ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

CONDITIONS DE LA SOUSCRIPTION.

Depuis le premier juillet 1810, ce recueil paraît de mois en mois, par livraisons de 30 à 40 pages. La couverture de chaque livraison présente l'annonce des ouvrages nouveaux et des concours académiques.

On peut souscrire indifféremment,

Au bureau des *Annales*, rue du St-Sacrement, maison *Fouquet*, à Montpellier, [Hérault];

Chez madame *veuve Courcier*, imprimeur-libraire pour les mathématiques, rue du Jardinet, n.° 12, quartier de St-André-des-Arcs, à Paris;

Et à tous les bureaux de poste.

Les articles à insérer et ouvrages à annoncer doivent être adressés, francs de port, au *Bureau des Annales*.

Le prix de la souscription annuelle est 21 fr. pour la France, et 24 fr. pour l'étranger. Il en coûte moitié moins, pour six mois; et le prix de chacun des onze premiers volumes est inférieur de 3 fr. à celui de la souscription annuelle. Les lettres et l'argent doivent être affranchis.

AVIS au Relieur,

Sur le placement des Planches.

Planche	I.	Après la page	36.
	II.		68.
	III.		164.
	IV.		228.
	V.		268.

ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

RECUEIL PÉRIODIQUE,

RÉDIGÉ ET PUBLIÉ

Par J. D. GERGONNE, professeur d'astronomie, doyen de la faculté des sciences de Montpellier, membre de plusieurs sociétés savantes.

TOME ONZIÈME.

A NISMES,

DE L'IMPRIMERIE DE P. DURAND-BELLE.

Et se trouve à PARIS, chez la dame Veuve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, rue du Jardinet, n.° 12, quartier St-André-des-Arcs.

1820 ET 1821.

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Théorie élémentaire des contacts des cercles, des sphères, des cylindres et des cônes;

Par M. J. B. Durrande, professeur de mathématiques spéciales et de physique au collége royal de Cahors.

On a souvent reproché à la géométrie élémentaire, telle que l'ont cultivée Euclide et Apollonius, chez les anciens, Viète et Fermat, chez les modernes, de ne pouvoir s'élever à cette généralité qui coordonne entre elles et rattache à un principe commun toutes les parties d'une même théorie. On l'a jugé à peu près incapable de cette élégante et féconde simplicité qui accompagne si souvent les autres méthodes; et on l'a mise, en particulier, beaucoup au-dessous de cette géométrie nouvelle que l'on doit au génie créateur de l'illustre Monge; et qui a offert à ses nombreux disciples un si vaste champ de belles découvertes.

Mais, sans prétendre faire ici le procès à des méthodes dont je me plais à reconnaître toute la supériorité; sans prétendre non plus assimiler l'ancienne géométrie à cette autre géométrie qui, née des méditations de notre Descartes, a reçu de si grands développemens entre les mains de Lagrange et de ce même Monge, dont la destinée semble avoir été d'associer son nom à toutes les grandes découvertes qui ont signalé la dernière moitié du XVIII.^{e} siècle; je n'en demeure pas moins persuadé que la géométrie d'Euclide, maniée d'une manière convenable, peut, quelque bornée qu'elle puisse paraître, au premier abord, dans ses moyens d'investigation, aller aussi loin qu'aucune autre méthode qu'on tenterait de lui substituer; et qu'elle peut notamment égaler la géométrie analitique, par la généralité et l'élégance de ses résultats; et c'est principalement à faire partager au lecteur ma conviction sur ce point que je consacre l'essai que l'on va lire.

Je prendrai pour exemple deux problèmes qui n'ont pas acquis moins de célébrité par le rang éminent des géomètres qui en ont fait tour-à-tour le sujet de leurs recherches, que par le nombre et la variété des procédés qui leur ont été successivement appliqués; mais qui néanmoins n'ont été que très-récemment résolus, de manière à ne plus laisser d'espoir d'une solution plus heureuse, par M. Gergonne, qui semble s'être frayé, dans la géométrie analitique, une route entièrement nouvelle (*). On sent assez que je veux parler des problèmes où il s'agit de décrire un cercle qui en touche trois autres sur un plan ou une sphère qui en touche quatre autres dans l'espace. Apollonius avait traité le premier de ces deux problèmes, dans un ouvrage qui ne nous est point parvenu. Adrien Romain, géomètre Belge, tenta de réparer cette perte; mais il eut recours à des intersections de sections coniques, tandis que le problème est de nature à être résolu par les élé-

(*) Voyez les *Mémoires de l'académie de Turin*, pour 1814, ou les *Annales de Mathématiques*, tom. IV, pag. 349, et tom. VII, pag. 289.

mens, comme en effet Viète le fit peu après. La solution de Viète, qui consiste à ramener successivement le problème à une suite d'autres plus simples n'est point extrêmement compliquée ; mais elle est fort longue et tout-à-fait dépourvue d'élégance, au point qu'il n'est pas du tout facile d'en garder le souvenir. Fermat résolut ensuite l'autre problème ; mais il y a peu d'invention dans sa solution, exactement calquée sur celle de Viète, et conséquemment sujette aux mêmes reproches. Postérieurement, ces mêmes problèmes ont été de nouveau attaqués par un grand nombre de géomètres, parmi lesquels je distinguerai seulement Descartes, qui tenta le premier de les résoudre par l'analise algébrique, et ne recueillit de cet essai que des formules excessivement compliquées ; Newton, qui y est revenu à plusieurs reprises et par des procédés divers, tant dans ses *Principes* que dans son *Arithmétique universelle* ; et enfin les élèves les plus distingués de Monge, qui y ont appliqué les méthodes de leur maître. Mais, indépendamment de leur élégant laconisme qui permet d'en réduire l'énoncé à quelques mots, ce qui distingue éminemment les constructions de M. Gergonne, ce qui leur assure une incontestable supériorité, c'est que, tandis que jusqu'ici on n'était généralement parvenu à résoudre ces problèmes qu'en les ramenant successivement à d'autres, de plus en plus faciles ; ce qui, en définitif, rendait la construction totale assez compliquée. M. Gergonne, au contraire, arrive directement au but, et par des procédés qui, avec de très-légères modifications, se plient sans effort à la résolution de ces mêmes problèmes auxquels on avait coutume de ramener ceux-là. Il fait plus encore, et résout, par les mêmes procédés, le problème où il s'agit de décrire un cercle qui en touche trois autres sur une sphère ; problème que, jusqu'à présent, personne n'avait même songé à aborder.

Dans le dessein où je suis de venger l'ancienne géométrie du reproche d'impuissance dont ces mêmes problèmes ont semblé offrir un nouveau motif, je ne puis donc rien faire de plus convenable que de lutter avec elle seule contre ce que la géométrie analitique offre peut-être de plus élégant, et de montrer que, par de simples comparaisons de triangles, on peut facilement être conduit à ces mêmes constructions auxquelles M. Gergonne est parvenu par une voie tout-à-fait différente.

Mais, comme les détails dans lesquels je vais entrer se lient à la théorie des pôles et polaires, à celle des centres axes et plans de similitude, à celle des centres axes et plans radicaux; théories qui n'ont guère été démontrées jusqu'ici que par les méthodes de Monge; je commencerai par en établir les principaux points à l'aide de l'ancienne géométrie. Je ne ferai ainsi, au surplus, qu'atteindre plus complètement le but que j'ai en vue; puisque, tandis que, dans les applications de ce genre, les considérations déduites de la doctrine de Monge sont souvent inapplicables, on verra qu'au contraire les démonstrations élémentaires, par lesquelles je me propose de les remplacer, ne refusent jamais le service, et s'appliquent sans distinction à tous les cas. Je pense d'ailleurs ne point faire une chose tout-à-fait inutile, en mettant à la portée des hommes même qui n'ont en géométrie que les notions les plus élémentaires, des théories dont chaque jour voit étendre les applications, et auxquelles leur extrême fécondité méritera sans doute bientôt une place distinguée dans tous les ouvrages destinés à l'enseignement des principes de cette belle science.

Un point pouvant être considéré indistinctement comme un cercle ou une sphère dont le rayon est nul; une droite comme un cercle dont le rayon est infini, ou comme un cône dont l'angle générateur est nul, ou, et enfin, comme un cylindre dont le rayon est nul; et un plan comme une sphère ou un cylindre dont le rayon est infini, ou comme un cône dont l'angle générateur est droit; il s'ensuit que tout ce que nous allons dire des cercles, des sphères, des cônes et des cylindres est aussi applicable, avec des modifications convenables, aux points, droites et plans; mais, pour atteindre plus rapidement notre but, et écarter des discussions beaucoup plus longues que difficiles, nous abandonnerons à la sagacité du lecteur l'examen de ces cas particuliers, sur lesquels, au surplus, nous pourrons revenir dans une autre occasion.

Par le même motif, lorsque nous parlerons de plusieurs cercles, de plusieurs sphères, de plusieurs cônes ou de plusieurs cylindres, nous supposerons qu'ils ne sont ni égaux ni concentriques; il sera aisé de voir ensuite ce qui arriverait s'il en était autrement.

Enfin, il faudra toujours supposer les objets dans le cas le plus général; c'est-à-dire, que les points dont nous parlerons ne seront jamais ni au centre des cercles et des sphères, ni sur l'axe des cônes ou des cylindres, ni à la circonférence des cercles, ni à la surface des sphères, cylindres et cônes; et des suppositions analogues devront avoir lieu pour les droites et les plans.

SECTION PREMIÈRE.

Propriétés des cercles sur un plan.

§. I.

Des pôles et polaires.

1. Nous appellerons, à l'avenir, *pôles conjugués* d'un cercle, deux points en ligne droite avec son centre, et du même côté de ce centre, tels que le rayon du cercle sera moyen proportionnel entre leurs distances à son centre (*).

2. Il suit de cette definition, 1.° qu'il n'est aucun point du plan d'un cercle qui ne puisse être pris pour pôle, et auquel il ne

(*) Il est presque superflu de prévenir qu'ici le mot *pôle* a une toute autre acception que celle qu'on lui donne, lorsqu'il est question des cercles d'une sphère; nous en aurions employé une autre, sans la répugnance, bien ou mal fondée, que l'on montre généralement pour les mots nouveaux.

réponde un pôle conjugué, dont il est lui-même le conjugué; 2.° que de ces deux points l'un est toujours intérieur et l'autre extérieur au cercle, de telle sorte que, plus l'un s'éloigne du centre, plus l'autre s'en approche; 3.° que le sommet d'un angle circonscrit au cercle et le milieu de sa corde de contact sont deux pôles conjugués l'un à l'autre.

3. Lorsque par l'un quelconque de deux pôles conjugués par rapport à un cercle, on menera une perpendiculaire indéfinie à la droite qui contient ces deux points, nous dirons de cette droite qu'elle est la *droite polaire* ou simplement la *polaire* de l'autre point qu'à l'inverse nous appellerons le *pôle* de cette droite.

4. Il suit de ces définitions, 1.° qu'il n'est, sur le plan d'un cercle, aucun point qui n'ait sa polaire, ni aucune droite qui n'ait son pôle; 2.° que le pôle est extérieur ou intérieur au cercle, suivant que la polaire lui est sécante ou ne le rencontre pas; 3.° que le sommet de l'angle circonscrit est le pôle de la corde de contact, dont le milieu est à son tour le pôle de la parallèle à cette droite menée par le sommet de l'angle.

5. *THÉORÈME. Le pôle d'une droite est la commune section des cordes de contact de tous les angles circonscrits qui ont leur sommet sur cette droite; et réciproquement la polaire d'un point est le lieu géométrique des sommets des angles circonscrits dont les cordes de contact passent par ce point.*

Démonstration. Soit PQ (fig. 1, 2) une droite fixe passant par le centre C d'un cercle; soit S le sommet d'un angle quelconque circonscrit à ce cercle, le touchant en A, B; soit P l'intersection de la corde de contact AB avec la droite PQ et soit Q le pied de la perpendiculaire abaissée du point S sur la même droite.

Soient menés le rayon CA et la droite CS coupant perpendiculairement AB en son milieu M. Les triangles rectangles CQS, CMP seront semblables, et il en sera de même des triangles rectangles CAS, AMC; on aura donc les deux proportions

$$CP : CS :: CM : CQ ,$$

$$CS : CA :: CA : CM ;$$

d'où on conclura, par multiplication et réduction

$$\div CP : CA : CQ ;$$

les points P, Q sont donc (1) deux pôles conjugués; P est donc le pôle de SQ (3); ce qui démontre le théorème énoncé (*).

6. Ce théorème revient à dire, en d'autres termes, que l'*intersection de deux droites est le pôle de la droite qui passe par les pôles de ces deux-là.* Il offre ainsi un moyen commode de déterminer le pôle par la polaire et réciproquement.

7. Si, en effet, le pôle est donné, on menera deux cordes quelconques qui y concourent, et les sommets des angles circonscrits qui auront ces cordes pour cordes de contact seront deux points de la polaire cherchée Si, au contraire, c'est la polaire qui est donnée, on fera de deux quelconques de ses points les sommets de deux angles circonscrits, dont les cordes de contact se couperont au pôle demandé (**).

§. II.

Des centres et axes de similitude.

8. Nous dirons, à l'avenir, qu'un *angle* est *circonscrit à deux*

(*) La démonstration de Monge n'est applicable qu'au seul cas où la polaire est extérieure au cercle.

(**) Ces constructions ont, sur toutes autres qu'on leur substituerait, l'avantage de n'exiger, à la rigueur, que le simple usage de la règle.

cercles; lorsque ses côtés seront des tangentes communes à ces deux cercles, ayant l'une et l'autre les deux cercles du même côté, ou l'une et l'autre ces deux cercles de différens côtés; l'angle circonscrit sera dit *extérieur* dans le premier cas, et *intérieur* dans le second. Dans l'un et l'autre cas, le sommet de l'angle circonscrit est évidemment en ligne droite avec les centres des deux cercles.

9. Nous appellerons, à l'avenir, *centre de similitude de deux cercles*, un point de la droite qui joint leurs centres dont les distances à ces deux centres seront respectivement proportionnelles aux rayons des deux cercles. C'est, en d'autres termes, un point à la fois semblablement placé par rapport aux deux cercles, ce qui justifie sa dénomination introduite par Monge.

10. Deux cercles tracés sur un même plan ont toujours deux centres de similitude; l'un situé sur la droite même qui joint leurs centres, et l'autre situé sur le prolongement de cette droite, du côté du plus petit des deux cercles. Pour distinguer ces deux points l'un de l'autre, nous les désignerons respectivement sous les dénominations de *centre de similitude interne* et de *centre de similitude externe*.

11. Il est aisé de voir que, lorsque les deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre, leurs centres de similitude interne et externe ne sont respectivement autre chose (8) que les sommets des angles circonscrits, tant intérieurs qu'extérieurs; de sorte qu'alors la détermination de ces deux points se trouve ramenée à celle de la tangente commune à deux cercles. Nous verrons bientôt comment on peut les déterminer dans les autres cas.

12. *THÉORÈME. Les centres de similitude externes de trois cercles, tracés sur un même plan, et pris successivement deux à deux, sont tous trois situés sur une même ligne droite; et chacun d'eux se trouve en ligne droite avec deux des centres de similitude interne des mêmes cercles; de telle sorte que ces six points sont les intersections de quatre droites formant un quadrilatère complet.*

Démonstration.

Démonstration. Soient C, C', C'' (fig. 3) les centres des trois cercles, dont les rayons soient respectivement R, R', R''; soient E, I respectivement les centres de similitude externe et interne des deux cercles dont les centres sont C', C''; soient E', I' ceux des deux cercles dont les centres sont C'', C; soit menée par le point C'' une parallèle indéfinie à CC', coupant EE' en M et II' en N.

Désignons par E'' l'intersection de EE' et CC'; en vertu de la définition des centres de similitude (9) et à cause des parallèles, nous aurons

$$CE':C''E' \quad \text{ou} \quad R:R''::CE'':C''M\,,$$

$$C''E:C'E \quad \text{ou} \quad R'':R'::C''M:C'E''\,;$$

d'où nous conclurons, par multiplication et réduction,

$$R:R'::CE'':C'E''$$

Le point E'', intersection de EE' et CC', est donc (9) le centre de similitude externe des deux cercles dont les centres sont C, C'; les trois centres de similitude externes E, E', E'' sont donc situés sur une même ligne droite; ce qui démontre la première partie du théorème.

Désignons, en second lieu, par E'' l'intersection de II' et CC'; en vertu de la définition des centres de similitude (9) et à cause des parallèles, nous aurons

$$CI':C''I' \quad \text{ou} \quad R:R''::CE'':C''N\,,$$

$$C''I:C'I \quad \text{ou} \quad R'':R'::C''N:C'E''\,;$$

d'où nous conclurons, par multiplication et réduction,

$$R : R' :: CE'' : C'E''$$

Le point E″, considéré comme intersection de II′ et CC′, est donc encore le centre de similitude externe des deux cercles dont les centres sont C, C′; deux quelconques I, I′ des centres de similitude internes sont donc en ligne droite avec l'un E″ des centres de similitude externes ; ce qui démontre la seconde partie du théorème (*).

13. A l'avenir, nous appellerons *axe de similitude* de trois cercles, toute droite qui contiendra trois de leurs centres de similitude. Cette droite sera dite *axe de similitude externe*, lorsqu'elle contiendra les trois centres de similitude externe ; elle sera dite, au contraire, *axe de similitude interne*, lorsqu'elle contiendra un seul de ces centres, avec deux centres de similitude internes. Il est aisé de voir que chacun de ces axes est semblablement placé par rapport aux trois cercles : ce qui justifie leur dénomination.

14. Notre théorème peut, entre autres applications, servir à déterminer les centres de similitude de deux cercles, dans les cas que nous avons exceptés (11). Pour y parvenir, on décrira arbitrairement un troisième à la fois extérieur aux deux cercles donnés ; on déterminera (11) ses centres de similitude, tant internes qu'externes, avec chacun d'eux ; alors, 1.° en joignant par une droite deux centres de similitude de même dénomination, cette droite coupera la droite qui joint leurs centres au centre de similitude externe ; 2.° en joignant, au contraire, par une droite deux centres de similitude de dénominations contraires, cette droite, par son intersection avec celle qui joint les centres des deux cercles, fera connaître le centre de similitude interne (*).

(*) La démonstration de Monge n'est applicable qu'au seul cas où les trois cercles sont extérieurs les uns aux autres.

(**) On peut aussi déterminer, dans tous les cas, les deux centres de similitude de deux cercles, en observant que, si l'on fait, de deux diamètres

15. Sachant ainsi déterminer, dans tous les cas, les centres de similitude, tant internes qu'externes de deux cercles ; on pourra aussi, dans tous les cas, déterminer les quatre axes de similitude de trois cercles donnés.

§. III.

Des centres et axes radicaux.

16. Nous appellerons à l'avenir *centre radical* de deux cercles, un point de la droite qui joint leurs centres tel que la différence des quarrés de ses distances à ces deux centres est égale à la différence des quarrés des rayons des deux cercles respectivement.

17. Il suit de cette définition, 1.° que deux cercles, tracés sur un même plan, ont toujours un centre et n'ont jamais qu'un seul centre radical ; 2.° que, suivant que le quarré de la distance des centres est plus grand que la différence des quarrés des rayons, égal à cette différence ou plus petit qu'elle, le centre radical est sur le prolongement de la droite qui joint les centres, du côté du plus petit des deux cercles, au centre même de ce cercle ou entre les deux centres ; mais toujours, dans ce dernier cas, plus près du centre du plus petit cercle que de celui du plus grand.

18. Nous appellerons à l'avenir, avec M. Gaultier de Tours, *axe radical de deux cercles*, la perpendiculaire indéfinie menée, dans leur plan, à la droite qui joint leurs centres, par leur centre radical.

19. Il est aisé de voir que, lorsque deux cercles se touchent ou se coupent, leur axe radical n'est autre chose que leur tan-

---

parallèles quelconques, les deux bases d'un trapèze, le point de concours des deux côtés non parallèles sera le centre de similitude externe, tandis que l'intersection des deux diagonales sera le centre de similitude interne. C'est une conséquence toute naturelle de la doctrine des points et lignes homologues, doctrine peut-être trop négligée aujourd'hui, et sur laquelle on trouve d'amples développemens dans les *Élémens de géométrie* de CAMUS.

gente ou leur corde commune. Nous verrons bientôt comment on peut facilement déterminer cette droite dans les autres cas.

20. *THÉORÈME. Les tangentes menées à deux cercles de tous les points et des seuls points de leur axe radical, terminées à leurs points de contact, sont égales entre elles.*

Démonstration. Soit P (fig. 4, 5) un point duquel soient menées à deux cercles, dont les centres sont C, C′ des tangentes dont les points de contact respectifs soient T, T′ ; du même point P soit abaissée sur CC′ une perpendiculaire dont le pied soit O. Soient menés les rayons CT, C′T′, ainsi que les droites PC, PC′. On aura

$$\overline{CP}^2 \quad \text{ou} \quad \overline{PO}^2+\overline{OC}^2=\overline{PT}^2+\overline{CT}^2 ,$$

$$\overline{C'P}^2 \quad \text{ou} \quad \overline{PO}^2+\overline{OC'}^2=\overline{PT'}^2+\overline{C'T'}^2 ;$$

d'où, en retranchant et réduisant,

$$\overline{OC}^2-\overline{OC'}^2=(\overline{PT}^2-\overline{PT'}^2)+(\overline{CT}^2-\overline{C'T'}^2) .$$

Or, 1.° si P est un point de l'axe radical, O sera le centre radical, et on aura (16)

$$\overline{OC}^2-\overline{OC'}^2=\overline{CT}^2-\overline{C'T'}^2 ;$$

notre équation deviendra donc, en réduisant, transposant et extrayant la racine quarrée,

$$PT=PT' ;$$

c'est-à-dire que les tangentes partant du point P seront égales.

2.° Réciproquement, si les tangentes PT, PT′ sont égales, notre équation deviendra simplement

$$\overline{OC}^2-\overline{OC'}^2=\overline{CT}^2-\overline{C'T'}^2\ ;$$

le point O sera donc (16) le centre radical ; et par conséquent (18) le point P sera un des points de l'axe radical.

21. *THÉORÈME. Les axes radicaux de trois cercles tracés sur un même plan, et considérés successivement deux à deux, se coupent tous trois au même point.* Voir page 162 - Note.

Démonstration. Soient C, C′, C″ les trois cercles, X, X′, X″, respectivement, les axes radicaux de C′, C″, de C″, C, de CC′, et soit O le point de concours des deux premiers. La tangente menée de ce point à C sera (20) égale aux tangentes menées du même point aux cercles C′, C″; ces deux derniers seront donc égales entre elles ; leur point de concours O sera donc (20) un point de X; d'où il suit que X, X′, X″ passent par ce point O (*).

22. Nous appellerons, à l'avenir, *centre radical* de trois cercles, le point de concours des axes radicaux de ces trois cercles, pris deux à deux.

23. Notre théorème (21) fournit un moyen fort simple de déterminer l'axe radical de deux cercles, dans les cas que nous avons exceptés (19). Il consiste à décrire arbitrairement un troisième cercle qui coupe à la fois les deux premiers ; ses cordes communes avec eux seront deux des axes radicaux des trois cercles (19) ; leur point de concours sera donc leur centre radical, et par conséquent l'un des points de l'axe radical des deux cercles dont il s'agit ; menant donc, par ce point, une perpendiculaire à la droite qui joint leurs centres, cette perpendiculaire sera l'axe radical cherché.

(*) La démonstration de Monge n'est applicable qu'au seul cas où, non seulement les trois cercles se coupent deux à deux, mais encore où ils se coupent de telle sorte qu'une portion de leur plan leur est commune à tous trois.

On pourra, au lieu de terminer ainsi la construction, chercher, au moyen d'un nouveau cercle arbitraire, un second point de l'axe radical, qui ainsi se trouvera complètement déterminé.

24. Sachant ainsi déterminer, dans tous les cas, l'axe radical de deux cercles, on pourra aussi, dans tous les cas, construire facilement le centre radical de trois cercles donnés.

SECTION II.

Propriétés des sphères dans l'espace.

§. I.

Des pôles droites et plans polaires.

25. Nous appellerons à l'avenir *pôles conjugués d'une sphère* les pôles conjugués communs à toutes les sections circulaires faites à cette sphère par des plans passant par l'un quelconque de ses diamètres (1).

