation et

(*) Voyez, entre autres, la page 361 du III.e volume du présent recueil.

sa différentielle prise par rapport à ce paramètre, l'équation résultante, de la forme

$$f(x\,,y)=S=0\ ,$$

sera l'équation demandée de la courbe inconnue S. Venons présentement à quelques applications.

Supposons, en premier lieu, que la courbe donnée S' soit un cercle ayant le point P' pour centre et un rayon égal à r; son équation, par rapport à ses propres axes, sera

$$x'^2+y'^2=r^2\ ;$$

en y substituant pour x', y' leurs valeurs en x, y, elle deviendra

$$\left.\begin{array}{l} x^2-2ax\{\text{Cos.}(T+t)\text{Cos.}T+\text{Sin.}(T+t)\text{Sin.}T\} \\ +y^2-2ay\{\text{Sin.}(T+t)\text{Cos.}T-\text{Cos.}(T+t)\text{Sin.}T\} \end{array}\right\}=r^2-a^2\ ;$$

ou, plus simplement,

$$x^2+y^2-2ax\text{Cos.}t-2ay\text{Sin.}t=r^2-a^2\ ;$$

équation qu'on peut encore mettre sous cette forme

$$(x-a\text{Cos.}t)^2+(y-a\text{Sin.}t)^2=r^2\ :$$

Il ne s'agit donc plus présentement que d'éliminer t entre cette équation et sa différentielle, prise uniquement par rapport à cette lettre; or, cette différentielle est

$$(x-a\text{Cos.}t)\text{Sin.}t=(y-a\text{Sin.}t)\text{Cos.}t\ ;$$

ou, plus simplement,

$$x\,\text{Sin}.t=y\,\text{Cos}.t\ ;$$

combinant cette équation avec $\text{Sin}.^2t+\text{Cos}.^2t=1$, il viendra

$$\text{Sin}.t=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\qquad \text{Cos}\,t=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ;$$

ce qui donnera, en substituant dans l'équation, chassant les dénominateurs et réduisant,

$$\{\sqrt{x^2+y^2}-a\}^2=r^2\ ,$$

d'où

$$\sqrt{x^2+y^2}-a=\pm r\ ;$$

et, en transposant et quarrant,

$$x^2+y^2=(a\pm r)^2\ ;$$

équation commune à deux cercles concentriques, ayant le point P pour centre commun, et ayant pour rayons la distance $PP'=a$, augmentée ou diminuée du rayon r du cercle dont le centre est P'; et cela quelque fonction d'ailleurs que T soit de t. C'est, au surplus, un résultat qu'il était facile de prévoir. il justifie complètement l'exactitude de notre procédé.

Pour second exemple, admettons que S' soit une droite telle que les coordonnées du pied de la perpendiculaire abaissée sur elle de l'origine soient g et h; son équation sera

$$gx'+hy'=g^2+h^2\ ;$$

en y mettant pour x', y' leurs valeurs en x, y, elle deviendra

(gy

$$\left.\begin{array}{r}(gy-hx)\text{Sin.}(T+t)+ah\,\text{Sin.}T\\ +(gx+hy)\text{Cos.}(T+t)-ag\text{Cos.}T\end{array}\right\}=g^2+h^2.$$

Supposons présentement que le rapport des vitesses de rotation soit tel qu'en supposant celle de S uniforme, celle de S' le soit aussi, mais n fois plus rapide ; nous aurons alors $T+t=nt$, d'où $T=(n-1)t$; notre équation deviendra donc

$$\left.\begin{array}{r}gy=hx)\text{Sin.}nt+ah\text{Sin.}(n-1)t\\ +(gx+hy)\text{Cos.}nt-ag\text{Cos.}(n-1)t\end{array}\right\}=g^2+h^2\ ;$$

sa différentielle, par rapport à t, sera

$$\left.\begin{array}{r}n(gy-hx)\text{Cos.}nt+(n-1)ah\text{Cos.}(n-1)t\\ -n(gx+hy)\text{Sin.}nt+(n-1)ag\text{Sin.}(n-1)t\end{array}\right\}=0\ ;$$

