ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

VECTEN

Questions résolues. Solutions du premier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 133 de ce volume. Solution géométrique

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 10 (1819-1820), p. 379-385
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__379_0>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solutions du premier des deux problèmes de géométrie proposés a la page 133 de ce volume.

*P*ROBLÈME. *Par un point donné dans l'intérieur d'un angle trièdre tri-rectangle, et également distant de ses trois faces, conduire un plan tellement dirigé que sa partie interceptée dans l'angle trièdre dont il s'agit soit un triangle semblable à un triangle donné ?*

Solution géométrique ;

Par M. Vecten, licencié ès sciences.

Si nous considérons les trois côtés du triangle donné comme les diamètres de trois sphères, ces sphères se couperont en deux points, au-dessus et au-dessous du plan de ce triangle ; et il sera très-facile de déterminer la projection commune de ces deux points sur le plan du triangle, ainsi que leurs distances à cette projection.

Si l'on joint l'un quelconque de ces deux points aux trois sommets du triangle par des droites ; ces droites seront les arêtes d'un angle trièdre tri-rectangle auquel le triangle donné se trouvera inscrit, et il sera facile de déterminer les longueurs de ces trois arêtes. En supposant donc que cet angle trièdre soit celui qui est donné, on lui aura inscrit le triangle donné, et il ne sera plus question que de mener par le point donné un plan qui soit parallèle à celui de ce triangle.

Or, c'est là une opération que l'on peut exécuter facilement et rigoureusement par les procedés de la géométrie descriptive, ou par tous autres équivalens ; nous pouvons donc considérer le problème comme complètement résolu.

On voit même que le problème ne serait guère plus difficile à résoudre, si le point donné, au lieu d'être également distant des trois faces de l'angle trièdre, était quelconque dans cet angle.

Ce problème n'est, au surplus, qu'un cas particulier du problème où l'on proposerait de *mener par un point donné quelconque dans un angle trièdre donné, aussi quelconque, un plan tellement dirigé que sa partie interceptée dans l'angle trièdre dont il s'agit fût un triangle semblable à un triangle donné?*

La solution de ce dernier problème ne différerait uniquement de celle de l'autre qu'en ce que, pour déterminer les longueurs des portions d'arêtes interceptées par le triangle donné, supposé inscrit dans l'angle trièdre donné, il faudrait substituer aux trois sphères trois surfaces de révolution, ayant pour axes les trois côtés de ce triangle, et pour génératrices des arcs respectivement capables des trois angles plans de l'angle trièdre. Mais il est au moins douteux qu'alors le problème pût être résolu d'une manière rigoureuse avec la règle et le compas.

Solution analitique ;

Par M. GERGONNE.

Soient a, b, c les trois côtés du triangle donné, et A, B, C les angles respectivement opposés, dont les sommets sont supposés A, B, C.

Soit pris l'angle trièdre tri-rectangle donné pour celui des coordonnées

données positives; supposons, pour plus de généralité, que le point donné soit quelconque dans cet angle trièdre, et que ses trois coordonnées soient α, β, γ.

Supposons encore qu'on exige que, dans le triangle cherché, les sommets homologues à A, B, C, soient respectivement sur les axes des X, Y, Z, que nous prendrons pour symboles des coordonnées courantes.

Tout se réduit évidemment à déterminer les segmens qui devront être interceptés sur les axes des X, Y, Z, à partir de l'origine par le plan cherché. Représentons respectivement ces segmens par x, y, z.

L'équation du plan cherché sera conséquemment

$$\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}+\frac{Z}{z}=1\ ;$$

et, puisque ce plan doit contenir le point donné, on aura

$$\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}=1\ ,$$

ou bien

$$\alpha yz+\beta zx+\gamma xy=xyz\ . \qquad (1)$$

Mais, puisque le triangle cherché doit être semblable au triangle donné, on devra avoir aussi

$$\left.\begin{aligned} y^2+z^2&=\lambda^2a^2\ ,\\ z^2+x^2&=\lambda^2b^2\ ,\\ x^2+y^2&=\lambda^2c^2\ ;\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

λ étant un nombre inconnu, indiquant le rapport des côtés homologues de ces deux triangles. Nous avons donc ainsi quatre équations entre les quatre inconnues x, y, z, λ.

En retranchant tour-à-tour chacune des équations (2) de la somme des deux autres, il viendra

$$2x^2=\lambda^2(b^2+c^2-a^2)=2\lambda^2bc\text{Cos.}A\ ,$$

$$2y^2=\lambda^2(c^2+a^2-b^2)=2\lambda^2ca\text{Cos.}B\ ,$$

$$2z^2=\lambda^2(a^2+b^2-c^2)=2\lambda^2ab\text{Cos.}C\ ;$$

d'où, en divisant par 2 et extrayant la racine quarrée des deux membres

$$\left.\begin{array}{l} x=\lambda\sqrt{bc\text{Cos.}A}\ , \\ y=\lambda\sqrt{ca\text{Cos.}B}\ , \\ z=\lambda\sqrt{ab\text{Cos.}C}\ ; \end{array}\right\}\quad(3)$$

on aura donc

$$\alpha yz+\beta zx+\gamma xy=\lambda^2\left\{\begin{array}{r} \alpha a\sqrt{bc\text{Cos.}B\text{Cos.}C} \\ +\beta b\sqrt{ca\text{Cos.}C\text{Cos.}A} \\ +\gamma c\sqrt{ab\text{Cos.}A\text{Cos.}B} \end{array}\right\},$$