26. Lorsque, par l'un quelconque de deux pôles conjugés d'une sphère, on conduira un plan indéfini, perpendiculaire à la droite qui joint ces deux pôles, nous dirons que ce plan est le *plan polaire* de l'autre point, que nous appellerons, à l'inverse, *le pôle* de ce plan.

27. Enfin, nous appellerons *polaires conjuguées* d'une sphère deux droites qui, passant par deux pôles conjugués de cette sphère, seront à la fois perpendiculaires entre elles et à la droite qui joint ces deux pôles.

28. *THÉORÈME. Le pôle d'un plan est la commune section des plans des lignes de contact de tous les cônes circonscrits à la sphère qui ont leur sommet sur ce plan; et réciproquement le plan polaire d'un point est le lieu géométrique des sommets de tous les cônes circonscrits dont les plans des lignes de contact passent par ce point.*

Démonstration. Soient C le centre de la sphère, S le somme d'un cône circonscrit, P un quelconque des points du plan de la ligne de contact, et Q le point de la droite CP où elle est coupée par le plan conduit par S, perpendiculairement à cette droite. En concevant un plan par C, S, P, on se trouvera exactement dans le cas des figures 1, 2; on démontrera donc, comme nous l'avons fait (5), que les points P, Q sont deux pôles conjugués, et que, conséquemment, le point P est (26) le pôle du plan conduit par Q, perpendiculairement à CP.

29. *THÉORÈME. La polaire conjuguée d'une droite est la commune section des plans des lignes de contact de tous les cônes circonscrits à la sphère qui ont leurs sommets sur cette droite; et, réciproquement, le lieu géométrique des sommets de tous les cônes circonscrits à la sphère, dont les plans des lignes de contact se coupent suivant une droite, est la polaire conjuguée de cette droite.*

Démonstration. Une droite D étant située d'une manière quelconque par rapport à une sphère, concevons que, par cette droite, on fasse passer arbitrairement deux plans P, P′, dont les pôles soient respectivement p, p'; il est aisé de voir (5) que la droite d, passant par ces deux derniers points, sera (27) la polaire conjuguée de D; or, le plan de la ligne de contact de tout cône circonscrit à la sphère, dont le sommet sera sur l'un ou l'autre des deux plans P, P′, passera (28) par p ou p' respectivement, et réciproquement; d'où il suit que le plan de la ligne de contact de tout cône circonscrit dont le sommet sera à l'intersection D de ces deux plans, passera à la fois par p et p', et conséquemment par la polaire conjuguée d de D et réciproquement.

30. Il est aisé de voir (27) que, lorsqu'un angle dièdre est circonscrit à une sphère, son arête et la sécante qui joint les points de contact de ses faces avec la sphère sont deux polaires conjuguées l'une à l'autre, par rapport à cette sphère. Or, de là résulte évidemment (28) le théorème suivant.

31. *THÉORÈME. Les droites qui joignent les deux points de*

contact avec la sphère des faces de tous les angles dièdres circonscrits qui ont leur arête sur un plan fixe quelconque, se coupent toutes au pôle de ce plan; et réciproquement, si les droites qui joignent les deux points de contact avec la sphère des faces d'une suite d'angles dièdres circonscrits passent toutes par un même point fixe, les arêtes de ces angles dièdres seront toutes situées sur le plan polaire de ce point.

§. II.

Des centres, axes et plans de similitude.

32. Deux sphères, extérieures l'une à l'autre, étant données dans l'espace, on peut toujours concevoir deux cônes qui soient à la fois circonscrits à l'un et à l'autre. L'axe commun de ces deux cônes passera par les centres des deux sphères; mais, tandis que le sommet de l'un sera sur la droite même qui joint ces deux centres, l'axe de l'autre sera sur le prolongement de cette droite, au-delà du centre de la plus petite. Pour distinguer ces deux cônes l'un de l'autre, nous dirons que le premier est *circonscrit intérieurement*, et que l'autre est *circonscrit extérieurement* aux deux sphères. Il est clair que les sections de ces cônes par des plans passant par les deux centres seront (8) des angles circonscrits aux cercles résultant de la section des deux sphères par le même plan.

33. Nous appellerons *angle dièdre circonscrit* à deux sphères, extérieures l'une à l'autre, tout angle dièdre dont les faces seront, l'une et l'autre, des plans tangens communs à ces deux sphères. Il est aisé de voir que ces angles dièdres sont en même temps circonscrits à l'un ou à l'autre des deux cônes circonscrits à ces mêmes sphères, et que conséquemment leur arête passe constamment par le sommet de l'un ou de l'autre cône; ces arêtes coupent donc constamment la droite qui passe par les centres, et se trouvent

trouvent conséquemment avec elle dans un même plan, que l'on conçoit devoir diviser l'angle dièdre en deux parties égales; mais, tandis que l'arête des angles dièdres circonscrits à l'un des cônes coupe la droite même qui joint les centres, l'arête de ceux qui sont circonscrits à l'autre cône coupe le prolongement de cette droite au-delà du centre de la plus petite des deux sphères. Nous dirons, en conséquence, des angles dièdres de la première série, qu'ils sont *circonscrits intérieurement*, et de ceux de la seconde qu'ils sont *circonscrits extérieurement* aux deux sphères.

34. Nous appellerons à l'avenir *centres de similitude de deux sphères* les centres de similitude communs à tous les systèmes de deux cercles résultant des sections de ces sphères par des plans quelconques passant par la droite qui joint leurs centres. Le centre de similitude des deux sphères sera dit *interne* ou *externe*, suivant qu'il sera tel par rapport aux sections circulaires dont il vient d'être question. C'est, dans tous les cas, un point semblablement situé par rapport aux deux sphères.

35. Lorsque deux sphères sont extérieures l'une à l'autre, leurs centres de similitude interne et externe ne sont autre chose que les sommets respectifs des cônes circonscrits intérieurement et extérieurement : ce sont aussi les points communs de concours des arêtes des angles dièdres circonscrits intérieurement et extérieurement.

36. *THÉORÈME. Les centres de similitude externes de trois sphères, prises successivement deux à deux, sont tous trois situés sur une même ligne droite; et chacun d'eux se trouve en ligne droite avec deux des centres de similitude internes ; de telle sorte que ces six points sont les intersections de quatre droites formant un quadrilatère complet, dont le plan est celui même qui contient les centres des trois sphères.*

Démonstration. Cela est évident (12), puisque ces six points ne sont autre chose (34) que les centres de similitude des cercles résultant de la section des trois sphères par un plan passant par leurs centres.

37. A l'avenir, nous appellerons *axe de similitude* de trois sphères toute droite qui contiendra trois de leurs centres de similitude. Cette

droite sera dite *axe de similitude externe*, lorsqu'elle contiendra les trois centres de similitude externes ; elle sera dite, au contraire, *axe de similitude interne*, lorsqu'elle contiendra un seul de ces centres avec deux des centres de similitude internes. Ce sont évidemment des droites homologues à la fois par rapport aux trois sphères, ce qui justifie leur dénomination.

38. Lorsque trois sphères sont extérieures les unes aux autres, on peut toujours, de deux manières, leur conduire un plan tangent ; car ce plan peut laisser les trois sphères d'un même côté et pourra être appelée, pour cette raison, *plan tangent commun externe*, ou bien il pourra avoir deux des sphères d'un même côté et la troisième de l'autre, et sera dit *plan tangent commun interne* ; à chaque plan tangent commun il en répondra un autre, symétrique avec lui par rapport au plan qui contient les centres, et ces deux plans formeront un angle dièdre circonscrit. Il y aura donc un seul *angle dièdre circonscrit externe* et trois *angles dièdres circonscrits internes* ; et leurs arêtes ne seront autre chose que ce que nous avons appelé axes de similitude externe et interne des trois sphères.

39. *THÉORÈME. Les centres de similitude externes de quatre sphères, prises successivement deux à deux, sont sur un même plan, aux intersections de quatre droites, formant un quadrilatère complet ; en outre, en prenant trois de ces centres, appartenant à une même droite, et conséquemment relatifs aux trois mêmes sphères prises successivement deux à deux, ils se trouveront aussi, avec les trois centres de similitude internes, relatifs à la quatrième sphère, comparée tour à tour aux trois premières, situés dans un même plan, aux intersections de quatre droites formant également un quadrilatère complet ; enfin, si l'on considère deux centres de similitude externes dont un appartient à deux quelconques des quatre sphères et l'autre aux deux sphères restantes, ces deux points se trouveront, avec les quatre centres de similitude internes, autres que ceux qui appartiennent aux deux mêmes combinaisons de deux sphères, situés dans un même plan, aux*

intersections de quatre droites formant encore un quadrilatère complet.

Démonstration. Soient S, S', S'', S''' les quatre sphères dont il s'agit; désignons respectivement par (SiS'), (SeS') les centres de similitude interne et externe des deux sphères S, S', et soient adoptées des notations analogues pour toutes nos sphères, prises deux à deux.

D'abord, d'après ce que nous venons de dire (36), les quatre séries de points

$$\left.\begin{array}{lll}(SeS'), & (S'eS''), & (S''eS), \\ (S'eS''), & (S''eS'''), & (S'''eS'), \\ (S''eS'''), & (S'''eS), & (SeS''), \\ (S'''eS), & (SeS'), & (S'eS'''),\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{correspondant}\\ \text{respectivement}\\ \text{aux sphères}\end{array}\left\{\begin{array}{lll} S, & S', & S'', \\ S', & S'', & S''', \\ S'', & S''', & S; \\ S''', & S, & S',\end{array}\right.$$

seront sur quatre droites; or, ces points ne sont qu'au nombre de six; ils seront donc aux intersections de ces quatre droites, qui conséquemment appartiendront à un même plan; ces six points seront donc aussi dans ce plan; ce qui démontre la première partie du théorème.

En outre, d'après cette même proposition (36), les quatre séries de points

$$\left.\begin{array}{lll}(SeS'), & (S'eS''), & (S''eS), \\ (SeS'), & (SiS'''), & (S'iS'''), \\ (S'eS''), & (S'iS'''), & (S''iS'''), \\ (S''eS), & (S''iS'''), & (SiS'''),\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{correspondant}\\ \text{respectivement}\\ \text{aux sphères}\end{array}\left\{\begin{array}{lll} S, & S', & S''; \\ S, & S', & S'''; \\ S', & S'', & S''', \\ S'', & S, & S''',\end{array}\right.$$

seront en lignes droites; or, ces points ne sont qu'au nombre de six seulement; ils sont donc aux intersections de ces quatre droites, formant conséquemment un quadrilatère complet; ces six points sont donc dans un même plan; ce qui démontre la seconde partie du théorème.

Enfin, et toujours d'après la même proposition (36), les quatre séries de points

$$\left.\begin{array}{lll}(S e S')\,, & (S i S'')\,, & (S' i S'')\\ (S e S')\,, & (S i S''')\,, & (S' i S''')\\ (S'' e S''')\,, & (S i S'')\,, & (S i S''')\\ (S'' e S''')\,, & (S' i S'')\,, & (S' i S''')\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{correspondant}\\ \text{respectivement}\\ \text{aux sphères}\end{array}\left\{\begin{array}{l}S\,,\ S'\,,\ S''\,,\\ S\,,\ S'\,,\ S'''\,,\\ S\,,\ S''\,,\ S'''\,,\\ S'\,,\ S''\,,\ S'''\,,\end{array}\right.$$

seront en lignes droites ; or, ces points ne sont qu'au nombre de six seulement ; ils sont donc aux intersections de quatre droites, formant conséquemment un quadrilatère complet ; ces six points sont donc dans un même plan ; ce qui démontre la troisième partie du théorème.

40. A l'avenir, nous appellerons *plan de similitude de quatre sphères* tout plan qui contiendra six des douze centres de similitude de ces quatre sphères prises deux à deux, sans que ces six points appartiennent aux trois mêmes sphères. Ce plan de similitude sera dit *externe*, s'il contient les six centres de similitude externes : il sera dit *interne*, au contraire, s'il contient deux centres de similitude externes seulement, avec quatre centres de similitude internes ; enfin, il sera dit *mixte*, s'il contient trois centres de chaque sorte. Quatre sphères ont donc, généralement parlant, un plan de similitude externe, trois plans de similitude internes, et quatre plans de similitude mixtes. Il est aisé de voir, au surplus, que chacun de ces huit plans est à la fois homologue par rapport aux quatre sphères, ce qui justifie leur dénomination.

§. III.

Des plans, axes et centres radicaux.

41. Nous appellerons à l'avenir *centre radical de deux sphères*, le centre radical commun de tous les systèmes de deux cercles résultant de la section de ces sphères par des plans passant par la droite qui joint leurs centres. C'est conséquemment (16) un point de la droite qui passe par les centres dont la différence des quarrés des distances à ces centres est égale à la différence des quarrés des rayons des deux sphères.

42. Nous appellerons à l'avenir *plan radical de deux sphères* le plan indéfini, mené perpendiculairement à la droite qui joint leurs centres, par leur centre radical ; c'est évidemment (18) le lieu géométrique des axes radicaux de tous les systèmes de deux cercles résultant de la section des deux sphères par des plans passant par leurs centres ; d'où il suit (19) que, lorsque les deux sphères se touchent ou se coupent, leur plan radical n'est autre chose que leur plan tangent commun, dans le premier cas, et celui de leur commune section dans le second.

43. *THÉORÈME. Les tangentes menées à deux sphères de tous les points et des seuls points de leur plan radical sont égales entre elles, ou, en d'autres termes, les cônes circonscrits de même sommet, dont le sommet commun est sur le plan radical, et qui se terminent à leurs lignes de contact respectives, ont toujours et ont seuls leurs arêtes égales de part et d'autre.*

Démonstration. Soient C, C′ les centres des deux sphères, P un point quelconque de l'espace, pris pour sommet commun de deux cônes circonscrits, et O le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite qui joint les centres. Par les trois points P, C, C′, soit conduit un plan ; tout sera dans ce plan, comme dans les figures 4 et 5 ; PC, PC′ seront les axes des deux cônes, et PT, PT′ en seront les arêtes ; donc (20), suivant que P sera ou ne sera pas sur l'axe radical des deux cercles, les droites PT, PT′ seront égales ou inégales, et réciproquement ; or, suivant que P sera ou ne sera pas sur l'axe radical des deux cercles, ce même point sera ou ne sera pas sur le plan radical des deux sphères ; notre théorème se trouve donc ainsi démontré.

44. Nous appellerons à l'avenir *centre radical de trois sphères*, le centre radical des trois cercles résultant de leur section par le plan passant par leurs centres ; et nous appellerons *axe radical* des trois mêmes sphères, la perpendiculaire indéfinie menée par leur centre radical au plan qui contient leurs centres.

45. *THÉORÈME. Les plans radicaux de trois sphères, prises*

successivement deux à deux, se coupent tous trois suivant une même droite, perpendiculaire au plan qui contient leurs centres, laquelle n'est autre chose que l'axe radical des trois sphères.

Démonstration. Si, par les centres des trois sphères, on conçoit un plan, les intersections avec les trois sphères seront trois grands cercles, et ses intersections avec les plans radicaux ne seront autre chose (42) que les axes radicaux de ces trois cercles; ces axes passeront donc tous trois (21) par un même point qui sera le centre radical de ces trois cercles; en menant donc, par ce point, l'axe radical des trois sphères, cet axe se trouvera à la fois dans les trois plans, qui conséquemment se couperont suivant cette droite.

46. *THÉORÈME. Les tangentes menées à trois sphères de tous les points et des seuls points de leur axe radical sont égales entre elles, ou, en d'autres termes, les cônes circonscrits de même sommet, dont le sommet commun est sur l'axe radical, et qui se terminent à leurs lignes de contact respectives, ont toujours et ont seuls leurs arêtes de même longueur.*

Démonstration. Soient S, S′, S″ les trois sphères, R, R′, R″ les plans radicaux respectifs de S′, S″, de S″, S, de S, S′, se coupant dans l'axe radical X; pour que les tangentes menées d'un même point P à S′, S″ soient de même longueur que la tangente menée de ce point à S; il sera nécessaire et il suffira (43) que ce point P soit à la fois sur les deux plans R′, R″; il devra donc être sur leur commune section, c'est-à-dire (45) sur l'axe radical des trois sphères.

47. *THÉORÈME. Les six plans radicaux de quatre sphères, prises successivement deux à deux, et conséquemment les quatre axes radicaux de ces mêmes sphères, prises successivement trois à trois se coupent en un même point.*

Démonstration. Soient S, S′, S″, S‴ les quatre sphères dont il s'agit, et soient X, X′, X″, X‴ les axes radicaux respectifs de S′, S″, S‴, de S″, S‴, S, de S‴, S, S′, de S, S′, S″; soient de plus R′, R″, R‴, respectivement les plans radicaux de S, S$'$, de S, S$''$, de S, S$'''$. Les deux plans R$''$, R$'''$ se couperont (45) suivant l'axe X$'$; pour les mêmes raisons, les deux plans R$'''$, R$'$ se couperont suivant l'axe X$''$, et les deux plans R$'$, R$''$ suivant l'axe X$'''$. Les trois axes X$'$ X$''$ X$'''$ se couperont donc suivant les intersections, deux à deux, des trois plans R$'$, R$''$, R$'''$; c'est-à-dire, au même point; il en devra donc être de même des trois axes X, X$'$, X$''$; le premier de ceux-ci passera donc par le point de concours des trois autres, et conséquemment ils se couperont tous quatre aux mêmes points.

48. Il suit de là que quatre sphères étant quelconques dans l'espace, il existe toujours (46) un point et un seul point duquel menant des tangentes à ces quatre sphères, ces tangentes, terminées à leurs points de contact, sont de même longueur; ou ce qui revient au même, un point tel que les cônes circonscrits qui y auront leur sommet commun, et qui se termineront à leurs lignes de contat, auront toutes leurs arêtes de même longueur. Nous appellerons à l'avenir ce point le *centre radical des quatre sphères.*

SECTION III.

Propriétés des cônes et des cylindres.

§. I.

Des droites et plans polaires.

49. Soit un angle dièdre circonscrit arbitrairement à un cône qui aura conséquemment son sommet sur l'arête de cet angle; l'angle dièdre touchera le cône suivant deux droites, formant un angle qui sera coupé perpendiculairement en deux parties égales par le plan qui sera conduit par l'axe du cône et par l'arête de l'angle dièdre. Cela posé, si l'on coupe le cône par un plan quelconque perpendiculaire à son axe, ce plan coupera l'arête de l'angle dièdre et la droite divisant l'angle de contact en deux parties égales en deux points qui seront des pôles conjugués du cercle résultant de la section du cône par le même plan.

En effet, le plan de la section circulaire coupera l'angle dièdre suivant un angle circonscrit dont le sommet sera un des points dont il s'agit ; ce même plan coupera l'angle de contact suivant la corde de contact de cet angle circonscrit ; et l'autre point sera le milieu de cette corde ; or, ce sont précisément là (2) les caractères de deux pôles conjugués.

50. On voit donc qu'en prenant sur les diverses sections circulaires du cône une suite de pôles situés sur une même droite passant par son sommet, leurs conjugués seront aussi sur une droite passant par ce même point. A l'avenir, nous désignerons le système de deux pareilles droites sous la dénomination de *polaires conjuguées* du cône.

51. Il suit de cette définition (2), 1.° qu'il n'y a aucune droite passant par le sommet d'un cône qui ne puisse être prise pour polaire de ce cône et à laquelle il ne réponde une polaire conjuguée dont elle est elle-même la conjuguée ; 2.° que de ces deux droites, l'une est toujours intérieure et l'autre extérieure au cône ; 3.° que l'arête de l'angle dièdre circonscrit au cône et la droite qui divise son angle de contact en deux parties égales, sont deux polaires conjuguées de ce cône.

52. Lorsque, par l'une quelconque des deux polaires conjuguées d'un cône, on conduira un plan indéfini, perpendiculaire à celui qui les contient, nous dirons de ce plan qu'il est le *plan polaire* de l'autre droite, que nous appellerons, à l'inverse, la *droite polaire*, ou simplement la polaire de ce plan.

53. Il suit de ces définitions (4), 1.° qu'il n'est aucune droite menée par le sommet d'un cône qui n'ait son plan polaire, ni aucun plan, passant par ce même sommet qui n'ait sa droite polaire ; 2.° que la polaire est extérieure ou intérieure au cône, suivant que le plan polaire lui est sécant ou ne le rencontre pas ; 3.° que l'arête de l'angle dièdre circonscrit est la polaire du plan de l'angle de contact ; comme la droite qui divise cet angle en deux parties égales est, à l'inverse, la polaire du plan conduit, par l'arête de l'angle dièdre,

perpendiculairement

perpendiculairement à celui qui contient cette arête et l'axe du cône.

54. *THÉORÈME. La polaire d'un plan passant par le sommet d'un cône est la commune section des plans des angles de contact de tous les angles dièdres circonscrits à ce cône, qui ont leur arête sur ce plan; et réciproquement, le plan polaire d'une droite passant par le sommet d'un cône, est le lieu géométrique des arêtes des angles dièdres circonscrits à ce cône, dont les plans des angles de contact passent par cette droite.*

Démonstration. Concevons, en effet, par l'un quelconque C des points de l'axe du cône un plan perpendiculaire à cet axe, coupant l'arête de l'angle dièdre circonscrit en un point S, ses lignes de contact en A, B, la polaire en P, et en Q l'intersection du plan qui contient l'axe et cette polaire avec le plan perpendiculaire à ce dernier, conduit par l'arête de l'angle dièdre; on se trouvera exactement dans le cas des figures 1, 2; d'où on conclura (5) que SQ est la polaire du point P; et que conséquemment (50, 52) le plan dont SQ est l'intersection avec celui de la figure, est le plan polaire de la droite dont P est l'intersection avec ce même plan.

55. Ce théorème revient, au surplus, à dire que l'intersection de deux plans qui passent par le sommet d'un cône est la polaire du plan qui passe par les polaires de ces deux-là, et réciproquement.

56. En considérant le cylindre comme un cône dont le sommet est infiniment éloigné, on est conduit à appeler *polaires conjuguées* d'un cylindre deux droites situées dans un même plan avec l'axe du cylindre, et parallèles à sa direction, telles que le rayon de ce cylindre est moyen proportionnel entre les distances de ces deux droites à cet axe. On appelle aussi *plan polaire* d'une droite, parallèle à l'axe d'un cylindre un plan perpendiculaire à celui qui contient cette droite et cet axe, passant par la polaire conjuguée de cette même droite. A l'aide de ces définitions, on peut (54) établir le théorème suivant :

57. *THÉORÈME. La polaire d'un plan parallèle à l'axe d'un*

cylindre est la commune section des plans des lignes de contact de tous les angles dièdres circonscrits au cylindre dont les arêtes sont sur ce plan; et réciproquement, le plan polaire d'une droite parallèle à l'axe d'un cylindre est le lieu géométrique des arêtes des angles dièdres circonscrits au cylindre, dont les plans des lignes de contact passent par cette droite.

§. II.

Des axes et plans de similitude.

58. Nous dirons, à l'avenir, qu'un *angle dièdre* est *circonscrit* à deux cônes de même sommet, lorsque ses faces seront des plans tangens communs à ces deux cônes, ayant, l'un et l'autre, les deux cônes du même côté, ou l'un et l'autre les deux cônes de différens côtés; l'angle dièdre circonscrit sera dit *extérieur*, dans le premier cas, et *intérieur* dans le second. Dans l'un et l'autre cas, l'arête de l'angle dièdre passe évidemment par le sommet commun des deux cônes, et se trouve dans le même plan avec leurs axes.

59. *LEMME. Si deux sphères, variables de grandeur et de situation, sont continuellement inscrites à deux cônes de même sommet, leurs centres de similitude, tant interne qu'externe, ne sortiront pas de deux droites fixes, passant par le sommet commun des deux cônes, et situées dans le même plan avec leurs axes.*

Démonstration. Soit S le sommet commun des deux cônes. Soient A, B les deux sphères dans leur premier état; E, I leurs centres de similitude externe et interne respectivement. Soient A′, B′, ces sphères dans leur second état; E′, I′ leurs centres de similitude externe et interne, respectivement. Soient enfin *e*, *i* les centres de similitude externe et interne des deux sphères A′, B. Il est clair que S sera (35) le centre commun de similitude externe soit des sphères A, A′, soit des sphères B, B′.