en joignant ces deux équations, les équations

$$\text{Sin.}^2nt+\text{Cos.}^2nt=1\ ,\quad \text{Sin.}^2(n-1)t+\text{Cos.}^2(n-1)t=1\ ,$$

on en déduira les valeurs de Sin.nt, Cos.nt, Sin.$(n-1)t$, Cos.$(n-1)t$; et par suite celles de Tang.nt, Tang.$(n-1)t$. En supposant donc qu'on trouve

$$\text{Tang.}nt=A\ ,\quad \text{Tang.}(n-1)t=A'\ ,$$

ou en conclura

$$nt=\text{Arc.}(\text{Tang.}=A)\ ,\quad (n-1)t=\text{Arc}(\text{Tang.}=A')\ ;$$

d'où, en multipliant en croix

$$(n-1)\text{Arc}(\text{Tang.}=A)=n\text{Arc}(\text{Tang.}=A')\ .$$

Ce calcul ne présente rien de difficile, mais il conduit à des formules finales extrêmement compliquées.

Pour troisième exemple, supposons que la courbe S' soit un cercle, ayant g, h pour les coordonnées de son centre; en supposant toujours l'origine en P′, son équation sera

$$(x'-g)^2+(y'-h)^2=r^2\,,$$

en y mettant pour x', y' leurs valeurs en x, y, elle deviendra

$$\left.\begin{array}{r}2(gy-hx)\text{Sin.}(T+t)+2ah\text{Sin.}T+2ay\text{Sin.}t\\+2(gx+hy)\text{Cos.}(T+t)-2ag\text{Cos.}T+2dax\text{Cos.}t\end{array}\right\}=x^2+y^2+g^2+h^2+a^2-r^2\,.$$

Faisant, dans cet exemple, comme dans le précédent $T+t=nt$, elle deviendra

$$\left.\begin{array}{r}2(gy-hx)\,\text{Sin.}nt+2ah\,\text{Sin.}(n-1)t+2ay\,\text{Sin.}t\\+2(gx+hy)\text{Cos.}nt-2ag\text{Cos.}(n-1)t+2ax\text{Cos.}t\end{array}\right\}=x^2+y^2+g^2+h^2+a^2-r^2\,.$$

La différentielle de cette équation, par rapport à t, sera

$$\left.\begin{array}{r}n(gy-hx)\text{Cos.}nt+(n-1)ah\text{Cos.}(n-1)t+ay\text{Cos.}t\\-n(gx+hy)\,\text{Sin.}nt+(n-1)ag\text{Cos.}(n-1)t-ax\,\text{Sin.}t\end{array}\right\}=0\,,$$

Il s'agira donc d'éliminer t entre cette équation et la précédente. Pour cela, on en éliminera d'abord $\text{Sin.}(n-1)t$ et $\text{Cos.}(n-1)t$, au moyen des formules

$$\text{Sin.}(n-1)t=\text{Sin.}nt-\text{Cos.}nt\text{Sin.}t\,,$$

$$\text{Cos.}(n-1)t=\text{Cos.}nt+\text{Sin.}nt\text{Cos.}t\text{Sin.}t\,;$$

ces équations ne renfermant plus alors que $\text{Sin.}nt$, $\text{Cos.}nt$, $\text{Sin.}t$, $\text{Cos.}t$, en leur joignant les deux équations

$$\text{Sin.}^2 t + \text{Cos.}^2 t = 1 \ , \qquad \text{Sin.}^2 nt + \text{Cos.}^2 nt = 1 \ ,$$

on parviendra aux valeurs de ces quatre quantités, et l'on achèvera comme il a été dit ci-dessus.

Passons présentement au problème général, que nous pouvons énoncer comme il suit.