et

$$xyz=\lambda^3abc\sqrt{\text{Cos.}A\text{Cos.}B\text{Cos.}C}\ ;$$

substituant donc dans l'équation (1) et divisant par λ^2, il viendra

$$\alpha a\sqrt{bc\text{Cos.}B\text{Cos.}C}+\beta b\sqrt{ca\text{Cos.}C\text{Cos.}A}+\gamma c\sqrt{ab\text{Cos.}A\text{Cos.}B}$$

$$=\lambda abc\sqrt{\text{Cos}.A\,\text{Cos}.B\,\text{Cos}.C}\;;$$

d'où

$$\lambda=\frac{\alpha}{\sqrt{bc\,\text{Cos}.A}}+\frac{\beta}{\sqrt{ca\,\text{Cos}.B}}+\frac{\gamma}{\sqrt{ab\,\text{Cos}.C}}\;;$$

Tel est donc le rapport des côtés du triangle cherché à ceux du triangle donné.

En substituant enfin cette valeur de λ dans les équations (3), on aura

$$x=\alpha+\beta\sqrt{\frac{b\,\text{Cos}.A}{a\,\text{Cos}.C}}+\gamma\sqrt{\frac{c\,\text{Cos}.A}{a\,\text{Cos}.C}}\,,$$

$$y=\beta+\gamma\sqrt{\frac{c\,\text{Cos}.B}{b\,\text{Cos}.C}}+\alpha\sqrt{\frac{a\,\text{Cos}.B}{b\,\text{Cos}.A}}\,,$$

$$z=\gamma+\alpha\sqrt{\frac{a\,\text{Cos}.C}{c\,\text{Cos}.A}}+\beta\sqrt{\frac{b\,\text{Cos}.C}{c\,\text{Cos}.B}}\,.$$

Telles sont donc les valeurs des inconnues du problème.

Mais si des sommets A, B, C du triangle donné, on abaisse respectivement des perpendiculaires AA′, BB′, CC′ sur les directions des côtés opposés BC, CA, AB, on aura

$$\text{BA}'=c\,\text{Cos}.B\,,\qquad \text{AB}'=c\,\text{Cos}.A\,,$$

$$\text{CB}'=a\,\text{Cos}.C\,,\qquad \text{BC}'=a\,\text{Cos}.B\,,$$

$$\text{AC}'=b\,\text{Cos}.A\,,\qquad \text{CA}'=b\,\text{Cos}.C\,,$$

donc, en substituant, on aura

$$x=\alpha+\beta\sqrt{\frac{\mathrm{AC'}}{\mathrm{BC'}}}+\gamma\sqrt{\frac{\mathrm{AB'}}{\mathrm{CB'}}}\,,$$

$$y=\beta+\gamma\sqrt{\frac{\mathrm{BA'}}{\mathrm{CA'}}}+\alpha\sqrt{\frac{\mathrm{BC'}}{\mathrm{AC'}}}\,;$$

$$z=\gamma+\alpha\sqrt{\frac{\mathrm{CB'}}{\mathrm{AB'}}}+\beta\sqrt{\frac{\mathrm{CA'}}{\mathrm{BA'}}}\,.$$

Si, présentement, sur les trois côtés du triangle donné, pris successivement comme diamètres, on décrit trois demi-cercles, et qu'on prolonge respectivement les perpendiculaires $\mathrm{AA'}$, $\mathrm{BB'}$, $\mathrm{CC'}$, jusqu'à la rencontre de leurs circonférences en $\mathrm{A''}$, $\mathrm{B''}$, $\mathrm{C''}$; en menant $\mathrm{BA''}$, $\mathrm{CA''}$, $\mathrm{CB''}$, $\mathrm{AB''}$, $\mathrm{AC''}$, $\mathrm{BC''}$, par la propriété des cordes inscrites aux demi-cercles, on aura

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{AC'}}{\mathrm{BC'}}=\left(\dfrac{\mathrm{AC''}}{\mathrm{BC''}}\right)^2\,,\\[2ex] \dfrac{\mathrm{BA'}}{\mathrm{CA'}}=\left(\dfrac{\mathrm{BA''}}{\mathrm{CA''}}\right)^2\,,\\[2ex] \dfrac{\mathrm{CB'}}{\mathrm{AB'}}=\left(\dfrac{\mathrm{CB''}}{\mathrm{AB''}}\right)^2\,;\end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{BC'}}{\mathrm{AC'}}=\left(\dfrac{\mathrm{BC''}}{\mathrm{AC''}}\right)^2\,,\\[2ex] \dfrac{\mathrm{CA'}}{\mathrm{BA'}}=\left(\dfrac{\mathrm{CA''}}{\mathrm{BA''}}\right)^2\,,\\[2ex] \dfrac{\mathrm{AB'}}{\mathrm{CB'}}=\left(\dfrac{\mathrm{AB''}}{\mathrm{CB''}}\right)^2\,;\end{array}\right.$$

substituant donc, il viendra finalement

$$x=\alpha+\beta\frac{\mathrm{AC''}}{\mathrm{BC''}}+\gamma\frac{\mathrm{AB''}}{\mathrm{CB''}}\,,$$

$$y=\beta+\gamma\frac{\mathrm{BA''}}{\mathrm{CA''}}+\alpha\frac{\mathrm{BC''}}{\mathrm{AC''}}\,,$$

$$z = \gamma + \alpha \frac{CB''}{AB''} + \beta \frac{CA''}{BA''},$$

valeurs extrêmement faciles à construire.