Cela posé, en considérant d'abord les trois sphères A, A′, B, on verra (36) que trois points *e*, E, S sont en ligne droite, et qu'il en est de même des trois points *i*, I, S.

En considérant ensuite les trois sphères B, B′, A′, on verra pareillement (36) que les trois points E′, e, S sont en ligne droite, et qu'il en est de même des trois points I′, i, S.

La droite qui contient les trois points e, E, S et celle qui contient les trois points E′, e, S, ayant ainsi deux points communs e, S; elles doivent ne faire qu'une seule et même droite; et conséquemment les deux points E, E′ doivent être en ligne droite avec le point S.

Pareillement, la droite qui contient les trois points i, I, S, et celle qui contient les trois points I′, i, S, ayant ainsi deux points communs i, S; elles doivent se confondre en une seule et même droite; et conséquemment les deux points I, I′ doivent être en ligne droite avec le point S.

La proposition se trouve donc ainsi complètement démontrée.

60. Nous appellerons à l'avenir *axe de similitude* de deux cônes de mêmes sommets, la droite qui contient les centres de similitude de même dénomination de tous les systèmes de deux sphères respectivement inscrites à ces deux cônes. Ces axes de similitude seront dits *internes* ou *externes*, suivant qu'ils contiendront les centres de similitude internes ou les centres de similitude externes des systèmes de sphères dont il s'agit. Ce sont deux droites passant par le sommet commun des deux cônes, situées dans le même plan avec leurs axes, et dont la direction ne dépend uniquement que de la grandeur et de la situation respective de ces deux cônes (*).

61. Il est aisé de voir que, lorsque les deux cônes sont extérieurs l'un à l'autre, leurs axes de similitude, interne et externe, ne sont autre chose (58) que les arêtes des angles dièdres, tant intérieur qu'extérieur, circonscrits à ces deux cônes.

62. *THÉORÈME. Les axes de similitude externes de trois cônes de même sommet, pris successivement deux à deux, sont tous trois*

(*) La dénomination d'*axe de similitude* est impropre, attendu qu'il n'y a de cônes semblables que des cônes égaux; aussi ne l'employons-nous que par analogie.

dans un même plan ; et chacun d'eux est dans un même plan avec deux des axes de similitude internes ; de telle sorte que ces six droites sont les intersections de quatre plans formant un angle tétraèdre complet.

Démonstration. Soit O le sommet commun des trois cônes, auxquels soient respectivement et arbitrairement inscrites trois sphères S, S′, S″. Soient E, E′, E″, respectivement, les centres de similitude externes de S′, S″, de S″, S, de S, S′; et soient I, I′ les centres de similitude internes de S′, S″, de S″, S respectivement; OE, OE′, OE″ seront (60) les axes de similitude externes des trois cônes pris deux à deux, et OI, OI′ seront deux de leurs axes de similitude internes.

Or (36), les points E, E′, E″ étant en ligne droite, il s'ensuit que les axes OE, OE′, OE″ sont dans un même plan. De plus, E″ étant (36) en ligne droite avec I, I′; il s'ensuit que l'axe OE″ est dans un même plan avec les axes OI, OI′, ce qui démontre complètement le théorème.

63. Nous appellerons à l'avenir *plan de similitude* de trois cônes de même sommet, tout plan qui contiendra trois de leurs axes de similitude. Ce plan de similitude sera dit *externe*, s'il contient les trois axes de similitude externes; il sera dit *interne*, au contraire, s'il contient un seul axe de similitude externe avec deux axes de similitude internes. Trois cônes de même sommet ont donc quatre plans de similitude, dont un seul externe et trois internes.

64. En considérant des cylindres dont les axes sont parallèles comme des cônes dont le sommet commun est infiniment éloigné, on est conduit à appeler *axe de similitude* de deux cylindres, dont les axes sont parallèles, un parallèle à la direction commune de ces axes, tellement située dans leur plan que ses distances aux axes des deux cylindres sont proportionnelles à leurs rayons respectifs. L'axe de similitude est d'ailleurs dit *interne* ou *externe*, suivant qu'il se trouve situé entre les axes des deux cylindres, ou au-delà de l'intervalle qui les sépare. Lorsque les deux cylindres

sont extérieurs l'un à l'autre, ces deux droites ne sont autre chose que les arêtes des angles dièdres circonscrits intérieurement et extérieurement à ces deux cylindres.

De tout cela, il est aisé de déduire le théorème suivant.

65. *THÉORÈME. Les axes de similitude externes de trois cylindres, dont les axes sont parallèles, pris successivement deux à deux, sont tous trois dans un même plan; et chacun d'eux est dans un même plan avec deux des axes de similitude internes; de telle sorte que ces six droites sont aux intersections de quatre plans formant un prisme tètraèdre complet.*

66. On comprend aisément, d'après cela, ce que nous voudrons dire à l'avenir, lorsque nous parlerons des *plans de similitude*, tant *internes* qu'*externes*, de trois cylindres ayant leurs axes parallèles; et on voit en même temps que ces plans sont au nombre de quatre, dont trois internes et un seul externe.

§. III.

Des axes et plans radicaux.

67. *LEMME. Si deux sphères sont respectivement inscrites à deux cônes de même sommet, de telle sorte que les arêtes des deux cônes, terminées à leurs lignes de contact avec les sphères, soient égales de part et d'autre; quel que soit le système des deux sphères, elles auront toujours le même plan radical, passant par le sommet commun des deux cônes.*

Démonstration. Soit S (fig. 6) le sommet commun des deux cônes; et concevons que le plan de la figure soit celui de leurs axes. Soient A, A′ les points où ce plan coupe les lignes de contact des sphères, dont nous supposons les centres en C, C′. A cause des tangentes égales SA, SA′, le point S est (20) un des points de l'axe radical des cercles résultant de la section des deux sphères; et par conséquent la perpendiculaire SO sur CC′ est l'axe radical de ces deux cercles.

Il reste présentement à faire voir que pourvu qu'on ait constamment $SA=SA'$, quels que soient d'ailleurs les deux cercles, l'axe radical SO demeurera invariable. Or, c'est une chose facile à apercevoir. En effet, quels que soient ces deux cercles $\frac{SC}{SA}$, $\frac{SC'}{SA'}$ seront constans; et il en sera donc de même du rapport de ces deux fractions, lequel, à cause de $SA=SA'$, se réduit simplement à $\frac{SC}{SC'}$; ce dernier rapport étant donc constant; CC' sera constamment parallèle à elle-même; elle sera donc aussi constamment perpendiculaire à la droite fixe SC qui sera ainsi l'axe radical commun à tous les systèmes de deux cercles qui pourront être décrits sous les conditions prescrites.

Donc aussi le plan perpendiculaire à celui de la figure, conduit par la droite fixe SO sera le plan radical commun à tous les systèmes de deux sphères inscrites respectivement aux deux cônes, de telle sorte que leurs lignes de contact soient à la même distance du sommet commun S; ce qui démontre la proposition annoncée.

68. A l'avenir, nous appellerons *plan radical de deux cônes* de même sommet le plan radical commun à tous les systèmes de sphères inscrites aux deux cônes, de telle sorte que leurs lignes de contact avec les deux cônes soient à une même distance quelconque de leur sommet commun. L'intersection de ce plan avec celui des axes sera ce que nous appellerons l'*axe radical* des deux cônes. Il est aisé de voir que, lorsque les deux cônes se touchent ou se coupent, leur plan radical n'est autre chose que leur plan tangent commun ou celui de leurs communes sections.

69. *THÉORÈME. Si, par le sommet commun de deux cônes, on mène arbitrairement une droite dans leur plan radical; et que par cette droite on conduise des plans tangens aux deux cônes, les lignes de contact de ces plans feront des angles égaux avec la droite dont il s'agit; et réciproquement, si les lignes de contact de deux plans respectivement tangens à deux cônes de même som-*

met font des angles égaux avec l'intersection de ces deux plans, cette intersection sera située sur le plan radical des deux cônes.

Démonstration. Soit C le sommet commun des deux cônes, et soit P un autre point quelconque, extérieur à l'un et à l'autre. Par CP soient conduits respectivement des plans tangens aux deux cônes; soient inscrits à ces mêmes cônes deux sphères telles que les distances de leurs lignes de contact au sommet commun soient égales à CP; ces lignes de contact couperont celles des plans tangens; soit A l'une des intersections sur l'un des cônes, et A′ l'une des intersections sur l'autre cône; on aura par construction CA =CA′=CP; et les droites PA, PA′ seront des tangentes aux deux sphères.

Cela posé, suivant que ces tangentes PA, PA′ seront égales ou inégales, le point P sera ou ne sera pas (42) dans le plan radical des deux sphères, qui est aussi celui des deux cônes et réciproquement; et conséquemment CP sera ou ne sera pas sur ce plan; mais, suivant que les mêmes circonstances auront ou n'auront pas lieu, les triangles isocèles ACP, A′CP auront leurs bases égales ou inégales et réciproquement; donc enfin, suivant que CP sera ou ne sera pas sur l'axe radical des deux cônes, les angles PCA, PCA′ seront égaux ou inégaux et réciproquement.

70. *THÉORÈME. Les plans radicaux des trois cônes de même sommet, pris successivement deux à deux, se coupent tous trois suivant une même droite.*

Démonstration. Soient C, C′, C″ les trois cônes, X, X′, X″, respectivement, les plans radicaux de C′, C″, de C″, C, de C, C′, et soit O l'intersection des deux premiers. Si par cette droite O on mène respectivement des plans tangens aux trois cônes, ces plans détermineront sur eux trois lignes de contact T, T′, T″; et par ce qui vient d'être dit (69), l'angle de O avec T″ sera égal aux angles de la même droite avec T, T′; ces deux derniers seront donc aussi égaux entre eux; O est donc aussi sur X″;

et par conséquent X, X′, X″ se coupent suivant une même droite, comme l'annonce le théorème.

71. Nous appellerons à l'avenir *axe radical de trois cônes* de même sommet, la commune section des plans radicaux de ces trois cônes pris successivement deux à deux.

72. En considérant les cylindres dont les axes sont parallèles comme des cônes qui ont un même sommet infiniment éloigné, on est conduit à appeler *axe radical* des deux cylindres, une parallèle à leurs axes situés dans le plan de ces axes, de telle manière que la différence des quarrés des distances de cette droite aux axes des deux cylindres est égale à la différence des quarrés de leurs rayons. On appellera pareillement *plan radical* des deux mêmes cylindres le plan perpendiculaire à celui de leurs axes conduit par leur axe radical. Si les cylindres se touchent ou se coupent, leur axe radical n'est autre chose que leur plan tangent commun, ou celui de leurs communes sections.

Au moyen de ces définitions, et de ce qui a été établi (69, 70), nous aurons les deux théorèmes suivans;

73. *THÉORÈME. Les lignes de contact avec deux cylindres, dont les axes sont parallèles, de deux plans tangens qui partent d'une même droite parallèle à ces axes, tracée comme l'on voudra sur le plan radical des deux cylindres, sont également distantes de cette droite; et réciproquement, si les lignes de contact des plans tangens aux deux cylindres sont également distantes de l'intersection de ces plans, cette intersection sera sur le plan radical des deux cylindres.*

74. *THÉORÈME. Les plans radicaux de trois cylindres, dont les axes sont parallèles, pris successivement deux à deux, se coupent tous trois suivant une même droite,*

75. Nous appellerons à l'avenir *axe radical de trois cylindres*, dont les axes sont parallèles, la commune section des plans radicaux de ces trois cylindres, pris successivement deux à deux.

SECTION

SECTION IV.

Propriétés des cercles sur la sphère.

§. I.

Des pôles et arcs polaires.

76. Nous appellerons à l'avenir *pôles conjugués* d'un cercle de là sphère les deux points de sa surface où elle est rencontrée par deux polaires conjuguées d'un cône qui, ayant son sommet au centre de la sphère, passera par ce cercle. Si, par l'un quelconque de ces deux pôles, on conduit un arc de grand cercle, perpendiculaire à celui qui les contient tous deux; nous dirons que l'autre point est le *pôle* de cet arc, que nous appellerons, à l'inverse, l'*arc polaire* de ce point.

77. *THÉORÈME. Le pôle d'un arc de grand cercle est là commune section des arcs de grands cercles joignant les points de contact de tous les angles sphériques circonscrits qui ont leur sommet sur cet arc; et réciproquement, l'arc polaire d'un point est le lieu géométrique des sommets des angles sphériques circonscrits, de manière que les arcs de grands cercles qui joignent leurs points de contacts, passent par ce point.*

Démonstration. C'est une suite évidente de ce qui a été dit ci-dessus (54).

78. En supposant le rayon de la sphère infini, on retombe sur le théorème démontré (5).

§ II.

Des centres et axes de similitude.

79. Nous appellerons à l'avenir *centre de similitude* de deux cercles de la sphère, le point de sa surface où elle sera rencontrée par l'un des axes de similitude de deux cônes qui, ayant leur sommet commun au centre de la sphère, passeraient par ces deux cercles. Ce centre de similitude sera dit *interne* ou *externe*, suivant que l'axe de similitude des deux cônes, sur lequel il se trouvera situé, sera lui-même interne ou externe. Si les deux cercles sont l'un hors de l'autre, leurs deux centres de similitude ne seront autre chose que les sommets des deux angles sphériques circonscrits tant intérieurement qu'extérieurement aux deux cercles.

80. Comme deux grands cercles d'une sphère se coupent toujours en deux points opposés, il s'ensuit que deux cercles d'une sphère ont toujours, à proprement parler, deux centres de similitude internes et deux centres de similitude externes, mais, pour plus de simplicité, nous n'en considérerons qu'un seul de chaque sorte.

81. *THÉORÈME. Les centres de similitude externes de trois cercles d'une même sphère, pris successivement deux à deux, sont tous trois situés sur un même arc de grand cercle; et chacun d'eux se trouve aussi sur un même arc de grand cercle avec deux des centres de similitude internes; de telle sorte que ces six points sont les intersections de quatre arcs de grands cercles formant un quadrilatère sphérique complet.*

Démonstration. Ce théorème est une suite évidente de ce qui a été dit ci-dessus (62).

82. Nous appellerons à l'avenir *axe de similitude* de trois cercles d'une sphère, tout arc de grand cercle qui contiendra trois de leurs centres de similitude; cet axe de similitude sera dit *externe*,

s'il contient les trois centres de similitude externes ; il sera dit *interne*, au contraire, s'il contient un de ces centres, avec deux des centres de similitude internes. Trois cercles d'une sphère ont donc quatre axes de similitude : un externe et trois internes.

83. Au moyen de notre théorème (81), et de ce qui a été observé (79), rien ne sera plus aisé que d'assigner les centres de similitude tant internes qu'externes de deux cercles d'une sphère, dans toutes les situations où ces cercles pourront se trouver l'un par rapport à l'autre. On pourra donc aussi, sans plus de difficulté, construire les quatre axes de similitude de trois cercles quelconques d'une sphère, et cela par un procédé tout-à-fait analogue à celui qui a été indiqué (14, 15).

84. Si l'on suppose que le rayon de la sphère devient infini, on retombe sur le théorème déjà démontré (12).

§. III.

Des centres et axes radicaux.

85. Nous appellerons à l'avenir *centre radical* de deux cercles d'une sphère, le point où sa surface est rencontrée par l'axe radical de deux cônes qui, ayant leur sommet commun au centre de cette sphère, passeraient par ces deux cercles. L'*axe radical* des deux mêmes cercles sera l'arc de grand cercle perpendiculaire à celui qui joint leurs pôles, conduit par leur centre radical ; c'est évidemment (68) l'intersection de la surface de la sphère avec le plan radical des deux cônes. Il est d'ailleurs facile de voir que, lorsque les deux cercles se touchent ou se coupent, leur axe radical n'est autre chose que l'arc de grand cercle qui les touche tous deux ou qui passe par leurs intersections.

86. *THÉORÈME. Les arcs de grands cercles tangens à deux*

cercles d'une sphère, menés de tous les points et des seuls points de leur axe radical, et terminés à leurs points de contact, sont de même longueur.

Démonstration. C'est une suite évidente de ce qui a été démontré ci-dessus (69).

87. *THÉORÈME. Les axes radicaux de trois cercles de la sphère, pris successivement deux à deux, se coupent tous trois au même point.*

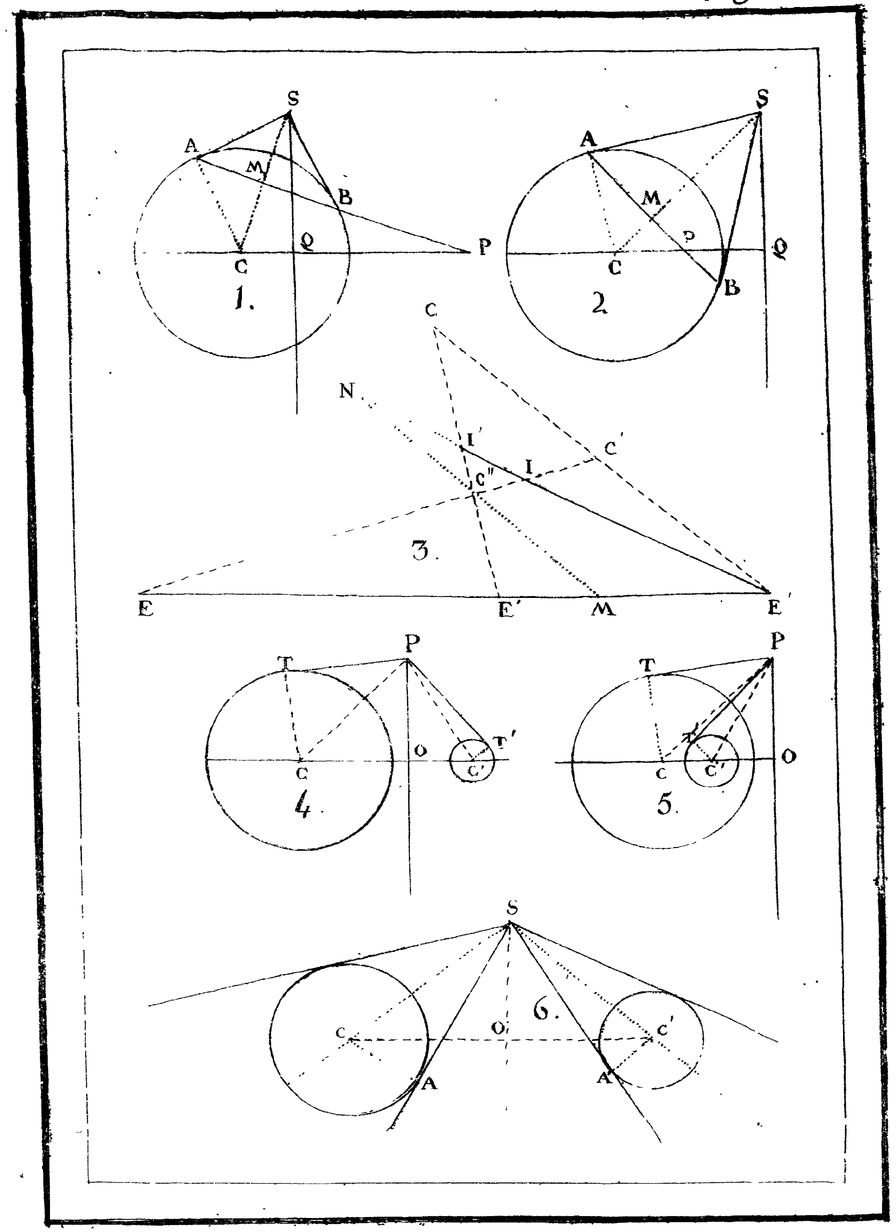
Démonstration. C'est une suite évidente de ce qui a été démontré ci-dessus (70).

88. Nous appellerons à l'avenir *centre radical* de trois cercles d'une sphère, le point de concours des axes radicaux de ces trois cercles pris successivement deux à deux. On conçoit que ces trois cercles doivent aussi se couper en un point opposé de la sphère; de manière qu'à proprement parler, les trois mêmes cercles d'une sphère ont deux centres radicaux situés aux deux extrémités d'un même diamètre de cette sphère.

89. Au moyen de notre théorème (87), et de ce qui a été observé (85), rien ne sera plus aisé que d'assigner l'axe radical de deux cercles de la sphère, quelle que puisse être d'ailleurs leur situation respective. On pourra donc aussi, sans plus de difficulté, construire le centre radical de trois cercles de la sphère, de quelque manière d'ailleurs que ces cercles puissent être posés l'un par rapport à l'autre; et cela par des procédés tout-à-fait analogues à ceux qui ont été indiqués (23, 24).

90. Si l'on suppose le rayon de la sphère infini, les théorèmes que nous venons d'énoncer (86, 87) deviennent précisément ceux qui ont été démontrés ci-dessus (20, 21).

SECTION



J. D. G. fecit

SECTION V.

Théorèmes et problèmes sur les contacts.

§. I.

Contacts des cercles, et cercle tangent à trois autres sur un plan.

91. Nous appellerons à l'avenir *polaires de similitude* de deux cercles, deux droites ayant pour pôle commun, par rapport à ces deux cercles, l'un de leurs centres de similitude; ces polaires seront dites d'ailleurs *internes* ou *externes*, suivant que le centre de similitude qui en sera le pôle commun sera lui-même interne ou externe.

92. Chacun des deux centres de similitude de deux cercles étant (9) un point à la fois semblablement situé par rapport à ces deux cercles; et les polaires des points homologues étant évidemment des droites homologues; il s'ensuit que les polaires de similitude, soit internes soit externes, de deux cercles sont des droites semblablement situées par rapport à ces deux cercles; c'est-à-dire, des droites dont les distances aux centres des deux cercles sont respectivement proportionnelles à leurs rayons. C'est d'ailleurs une chose que l'on parviendrait aisément à établir d'une manière directe.

93. *THÉORÈME. Dans tout système de deux cercles, les polaires de similitude internes sont également distantes des polaires de similitude externes, de telle sorte qu'il existe une même perpendiculaire à la droite qui joint les centres également distans des unes et des autres.*

Démonstration. Soient c, c' (fig. 7, 8) les centres de deux cercles dont les centres de similitude, interne et externe, soient respectivement I, E, et dont les polaires de similitude coupent la droite qui joint les centres; savoir : les internes en i, i', et les externes en e, e'. D'après la situation de ces différens points, nous aurons (1), en désignant par R, R' les rayons des deux cercles

$$ci : R :: R : c\mathrm{I}, \qquad c'i' : R' :: R' : c'\mathrm{I},$$

$$R : ce :: c\mathrm{E} : R; \qquad R' : c'e' :: c'\mathrm{E} : R';$$

d'où, en multipliant par ordre, et réduisant,

$$ci : ce :: c\mathrm{E} : c\mathrm{I}; \qquad c'i' : c'e' :: c'\mathrm{E} : c'\mathrm{I};$$

de là on tire

$$ci - ce : c\mathrm{E} - c\mathrm{I} :: ci : c\mathrm{E}; \qquad c'i' + c'e' : c'\mathrm{E} + c'\mathrm{I} :: c'i' : c'\mathrm{E};$$

c'est-à-dire,

$$ei : \mathrm{EI} :: ci : c\mathrm{E}; \qquad e'i' : \mathrm{EI} :: c'i' : c'\mathrm{E};$$

mais on a aussi (1, 9)

$$ci : R :: R : c\mathrm{I},$$

$$R' : c'\mathrm{I} :: c'i' : R',$$

$$c'\mathrm{I} : R' :: c\mathrm{I} : R;$$

$$R : c\mathrm{E} :: R' : c'\mathrm{E};$$

d'où, en multipliant par ordre et réduisant,

$$ci : c\mathrm{E} :: c'i' : c'\mathrm{E} \,;$$

la comparaison de cette proportion avec les deux précédentes donne

$$ei : \mathrm{EI} :: e'i' : \mathrm{EI} \,;$$

donc $ei=e'i'$; d'où on peut conclure encore $ei'=e'i$. Donc, si O est le milieu de ii', ce sera aussi le milieu de ee' ; et par conséquent la perpendiculaire conduite par O, à la droite qui joint les centres, sera à la fois également distante et des deux polaires de similitude internes et des deux polaires de similitude externes.