PROBLÈME. Deux corps S, S′, *ne pouvant prendre d'autre mouvement qu'un mouvement de rotation autour de deux axes respectifs* P, P′, *fixes dans chacun d'eux, ainsi que dans l'espace, et situés ou non dans un même plan ; on suppose que la surface de* S′ *est donnée, et on demande quelle doit être la surface de* S, *pour que, ces deux corps tournant librement autour de leurs axes respectifs, avec des vitesses angulaires données quelconques, constantes ou variables, leurs surfaces soient continuellement tangentes l'une à l'autre ?*

Solution. Ici encore, comme dans le premier problème, il nous sera permis de supposer que le corps *S* est immobile, pourvu que nous transportions au corps *S′*, dont l'axe est supposé invariablement lié au sien, un mouvement de rotation autour de ce dernier axe, égal et contraire à celui du corps *S* autour de ce même axe. Le problème se trouvera ainsi réduit au suivant :

Pendant qu'un corps S′, *terminé par une surface donnée, tourne autour d'un axe* P′, *fixe dans ce corps, mais mobile dans l'espace, avec une vitesse donnée quelconque, constante ou variable, cet axe* P′ *lui-même tourne autour d'un autre axe* P, *absolument fixe dans l'espace, situé ou non dans le même plan avec lui, et auquel on le suppose invariablement lié, avec une autre vitesse donnée quelconque, également constante ou variable ; on demande quelle est la surface* S *à laquelle, dans ce double mouvement, la surface* S′ *sera continuellement tangente ?*

Or, le problème, ainsi envisagé, n'est plus qu'un cas particulier du problème général des surfaces enveloppes, et peut se traiter comme il suit.

Soit a la longueur de la perpendiculaire commune aux deux axes P, P′, et soient O, O′, respectivement, les points de ces axes où elle se termine. Soit, de plus, α l'angle des deux axes.

Rapportons la surface fixe cherchée S à des coordonnees rectangulaires, x, y, z, immobiles dans l'espace ; en prenant, pour plus de simplicité, l'axe P pour l'axe des z, et le point O pour origine, sans rien statuer d'ailleurs sur la direction des deux autres axes.

Dans le mouvement de l'axe P′ autour de l'axe P, le point O′ décrira, sur le plan des xy, un cercle ayant l'origine O pour centre et la longueur a pour rayon. Il percera constamment le plan des xy en quelque point de cette circonférence ; et si l'on désigne par t l'angle que fait avec l'axe des x la perpendiculaire commune a pour une epoque quelconque, les équations du point O′ seront, pour cette époque,

$$x=a\text{Cos.}t\ , \qquad y=a\text{Sin.}t\ .$$

Quant à l'axe P′, puisqu'il passe par ce point, qu'il est constamment perpendiculaire à a, et qu'il fait continuellement un angle α avec l'axe P ou l'axe des z, ses équations, pour la même époque, seront

$$x=a\text{Cos.}t-z\text{Tang.}\alpha\text{Sin.}t\ ,$$

$$y=a\text{Sin.}t+z\text{Tang.}\alpha\text{Cos.}t\ .$$

Si, dans la vue d'obtenir la surface courbe, lieu de l'axe P′, dans toutes ses positions autour de l'axe P, on élimine t entre ces deux équations, il viendra

$$x^2+y^2=a^2+z^2\text{Tang.}^2\alpha\ ;$$

équation d'une hyperboloïde de révolution à une nappe, ainsi que cela doit être.

Rapportons présentement la surface donnée S' à un autre système de coordonnées rectangulaires x', y', z', fixes dans cette surface, mais mobiles avec elle dans l'espace, tant autour de son axe propre P$'$ qu'autour de l'axe fixe P; mais encore ici, pour plus de simplicité, prenons l'axe de révolution P$'$ lui-meme pour axe des z' et le point O$'$ pour origine. Le plan des $x'y'$ coupera constamment celui des xy suivant la droite mobile a, et fera avec lui un angle constamment égal à α. Quant à l'axe des x', l'angle qu'il fera avec cette droite a sera un angle variable, fonction de t, dont la relation avec cet autre angle dépendra de la nature des deux mouvemens de rotation. Nous représenterons cet angle par T; d'après quoi l'axe des x' fera avec les x un angle pour lequel on aura

$$\mathrm{Cos.}(x\,,\,x')=\mathrm{Cos.}t\mathrm{Cos.}T-\mathrm{Sin.}t\mathrm{Sin.}T\mathrm{Cos.}\alpha\ .$$