94. *THÉORÈME. La perpendiculaire à la droite qui joint les centres de deux cercles, qui est à la fois également distante de leurs polaires de similitude internes et de leurs polaires de similitude externes, n'est autre chose que l'axe radical de ces deux cercles.*

Démonstration. On a, par ce qui précède,

$$R^2=ce\,.\,c\mathrm{E}=ce\,(cc'+c'\mathrm{E})\,,$$

$$R'^2=c'e'\,.\,c'\mathrm{E}=c'e'(c\mathrm{E}-cc')\,;$$

donc

$$-R'^2=cc'(ce+c'e')+c'\mathrm{E}\,.\,ce-c\mathrm{E}\,.\,c'e'\,;$$

mais, parce que les points e, e' sont homologues dans les deux cercles, et que le point E est homologue par rapport à tous deux, on doit avoir

$$c\mathrm{E} : c'\mathrm{E} :: ce : c'e'\,,$$

d'où

$$cE \,.\, c'e' = c'E \,.\, ce \;;$$

donc, on aura simplement,

$$R^2 - R'^2 = cc'(ce + c'e') \;;$$

mais, à cause de $Oe = Oe'$, on a

$$ce + c'e' = (Oe + ce) - (Oe' - c'e') \;,$$

ou

$$ce + c'e' = Oc - Oc' \;;$$

on a d'ailleurs

$$cc' = Oc + Oc' \;;$$

donc enfin

$$R^2 - R'^2 = (Oc + Oc')(Oc - Oc') = \overline{Oc}^2 - \overline{Oc'}^2 \;;$$

donc enfin (18) la perpendiculaire menée par le point O à la droite qui joint les centres est l'axe radical des deux cercles.

95. Voilà donc une manière fort simple de construire l'axe radical de deux cercles, lorsqu'on connaît déjà leurs polaires de similitude, soit internes, soit externes.

96. *THÉORÈME. L'axe radical de deux cercles est placé, par rapport à tout cercle qui les touche tous deux, de la même manière que le sont, par rapport à ces deux cercles, leurs polaires de similitude ; savoir : leurs polaires de similitude externes, si le troisième cercle touche les deux autres de la même manière, et leurs polaires de similitude internes, si, au contraire, ce troisième cercle touche les deux autres d'une manière différente. D'où il suit que l'axe radical de deux cercles est une droite semblablement placée par rapport à tous les cercles qui les touchent tous deux ; pourvu que chaque cercle soit toujours touché de la même manière par tous ceux-là.*

Démonstration. Soit C le centre d'un cercle touchant de la même manière (fig. 9, 10, 11, 12) et d'une manière différente (fig. 13, 14), en t, t' deux autres cercles dont les centres sont c, c', et dont le centre de similitude externe est E (fig. 9, 10, 11, 12), ou dont le centre de similitude interne est I (fig. 13, 14).

Les points t, t' étant (9) des centres de similitude, de même dénomination (fig. 9, 10, 11, 12) et de dénomination contraire (fig. 13, 14); ces points doivent se trouver, avec le point E (fig. 9, 10, 11, 12) et avec le point I (fig. 13, 14), sur une même ligne droite, qui n'est autre (13) que l'axe de similitude externe (fig. 10, 11, 12) ou l'un des axes de similitude internes (fig. 9, 13, 14) de nos trois cercles; et qui doit conséquemment (13) être semblablement placée par rapport à ces trois cercles; donc, le pôle P de cette droite, par rapport au cercle touchant, doit être placé, à l'égard de ce cercle, de la même manière que le sont les pôles p, p' de la même droite, par rapport aux cercles touchés, relativement à ces derniers. D'un autre côté, le pôle P est (20) un point de l'axe radical des deux cercles touchés; et les points p, p' sont respectivement (7) des points des polaires de similitude de ces deux cercles. Or, lorsque, par des points homologues de plusieurs figures semblables, on mène des droites qui font des angles égaux avec des droites homologues de ces figures, les droites, ainsi menées sont elles-mêmes homologues; puis donc que l'axe radical et les deux polaires, comme droites parallèles, font des angles égaux avec la droite tt', homologue à la fois par rapport à nos trois cercles, et qu'ils passent respectivement par les points homologues P, p, p', il s'ensuit que l'axe radical des deux cercles touchés est situé, par rapport au cercle touchant, de la même manière que le sont, par rapport aux deux autres, leurs polaires de similitude respectives.

97. Nous appellerons à l'avenir *pôle de similitude* d'un cercle, dans le système de trois cercles, le pôle de l'un quelconque des axes de similitude de ces trois cercles, pris par rapport à ce cercle.

Chacun des cercles du système a donc ainsi quatre pôles de similitude ; savoir : un *externe*, un *interne* et deux *mixtes*.

98. Il est aisé de voir que l'un quelconque de ces pôles, pour l'un quelconque des trois cercles, est toujours (7) l'intersection de deux polaires de similitude obtenues pour ce cercle, en le comparant tour à tour aux deux autres. Ces polaires sont au nombre de quatre ; parallèles deux à deux, et formant ainsi un parallélogramme, dont les sommets sont les quatre pôles dont il s'agit. Le pôle de similitude externe est l'intersection des deux polaires de similitude externes ; le pôle de similitude interne est l'intersection des deux pôlaires de similitude internes ; enfin, chacun des pôles de similitude mixtes est l'intersection d'une polaire de similitude externe et d'une polaire de similitude interne.

99. Pour pouvoir désigner et différencier commodément entre eux ces divers pôles, nous adopterons les notations suivantes : soient c, c', c'' les trois cercles ;

1.° Nous aurons, pour c comparé à c', une polaire de similitude externe, que nous désignerons par (c_e, c') et une polaire de similitude interne que nous désignerons par (c_i, c'). Nous aurons de même, pour c comparé à c'', une polaire de similitude externe, que nous désignerons par (c_e, c''), et une polaire de similitude interne que nous désignerons par (c_i, c'').

2.° Nous aurons, pour c' comparé à c'', une polaire de similitude externe, que nous désignerons par (c'_e, c''), et une polaire de similitude interne, que nous désignerons par (c'_i, c''). Nous aurons de même, pour c' comparé à c, une polaire de similitude externe, que nous désignerons par (c'_e, c), et une polaire de similitude interne, que nous désignerons par (c'_i, c).

3.° Nous aurons enfin, pour c'' comparé à c, une polaire de similitude externe, que nous désignerons par (c''_e, c), et une polaire de similitude interne, que nous désignerons par (c''_i, c). Nous aurons de même, pour c'' comparé à c', une polaire de similitude externe, que nous désignerons par $(c''_e\,,\,c')$, et une polaire de similitude interne, que nous désignerons par $(c''_i\,,\,c')$.

On voit, d'après ces notations, que, par exemple, les quatre polaires pour c seront

$$(c_e\,,c')\,,\quad (c_e\,,c'')\,,\quad (c_i\,,\,c')\,,\quad (c_i\,,c'')\,;$$

et il en sera de même pour les deux autres cercles.

Pour designer un pôle de similitude, ou l'intersection de deux polaires de similitude, relatives à un même cercle, nous séparerons par une virgule les symboles qui désigneront ces deux polaires, en renfermant le tout entre deux crochets; ainsi, par exemple, les quatre pôles de similitude relatifs à c seront désignés comme il suit.

$$[(c_e\,,\,c')\,,\,(c_e\,,\,c'')]\,,$$

$$[(c_i\,,\,c')\,,\,(c_i\,,\,c'')]\,,$$

$$[(c_e\,,\,c')\,,\,(c\ \,,\,c'')]\,,$$

$$[(c_i\,,\,c')\,,\,(c_e\,,\,c'')]\,.$$

et il en sera de même des autres.

Nous continuerons enfin à désigner par E, E′, E″, les centres de similitude externes, et par I, I′, I″ les centres de similitude internes respectivement relatifs à c' et c'', c'' et c, c et c'; et nous désignerons les axes de similitude par les trois lettres qui représentent les centres qui s'y trouvent situés, écrites de suite et renfermées entre deux parenthèses, en cette manière (EE′E″), (EI′I″), (IE′I″), (II′E″).

Rien ne sera plus aisé, d'après cela, que de former le tableau des pôles de similitudes qui, pour chaque cercle, répondent à chacun de ces axes : voici ce tableau.

(EE′E″) ;...$[(c_e, c'), (c_e, c'')]$, $[(c'_e, c''), (c'_e, c)]$, $[(c''_e, c), (c''_e, c')]$.

(EI′I″) ;...$[(c_i, c'), (c_i, c'')]$, $[(c'_e, c''), (c'_i, c)]$, $[(c''_i, c), (c''_e, c')]$.

(IE′I″) ;...$[(c_i, c'), (c_e, c'')]$, $[(c'_i, c''), (c'_i, c)]$, $[(c''_e, c), (c''_i, c')]$.

(II′E″) ;...$[(c_e, c'), (c_i, c'')]$, $[(c'_i, c''), (c'_e, c)]$, $[(c''_i, c), (c''_i, c')]$.

100. *THÉORÈME. Dans le système de trois cercles, les pôles de similitude relatifs à chaque axe de similitude sont des points semblablement placés par rapport à ces trois cercles.*

Démonstration. Nous avons déjà vu (13) que chacun des axes de similitude du système de trois cercles est une droite à la fois semblablement située par rapport à ces trois cercles ; et comme il est d'ailleurs évident que les pôles des droites homologues, sont des points homologues, la proposition se trouve ainsi démontrée.

101. On peut, en général, concevoir huit cercles qui touchent à la fois les trois mêmes cercles donnés. Pour rendre la chose évidente, prenons un cas fort simple ; concevons que ces trois cercles, de même rayon, aient leurs centres situés aux trois sommets d'un triangle équilatéral, et soient extérieurs les uns aux autres. 1.° On pourra concevoir deux cercles dont l'un les touche tous trois extérieurement, tandis que l'autre les enveloppera tous trois ; cela ne se pourra que d'une manière unique ; et, dans l'un et dans l'autre cas, les trois cercles se trouveront touchés de la même manière par le quatrième. 2.° On pourra concevoir deux cercles, dont l'un touche deux des cercles donnés extérieurement et enveloppe le troisième ; tandis qu'au contraire, l'autre enveloppera les deux premiers, et touchera le troisième extérieurement ; mais ici, chaque cas pourra arriver de trois manières différentes, ce qui en fera six, dans chacun desquels deux cercles seront touchés de

de la même manière, et le troisième d'une manière différente; on aura donc, en effet, huit cercles tangens à la fois aux trois cercles donnés.

Mais il faut remarquer que ce nombre de huit pourrait se trouver réduit, dans certains cas, d'après la grandeur et la situation respective des cercles donnés. Il pourrait même se faire qu'aucun cercle ne pût les toucher tous trois; et c'est, par exemple, ce qui arriverait si, ces trois cercles étant inégaux, le plus petit se trouvait intérieur au moyen, et celui-ci au plus grand.

102. *THÉORÈME. Le centre radical de trois cercles est situé, par rapport à un quatrième cercle qui les touche tous trois, de la même manière que le sont, par rapport à ces cercles, leurs pôles de similitude respectifs; savoir: les pôles relatifs à l'axe de similitude externe, si les trois cercles sont touchés de la même manière par le quatrième; et les pôles relatifs à l'un des axes de similitude internes, si l'un des cercles n'est pas touché de la même manière que les deux autres; pourvu que, dans ce dernier cas, on choisisse celui des axes de similitude qui contient le centre de similitude externe des deux cercles touchés de la même manière par le quatrième cercle.*

Démonstration. Soient c, c', c'' les trois cercles touchés, C le cercle touchant, X$'$, X$''$ les axes radicaux de c et c', de c et c'', respectivement; soient de plus x', x'' les polaires de c relatives à la nature du contact, soient enfin p le pôle de c et P le centre radical des trois cercles; de manière que p soit l'intersection de x', x'' et P celle de X$'$, X$''$. D'après ce qui a été démontré (96) x', X$''$ sont des lignes homologues de c et C; et il en est de même de x'', X$''$; donc le point P, intersection de X$'$ et X$''$, est placé, par rapport à C, de la même manière que l'est, par rapport à c, le point p d'intersection de x', x''; et on démontrerait la même chose des pôles de c', c''.

103. Non seulement le centre radical P et le pôle p de c qui convient à la situation de C, sont deux points semblablement si-

tués par rapport aux deux cercles C, c ; mais ils sont de plus semblablement situés par rapport à la droite qui joint les centres de ces deux cercles, laquelle est une droite homologue dans l'un et dans l'autre. Cela est évident, puisque les deux droites qui, par leur intersection, déterminent le premier de ces points, sont respectivement parallèles à leurs homologues, dont l'intersection détermine le dernier ; de manière que les droites homologues, dans les deux systèmes, font des angles égaux, soit avec la droite qui joint les centres, soit avec la tangente commune ; droites homologues communes des deux cercles.

104. *THÉORÈME. La droite qui joint le centre radical de trois cercles à l'un quelconque des quatre pôles de similitude de l'un quelconque de ces trois cercles contient aussi les points de contact de ce cercle avec deux des huit cercles qui touchent à la fois les trois cercles dont il s'agit ; savoir : avec les deux cercles qui les touchent tous trois de la même manière, si le pôle est l'intersection des deux polaires de similitude externes ; avec les deux cercles qui touchent celui-là autrement que les deux autres, si le pôle est l'intersection des deux polaires de similitude internes ; et enfin avec deux cercles qui touchent celui-là de la même manière que l'un des deux autres, et le troisième d'une manière différente, si le pôle est l'intersection d'une polaire de similitude interne avec une polaire de similitude externe.*

Démonstration. Soient c, c', c'' les centres des trois cercles dont il s'agit, P leur centre radical, C le centre d'un cercle qui les touche tous trois d'une manière quelconque ; t, t', t'' ses points de contact respectifs avec eux, et enfin p, p', p'' leurs pôles de similitude respectifs, déterminés conformément à la manière dont ils sont touchés par le cercle dont le centre est C.

Si nous menons la droite Cc ; qui contient le point t, ainsi que les droites tP, tp ; parce que P, p sont semblablement placés (103) par rapport aux droites homologues tC, tc, les angles CtP et ctp devront être égaux ; puis donc que tC et tc ne forment qu'une seule ligne droite, il en devra être de même de tP et tp; c'est-à-dire, que le point t sera en ligne droite avec les points P, p. On prouvera, par un raisonnement semblable, que les points t', t'' sont respectivement sur Pp', Pp''.

105. Les deux polaires de similitude, dont l'intersection détermine le point p, ont leurs polaires respectivement parallèles et correspondantes, relatives à c', c'', lesquelles, prolongées s'il est nécessaire, concourent en un certain point q; de sorte que les deux points p, q sont des sommets opposés d'un parallélogramme, formé par ces quatre polaires. Mais les axes radicaux X', X'', dont le point P est l'intersection, sont respectivement parallèles aux côtés de ce parallélogramme, et ne sont autre chose (94) que les droites qui joignent les milieux de ses côtés opposés; le point P, intersection de ces deux droites, est donc le centre de ce même parallélogramme, et est par conséquent sur une même ligne droite avec les points p, q; puis donc que le point t est en ligne droite avec les points P, p, il sera également en ligne droite avec les points p, q.

106. *PROBLÈME. Décrire, sur un plan, un cercle qui touche à la fois trois cercles donnés?*

Solution. Déterminez, pour l'un quelconque des cercles donnés, ses polaires de similitude avec les deux autres; ayant soin de prendre la polaire externe pour les cercles qui doivent être touchés de la même manière, et l'interne pour ceux qui doivent être touchés d'une manière différente par le cercle cherché. Ces polaires se couperont en un certain point; et les polaires homologues relatives aux deux autres cercles, et respectivement parallèles à celles-là, se couperont en un second point. En joignant ces deux points par une droite, cette droite coupera le premier des trois cercles donnés aux points où il devra être touché par deux cercles dont chacun touchera à la fois les trois cercles de la manière que vous vous serez proposée. En faisant les mêmes opérations relativement à chacun des deux autres cercles, on déterminera pareillement leurs points de contact avec les deux cercles cherchés; de sorte que le problème se trouvera réduit à celui où il s'agit de faire passer un cercle par trois points donnés.

On pourra même se contenter de chercher les points de contact des cercles cherchés avec deux des cercles donnés seulement ; attendu qu'en menant des rayons à ces points, ils détermineront, par leur concours, les centres des cercles cherchés.

Pour chacune des quatre manières dont on voudra que le cercle cherché touche les trois cercles donnés, on trouvera deux cercles qui résoudront le problème ; ce qui fera huit solutions en tout.

Cette solution est exactement celle qui a été donnée par M. Gergonne, dans les *Mémoires de Turin*.

Autrement. On peut aussi se borner à chercher, pour chacun des trois cercles donnés, le pôle de similitude qui convient à la manière dont on veut qu'ils soient touchés par le cercle cherché, ainsi que le centre radical des trois cercles. En joignant ce dernier point à chacun des trois autres par des droites, ces droites, par leurs intersections respectives avec les cercles donnés, détermineront sur ces cercles les points où ils devront être touchés par les deux cercles remplissant les conditions du problème particulier qu'on se sera proposé.

Cette nouvelle solution est celle que M. Gergonne a donnée en l'endroit cité des *Annales de mathématiques* ; elles résultent évidemment, l'une et l'autre, de ce qui a été dit ci-dessus (104 et 105).

107. Si quelques-unes des droites qui doivent déterminer, sur les cercles donnés, leurs points de contact avec le cercle cherché, au lieu de couper ces cercles, leur étaient simplement tangentes, ou même ne les rencontraient pas, le nombre des solutions du problème s'en trouverait d'autant diminué, et pourrait même, dans certains cas, devenir tout-à-fait nul.

108. Les points et les droites n'étant que des cercles dont le rayon est nul ou infini, on sent qu'il suffira de faire subir quel-

ques légères modifications à ces solutions pour en déduire celles des dix problèmes d'Apollonius, résolus pour la première fois par Viète.

§. II.

Contacts des sphères, et sphère tangente à quatre autres dans l'espace.

109. Nous appellerons à l'avenir *plans polaires de similitude* de deux sphères, deux plans ayant pour pôle commun, par rapport à ces deux sphères, l'un de leurs centres de similitude; ce sont, en d'autres termes, les lieux géométriques des polaires de similitude de tous les systèmes de deux cercles résultant de la section des deux sphères par des plans passant par la droite qui joint leurs centres.

110. On voit par là, et par ce qui a été dit (91, 92), que deux sphères ont toujours deux systèmes de deux plans polaires de similitude; savoir, des externes et des internes; et que les uns comme les autres sont semblablement situés par rapport aux deux sphères. On peut aussi de là, et de ce qui a été dit (93, 94), conclure le théorème suivant:

111. THÉORÈME. *Dans tout système de deux sphères, les plans polaires de similitude internes sont également distans des plans polaires de similitude externes; de telle sorte qu'il existe un même plan, perpendiculaire à la droite qui joint les centres également distans des uns et des autres; et ce plan n'est autre chose que le plan radical des deux sphères.*

112. THÉORÈME. *Le plan radical de deux sphères est placé, par rapport à toute sphère qui les touche toutes deux, de la même manière que le sont, par rapport à ces deux sphères, leurs plans polaires de similitude; savoir, leurs plans polaires de similitude externes, si la troisième sphère touche les deux autres de la*

même manière, et leurs plans polaires de similitude internes, si, au contraire, cette troisième sphère touche les deux autres d'une manière différente. D'où il suit que le plan radical de deux sphères est un plan semblablement situé par rapport à toutes les sphères qui les touchent toutes deux; pourvu que chaque sphère soit touchée de la même manière par toutes celles-là.

Démonstration. Si, par les centres des trois sphères, on fait passer un plan, ce plan sera évidemment semblablement placé par rapport aux trois sphères, et il en sera de même des cercles résultant de la section. De plus, l'intersection de ce plan avec le plan radical des deux sphères touchées, axe radical des sections circulaires de ces sphères, se trouvera située, par rapport à la section circulaire de la sphère touchante (96), de la même manière que le seront les intersections du même plan avec les plans polaires de similitude des sphères touchées, lesquelles intersections ne sont autre chose que les polaires de similitude des sections circulaires de ces sphères. Ces polaires de similitude et l'axe radical seront donc trois droites parallèles semblablement situées dans des sections homologues des trois sphères; les plans polaires de similitude et le plan radical, qui sont trois plans parallèles, passant par ces droites, sont donc des plans homologues par rapport aux trois sphères.

113. Nous appellerons à l'avenir *polaire de similitude* d'une sphère, dans le système de trois sphères, la polaire conjuguée de l'un quelconque des axes de similitude de ces trois sphères, prise par rapport à cette sphère. Chacune des sphères du système a donc quatre polaires de similitude; savoir: une *externe*, une *interne* et deux *mixtes*.

114 Il est aisé de voir que l'une quelconque de ces polaires, pour l'une quelconque des trois sphères, est toujours à l'intersection de deux plans polaires de similitude obtenus, pour cette sphère, en la comparant tour à tour aux deux autres. Ces plans polaires sont au nombre de quatre, parallèles deux à deux, et

formant ainsi un prisme tétraèdre indéfini, dont les quatre arêtes sont les quatre polaires dont il s'agit. La polaire de similitude externe est l'intersection des deux plans polaires de similitude externe. La polaire de similitude interne est l'intersection des deux plans polaires de similitude internes; enfin, les deux polaires de similitude mixtes sont l'intersection d'un plan polaire de similitude externe avec un plan polaire de similitude interne.

115. *Dans le système de trois sphères, les polaires de similitude relatives à chaque axe de similitude sont des droites semblablement situées par rapport à ces trois sphères.*

Démonstration. Nous avons déjà vu (37) que chacun des axes de similitude du système de trois sphères est une droite à la fois semblablement située par rapport à ces trois sphères; et, comme il est d'ailleurs évident que les polaires des droites homologues sont elles-mêmes des droites homologues, la proposition se trouve ainsi démontrée.

116. Des considérations analogues à celles que nous avons développées ci-dessus (101) prouvent que les sphères, en nombre infini, qui peuvent toucher à la fois les trois mêmes sphères données, peuvent se trouver dans huit cas distincts. Dans les deux premiers, les trois sphères se trouveront touchées de la même manière : dans les six autres, deux sphères se trouveront touchées de la même manière, et la troisième d'une manière différente.

117. *THÉORÈME. L'axe radical de trois sphères est placé, par rapport à toute sphère qui les touche toutes trois, de la même manière que le sont, par rapport à ces trois sphères, leurs polaires de similitude respectives; savoir : les polaires relatives à l'axe de similitude externe, si les trois sphères sont touchées de la même manière par la quatrième; et les polaires relatives à l'un des axes de similitude internes, si l'une des sphères n'est pas touchée de la même manière que les deux autres; pourvu que, dans ce dernier cas, on choisisse celui des axes de similitude qui contient le centre de similitude externe des deux sphères touchées de la*

même manière par la quatrième sphère. D'où il suit que l'axe radical de trois sphères est une droite semblablement située par rapport à toutes les sphères qui les touchent toutes trois ; pourvu que chacune des trois sphères soit constamment touchée de la même manière par toutes celles-là.

Démonstration. Soient s, s', s'' les trois sphères touchées, S la sphère touchante, t, t', t'' les points de contact respectifs, x, x', x'' les polaires de similitude que l'on considère sur les trois sphères touchées, X l'axe radical de ces trois sphères.

Les points t, t', t'' étant (34) des centres de similitude, le plan que l'on conduira par ces trois points sera (30) un plan à la fois semblablement situé par rapport aux quatre sphères s, s, s, S; les cercles c, c', c'', C qu'il déterminera sur elles en seront donc des sections homologues ; les pôles p, p', p'', P des plans de ces quatre cercles seront donc des points homologues des quatre sphères ; or, il est aisé de voir (29) que p, p', p'' sont respectivement situés sur x, x', x'', et (46) que P est sur X ; ces quatre droites, parallèles entre elles, passent donc par des points homologues de quatre sphéres par rapport à un plan homologue commun ; elles sont donc elles-mêmes des lignes homologues de ces quatre sphères.

Si l'on conduit trois plans par la droite X et par chacune de ses homologues x, x', x'' ; il est évident que ces plans contiendront les points t, t', t'' homologues à la fois par rapport à la sphère S et à chacune des sphères s, s', s'' ; ces mêmes plans détermineront sur ces trois sphères des sections circulaires, contenant respectivement les points t, t', t''; or, comme ces plans sont invariables quelle que soit la sphère touchante, il en résulte ce théorème, déjà démontré par M. Dupin, mais d'une manière différente.

118. *THÉORÈME. Toutes les sphères qui touchent à la fois les trois mêmes sphères données ont leurs points de contact avec chacune de ces dernières sur une même section circulaire dont le plan, perpendiculaire à celui des centres, passe par l'axe radical des trois sphères et par l'une des polaires de similitude de celle d'entre*

d'entre elles dont il s'agit, pourvu que toutes ces sphères touchent constamment chacune des trois autres de la même manière, et que la polaire soit choisie conformément à la nature du contact.

119. Soient respectivement q, q', q'', Q les points où le plan conduit par t, t', t'' coupe les droites x, x', x'', X ; il est clair que ces points seront des points homologues de quatre sphères, et l'on voit de plus que Qq, Qq', Qq'' contiendront respectivement les points t, t', t'', lesquels sont en même temps les points de contact du cercle C dont il a été tout-à-l'heure question, avec les cercles c, c', c''. On démontrera facilement que ces points q, q', q'', Q, homologues par rapport aux quatre cercles c, c', c'', C sont, savoir ; les trois premiers, les pôles de similitude des trois premiers de ces cercles, et le dernier leur centre radical.

120. Il ne sera pas plus difficile de démontrer que les centres de toutes les sphères d'une même série, tangentes à la fois aux trois mêmes sphères, sont dans un plan mené perpendiculairement à l'un des axes de similitude des trois sphères dont il s'agit, par leur axe radical (*). Nous n'insistons pas sur toutes ces choses, parce que nous n'en ferons aucun usage pour l'objet que nous avons principalement en vue.

121. Nous appellerons à l'avenir *pôle de similitude* d'une sphère, dans le système de quatre sphères, le pôle de l'un quelconque des plans de similitude de ces quatre sphères, pris par rapport à celle-là. Chacune des sphères du système a donc (40) huit pôles de similitude, savoir ; un *externe*, un *interne* et six *mixtes*.

122. Il est aisé de voir (28) que l'un quelconque de ces pôles, pour l'une quelconque des quatre sphères, est toujours l'intersec-

---

(*) Et, comme ces centres sont aussi sur le cône qui, ayant pour sommet le centre de l'une des sphères touchées, passerait par le petit cercle de cette sphère qui contient ses points de contact avec les sphéres touchantes ; il s'ensuit que le lieu de ces mêmes centres est une section conique.

tion de trois plans polaires de similitude obtenus pour cette sphère, en la comparant tour à tour aux trois autres. Ces plans polaires sont au nombre de six, parallèles deux à deux, et forment ainsi un parallélipipède dont les sommets sont les huit pôles dont il s'agit. Le pôle de similitude externe est l'intersection des trois plans polaires de similitude externes ; le pôle de similitude interne est l'intersection des trois plans polaires de similitude internes ; et les pôles de similitude mixtes sont l'intersection de deux plans polaires de similitude externes avec un interne, ou de deux internes avec un externe.

123. Nous pourrions ici différencier entre eux ces différens pôles, en employant des notations analogues à celles dont nous avons fait usage (99 et suivant) ; mais, comme cela ne saurait offrir de difficulté, nous nous dispenserons de nous y arrêter.

124. *THÉORÈME. Dans le système de quatre sphères, les pôles de similitude relatifs à chaque plan de similitude sont des points semblablement situés par rapport à ces quatre sphères.*

Démonstration. Nous avons déjà vu (40) que chacun des plans de similitude du système de quatre sphères est un plan à la fois semblablement situé par rapport à ces quatre sphères ; et, comme il est d'ailleurs évident que les pôles des plans homologues sont des points homologues, la proposition se trouve ainsi démontrée.

125. On peut, en général, concevoir seize sphères qui touchent à la fois les quatre mêmes sphères données dans l'espace. Pour rendre la chose évidente, prenons un cas fort simple ; concevons que ces quatre sphères, de même rayon, aient leurs centres situés aux quatre sommets d'un tétraèdre régulier, et soient extérieures les unes aux autres. 1.° On pourra concevoir deux sphères, dont l'une les touchent toutes quatre extérieurement, tandis que l'autre les enveloppera toutes trois ; cela ne se pourra que d'une manière unique ; et, dans l'un et l'autre cas, les quatre sphères se trouveront touchées de la même manière par le cinquième. 2.° On

pourra concevoir deux sphères dont l'une touche extérieurement trois des sphères données et enveloppe la quatrième, tandis que l'autre, au contraire, enveloppera les trois premières et touchera la quatrième extérieurement; mais ici chaque cas pourra arriver de quatre manières différentes; ce qui en fera huit, dans chacun desquels trois sphères seront touchées de la même manière, et la quatrième d'une manière différente. 3.° Enfin, on pourra encore concevoir une sphère qui touche extérieurement deux quelconques des quatre sphères données et enveloppe les deux autres; et six sphères pourront être dans ce cas, où deux des sphères données seront touchées d'une même manière, et les deux autres d'une manière différente de celle-là. On aura donc, en effet, seize sphères tangentes à la fois aux quatre sphères données.

Mais il faut remarquer que ce nombre de seize pourrait se trouver réduit, dans certains cas, d'après la grandeur et la situation respective des sphères données. Il pourrait même se faire qu'aucune sphère ne pût les toucher toutes quatre; et c'est, par exemple, ce qui arriverait si, leurs rayons étant tous inégaux, elles se trouvaient, de la plus petite à la plus grande, intérieures les unes aux autres.

126. *THÉORÈME. Le centre radical de quatre sphères est situé par rapport à une cinquième sphère, qui les touche toutes quatre, de la même manière que le sont, par rapport à ces sphères, leurs pôles de similitude respectifs, savoir; les pôles relatifs au plan de similitude externe, si les quatre sphères sont touchées de la même manière par la cinquième; les pôles relatifs à l'un des plans de similitude mixtes, si trois de ces sphères sont touchées de la même manière, et la quatrième d'une manière différente par la cinquième; et enfin les pôles relatifs à l'un des plans de similitude internes, si deux des sphères sont touchées d'une même manière, et les deux autres d'une manière différente par la cinquième; pourvu que dans le second cas on choisisse le plan de similitude qui contient l'axe de similitude externe des trois sphères*

qui doivent être touchées de la même manière ; et que dans le dernier, on choisisse le plan de similitude qui contient les centres de similitude externes des deux couples de sphères qui doivent être touchées d'une même manière par la cinquième.

Démonstration. Soient s, s', s'', s''' les quatre sphères touchées, S la sphère touchante; X', X'', X''' les plans radicaux de s et s', de s et s'', de s' et s''', respectivement; soient, de plus, x', x'', x''' les plans polaires de s, relatifs à la nature du contact, respectivement parallèles aux plans radicaux X', X'', X'''; et soient enfin p le pôle de s et P le centre radical des quatre sphères, de manière que p soit l'intersection des trois plans x', x'', x''', et P celle des trois plans X', X'', X'''; d'après ce que nous avons dit ci-dessus (112) x', X' sont des plans semblablement situés par rapport à s et S; et il en est de même de x'', X'' et de x''', X'''; donc le point P, intersection de X', X'', X''', est placé par rapport à S de la même manière que l'est, par rapport à s, le point p d'intersection de x', x'', x'''; et on démontrerait la même chose des pôles de s', s'', s'''.

127. Non seulement le centre radical P et le pôle p de s qui convient à la situation de S, sont deux points semblablement situés par rapport aux sphères S, s; mais ils sont de plus semblablement situés par rapport à la droite qui joint les centres de ces deux sphères et même par rapport à tout plan passant par cette droite, lesquels droite et plan sont à la fois homologues dans l'une et l'autre sphères. Cela est évident, puisque les trois plans qui, par leur intersection, déterminent le premier de ces points, sont respectivement parallèles à leurs homologues, dont l'intersection détermine le dernier; de manière que les plans homologues dans les deux systèmes font des angles égaux soit avec un plan quelconque passant par les centres, soit avec le plan tangent commun, plans homologues communs aux deux sphères.

128. *THÉORÈME. La droite qui joint le centre radical de quatre sphères à l'un quelconque des huit pôles de similitude de*

l'une quelconque de ces quatre sphères, contient toujours les points de contact de cette sphère avec deux des seize sphères qui touchent à la fois les quatre sphères dont il s'agit, savoir ; avec les deux sphères qui les touchent toutes quatre de la même manière, si le pôle répond au plan de similitude externe, avec deux des huit sphères qui touchent trois des sphères données d'une même manière, et la quatrième d'une manière différente, si le pôle est relatif à l'un des quatre plans de similitude mixtes ; et enfin avec deux des six sphères qui, touchant deux des sphères données d'une même manière, touchent les deux autres d'une manière différente, si le pôle est relatif à l'un des trois plans de similitude internes.

Démonstration. Soient c, c', c'', c''' les centres des quatre sphères dont il s'agit, P leur centre radical, C le centre d'une sphère qui les touche toutes quatre, d'une manière quelconque, t, t', t'', t''' les points de contact respectifs avec elles, et enfin p, p', p'', p''' leurs pôles de similitude respectifs, déterminés conformément à la manière dont elles sont touchées par la sphère dont le centre est C.

Si, par les points c, C, p, on conçoit un plan ; ce plan contiendra le point t, en ligne droite avec c et C ; et, d'après ce qui vient d'être dit (127), il devra aussi contenir le point P ; menant donc pt, Pt, ces droites se trouveront dans un même plan, à la fois homologues par rapport aux deux sphères ; mais le point t est aussi un point homologue commun à ces deux sphères ; donc pt, Pt en doivent être des lignes homologues ; mais il en est de même des rayons ct, Ct ; donc les angles ctp, CtP doivent être égaux ; puis donc que les trois points c, t, C sont en ligne droite, il doit en être de même des trois points p, t, P. On prouvera, par un raisonnement tout semblable, que les points t', t'', t''' sont respectivement sur t'P, t''P, t'''P.

129. Les trois plans polaires de similitude, dont l'intersection détermine le point p, ont leurs plans polaires respectivement parallèles et correspondans, relatifs à c', c'', c''', lesquels, prolongés,

s'il est nécessaire, concourent en un certain point q; de sorte que les deux points p, q sont des sommets opposés d'un parallélipipède, formé par ces six plans polaires. Mais les plans radicaux X', X'', X''', dont le point P est l'intersection, sont respectivement parallèles aux faces de ce parallélipipède, et ne sont autre chose (111) que des plans conduits par les milieux de ses arêtes parallèles; le point P, intersection de ces trois plans, est donc le centre de ce parallélipipède, et doit par conséquent être en ligne droite avec les points p, q; puis donc que le point t est en ligne droite avec les points P, p; il le sera également avec les points p, q.

130. ***PROBLÈME.*** *Construire une sphère qui en touche quatre autres, données dans l'espace?*

Solution. Déterminez, pour l'une quelconque des sphères données, ses plans polaires de similitude avec les trois autres; ayant soin de prendre le plan polaire externe, pour les sphères qui doivent être touchées de la même manière, et l'interne pour celles qui doivent être touchées d'une manière différente par la sphère cherchée. Ces plans polaires se couperont en un certain point; et les plans polaires homologues, relatifs aux trois autres sphères et respectivement parallèles à ceux-là, se couperont en un second point. En joignant ces deux points par une droite, cette droite percera la première des quatre sphères données aux points où elle devra être touchée par deux sphères, dont chacune touchera à la fois les quatre sphères données de la manière qu'on se sera proposée. En faisant les mêmes opérations relativement à chacune des trois autres sphères, on déterminera pareillement leurs points de contact avec les deux sphères cherchées; de sorte que le problème se trouvera réduit à celui où il s'agit de faire passer une sphère par quatre points donnés.

On pourra même se contenter de chercher les points de contact des sphères cherchées avec deux des sphères données seulement; attendu qu'en menant des rayons à ces points, ils détermineront, par leur concours, les centres des sphères cherchées.

Pour chacune des huit manières dont on voudra que les sphères données soient touchées par la sphère cherchée, on trouvera deux sphères qui résoudront le problème ; ce qui fera seize solutions en tout.

Cette solution est exactement celle qui a été donnée par M. Gergonne, dans les *Mémoires de Turin*.

Autrement. On peut aussi se borner à chercher, pour chacune des quatre sphères données, le pôle de similitude qui convient à la manière dont on veut qu'elles soient touchées par la sphère cherchée, ainsi que le centre radical des quatre sphères. En joignant ce dernier point à chacun des quatre autres par des droites, ces droites, par leurs intersections respectives avec les sphères données, détermineront sur ces sphères les points où ils devront être touchés par les deux sphères remplissant les conditions du problème particulier qu'on se sera proposé.

Cette nouvelle solution est celle que M. Gergonne a donnée en l'endroit déjà cité des *Annales de mathématiques* ; elles résultent évidemment, l'une et l'autre, de ce qui a été dit ci-dessus (128, 129).

131. Si quelqu'unes des droites qui doivent déterminer, sur les sphères données, leurs points de contact avec la sphère cherchée, au lieu de percer ces sphères, leur étaient simplement tangentes, ou même ne les rencontraient pas, le nombre des solutions du problème s'en trouverait d'autant réduit, et pourrait même, dans certains cas, devenir tout-à-fait nul.

132. Les points et les plans n'étant que des sphères dont le rayon est nul ou infini, on sent qu'il suffira de faire quelques legères modifications à ces solutions, pour en déduire celles des quinze problèmes résolus pour la première fois par Fermat.

§. III.

Contacts des cônes et cylindres, et cône et cylindre tangens à trois autres.

133. Nous appellerons à l'avenir *plans polaires de similitude* de deux cônes de même sommet, deux plans ayant pour polaire commune, par rapport à ces deux cônes, l'un de leurs axes de similitude; ces plans polaires seront dits *internes* ou *externes*, suivant que l'axe de similitude qui en sera la polaire sera lui-même interne ou externe.

134. Nous appellerons à l'avenir *polaires de similitude* d'un cône dans le système de trois cônes du même sommet, la polaire de l'un quelconque des plans de similitude de ces trois cônes, prise par rapport à ce cône. Chacun des cônes du système a donc ainsi quatre polaires de similitude; savoir : une *externe*, une *interne* et deux *mixtes*.

135. Il est aisé de voir que l'une quelconque de ces polaires, pour l'un quelconque des trois cônes, est toujours (54) l'intersection de deux plans polaires de similitude obtenus pour ce cône, en le comparant tour à tour aux deux autres. Ces plans polaires sont au nombre de quatre formant un angle tétraèdre dont les arêtes sont les quatre polaires dont il s'agit. La polaire de similitude externe est l'intersection des deux plans polaires de similitude externes; la polaire de similitude interne est l'intersection des deux plans polaires de similitude internes; enfin, chacune des deux polaires de similitude mixtes est l'intersection d'un plan polaire de similitude externe avec un plan polaire de similitude interne. On peut, pour désigner ces diverses polaires et les différencier entre elles, employer des

des notations analogues à celles dont nous avons fait usage ci-dessus (99).

136. Par des considérations tout-à-fait analogues à celles qui nous ont guidés (101), on se convaincra facilement que trois cônes qui ont un sommet commun peuvent, en général, être touchés à la fois par huit autres cônes de même sommet qu'eux ; deux d'entre eux touchent les trois cônes de la même manière, tandis que les six autres touchent, deux à deux, deux des trois cônes d'une même manière, et le troisième d'une manière différente.

137. *THÉORÈME. Le plan qui contient l'axe radical de trois cônes de même sommet et l'une quelconque des quatre polaires de similitude de l'un quelconque de ces trois cônes contient aussi les lignes de contact de ce cône avec deux des huit cônes de même sommet qui touchent à la fois les trois cônes dont il s'agit ; savoir : avec les deux cônes qui les touchent tous trois de la même manière, si la polaire est l'intersection des deux plans polaires de similitude externes ; avec les deux cônes qui touchent celui-là autrement que les deux autres, si la polaire est l'intersection des deux plans polaires de similitude internes ; et enfin avec deux cônes qui touchent celui-là de la même manière que l'un des deux autres, et le troisième d'une manière différente, si la polaire est l'intersection d'un plan polaire de similitude externe avec un plan polaire de similitude interne.*

Démonstration. Soit C un cône tangent à trois autres c, c', c'', de même sommet O, et les touchant d'une manière déterminée quelconque.

Concevons des sphères S, s, s', s'' respectivement inscrites à ces cônes, de telle sorte que leurs lignes de contact avec eux soient à une même distance quelconque du sommet commun O. Il est clair que la sphère S touchera les trois autres s, s', s'' de la même manière que le cône C touche les cônes c, c', c'', et que ses points de contact avec elles seront sur les lignes de contact respectives de ce cône avec les trois autres.

Il est d'abord évident (68, 70) que l'axe radical des trois sphères sera aussi celui des trois cônes.

Soient k, k', k'' les centres de similitude des trois sphères s, s', s'', déterminés conformément à la nature du contact ; ces trois points seront en ligne droite (36); Ok, Ok', Ok'' seront (60) les axes de similitude des trois cônes c, c', c''; et conséquemment (62) ces trois droites seront dans un même plan.

Il suit de là que la polaire de similitude de l'une quelconque des sphères touchées et celle du cône correspondant perceront le plan de sa ligne de contact avec ce cône au même point, et seront conséquemment dans un même plan. En effet, considérons, par exemple, la sphère s, inscrite au cône c. La polaire de s est (29) l'intersection de deux plans dont les pôles sont k', k''; et la polaire de c est l'intersection de deux autres plans dont les droites polaires sont Ox', Ox''; mais le plan de la ligne de contact de s avec c a le point O pour pôle; d'où il suit que le pôle du plan x'Ox'' relatif à la sphère s doit être à la fois sur ces cinq plans, et doit conséquemment être un point du plan de la ligne de contact appartenant à la fois à la polaire de la sphère et à celle du cône qui ainsi se coupent en ce point et sont conséquemment dans un même plan.

Mais l'axe radical des trois cônes et des trois sphères est aussi dans un même plan avec la polaire de similitude du cône c, puisque ces deux droites concourent au point O; et, comme d'ailleurs la polaire de similitude de s, qui, comme nous venons de le voir, a un point sur ce plan, est parallèle à l'axe radical, il s'ensuit que cet axe et les deux polaires sont dans un même plan passant par le point O.

Or, il a été démontré (117) que, lorsqu'une sphère en touche trois autres, le plan qui contient l'axe radical de celles-ci et la polaire de similitude de l'une d'elles contient aussi son point de contact avec la sphère touchante; on pourra donc dire aussi que ce point de contact est sur le plan qui passe par l'axe radical et par la polaire de similitude du cône; et, puisque la ligne de contact du cône touchant et du cône touché passe par ce point de contact et passe de plus par le sommet commun, comme le plan dont il s'agit, cette ligne de contact sera aussi dans ce plan.

138. *PROBLÈME. Construire un cône qui touche à la fois trois cônes donnés du même sommet?*

Solution. Déterminez, pour l'un quelconque des cônes donnés, ses plans polaires de similitude avec les deux autres, ayant soin de prendre le plan polaire externe pour les cônes qui doivent être touchés de la même manière, et le plan polaire interne pour ceux qui doivent être touchés d'une manière différente par le cône cherché. Ces plans polaires se couperont suivant une certaine droite qui sera une des polaires du cône dont il s'agit. Déterminez aussi l'axe radical des trois cônes. Alors, en faisant passer un plan par cette dernière droite et par la polaire, ce plan coupera le premier des trois cônes donnés suivant ses lignes de contact avec deux cônes de même sommet, dont chacun touchera à la fois les trois cônes donnés de la manière que vous vous serez proposée. En exécutant donc les mêmes opérations pour chacun des deux autres cônes, le problème se trouvera ramené à faire passer un cône par trois droites données concourant en un point.

On pourra même se contenter de chercher les lignes de contact des cônes cherchés avec deux des cônes donnés; attendu qu'en conduisant des plans par ces droites et par les axes des cônes auxquels elles appartiennent, leur intersection sera l'axe du cône cherché.

Pour chacune des quatre manières dont on voudra que le cône cherché touche les trois cônes donnés, on trouvera deux cônes qui résoudront le problème, ce qui fera huit solutions en tout.

Cette solution est exactement celle qui a été donnée par M. Gergonne, en l'endroit des *Annales de mathématiques* déjà cité.

139. Si quelques-uns des plans qui doivent déterminer, sur les cônes donnés, leurs lignes de contact avec le cône cherché, au

lieu de couper ces cônes, leur étaient simplement tangens, ou même n'avaient avec eux d'autres points communs que leurs sommets ; le nombre des solutions du problème s'en trouverait d'autant diminué, et pourrait même, dans certains cas, devenir tout-à-fait nul.

140. Les droites et les plans n'étant autre chose que des cônes dont l'angle générateur est nul ou droit, on sent qu'il suffira de faire subir quelques légères modifications à la solution que nous venons de donner, pour en déduire celles de dix problèmes relatifs au cône tout-à-fait analogues à ceux d'Apollonius pour le cercle.

141. En considérant le cylindre comme un cône dont le sommet est infiniment éloigné, on est conduit à appeler *plans polaires de similitude* de deux cylindres, dont les axes sont parallèles, deux plans ayant pour polaire commune, par rapport à ces cylindres, l'un de leurs axes de similitude ; ces plans polaires seront dits *internes* ou *externes*, suivant que l'axe de similitude qui en sera la polaire sera lui-même interne ou externe.

142. On appellera de même *polaire de similitude* d'un cylindre, dans le système de trois cylindres, ayant leurs axes parallèles, la polaire de l'un quelconque des plans de similitude de ces trois cylindres prise par rapport à celui-là. Chacun des cylindres du système aura ainsi quatre polaires de similitude ; savoir : une *externe*, intersection des deux plans polaires externes, une *interne*, intersection des plans polaires internes, et deux *mixtes*, intersection d'un plan polaire externe avec un plan polaire interne.

142. On voit aussi (136) que les trois mêmes cylindres ayant leurs axes parallèles peuvent toujours être touchés à la fois par huit autres dont les axes seront parallèles aux leurs, et sur la nature du contact desquels il y aura les mêmes observations à faire que sur les diverses sortes de contact d'un cône avec trois autres de même sommet que lui. Tout cela bien entendu, on aura (137) le théorème suivant.

143. *THÉORÈME. Le plan qui contient l'axe radical de trois cylindres dont les axes sont paralèlles et l'une quelconque des quatre polaires de similitude de l'un quelconque de ces cylindres, contient aussi les lignes de contact de ce cylindre avec deux des huit cylindres qui touchent à la fois les trois cylindres dont il s'agit; savoir : avec les deux cylindres qui les touchent tous trois de la même manière, si la polaire est l'intersection des deux plans polaire de similitude externes; avec les deux cylindres qui touchent celui-là autrement que les deux autres, si la polaire est l'intersection des deux plans polaires de similitude internes; et enfin avec les deux cylindres qui touchent celui-là de la même manière que l'un des deux autres et le troisième d'une manière différente, si la polaire est l'intersection de deux plans polaires de dénominations différentes.*

144. *PROBLÈME. Construire un cylindre qui touche, à la fois trois cylindres donnés, dont les axes sont parallèles?*

Solution. La solution de ce problème se déduit tout naturellement du théorème qui vient d'être énoncé de la même manière que la solution de celui dont nous nous sommes occupés (138) se déduit du théorème énoncé (137). On peut aussi couper les trois cylindres donnés par un plan perpendiculaire à la direction commune de leurs axes; décrire (106) sur ce plan, un cercle qui touche à la fois les cercles résultant des cylindres donnés, et considérer ce cercle comme la section par le même plan d'un quatrième cylindre qui résoudra le problème proposé.

145. On peut, au surplus, faire ici des remarques tout-à-fait analogues à celles que nous avons faites (139, 140).

§. IV.

Contact des cercles sur la sphère, et cercle d'une sphère tangent à trois autres.

146. En considérant le sommet commun des cônes dont il a été

question (133 et suiv.) comme le centre d'une sphère de rayon quelconque, on est conduit à appeler *polaire de similitude* de deux cercles d'une sphère, deux arcs de grands cercles ayant pour pôle commun, par rapport à ces deux cercles, l'un de leurs centres de similitude. Ces polaires seront dites *externes* ou *internes* suivant la dénomination du centre de similitude auquel elles seront relatives.