Ces choses ainsi entendues, supposons que l'on veuille amener le système des x', y', z' à coïncider avec celui des x, y, z; on pourra y procéder par degrés, ainsi qu'il suit; 1.° on fera d'abord tourner le système autour de l'axe des z' de la quantité angulaire $-T$; soient alors p, q, r les dénominations respectives des nouvelles coordonnées; l'axe des p se trouvera coïncider avec la droite a; 2.° on fera ensuite tourner le second système autour de l'axe des p, de la quantité angulaire $-\alpha$; soient alors p', q', r' les dénominations respectives des nouvelles coordonnées; alors le plan des $p'q'$ coïncidera avec celui des xy; de sorte que, pour compléter la coïncidence, il ne sera plus question, 3.° que de faire tourner ce dernier système autour de l'axe des r' de la quantité angulaire $-t$, et de transporter ensuite l'origine de O$'$ en O.

Donc, par les formules à l'aide desquelles on passe, sur un plan, d'un système rectangulaire, à un autre qui l'est également, on aura successivement

$$x'=+p\mathrm{Cos.}T+q\mathrm{Sin.}T\ ,\qquad r=+r'\mathrm{Cos.}\alpha+q'\mathrm{Sin.}\alpha\ ,$$

$$y'=-p\text{Sin.}T+q\text{Cos.}T\ , \qquad q=-r'\text{Sin.}\alpha+q'\text{Cos.}\alpha\ ,$$

$$z'=+r\ ; \qquad p=+p'\ ;$$

$$p'=+(x-a\text{Cos.}t)\text{Cos.}t+(y-a\text{Sin.}t)\text{Sin.}t\ ,$$

$$q'=-(x-a\text{Cos.}t)\text{Sin.}t+(y-a\text{Sin.}t)\text{Cos.}t\ ,$$

$$r'=+z\ ;$$

substituant donc les valeurs de p', q', r' dans celles de p, q, r, et ensuite celles-ci dans celle de x', y', z' on aura

$$\begin{aligned}x'=&+x(\text{Cos.}t\text{Cos.}T-\text{Cos.}\alpha\text{Sin.}t\text{Sin.}T)\\&+y(\text{Sin.}t\text{Cos.}T+\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}t\text{Sin.}T)\\&-z\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}T-a\text{Cos.}T\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y'=&-x(\text{Cos.}t\text{Sin.}T+\text{Cos.}\alpha\text{Sin.}t\text{Cos.}T)\\&-y(\text{Sin.}t\text{Sin.}T-\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}t\text{Cos.}T)\\&-z\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}T+a\text{Sin.}T\ ,\end{aligned}$$

$$z'=-x\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}t+y\text{Sin.}\alpha\text{Cos.}t+z\text{Cos.}\alpha\ ;$$

Cela posé, soit

$$f'(x'y'z')=S'=0\ ,$$

l'équation de la surface S', rapportée à ses propres axes, et que l'on suppose donnée dans l'énoncé du problème ; en y substituant pour x', y', z' les valeurs que nous venons de trouver, en x, y, z, l'équation résultante, de la forme

$$F(x\,,\,y\,,\,z\,,\,t)=0\,,$$

sera celle de cette même surface S', dans toutes les positions qu'elle peut prendre, par rapport à la surface cherchée S ; ou, ce qui revient au même, cette équation sera l'équation commune à une infinité de surfaces, dont chacune sera une des positions de la surface S' par rapport à la surface S, et qu'on en déduirait en faisant varier la valeur du paramètre t. Puis donc que, dans toutes ces positions, la surface S' doit être continuellement tangente à la surface S, cette dernière ne sera autre chose que l'enveloppe de l'espace parcouru par la première. En conséquence, et d'après la théorie connue des surfaces enveloppes (*), si l'on élimine t entre cette dernière équation et sa différentielle prise par rapport à ce paramètre, l'équation résultante, de la forme

$$f(x\,,\,y\,,\,z)=S=0\,;$$

sera l'équation demandée de la surface inconnue S.