147. On appellera pareillement *pôle de similitude* d'un cercle, dans le système de trois cercles tracés sur la sphère, le pôle de l'un quelconque des axes de similitude de ces trois cercles, pris par rapport à ce cercle. Chacun des cercles du système aura ainsi quatre pôles de similitude; savoir : un *externe*, intersection des deux polaires de similitude externes; un *interne*, intersection des deux polaires de similitude internes, et deux *mixtes*, intersection de deux polaires de dénominations différentes.

148. On voit aussi (136) que les trois mêmes cercles d'une sphère pourront à la fois être touchés par huit cercles différens, sur la nature du contact desquels il y aura à faire des observations analogues à celles que nous avons déjà faites sur le contact d'un cône avec trois autres de mêmes sommets, ou encore (101) sur le contact d'un cercle avec trois autres sur un plan. Ces choses ainsi entendues, on aura (137) le théorème suivant.

149. *THÉORÈME. L'arc de grand cercle qui joint le centre radical de trois cercles d'une sphère à l'un quelconque des quatre pôles de similitude de l'un quelconque de ces trois cercles, contient aussi les points de contact de ce cercle avec deux des huit cercles qui touchent à la fois les trois cercles dont il s'agit; savoir : avec les deux cercles qui les touchent tous trois de la même manière, si le pôle est l'intersection des deux polaires de similitude externes, avec les deux cercles qui touchent celui-là autrement que les deux autres, si le pôle est l'intersection des deux polaires de similitude internes; et enfin avec les deux cercles qui touchent celui-là de la même manière que l'un des deux autres, et le troisième d'une*

manière différente, si le pôle est l'intersection de deux polaires de dénomination différente.

150. *PROBLÈME. Décrire un cercle qui en touche à la fois trois autres donnés sur une sphère?*

Solution. La solution de ce problème se déduit évidemment du théorème qui vient d'être énoncé, de la même manière que nous avons déduit du théorème énoncé (137) celle du problème proposé (138); et il y a encore lieu ici à des remarques analogues à celles que nous avons faites (139 et 140) (*).

151. Si l'on suppose le rayon de la sphère infini, on retombe sur le cas où il s'agit de décrire un cercle qui en touche à la fois trois autres tracés sur un même plan, et notre construction devient alors, en effet, exactement la seconde des deux que nous avons indiquées (106) pour la résolution de ce dernier problème.

(*) On pourrait déduire une autre solution de ce problème de celle d'un problème beaucoup plus général que nous avons donnée à la page 27 du tome VII.e des *Annales*.

QUESTIONS PROPOSÉES.

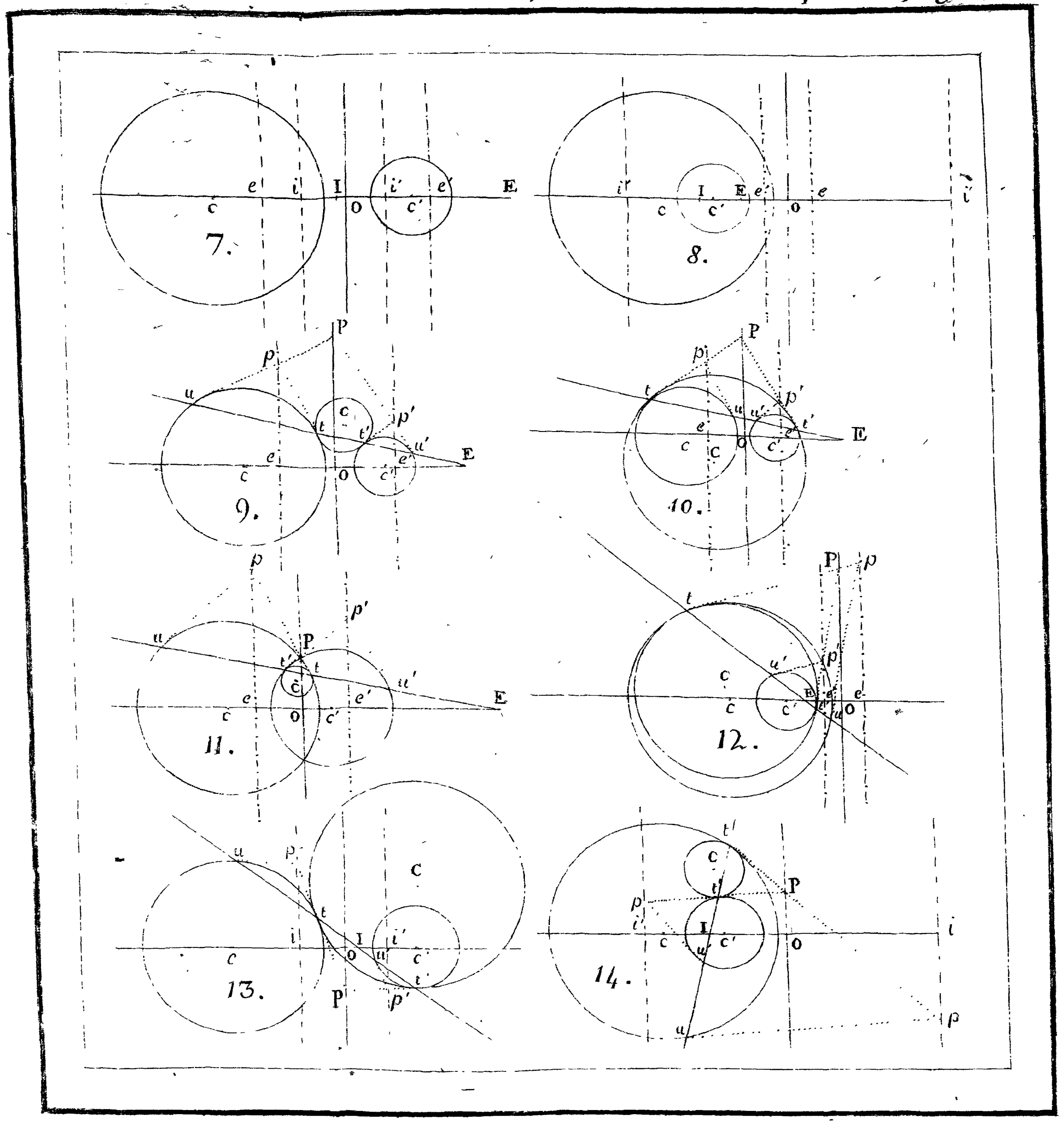
Problèmes de Géométrie.

I. QUEL est le point du plan de quatre cercles dont les polaires, relatives à ces cercles, se coupent toutes quatre au même point? et quel est ce dernier point?

II. Quelle est, sur le plan de quatre cercles, la droite dont les pôles relatifs à ces cercles sont tous quatre sur une même ligne droite? et quelle est cette dernière droite?

III. Quel est le lieu des points du plan de trois cercles dont les polaires relatives à ces cercles se coupent toutes trois au même point? et quel est le lieu de l'intersection de ces polaires?

IV. A quelle courbe sont tangentes les droites tracées sur le plan de trois cercles, de manière que les pôles de chacune d'elles, relatifs à ces cercles, soient tous trois sur une même ligne droite? et à quelle autre courbe est constamment tangente la droite qui contient les pôles?



D.I.G. fecit.

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Rapport à l'académie royale des sciences;

Par M. CAUCHY;

Sur un mémoire relatif aux propriétés projectives des sections coniques;

Par M. PONCELET, capitaine du génie.

LE secrétaire perpétuel de l'académie, pour les sciences mathématiques, certifie que ce qui suit est extrait du procès-verbal de la séance du lundi 5 juin 1820.

L'académie nous a chargés, MM. Arago, Poisson et moi, de lui rendre compte d'un mémoire de M. Poncelet sur les propriétés *projectives* des sections coniques. L'auteur appelle ainsi les propriétés relatives aux cordes communes, aux points de concours des tangentes communes, et beaucoup d'autres semblables qui, étant indépendantes des dimensions attribuées aux courbes que l'on considère et de leurs paramètres, subsistent lorsqu'on projette ces courbes sur de nouveaux plans, à l'aide de droites qui concourent vers un même point; c'est-à-dire, en d'autres termes, lorsqu'on met ces courbes en perspective; ce qui a également lieu pour le cas où, le point de concours s'éloignant à l'infini, les projections deviennent orthogonales. Nous allons d'abord indiquer les moyens que l'auteur emploie pour établir les propriétés dont il s'agit.

Lorsque plusieurs courbes, qui composent une seule classe ou famille, possèdent en commun diverses propriétés, une des méthodes les plus expéditives pour la démonstration de ces mêmes propriétés consiste à les établir d'abord pour les courbes les plus simples de la classe dont il est question, et à les étendre ensuite aux autres courbes de la même classe, par la comparaison de celles-ci avec les premières. Cette méthode peut même servir à la recherche des propriétés d'une courbe donnée. Veut-on connaître, par exemple, celle d'une ellipse ? on commencera par supposer les deux axes égaux; ce qui réduira cette ellipse à une circonférence de cercle. On remarquera que la surface du cercle est égale au quarré du rayon multiplié par le nombre qui exprime le rapport de la circonférence au diamètre; que deux rayons qui se coupent à angles droits sont parallèles aux tangentes menées par leurs extrémités; que ces mêmes rayons comprennent entre eux une surface constante; que la somme de leurs quarrés est égale à la somme des quarrés de leurs projections sur un diamètre quelconque; que les tangentes des angles aigus qu'ils forment avec un même diamètre, étant multipliées l'une par l'autre, donnent l'unité pour produit; enfin, que la perpendiculaire élevée sur un diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux segmens adjacens. Si maintenant on considère une ellipse dont les deux axes soient inégaux, on décrira sur le grand axe de cette ellipse, pris pour diamètre, une circonférence de cercle, dont l'ordonnée, comptée perpendiculairement au grand axe, aura un rapport constant avec celle de l'ellipse. Cela posé, si l'on appelle diamètres conjugués de l'ellipse ceux dont les projections sur le grand axe coïncident avec les projections de deux diamètres du cercle qui se coupent à angles droits, on conclura immédiatement des remarques faites à l'égard du cercle que la surface de l'ellipse est égale au produit des deux demi-axes par le nombre qui exprime le rapport de la circonférence au diamètre ; que, dans la même courbe, les tangentes menées aux extrémités de deux diamètres conjugués, sont parallèles à ces diamètres ; que deux demi-diamètres conjugués comprennent entre eux une surface constante ; que les sommes des quarrés de leurs projections sur le grand axe et sur le petit axe sont respectivement égales aux quarrés des demi-axes, et que, par suite, la somme des quarrés des deux demi-diamètres équivaut à la somme des quarrés des deux demi-axes ; enfin, que le rapport de ces deux derniers quarrés mesure à la fois le produit des tangentes des angles aigus formés avec le grand axe par deux diamètres conjugués et le rapport du quarré d'une ordonnée aux segmens correspondans de ce même grand axe. Au reste, pour obtenir le cercle auxiliaire dont nous venons d'indiquer l'usage, il suffit de chercher dans l'espace un cercle dont l'ellipse donnée soit la projection orthogonale, et de rabattre ensuite le plan de ce cercle sur celui de l'ellipse, après avoir fait tourner le premier autour du diamètre parallèle au second (*). Plus généralement, on peut considérer une ellipse, une hyperbole ou une parabole comme la perspective ou projection centrale d'un cercle quelconque, et déduire, des propriétés de ce cercle, celles de la projection. Tel est, en effet, le moyen employé par M. Poncelet pour déterminer les propriétés projectives des sections coniques. Il appelle *centre de projection* le point où se trouve placé dans la perspective l'œil du spectateur. Ce point est le sommet d'une surface conique du second degré qui a pour base la courbe proposée. Il est bon de rappeler,

---

(*) Il paraîtra peut-être plus simple, et il reviendra d'ailleurs au même, de chercher dans l'espace un plan sur lequel la projection ortogonale de l'ellipse soit un cercle ; et il n'y aura pas d'ailleurs besoin de rabattement. On peut consulter, sur ce sujet, un mémoire de M. FERIOT, inséré à la page 240 du II.e volume de ce recueil. *J. D. G.*

à ce sujet, que, si l'on coupe une surface conique quelconque par deux plans parallèles, les deux sections seront toujours semblables entre elles. Il y a plus, si, d'un centre de projection pris à volonté dans l'espace, on mène des rayons vecteurs aux différens points d'un système composé de points, de lignes ou de surfaces quelconques, et que l'on fasse croître ou décroître à la fois tous les rayons vecteurs dans un rapport donné, on obtiendra un second système de points, lignes ou surfaces, semblable au premier et semblablement placé, en sorte que les droites et les plans menés dans les deux systèmes, par des points correspondans, seront toujours parallèles. Le centre commun, vers lequel convergent tous les rayons vecteurs, est ce qu'on peut appeler le *centre de similitude* des deux systèmes. Pour deux cercles, tracés sur un même plan, ce centre de similitude ne peut être que le point de concours des tangentes communes, extérieures ou intérieures. M. Poncelet expose ses diverses propriétés, dont un grand nombre dérivent immédiatement de la définition même que nous venons d'en donner.

Outre la considération des projections centrales, M. Poncelet emploie encore, dans son mémoire, ce qu'il appelle le *principe de la continuité*. L'admission de ce principe en géométrie consiste à supposer que, dans le cas où une figure composée d'un système de lignes droites ou courbes conserve constamment certaines propriétés, tandis que les dimensions absolues ou relatives de ses diverses parties varient d'une manière quelconque, entre certaines limites, ces mêmes propriétés subsistent nécessairement lorsqu'on fait sortir les dimensions dont il s'agit des limites entre lesquelles on les supposait d'abord renfermées; et que, si quelques parties de la figure disparaissent dans la seconde hypothèse, celles qui restent jouissent encore, les unes à l'égard des autres, des propriétés qu'elles avaient dans la figure primitive (*). Ce principe n'est, à proprement parler,

(*) Le mémoire qui précède ceci offre, en particulier, des exemples remarquables en faveur de ce principe; on y a vu que le point de concours des tanqu'une forte induction, à l'aide de laquelle on étend des théorèmes établis, d'abord à la faveur de certaines restrictions, aux cas où ces mêmes restrictions n'existent plus. Etant appliqué aux courbes du second degré, il a conduit l'auteur à des résultats exacts. Néanmoins, nous pensons qu'il ne saurait être admis généralement et appliqué indistinctement à toutes sortes de questions en géométrie; ni même en analise (*): En lui accordant trop de confiance, on pourrait tomber quelque fois dans des erreurs manifestes. On sait, par exemple, que, dans la détermination des intégrales définies, et par suite, dans l'évaluation des longueurs, des surfaces et des volumes, on rencontre un grand nombre de formules qui ne sont vraies qu'autant que les valeurs des quantités qu'elles renferment restent comprises entre certaines limites.

Au reste, nous distinguerons soigneusement les considérations de M. Poncelet sur la continuité de celles qui ont pour objet les propriétés des lignes auxquelles il donne le nom de *cordes idéales* des sections coniques. Comme ces propriétés nous paraissent mériter

---

gentes communes à deux cercles, soit extérieures, soit intérieures, ne cesse pas d'exister, lorsque ces tangentes cessent d'être possibles; et qu'il en est de même de la corde commune à deux cercles, lorsque ces cercles cessent de se couper.

(*) C'est aussi, à ce qu'il paraît, l'opinion de M. Durrande; et c'est ce qui l'a déterminé à abandonner les démonstrations, très-élégantes d'ailleurs, que Monge avait données de la théorie des pôles, de celle des centres de similitude et de celle des axes radicaux, démonstrations qui ne sont applicables qu'à certains cas. Il faut donc employer le principe de M. Poncelet, ainsi que le tour de démonstration introduit par Monge, à peu près comme on employait le calcul différentiel lorsqu'on n'en voyait pas bien encore la métaphysique; c'est-à-dire, uniquement comme instrumens de découverte; mais ce n'en seront pas moins des instrumens très-précieux; car, le plus souvent, en mathématiques, découvrir est tout; et ce ne sont pas d'ordinaire les démonstrations qui embarrassent beaucoup.

J. D. G.

d'être remarquées, et qu'elles fournissent à l'auteur un troisième moyen de résoudre les questions relatives aux courbes du second degré, nous allons donner à ce sujet quelques développemens.

Si, après avoir mené, par le centre d'une hyperbole, un diamètre $2A$ qui rencontre les deux branches, on fait passer, par les points de rencontre des tangentes à l'hyperbole et par le centre, une parallèle à ces tangentes; puis que l'on cherche à déterminer, par l'analise, les coordonnées des points où cette parallèle rencontre la courbe et les distances respectives de ces points au centre, on trouvera, pour l'une et l'autre distances, en faisant abstraction du signe, une expression imaginaire de la forme $B\sqrt{-1}$; et par conséquent, pour la distance entre les deux points, une autre expression de la forme $2B\sqrt{-1}$. Le coefficient de $\sqrt{-1}$, dans cette dernière, ou la longueur $2B$, qui est une quantité réelle, peut se construire géométriquement; et, comme la considération de cette longueur peut être utile dans la recherche des propriétés de l'hyperbole, on lui a donné un nom, en disant que $2B$ représente le diamètre conjugué au diamètre $2A$. On sait qu'étant donné le diamètre $2B$, avec sa direction, on peut facilement en déduire le diamètre $2A$; en coupant les asymptotes par une sécante parallèle à la direction donnée, la ligne menée du centre au milieu de la sécante indiquera la direction du diamètre $2A$; et le rapport de cette dernière ligne à la moitié de la sécante sera précisément égal au rapport $\frac{A}{B}$.

Supposons maintenant que l'on cherche, par l'analise, les points d'intersection, non plus d'un diamètre, mais d'une droite quelconque avec une courbe du second degré, et la distance de ces deux points, ou, en d'autres termes, la corde qui les unit; lorsque la droite ne rencontrera plus la courbe, la distance donnée par l'analise deviendra imaginaire, et sera de la forme $2C\sqrt{-1}$; tandis que le point milieu de la corde conservera des coordonnées réelles. Il devient alors utile de substituer à la corde imaginaire, qui n'existe pas, une corde fictive $2C$, comptée sur la droite proposée, et dont le milieu coincide avec le point dont nous venons de parler.

C'est à cette corde fictive qu'on pourrait appliquer la dénomination de corde idéale, par laquelle M. Poncelet désigne tantôt la droite indéfinie que l'on considère, et tantôt la corde imaginaire interceptée par la courbe, puisqu'il appelle centre de la corde idéale le point réel que l'analise indique comme étant le milieu de la corde imaginaire. Le sens dans lequel l'auteur emploie le mot idéale se trouverait ainsi modifié de telle manière que les longueurs idéales resteraient des longueurs réelles et constructibles en géométrie. Ainsi, par exemple, dans une hyperbole, dont le grand axe rencontre la courbe, la longueur idéale du diamètre, perpendiculaire au grand axe, serait le petit axe lui-même. Si, en adoptant cette manière de s'exprimer, on construit, pour une section conique quelconque, toutes les cordes idéales parallèles à une direction donnée; les extrémités de toutes ces cordes se trouveront sur une nouvelle section conique, que l'auteur appelle supplémentaire de la première, relativement à la direction dont il s'agit.

Cela posé, il est facile de voir que deux sections coniques supplémentaires l'une de l'autre, relativement à une direction donnée, sont nécessairement ou deux paraboles ou une hyperbole et une ellipse. Dans le premier cas, les deux paroboles ont le même paramètre, avec une tangente commune, parallèle à la direction donnée, et un diamètre commun passant par le point de contact. Dans le second cas, les deux courbes peuvent aisément se déduire l'une de l'autre, d'après la condition à laquelle elles se trouvent assujetties d'avoir en commun deux diamètres conjugués, dont l'un est parallèle à la droite donnée, tandis que l'autre rencontre à la fois les deux courbes qui se touchent ainsi par ses extrémités. Dans le même cas, toutes les fois que l'ellipse se réduit à un cercle, l'hyperbole devient équilatère, et a pour axe transverse le diamètre du cercle. Enfin, l'on prouve aisément que, si deux courbes sont supplémentaires l'une de l'autre, relativement à une direction donnée, indiquée par une certaine droite, leurs projections sur un plan parallèle à cette droite jouiront de la même propriété.

En vertu de ce qui précède, si l'on donne une section conique quelconque, avec un centre et un plan de projection, il deviendra facile de déterminer, pour la section conique projetée, 1.° l'angle formé par deux diamètres conjugués, dont l'un serait parallèle au plan de la section conique proposée; 2.° le rapport de ces mêmes diamètres. En effet, si l'on conçoit d'abord que la section conique projetée soit une hyperbole, un plan quelconque, parallèle au plan de projection, coupera le cône qui a pour base la courbe proposée, et pour sommet le centre de projection suivant des hyperboles semblables et comprises entre des asymptotes parallèles. Par suite, si le plan coupant passe par le sommet du cône, la section se trouvera réduite à deux arêtes parallèles aux asymptotes dont il s'agit. Comme d'ailleurs le même plan coupera évidemment la courbe donnée suivant une certaine corde terminée à ces deux arêtes, il en résulte, 1.° que l'angle cherché sera équivalent à celui que forme la corde en question avec la droite qui joint son milieu et le sommet du cône; 2.° que le rapport cherché sera celui qui existe entre la longueur de cette droite et celle de la demi-corde. Lorsque la courbe projetée sera une ellipse, le plan mené par le sommet du cône parallèlement au plan de projection ne rencontrera plus la courbe proposée; mais sa trace sur le plan de cette dernière sera toujours une droite réelle, à laquelle correspondra une certaine corde idéale de la courbe donnée. Dans la même hypothèse, on appliquera les raisonnemens que nous avons employés ci-dessus, non plus à la courbe proposée, mais à la section conique supplémentaire de cette courbe, relativement à la corde idéale dont nous venons de parler; et l'on en conclura, 1.° que l'angle cherché est équivalent à celui que forme la corde idéale avec la droite qui joint le milieu de cette corde et le centre de projection; 2.° que le rapport cherché est celui qui existe entre la longueur de cette droite

et

et la demi-corde. Lorsque la courbe projetée se réduit à un cercle, tous ses diamètres conjugués sont égaux et se coupent à angles droits. Par conséquent, dans ce cas particulier, la droite menée du centre de projection au milieu de la corde idéale de la courbe donnée doit être perpendiculaire sur cette corde et égale à sa moitié.

La question que nous venons de résoudre n'a pas été traitée directement par M. Poncelet; mais la solution que nous avons déduite des principes qu'il a établis fournit le moyen de simplifier et de généraliser, tout à la fois, celles de plusieurs autres problèmes dont nous parlerons ci-après.

Considérons à présent deux sections coniques tracées sur un même plan. Il peut arriver ou qu'elles se coupent en quatre points ou qu'elles se coupent en deux points ou qu'elles ne se coupent pas. Si l'on cherche, par l'analise, les abscisses des points d'intersection, on trouvera que ces abscisses sont les racines d'une équation du quatrième degré à coefficiens réels, et que cette même équation a quatre racines réelles dans le premier cas, deux racines réelles et deux racines imaginaires conjuguées dans le second, enfin, quatre racines imaginaires conjuguées deux à deux dans le troisième. De plus, comme, en combinant les équations des deux courbes, on peut en déduire une troisième équation du second degré, qui ne renferme l'ordonnée qu'au premier degré seulement, il en résulte que l'analise indique seulement quatre points d'intersection, et que, pour chacun de ces points, on peut exprimer l'ordonnée en fonctions rationnelle et réelle de l'abscisse. Par suite, si l'on trouve, pour un point d'intersection, une abscisse réelle, l'ordonnée le sera également; et, si l'analise fournit, pour deux de ces points, deux abscisses imaginaires conjuguées, les ordonnées correspondantes seront elles-mêmes imaginaires et conjuguées. Considérons, en particulier, deux points de cette dernière espèce. Comme, pour transformer les coordonnées de l'une en celle de l'autre, il suffira de remplacer $+\sqrt{-1}$ par $-\sqrt{-1}$, il est clair que toutes les équations et quantites diverses qui, étant rationnelles par rapport à ces ordonnées, ne devront pas être altérées par leur échange mutuel, seront nécessairement des équations réelles et des quantités réelles. Par exemple, l'équation de la droite qui passe par les deux points sera réelle, ainsi que le quarré de leur distance mutuelle, ou, en d'autres termes, de la corde qui les unit, et il en sera de même des coordonnées du milieu de cette corde. Toutefois, comme, par hypothèse, les deux points ne sont pas réels, le quarré de la corde en question ne pourra être qu'une quantité négative, dont la racine, abstraction faite du signe, sera une expression imaginaire de la forme $2C\sqrt{-1}$.

Pour déterminer le coefficient réel $2C$, dans cette expression, il suffira évidemment de chercher la corde idéale qu'on obtient en considérant la droite réelle qui passe par les deux points imaginaires comme sécante idéale de l'une ou de l'autre des deux courbes proposées. Par conséquent, la longueur $2C$ sera celle d'une corde idéale réellement commune à ces deux courbes. Cela posé, si l'on passe successivement en revue les trois hypothèses que l'on peut faire sur le nombre des points réels communs aux deux courbes proposées, on trouvera que ces deux courbes ont, en général, ou six cordes communes, passant par quatre points réels, ou deux cordes communes, dont une idéale, ou deux cordes idéales communes. Toutefois, pour deux hyperboles semblables, ou du moins comprises entre des asymptotes parallèles, ainsi que pour des ellipses semblables et semblablement placées, une seule corde commune naturelle ou idéale subsiste, tandis qu'une autre s'éloigne à l'infini. C'est ce qui a lieu, en particulier, pour deux circonférences de cercles (*). De plus, il peut arriver que deux cordes

(*) La corde commune idéale de deux cercles extérieurs l'un à l'autre, ou, en d'autres termes, leur axe radical n'est autre chose que la corde commune naturelle des hyperboles supplémentaires de ces deux cercles, relatives à une communes viennent à se confondre, et alors, si ces cordes ne sont pas idéales, les deux courbes se toucheront évidemment en deux points réels. Ajoutons que, si l'on projette deux sections coniques, situées dans un même plan sur un nouveau plan, parallèle à une corde idéale qui leur soit commune, la projection de cette corde sera elle-même une corde idéale commune aux projections des deux sections coniques. Par suite, si les deux courbes proposées étaient dissemblables entre elles, auquel cas elles avaient nécessairement plusieurs cordes réelles ou idéales communes; pour rendre leurs projections semblables et semblablement placées, il faudra faire en sorte qu'une des cordes communes s'éloigne à l'infini. On remplira cette condition en plaçant le centre de projection par-tout où l'on voudra, pourvu qu'ensuite on prenne le plan de projection parallèle à celui qui passera par ce centre et par l'une des cordes communes aux deux courbes données.

Dans ce qui précède, nous avons déduit de l'analise la notion des cordes idéales des sections coniques; mais on peut arriver au même but par des considérations géométriques.

Par exemple, lorsqu'une ellipse ou une hyperbole se trouve coupée en deux points réels par une sécante quelconque, le milieu de la corde interceptée coïncide avec le point où la sécante est rencontrée par le diamètre conjugué à sa direction, et la corde elle-même est équivalente au double produit du rapport entre le diamètre parallèle et le diamètre conjugué, par une moyenne proportionnelle entre les distances du point que l'on considère aux

---

perpendiculaire quelconque à la droite qui joint leurs centres. On peut dire pareillement que le point de concours idéal des tangentes communes à deux cercles intérieurs l'un à l'autre, ou, en d'autres termes, leur centre de similitude, soit interne, soit externe, n'est autre chose que le point de concours naturel des tangentes communes aux mêmes hyperboles.

J. D. G.

extrémités du diamètre conjugué. Si l'on détermine, d'après les mêmes conditions, la corde et son milieu, dans le cas où la sécante devient idéale, on obtiendra ce que nous avons nommé la corde idéale relative à cette sécante (*).

Considérons encore deux cercles non concentriques et situés dans un même plan. Si, par ces cercles, on fait passer deux sphères qui se coupent, le plan d'intersection des deux sphères rencontrera le plan des deux cercles suivant une certaine droite ; et cette droite, si les deux cercles se coupent, passera par les deux points qui leur sont communs. Si, au contraire, les deux cercles ne se coupent pas, cette droite sera précisément la sécante idéale, dont la direction coïncide avec celle de la corde idéale commune, et le point d'intersection de cette sécante avec la droite des centres sera le milieu de la même corde. La construction précédente, en donnant un moyen facile de fixer la direction de la corde idéale commune à deux cercles, sert en même temps à faire connaître ses principales propriétés. Par exemple, si d'un point pris sur cette

---

(*) Tout ceci revient à dire que la coexistence de deux sections coniques sur un même plan donne généralement naissance à six droites déterminées de grandeur et de situation, lesquelles, lorsque ces courbes se coupent, deviennent, en tout ou en partie, des cordes communes à ces deux courbes; or, s'il est une définition de ces droites qui convienne également à tous les cas, ne faudrait-il pas l'adopter de préférence à une autre définition sujette à des exceptions nombreuses, pour lesquelles il faut recourir à des conceptions ingénieuses, si l'on veut, mais qui tendent à faire perdre à la géométrie une partie des avantages et de la supériorité qu'on lui a toujours accordé sur toutes les autres sciences ? Dans le cas de deux cercles, par exemple, ne vaut-il pas mieux définir l'axe radical, le lieu des points pour lesquels les tangentes aux deux cercles sont de même longueur, que de dire que c'est la corde commune à ces deux cercles ? Nous en dirons autant des tangentes idéales aux sections coniques dont M. Poncelet paraît s'être également occupé, et qui peuvent offrir un pareil champ de spéculation.

J. D. G.

sécante, on mène une suite de tangentes aux deux sphères, elles seront évidemment égales aux tangentes menées par ce même point à leur cercle d'intersection : il en résulte immédiatement que les quatre tangentes menées à deux cercles par un point pris sur la direction de la corde commune sont égales entre elles (*). Cette propriété était déjà connue des géomètres. On avait remarqué la droite à laquelle elle appartient; et M. Gaultier, auteur d'un mémoire inséré dans le XVI.e cahier du *Journal de l'école polytechnique*, a particulièrement considéré les droites de cette espèce, auxquelles il a donné le nom d'*axes radicaux*.

Après avoir entretenu l'académie des méthodes employées par M. Poncelet, nous allons présenter une indication sommaire des applications qu'il en a faites. Son mémoire est divisé en trois paragraphes : le premier est relatif aux cordes idéales des sections coniques, et renferme leur définition ainsi que leurs propriétés générales, déduites de considérations purement géométriques. L'auteur y remarque également que le point de concours des tangentes menées à une section conique, par les extrémités d'une même corde, ou ce qu'on

---

(*) Cela nous paraît résulter d'une manière presque intuitive des propriétés des tangentes et sécantes partant d'un même point, sans qu'il soit nécessaire de recourir aux sphères ; mais, quand les cercles ne se coupent pas, les sphères ne se coupent pas non plus, et il faut alors prendre pour définition de l'axe radical la propriété même qu'on lui avait découverte dans le premier cas, ou toute autre équivalente.

Au surplus, à considérer les choses sous un point de vue purement analitique, l'existence d'un axe radical pour deux cercles résulte tout simplement de ce que la différence des équations de deux cercles est une équation du premier degré ; et l'existence d'un centre radical pour trois cercles résulte de ce qu'en prenant les différences de leurs équations deux à deux, on obtient trois équations du premier degré dont chacune est évidemment comportée par les deux autres.

J. D. G.

appelle communément le *pôle* de cette corde est un point réel, lors même que les tangentes deviennent imaginaires. Il montre la relation qui existe constamment entre ce pôle et le milieu de la corde, et s'en sert pour construire le pôle idéal correspondant à une corde idéale donnée.

Dans le second paragraphe, M. Poncelet s'occupe des cordes idéales, considérées dans le cas particulier de la circonférence du cercle, et démontre plusieurs propositions relatives, soit aux cordes réelles ou idéales, soit aux pôles de ces mêmes cordes, soit aux centres de similitude et aux cordes communes de deux ou plusieurs cercles situés sur un même plan. On pourrait déduire un grand nombre de ces propositions des proprietés que possèdent deux points choisis sur une droite et sur son prolongement, de manière que leurs distances aux extrémités de la droite soient entre elles dans le même rapport. Parmi ces propriétés, l'une des plus remarquables consiste en ce que la circonférence décrite sur la droite comme diamètre coupe orthogonalement toutes celles qui passent par les deux points en question. On doit distinguer, dans le même paragraphe, une solution très-élégante du problème dans lequel on demande de tracer un cercle tangent à trois autres.

Dans le troisième paragraphe, l'auteur établit les principes de projection centrale ou perspective à l'aide desquels on peut étendre les théorèmes vérifiés pour le cas du cercle à des sections coniques quelconques. Par exemple, voulant démontrer que les propriétés projectives du système de deux cercles, situés dans un même plan, subsistent pour le système de deux sections coniques, il a seulement à faire voir que le premier système peut être considéré, en général, comme la projection du second. Il recherche, à ce sujet, tous les points de l'espace susceptibles de projeter deux sections coniques suivant deux cercles, et prouve que tous ces points appartiennent à des circonférences décrites avec des rayons perpendiculaires sur les milieux des cordes idéales communes aux deux courbes données, et respectivement égaux aux moitiés de ces cordes. Au reste, on est conduit directement au même résultat par la solution du probleme que nous avons traite plus haut. On pourrait même, en s'appuyant sur cette solution, determiner tous les points de l'espace susceptibles de projeter deux courbes quelconques du second degré, suivant deux autres courbes du même degré, mais semblables entre elles, pour lesquelles le diametre, parallèle au plan des deux premieres courbes, formerait, avec son conjugué, un angle donné, et serait à ce même conjugué dans un rapport donné. On trouverait que ces points sont situes sur des circonferences de cercles decrites par des rayons vecteurs qui, aboutissant aux milieux des cordes naturelles ou ideales communes aux deux courbes proposées, forment avec ces mêmes cordes l'angle donné, et sont à leurs moitiés dans le rapport donné. Plusieurs autres questions du même genre, traitées par l'auteur, dans ce troisième paragraphe, se résolvent d'après les mêmes principes.

D'après le compte que nous venons de rendre du mémoire de M. Poncelet, on voit qu'il suppose dans son auteur un esprit familiarisé avec les conceptions de la géométrie et fécond en ressources, dans la recherche des propriétés des courbes, ainsi que dans la solution des problèmes qui s'y rapportent.

Nous pensons, en conséquence, que ce mémoire est digne de l'approbation de l'académie ; et nous proposerions de l'insérer dans le recueil des savans étrangers, si l'auteur ne le destinait à faire partie d'un ouvrage qu'il se propose de publier sur cette matière.

Signés POISSON ; ARAGO ; CAUCHY, *rapporteur.*

L'académie approuve le rapport et en adopte les conclusions.

Certifié conforme à l'original :

Le Secrétaire perpétuel, Chevalier des Ordres royaux de St-Michel et de la Légion d'honneur,

Signé DELAMBRE.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Sur le développement des puissances des cosinus en cosinus d'arcs multiples ;

Par M. Plana, professeur d'astronomie à l'université de Turin.

Dans le troisième volume de son *Calcul intégral* (2.e édit., pag. 605 et suiv.), M. Lacroix a exposé les difficultés que présente le développement d'une puissance quelconque du cosinus d'un arc en série procédant suivant les cosinus des multiples de cet arc ; développement qu'on avait cru exact pour toutes les valeurs de l'exposant, jusqu'à l'époque où M. Poisson, dans le 2.e volume de la *Correspondance sur l'école polytechnique*, signala l'erreur où l'on était demeuré jusqu'alors sur ce sujet.

Il m'a paru que ce point de doctrine pourrait être facilement éclairci de la manière suivante.

En posant

$$u=\text{Cos.}x+\sqrt{-1}\text{Sin.}x$$

$$v=\text{Cos.}x-\sqrt{-1}\text{Sin.}x\,,$$

on a

$$u+v=2\text{Cos.}x\,,$$

d'où

$(u+v)^m$

$$(u+v)^m=2^m.\mathrm{Cos.}^m x\ ;$$

donc, en développant le binome, on aura

$$2^m.\mathrm{Cos.}^m x=u^m+\frac{m}{1}u^{m-2}.uv+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}u^{m-4}.u^2v^2+\ldots.;$$

en remarquant que $uv=1$, et que

$$u^n=\mathrm{Cos.}nx+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}nx\ ;$$

et faisant, pour abréger,

$$A=\mathrm{Cos.}mx+\frac{m}{1}\mathrm{Cos.}(m-2)x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\mathrm{Cos.}(m-4)x+\ldots.\ ;$$

$$B=\mathrm{Sin.}mx+\frac{m}{1}\mathrm{Sin.}(m-2)x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\mathrm{Sin.}(m-4)x+\ldots.\ ;$$

on aura

$$2^m.\mathrm{Cos.}^m x=A+B\sqrt{-1}\ . \qquad (1)$$

Si, au lieu de développer $(u+v)^m$, on développe son équivalent $(v+u)^m$, au lieu de l'équation (1), on aura la suivante

$$2^m.\mathrm{Cos.}^m x=A-B\sqrt{-1}\ . \qquad (2)$$

Les équations (1, 2) ne sauraient s'accorder qu'autant qu'on aura généralement $B=0$. Or, il est aisé de prouver qu'effectivement cette fonction est toujours nulle, à l'exception d'un cas que la démonstration même met en évidence. En effet, si l'on substitue les exponentiels aux sinus, l'on voit d'un coup-d'œil que l'on a

$$B=\frac{e^{mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\left(1+e^{-2x\sqrt{-1}}\right)^m-\frac{e^{-mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\left(1+e^{2x\sqrt{-1}}\right)^m .$$

Mais nous avons

$$e^{\pm 2x\sqrt{-1}}=\mathrm{Cos.}2x\mp\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}2x,$$

ou bien

$$e^{\pm 2x\sqrt{-1}}=2\mathrm{Cos.}^2x-1\mp 2\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}x\mathrm{Cos.}x\ ;$$

partant, nous aurons

$$B=\frac{2^m\mathrm{Cos.}^m x.\,e^{mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\left(\mathrm{Cos.}x-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}x\right)^m$$

$$-\frac{2^m\mathrm{Cos.}^m x.\,e^{-mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\left(\mathrm{Cos.}x+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}x\right)^m .$$

Il suit de là que, en vertu des deux équations

$$e^{\pm mx\sqrt{-1}}=\mathrm{Cos.}mx\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}mx$$

$$(\text{Cos}.x\mp\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)^m=\text{Cos}.mx\mp\sqrt{-1}\,\text{Sin}.mx\ ;$$

on a

$$B=\frac{2^m\text{Cos}.^m x}{2\sqrt{-1}}(\text{Cos}.mx+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.mx)(\text{Cos}.mx-\sqrt{-1}\,\text{Sin}.mx)$$

$$-\frac{2^m\text{Cos}.^m x}{2\sqrt{-1}}(\text{Cos}.mx-\sqrt{-1}\,\text{Sin}.mx)(\text{Cos}.mx+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.mx)\ ;$$

c'est-à-dire $B=0$, quel que soit l'exposant m, entier ou fractionnaire.

Cette conclusion cesse pourtant d'être vraie, lorsque $x=\varpi$, car alors on a

$$\text{Sin}(m-2n)x=\text{Sin}.(m-2n)\varpi=\text{Sin}.m\varpi\ ;$$

n étant un nombre entier positif quelconque ; donc, en revenant sur nos pas, la première transformée sera

$$B=\frac{e^{m\varpi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}(1+1)^m-\frac{e^{-m\varpi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}(1+1)^m\ ;$$

puisque

$$e^{-2\varpi\sqrt{-1}}=e^{+2\varpi\sqrt{-1}}=\text{Cos}.2\varpi\mp\sqrt{-1}\,\text{Sin}.1\varphi=1\ .$$

Ainsi nous aurons

$$B=2^m\text{Sin}.m\varpi\ ,$$

ce qui donnera ces deux équations

$$2^m.\mathrm{Cos.}^m\varpi = A' + 2^m\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.m\varpi\ ;$$

$$2^m.\mathrm{Cos.}^m\varpi = A' - 2^m\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.m\varpi\ ;$$

A' étant ce que devient A lorsque l'on y fait $x=\varpi$.

Lorsque m est un nombre entier, positif ou négatif, l'on a $\mathrm{Sin}.m\varpi=0$, et par conséquent ces deux valeurs de $2^m\mathrm{Cos.}^m x$ coincident; mais, dans le cas où m est fractionnaire, il faut considérer les seconds membres de deux équations précédentes comme donnant deux des racines de l'équation

$$y^{\frac{1}{m}} - 2\,\mathrm{Cos}.\varpi = 0\ ;$$

laquelle revient à

$$y^{\frac{1}{m}} + 2 = 0\ ;$$

Il est d'ailleurs facile de voir qu'il n'y a en cela aucune contradiction; car, dans le cas de $x=\varpi$, on a

$$A' = \mathrm{Cos}.m\varpi.\left(1 + \frac{m}{1} + \frac{m}{1}.\frac{m-1}{2} + \frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3} + \ldots\right)$$

ou bien

$$A' = (1+1)^m.\mathrm{Cos}.m\varpi = 2^m.\mathrm{Cos}.m\varpi\ ;$$

ainsi, les deux équations précédentes donnent

$$2^m.\mathrm{Cos.}^m.\varpi = 2^m.(\mathrm{Cos.}m\varpi + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}m\varpi)\ ,$$

$$2.^m\mathrm{Cos.}^m\varpi = 2.^m(\mathrm{Cos.}m\varpi - \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}m\varpi)\ ;$$

Donc, en remplaçant m par la fraction $\frac{p}{q}$, il viendra

$$\sqrt[q]{(\mathrm{Cos.}\varpi)^p} = \mathrm{Cos.}\frac{p\varpi}{q} \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin.}\frac{p\varpi}{q} = \sqrt[q]{(-1)^p}$$

ce qui est un résultat exact, lorsque p et q sont des nombres entiers, comme nous le supposons.

M. Deflers avait aussi reconnu que la fonction désignée par B doit être nulle, en général; mais la démonstration que nous en donnons ici nous paraît directe et plus simple (voyez le volume cité, pag. 621).

ASTRONOMIE.

Observation faite à STRASBOURG *de l'éclipse de soleil du 7 de septembre* 1820 ;

Par M. HERRENSCHNEIDER, professeur de physique à la faculté des sciences.

Lettre de M. le Professeur KRAMP

Au Rédacteur des Annales ;

MONSIEUR ET TRÈS-CHER CONFRÈRE,

L'EXTRAIT ci-joint a pour auteur M. le professeur Herrenschneider, mon collègue. Comme nous n'avons encore ici ni instrumens ni même de local, il faut bien user de moyens étrangers pour parvenir à notre but. L'observation de l'éclipse a éte faite en présence d'un assez grand nombre de personnes plus ou moins illustres ; et en voici le ~~récit officiel, tel qu'il a paru dans le~~ *Courrier du département du Bas-Rhin*, le dimanche 10 septembre 1820.

« L'éclipse de soleil du jeudi 7 septembre dernier fut observée » par le professeur Herrenschneider, dans le jardin attenant à sa » demeure, rue St-Thomas, n.° 16, avec une lunette achromatique » de quatre pieds de longueur grossissant 115 fois. Il se servit,

» pour observer le temps, d'une bonne montre à secondes, réglée » sur l'horloge de la cathédrale (*). Il lui manquait un instrument » pour connaître exactement le temps par le moyen des hauteurs » correspondantes. Le disque solaire, observé dans la matinée et » pendant l'éclipse, avec la même lunette, était entièrement pur » et sans tache. Le commencement de l'éclipse eut lieu à $1.^h10^m15^s$. » Il arriva par un contact subit et fut exactement observé. Le » soleil ayant pris, par le mouvement progressif de la lune, la » forme de croissant, dont la largeur diminuait de plus en plus; » ses deux extrémités, qui en formaient les sommets, étaient arron- » dies et présentaient une courbure assez distincte. A mesure que » la lune avançait, les deux bouts arrondis du croissant solaire se » rapprochaient de plus en plus. Ayant atteint la distance de $12'$, » à peu près, on vit se former subitement entre eux une » ligne circulaire lumineuse, qui n'augmentait pas en largeur » et qu'on doit probablement attribuer à l'inflexion qu'éprouvait la » lumière solaire, en rasant le bord de la lune. Enfin, la réunion » subséquente de ces deux bouts indiqua le moment du commen- » cement de l'apparence annulaire de l'éclipse qui arriva à $2.^h37.^m0^s$. » L'apparence annulaire augmenta alors visiblement. Après la for- » mation complète et régulière de l'anneau, au moment du milieu » de l'éclipse, sa plus grande largeur fut estimée à $\frac{1}{2}$ doigts et la » moindre à $\frac{1}{4}$ doigt. Le disque lunaire interrompant ensuite » de nouveau l'apparence annulaire, la ligne lumineuse circulaire » reparut également entre les deux bouts arrondis du croissant » solaire, qui commençait à se former en sens opposé. La rupture

(*) On ne nous dit pas sur quoi l'horloge de la cathédrale était réglée, ni comment on parvint à régler une montre *à secondes* sur une horloge publique. N'y a-t-il donc pas de méridienne solaire à Strasbourg ? La montre à secondes a du moins pu faire à peu près connaître le temps relatif.

J. D. G.

» de l'anneau arriva à $2.^h39.^m4^s$; mais la ligne lumineuse ne dis-
» parut qu'au moment où les deux bouts du croissant s'étaient
» séparés de 12′ à peu près. Depuis cette époque, l'éclipse alla en
» décroissant, et sa fin arriva à $3.^h58.^m48.^s$ (*).

» L'observation de cette éclipse constate le résultat des calculs
» de M. le professeur Kramp, doyen de la faculté des sciences,
» qui avaient prouvé que l'éclipse serait annulaire pour la ville
» de Strasbourg ; ce qui était douteux, d'après les calculs d'autres
» astronomes. La durée annulaire de ce phénomène a été pour
» Strasbourg de $2.^m4.^s$, et la durée totale de l'éclipse de $2.^h48.^m33.^s$.

» Des nuages assez épais s'étaient amoncelés devant le soleil avant
» le commencement de l'éclipse ; mais des intervalles entièrement
» lucides ont permis d'en observer l'instant avec une grande préci-
» sion. Les nuages disparurent vers le milieu de sa durée. Quel-
» ques nuages se formèrent de nouveau vers sa fin ; mais sans nuire
» à l'observation.

» Le vent a varié entre N.E et E. Il soufflait avec un frais
» sensible.

» Le baromètre n'a pas discontinué de monter pendant tout le
» temps de l'observation. L'hygromètre de Saussure indiquait le même
» degré d'humidité que le jour précédent.

» Le thermomètre à mercure, exposé au soleil, montrait, au
» commencement de l'éclipse, une température de $14^\circ\frac{1}{2}$(R), au
» milieu $13\frac{1}{2}$ et à la fin $15\frac{1}{4}$. Un second thermomètre correspon-
» dant, suspendu à côté du premier, et dont la boule était noircie,
» indiquait aux mêmes époques $15^\circ\frac{1}{3}$, $14^\circ\frac{1}{2}$ et $18^\circ\frac{1}{2}$.

(*) Si les calculs donnés par M. Kramp, à la page 345 du VIII.e volume de ce recueil, sont exacts, l'horloge de la cathédrale de Strasbourg aurait été en avance d'environ $1.^m45^s$. Si l'on admet, au contraire, ceux qu'a donné M. B. Valz à la page 125 du IX.e volume, l'avance n'aurait été que d'environ 6 secondes seulement.

J. D. G.

« L'affaiblissement

» L'affaiblissement de la clarté du jour était très-sensible. Celle » qu'on aperçut au plus fort de l'éclipse ressemblait au clair d'une » pleine lune. Elle était pâle et les couleurs des objets paraissaient » ternes et sombres. Néanmoins, les étoiles ne parurent point, à » l'exception de la planète de Vénus, qui fut visible près de » l'horizon. »

Trente mille observateurs au moins ont vu cette éclipse : tous ont été témoins de son apparence annulaire, ainsi que des rapports entre les largeurs des deux bords.

L'endroit de l'écrit précédent « ce qui était douteux, d'après les » calculs d'autres astronomes », regarde sur-tout M. Litrow, directeur de l'observatoire de Vienne. Il vient de publier un petit livre sous ce titre : *Exposé de la grande éclipse de soleil du 7 septembre* 1820, suivi de deux cartes (Pesth, 1820). Les deux cartes sont complètement fausses d'un bout à l'autre. Strasbourg s'y trouve *hors* de la limite qui sépare les endroits de la terre où l'éclipse doit paraître annulaire ; tandis que, d'après mes calculs, entièrement conformes aux observations, il devrait être *dedans*. Il y a grande apparence qu'il faut porter le même jugement des autres endroits marqués sur la carte.