Avant de passer aux applications, considérons, en particulier, le cas où les deux axes P, P′ sont parallèles; on a alors $\text{Sin.}\alpha=0$, $\text{Cos.}\alpha=1$, et nos formules deviennent

$$x'=+x\text{Cos.}(T+t)+y\text{Sin.}(T+t)-a\text{Cos.}T\,,$$
$$y'=-x\text{Sin.}(T+t)+y\text{Cos.}(T+t)+a\text{Sin.}T\,,$$
$$z'=+z\,;$$

formules qui coïncident parfaitement avec celle du premier problème, ainsi qu'il doit en effet arriver dans ce cas.

Pour premier exemple, supposons que la surface S' soit une sphère dont le centre soit sur l'axe P′, son équation sera de la forme

(*) Voyez l'endroit de ce recueil déjà cité.

$$x'^2+y'^2+(z'-c)^2=r^2\ ;$$

en y mettant pour x', y', z' leurs valeurs en x, y, z, elle deviendra, toutes réductions faites,

$$\{x-(a\text{Cos}.t-c\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.t)\}^2+\{y-(a\text{Sin}.t+c\text{Sin}.\alpha\text{Cos}.t)\}^2+(z-c\text{Cos}.\alpha)^2=r^2\ .$$

La différentielle de cette équation, prise par rapport à t est

$$\left.\begin{array}{l}(a\text{Sin}.t+c\text{Sin}.\alpha\text{Cos}.t)\{x-(a\text{Cos}.t-c\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.t)\}\\ +(a\text{Cos}.t-c\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.t)\{y-(a\text{Sin}.t+c\text{Sin}.\alpha\text{Cos}.t)\}\end{array}\right\}=0\ .$$

si, dans ces deux équations, on considère $a\text{Cos}.t-c\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.t$ et $a\text{Sin}.t+c\text{Sin}.\alpha\text{Cos}.t$ comme deux inconnues, on en tirera

$$a\text{Cos}.t-c\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.t=\frac{x\sqrt{a^2+c^2\text{Sin}.^2\alpha}}{\sqrt{a^2+c^2\text{Sin}.^2\alpha}\pm\sqrt{r^2-(z-c\text{Cos}.\alpha)^2}}\ ;$$

$$a\text{Sin}.t+c\text{Sin}.\alpha\text{Cos}.t=\frac{y\sqrt{a^2+c^2\text{Sin}.^2\alpha}}{\sqrt{a^2+c^2\text{Sin}.^2\alpha}\mp\sqrt{r^2-(z-c\text{Cos}.\alpha)^2}}\ ;$$

prenant la somme des quarrés de ces deux équations, t disparaîtra de lui-même, et, en réduisant, on obtiendra, pour l'équation de la surface cherchée,

$$1=\frac{x^2}{\{\sqrt{a^2+c^2\text{Sin}.^2\alpha}\pm\sqrt{r^2-(z-c\text{Cos}.\alpha)^2}\}^2}$$

$$+\frac{y^2}{\{\sqrt{a^2+c^2\text{Sin}.^2\alpha}\mp\sqrt{r^2-(z-c\text{Cos}.\alpha)^2}\}^2}\ ;$$

ou, en chassant les dénominateurs et développant,

{[r^2

$$\{[r^2-a^2-c^2\mathrm{Sin.}^2\alpha-(z-c\mathrm{Cos.}\alpha)^2]^2-[r^2+a^2+c^2\mathrm{Sin.}^2\alpha-(z-c\mathrm{Cos.}\alpha)^2](x^2+y^2)\}^2$$

$$=4(a^2+c^2\mathrm{Sin.}^2\alpha)[r^2-(z-c\mathrm{Cos.}\alpha)^2](x^2-y^2)^2$$

équation que l'on reconnaîtra aisément pour être celle d'un canal circulo-cylindrique incliné au plan des xy.

Si l'on suppose le centre de la sphère au point O′, on aura $c=o$, et l'equation deviendra

$$x^2+y^2+z^2=r^2+a^2\pm 2a\sqrt{r^2-z^2}\ ;$$

équation d'un canal circulo-cylindrique de révolution autour de l'axe des z quel que soit d'ailleurs l'angle α.

Soit, en genéral, la surface S' une surface de révolution autour de l'axe des z'; son équation sera de la forme

$$x'^2+y'^2=\varphi(z')\ ;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$(1-\mathrm{Sin.}^2\alpha\mathrm{Sin.}^2t)x^2+2yz\mathrm{Sin.}\alpha\mathrm{Cos.}\alpha\mathrm{Cos.}t-2ax\mathrm{Cos.}t+a^2$$

$$+(1-\mathrm{Sin.}^2\alpha\mathrm{Cos.}^2t)y^2-2xz\mathrm{Sin.}\alpha\mathrm{Cos.}\alpha\mathrm{Sin.}t-2ay\mathrm{Sin.}t$$

$$+\mathrm{Sin.}^2\alpha z^2-2xy\mathrm{Sin.}^2\alpha\mathrm{Sin.}t\mathrm{Cos.}t$$

$$=\varphi(-x\mathrm{Sin.}\alpha\mathrm{Sin.}t+y\mathrm{Sin.}\alpha\mathrm{Cos.}t+z\mathrm{Cos.}\alpha)\ .$$

équation indépendante de T, comme on pouvait bien s'y attendre.

Si la surface S' est un cylindre, nous aurons simplement $\varphi(z')=r^2$, et l'équation sera

$$\left.\begin{array}{r}(x^2+y^2-z^2\mathrm{Sin.}^2\alpha+a^2-r^2)-\mathrm{Sin.}^2\alpha(x\,\mathrm{Sin.}t-y\,\mathrm{Cos.}t)^2\\ +2z\mathrm{Sin}\,\alpha\mathrm{Cos.}\alpha(x\mathrm{Sin}\,t-y\mathrm{Cos.}t)-2a(x\mathrm{Cos.}t+y\,\mathrm{Sin.}t)\end{array}\right\}=0$$

sa différentielle, par rapport à t, sera

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Sin.}\alpha\mathrm{Cos.}\alpha(x\mathrm{Cos.}t+y\mathrm{Sin.}t)\\ \quad+a(x\,\mathrm{Sin.}t-y\mathrm{Cos.}t)\end{array}\right.-\mathrm{Sin.}^2\alpha(x\mathrm{Sin.}t-y\mathrm{Cos.}t)(x\mathrm{Cos.}t+y\mathrm{Sin.}t)=0;$$

Il ne s'agira donc plus que d'éliminer Sin.t et Cos.t entre ces deux équations et l'équation $\mathrm{Sin.}^2t+\mathrm{Cos.}^2t=1$.

Ces applications n'ont, comme l'on voit, d'autre difficulté que la longueur et la complication des calculs; et, pour cette raison, nous ne les étendrons pas davantage. Nous terminerons donc en observant que, communément, le mouvement des pignons et lanternes étant beaucoup plus rapide que celui des roues; la moindre défectuosité dans la construction de leurs ailes ou fuseaux peut entraîner de graves irrégularités dans la marche des machines; c'est donc principalement sur la parfaite exécution de ces ailes ou fuseaux que l'attention de l'artiste doit se porter; puis donc que, d'après la théorie qui vient d'être développée, leur forme est arbitraire, nous conseillerons de tailler les ailes des pignons en triangles isocèles, ou pour mieux dire en prismes triangulaires isocèles, et de faire les fuseaux des lanternes cylindriques; attendu que, ces formes étant d'une exécution facile, ce doit être aussi celles qu'on peut se promettre d'exécuter avec le plus de perfection.