Nous avons été extrêmement attentifs sur la prétendue athmosphère lunaire : nous n'avons rien trouvé qui l'indiquât. Il faudra en revenir à ce que dit M. Biot (*Astron. phys.*, tom. II, pag. 413). « Ces circonstances physiques s'opposent à ce que la lune, dans » son état actuel, puisse être habitée par des êtres animés, sem» blables à ceux qui peuplent la surface de la terre : car ils ne » pourraient y respirer, ni par conséquent y vivre. Tout doit être » solide à la surface de cet astre, et il y règne sans doute un » froid excessif. »

Agréez, etc.

Strasbourg, le 12 septembre 1820.

Observation de la même éclipse à Montpellier ;

Par M. Gergonne.

Assis, depuis trois ans, sur les débris d'un observatoire ruiné, qui pourtant, durant un siècle, n'avait pas été sans quelque éclat et sans quelque utilité ; habitant un appartement au nord dans le quartier le plus bas d'une ville bâtie sur un terrain très-inégal ; il m'aurait été impossible non seulement d'observer, mais même de voir l'éclipse si je n'étais sorti de chez moi. Un de mes amis voulut bien mettre à ma disposition une petite terrasse d'où l'on pouvait suivre le soleil depuis 9 heures et demie du matin jusqu'à son coucher ; mais où je ne pouvais établir mes pendules, que d'ailleurs je n'aurais pas eu le temps de régler. Je vis donc bien qu'il faudrait absolument renoncer au luxe des secondes, ne pouvant employer là qu'une montre ordinaire que je porte depuis 25 ans et qui marche assez bien. Je fis transporter sur cette terrasse un petit quart de cercle garni d'un niveau à bulle d'air et d'une lunette achromatique d'un pied de longueur, et donnant les minutes.

Quelques jours auparavant, j'avais calculé les circonstances de l'éclipse, en poussant l'approximation aux secondes de degrés et de temps, et les rejetant ensuite du résultat final. Voici l'annonce que j'avais adressée au journal du département.

1.° Commencement de l'éclipse à environ 58° à droite de l'extrémité supérieure du diamètre vertical du soleil, à . . . . $1.^h\ 0.^m$

2.° Croissant horizontal, à . . . . $2.^h 28.^m$

3.° Plus grande phase de $9^{\text{doigts}}\ 57'$, à . . . . $2.^h 29.^m$

4.° Fin de l'éclipse, à environ 77.° à gauche de l'extrémité supérieure du diamètre vertical du soleil, à . . . . 3.^{h}52.^{m}

Pour savoir à peu près à quoi m'en tenir, j'avais eu le matin la précaution de régler ma montre au lever du soleil, annoncé pour chaque jour, dans l'annuaire du département. Mais, dès 9 heures et demie, je prenais des hauteurs correspondantes qui devaient m'apprendre, à moins d'une minute près, la différence entre le midi de ma montre et le midi vrai de Montpellier. Mes résultats, corrigés de cette différence, ont été tels qu'il suit :

1.° Commencement de l'éclipse, à . . . . 1.^{h}0.^{m}

2.° La forme arrondie des cornes du croissant, effet naturel de l'irradiation, de la diffraction et peut-être aussi de l'imperfection des lunettes, m'a permis d'observer assez exactement l'époque où les deux courbures étaient tangentes au fil horizontal de la lunette ; je l'ai fixé à . . . . 2.^{h}30.^{m}

3.° L'époque de la plus grande phase a suivi de très-près ; mais, ma lunette n'ayant point de micromètre, et distrait d'ailleurs par les mille questions des curieux qui m'entouraient et à qui même souvent il fallait abandonner l'instrument, je n'ai pu en fixer l'instant précis, ni la quantité que j'ai jugé fort approchante de 10 doigts, mais plutôt au-dessus qu'au-dessous.

4.° Plus libre des questionneurs à la fin de l'éclipse, je crois l'avoir observée assez exactement, et pouvoir la fixer à . . 3.^{h}54$'$.

Ainsi, d'après cela, mon calcul se serait trouvé en erreur d'environ 2 minutes en moins, tant sur l'époque de la situation horizontale du croissant que sur celle de la fin du phénomène.

Je m'étais bien promis d'observer l'époque de l'arrivée du bord de la lune à chacune des taches que pourrait offrir le disque solaire ; mais je n'y en ai aperçu aucune.

Un vent assez fort régnait dès neuf heures du matin ; il a paru augmenter un peu à l'époque de la plus grande phase ; il était S. O.

Aucun nuage n'a contrarié l'observation ; il en était passé quelques-uns devant le soleil vers les 11 heures ; mais d'une telle transparence qu'ils laissaient apercevoir nettement les bords de son disque.

Vers le milieu de l'éclipse tout le public a vu la planète de Vénus ; mais cela est d'autant moins surprenant que le lendemain on l'a également remarquée dans le milieu du jour.

Je sens fort bien combien peu des observations faites de la manière que je viens de dire peuvent être profitables à une astronomie perfectionnée comme elle l'est aujourd'hui ; mais c'est tout ce qu'il était possible de faire sans observatoire et sans instrumens.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème d'Arithmétique.

On a écrit de suite, et sans aucune séparation, les nombres de la suite naturelle, en cette manière

$$1234567891011121314151617181920212223......$$

En considérant simplement cette suite comme une suite de chiffres posés les uns à côté des autres ; on propose d'assigner le chiffre qui en occupera le n.me rang, quel que soit n, sans être obligé d'écrire ceux qui le précèdent ?

ANALISE TRANSCENDANTE.

Essai d'une nouvelle méthode servant à intégrer rigoureusement, lorsque cela est possible, toute équation différentielle à deux variables ;

Par M. le professeur KRAMP, correspondant de l'académie royale des sciences, doyen de la faculté des sciences de Strasbourg, chevalier de l'Ordre royal de la Légion d'honneur.

1. ON sait que toute équation différentielle à deux variables a pour intégrale complète une équation, entre les mêmes variables et des constantes arbitraires, en nombre égal à celui qui désigne l'ordre de l'équation proposée ; constantes qui peuvent se trouver impliquées avec les variables de toutes les manières diverses admises dans l'analise comme moyens de combinaison. Mais, quoiqu'on démontre très-rigoureusement que, quelle que puisse être la forme de l'équation différentielle, elle a toujours une intégrale, on est bien loin encore de savoir assigner cette intégrale dans tous les cas.

2. Le problème inverse, c'est-à-dire, celui où étant donné l'intégrale complète, avec toutes ses constantes arbitraires, on propose de redescendre à son équation différentielle, délivrée de toutes ces constantes, se montre incomparablement plus traitable. Il ne s'agit en effet, pour le résoudre, que de différentier l'équation proposée autant de fois consécutivement qu'il y a de constantes

distinctes à faire disparaître, et d'éliminer ensuite ces constantes entre la proposée et ses différentielles successives. L'ordre, le degré et la forme de l'équation différentielle résultante dépendront évidemment du nombre des constantes que renfermait la proposée, et de la manière dont elles s'y trouvaient combinées avec les variables et les quantités communes.

3. Que si, ensuite, on rencontre une autre équation différentielle, de même forme que celle à laquelle on sera parvenu, on sera fondé à supposer que l'intégrale de cette dernière doit aussi être de même forme que celle de la première; et, par un procédé analogue à la méthode des coefficiens indéterminés, on pourra essayer de remonter à celle-ci. Voilà donc un nouveau champ de recherches qui s'ouvre devant nous, et dans lequel nous allons tenter de nous engager.

4. En ne considérant, en premier lieu, que les équations du premier ordre, qui ne comportent qu'une seule constante arbitraire, et supposant qu'elles admettent une intégrale algébrique, cette intégrale ne pourra être que de la forme

$$\begin{aligned}0=(P+Qy+Ry^2+\ldots\ldots)+(P'+Q'y+R'y^2+\ldots\ldots)c\\+(P''+Q''y+R''y^2+\ldots\ldots)c^2+\ldots\ldots\end{aligned}$$

où c est la *constante arbitraire*, et où P, P', P'', ... Q, Q', Q'', ... R, R', R'', ... peuvent être supposées des fonctions rationnelles et entières de x; puisque, dans le cas où quelques-unes de ces fonctions se trouveraient affectées de dénominateurs, on pourrait toujours préalablement les faire disparaître.

5. Si de plus l'équation différentielle n'est que du premier degré seulement, la constante ne devra également entrer qu'au premier degré dans son intégrale; c'est-à-dire, que cette intégrale sera simplement de la forme

$$o=(P+Qy+Ry^2+\dots)+(P'+Q'y+R'y^2+\dots)c\ .$$

Nous nous occuperons uniquement, dans le présent mémoire, des équations différentielles dont l'intégrale donne la valeur de y en x au premier degré seulement, et où conséquemment cette variable est une fonction rationnelle fractionnaire de la constante c ; c'est-à-dire, que nous ne considérerons, de l'équation précédente, que le cas très-particulier

$$o=(P+Qy)+(P'+Q'y)c\ .$$

6. La différentielle de cette équation est

$$o=(\mathrm{d}P+y\mathrm{d}Q+Q\mathrm{d}y)+(\mathrm{d}P'+y\mathrm{d}Q'+Q'\mathrm{d}y)c\ ;$$

éliminant donc c entre l'une et l'autre, il viendra

$$(P+Qy)(\mathrm{d}P'+y\mathrm{d}Q'+Q'\mathrm{d}y)=(P'+Q'y)(\mathrm{d}P+y\mathrm{d}Q+Q\mathrm{d}y)\ ;$$

ou, en développant et réduisant

$$\left.\begin{array}{r}PQ'\\-PQ'\end{array}\right|\mathrm{d}y\left.\begin{array}{r}+P\mathrm{d}P'\\-P'\mathrm{d}P\end{array}\right|\left.\begin{array}{r}+P\mathrm{d}Q'\\-P'\mathrm{d}Q\\+Q\mathrm{d}P'\\-Q'\mathrm{d}P\end{array}\right|y\left.\begin{array}{r}+Q\mathrm{d}Q'\\-Q'\mathrm{d}Q\end{array}\right|y^2=o\ .$$

Nous sommes donc fondés à considérer toute équation différentielle de la forme

$$V\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+X+X'y+X''y^2=o\ ,$$

ou V, X, X', X'', sont des fonctions rationnnelles et entiers de x, sans y, comme devant avoir une intégrale de la forme

$$o=(P+Qy)+(P'+Q'y)c\,,$$

où c est la constante et où P, P', Q, Q' sont également des fonctions rationnelles et entières de x sans y; et, si nous nous proposons de remonter à cette intégrale, ces quatre dernières fonctions seront les inconnues du probléme.

7. En exprimant que les deux équations différentielles sont identiquement les mêmes, ce qui est permis, puisque nous avons admis des coefficiens à tous les termes, nous aurons

$$PQ'-QP'=V\,,$$

$$P\mathrm{d}P'-P'\mathrm{d}P=X\mathrm{d}x\,,$$

$$P\mathrm{d}Q'-P'\mathrm{d}Q+Q\mathrm{d}P'-Q'\mathrm{d}P=X\mathrm{d}x\,,$$

$$Q\mathrm{d}Q'-Q'\mathrm{d}Q=X''\mathrm{d}x\,.$$

8. On peut simplifier la troisième équation, en lui ajoutant et lui retranchant successivement la différentielle de la première qui est

$$P\mathrm{d}Q'-P'\mathrm{d}Q-Q\mathrm{d}P'+Q'\mathrm{d}P=\mathrm{d}V\,,$$

on a alors pour résoudre le problème les quatre équations

$$P\mathrm{d}P'-P'\mathrm{d}P=X\mathrm{d}x\,,$$

$$Q\mathrm{d}Q'-Q'\mathrm{d}Q=X''\mathrm{d}x\,,$$

$$QdP'-Q'dP=\tfrac{1}{2}(X'dx-dV)\ ,$$

$$PdQ'-P'dQ=\tfrac{1}{2}(X'dx+dV)\ .$$

9. Prenant successivement ; 1.° la somme des produits respectifs des première et troisième équations par $+Q$ et $-P$; 2.° la somme des produits respectifs des deuxième et quatrième par $-P$ et $+Q$; 3.° la somme des produits respectifs des première et troisième par $+Q'$ et $-P'$; 4.° enfin la somme des produits respectifs des deuxième et quatrième par $-P'$ et $+Q'$, et remplaçant chaque fois $PQ'-QP'$(7) par sa valeur V, il viendra

$$2VdP=PdV+(2XQ-X'P)dx\ ,$$

$$2VdQ=QdV-(2X''P-X'Q)dx\ ,$$

$$2VdP'=P'dV+(2XQ'-X'P')dx\ ,$$

$$2VdQ'=Q'dV-(2X''P'-X'Q')dx\ .$$

Nous avons donc décomposé notre problème à quatre inconnues en deux problèmes à deux inconnues, puisque les deux premières équations ne renferment plus que P et Q ; et les deux dernières P' et Q'. Pour mieux dire, nous l'avons réduit à un seul problème à deux inconnues, puisque les deux dernières équations ne diffèrent uniquement des deux premières qu'en ce que P' et Q' y ont pris la place de P et Q respectivement. Nous sommes donc fondés à en conclure que si P et P' ne sont pas racines d'une même équation du second degré, ils ne différeront au moins que par des constantes ; et on peut en dire autant de Q et Q'.

10. En prenant successivement la somme et la différence, d'abord

des deux premières équations, puis ensuite des deux dernières, il viendra

$$2V\mathrm{d}(P+Q)=(P+Q)\mathrm{d}V-X'(P-Q)\mathrm{d}x+2(XQ-X''P)\mathrm{d}x\ ,$$

$$2V\mathrm{d}(P-Q)=(P-Q)\mathrm{d}V-X'(P+Q)\mathrm{d}x+2(XQ+X''P)\mathrm{d}x\ ,$$

$$2V\mathrm{d}(P'+Q')=(P'+Q')\mathrm{d}V-X'(P'-Q')\mathrm{d}x+2(XQ'-X''P')\mathrm{d}x\ ,$$

$$2V\mathrm{d}(P'-Q')=(P'-Q')\mathrm{d}V-X'(P'+Q')\mathrm{d}x+2(XQ'+X''P')\mathrm{d}x\ .$$

Posant donc

$$\left.\begin{array}{l} P+Q=2p\ , \\ P-Q=2q\ , \\ P'+Q'=2p'\ , \\ P'-Q'=2q'\ ; \end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l} P=p+q\ , \\ Q=p-q\ , \\ P'=p'+q'\ , \\ Q'=p'-q'\ ; \end{array}\right.$$

ces équations deviendront

$$2V\mathrm{d}p=p\,[\mathrm{d}V+(X-X'')\mathrm{d}x]-q\,(X+X'+X'')\mathrm{d}x\ ,$$

$$2V\mathrm{d}q=q\,[\mathrm{d}V-(X-X'')\mathrm{d}x]+p\,(X-X'+X'')\mathrm{d}x\ ,$$

$$2V\mathrm{d}p'=p'[\mathrm{d}V+(X-X'')\mathrm{d}x]-q'(X+X'+X'')\mathrm{d}x\ ,$$

$$2V\mathrm{d}q'=q'[\mathrm{d}V-(X-X'')\mathrm{d}x]+p'(X-X'+X'')\mathrm{d}x\ .$$

11. En posant donc, pour abréger,

$$\mathrm{d}V+(X-X'')\mathrm{d}x=R\,\mathrm{d}x\ ,\quad X+X'+X''=+S\ ,$$

$$\mathrm{d}V-(X-X'')\mathrm{d}x=R'\mathrm{d}x\ ,\quad X-X'+X''=-S'\ ;$$

ces équations deviendront

$$2V\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=Rp-Sq\ ,\qquad 2V\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x}=Rp'-Sq'\ ,$$

$$2V\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}=R'q-S'p\ ,\qquad 2V\frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}x}=R'q'-S'p'\ .$$

12. Au moyen de ces dernières, il est facile, par la différentiation, d'en obtenir d'autres dont chacune ne renferme qu'une seule des inconnues du problème. Si, en effet, on élimine d'abord entre les deux équations de la première colonne et la différentielle de la première q et $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}$, comme deux inconnues au premier degré, puis qu'entre ces deux mêmes équations et la différentielle de la dernière on élimine p et $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, comme deux autres inconnues au premier degré; et si l'on opère d'une manière semblable sur les équations de la seconde colonne, il viendra

$$4V^2S\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2}+2V\left\{2\frac{S\mathrm{d}V-V\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}-S(R+R')\right\}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$
$$+\left\{2V\frac{R\mathrm{d}S-S\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+S(RR'-SS')\right\}p=0\ ,$$

$$4V^2S'\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}x^2}+2V\left\{2\frac{S'\mathrm{d}V-V\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x}-S'(R+R')\right\}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}$$
$$+\left\{2V\frac{R'\mathrm{d}S'-S'\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x}+S(RR'-SS')\right\}q'=0\ ,$$

$$4VS\frac{\mathrm{d}^2p'}{\mathrm{d}x^2}+2V\left\{2\frac{S\mathrm{d}V-V\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}-S(R+R')\right\}\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x}$$
$$+\left\{2V\frac{R\mathrm{d}S-S\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+S(RR'-SS')\right\}p'=0\ ,$$

$$4V^2S'\frac{d^2q'}{dx^2}+2V\left\{2\frac{S'dV-VdS'}{dx}-S'(R+R')\right\}\frac{dq'}{dx}$$

$$+\left\{2V\frac{R'dS'-S'dR'}{dx}+S'(RR'-SS')\right\}q'=0\ ;$$

de sorte qu'en posant, pour abréger,

$$2(SdV-VdS)-S(R+R')dx=Tdx$$

$$2(S'dV-VdS')-S'(R+R')dx=T'dx\ ;$$

$$2V(RdS-SdR)+S(RR'-SS')dx=Udx\ ;$$

$$2V(S'dS'-R'dR')+S'(RR'-SS')dx=U'dx\ ;$$

les quatre équations à résoudre seront

$$4V^2S\frac{d^2p}{dx^2}+2VT\frac{dp}{dx}+Up=0\ ;$$

$$4V^2S'\frac{d^2q}{dx^2}+2VT'\frac{dq}{dx}+U'q=0\ ,$$

$$4V^2S\frac{d^2p'}{dx^2}+2VT\frac{dp'}{dx}+Up'=0\ ,$$

$$4V^2S'\frac{d^2q'}{dx^2}+2VT'\frac{dq'}{dx}+U'q'=0\ :$$

13. Au moyen de ces quatre équations, on déterminera p, q, p', q', d'où on conclura (10) P, Q, P', Q' qui (5), substitués dans la formule

o=

$$0=(P+Qy)+(P'+Q'y)c\ ,$$

donneront l'intégrale de l'équation

$$V\frac{dy}{dx}+X+X'y+X''y^2=0\ .$$

14. On dira peut-être que nous ne faisons que déplacer la difficulté et même d'une manière désavantageuse ; puisque nous ne faisons que ramener l'intégration d'une seule équation du premier ordre à celle de deux équations du second ; mais observons que ces dernières sont linéaires, et même de la forme la plus simple ; et nous verrons bientôt d'ailleurs que, lorsque l'on sait que l'intégrale de la proposée doit être algébrique et rationnelle, on peut assigner assez facilement l'intégrale de ces dernières.

15. On pourrait encore objecter que l'intégration de chacune de ces équations introduisant deux constantes, on se trouvera avoir bien plus de constantes que ne le comporte la nature du problème ; mais il faut se rappeler, 1.° que les valeurs de p, q, p', q' doivent vérifier les quatre équations du premier ordre que nous avons d'abord obtenues (11) ; 2.° que celles de P, Q, P', Q' doivent vérifier l'équation $PQ'-QP'=V$; 3.° enfin la valeur de y, déduite de l'intégrale, qui devra vérifier l'équation différentielle proposée ; ce qui nous fournira les conditions nécessaires pour déterminer les constantes superflues.

16. Appliquons ces divers procédés à un exemple ; et soit l'équation différentielle proposée à intégrer

$$x(1-x^2)\frac{dy}{dx}+4x+(1+x^2)y=0\ ;$$

nous aurons

$$V=x-x^3\ ,\quad X=4x\ ,\quad X'=1+x^2\ ,\quad X''=0\ ;$$

De là nous conclurons successivement

$$\frac{dV}{dx}=1-3x^2\ ,\quad X-X''=4x\ ,$$

$$R=\frac{dV}{dx}+(X-X'')=1+4x-3x^2\ ,$$

$$R'=\frac{dV}{dx}-(X-X'')=1-4x-3x^2\ ,$$

$$S=\ X+X'+X''=1+4x+x^2\ ,$$

$$S'=-X+X'-X''=1-4x+x^2\ ,$$

$$\frac{dR}{dx}=+4-6x\ ,\quad \frac{dR'}{dx}=-4-6x\ ,$$

$$\frac{dS}{dx}=+4+2x\ ,\quad \frac{dS'}{dx}=-4+2x\ ,$$

$$S\frac{dV}{dx}=1+4x-2x^2-12x^3-3x^4\ ,$$

$$S'\frac{dV}{dx}=1-4x-2x^2+12x^3-3x^4\ ,$$

$$V\frac{dS}{dx}=+4x+2x^2-4x^3-2x^4\ ,$$

$$V\frac{dS'}{dx}=-4x+2x^2+4x^3-2x^4\ ,$$

$$R\frac{dS}{dx}=+4+18x-4x^2-6x^3\ ,$$

$$R'\frac{dS'}{dx}=-4+18x+4x^2-6x^3\ ;$$

$$S\frac{dR}{dx}=+4+10x-20x^2-6x^3\ ;$$

$$S'\frac{dR'}{dx}=-4+10x+20x^2-6x^3\ ,$$

$$S\frac{dV}{dx}-V\frac{dS}{dx}=1-4x^2-8x^3-x^4\ ,$$

$$S'\frac{dV}{dx}-V\frac{dS'}{dx}=1-4x^2+8x^3-x^4\ ;$$

$$R\frac{dS}{dx}-S\frac{dR}{dx}=8x(1+2x)\ ,$$

$$R'\frac{dS'}{dx}-S'\frac{dR'}{dx}=8x(1-2x)\ ;$$

$$RR'=1-22x^2+9x^4\ ,$$

$$SS'=1-14x^2+x^4\ ;$$

$$RR'-SS'=-8x^2(1-x^2)\ ,$$

$$R+R'=2-6x^2\ ,$$

$$S(R+R')=2+8x-4x^2-24x^3-6x^4\ ,$$

$$S'(R+R')=2-8x-4x^2+24x^3-6x^4\ ,$$

$$S(RR'-SS')=-8x^2(1-x^2)(1+4x+x^2)\ ;$$

$$S'(RR'-SS')=-8x^2(1-x^2)(1-4x+x^2)\ ;$$

$$T=2\left(S\frac{dV}{dx}-V\frac{dS}{dx}\right)-S(R+R')=-4x(2+x)(1-x^2)\,,$$

$$T'=2\left(S'\frac{dV}{dx}-V\frac{dS'}{dx}\right)-S'(R+R')=+4x(2-x)(1-x^2)\,,$$

$$U=2V\left(R\frac{dS}{dx}-S\frac{dR}{dx}\right)+S(RR'-SS')=8x^2(1-x^2)^2\,;$$

$$U'=2V\left(R'\frac{dS'}{dx}-S'\frac{dR'}{dx}\right)+S'(RR'-SS')=8x^2(1-x^2)^2\,;$$

substituant donc dans nos équations du second ordre, en p et q, elles deviendront

$$4x^2(1-x^2)^2(1+4x+x^2)\frac{d^2p}{dx^2}-8x^2(1-x^2)^2(2+x)\frac{dp}{dx}+8x^2(1-x^2)^2p=0\,,$$

$$4x^2(1-x^2)^2(1-4x+x^2)\frac{d^2q}{dx^2}+8x^2(1-x^2)^2(2-x)\frac{dq}{dx}+8x^2(1-x^2)^2q=0\,,$$

ou, en simplifiant,

$$(1+4x+x^2)\frac{d^2p}{dx^2}-2(2+x)\frac{dp}{dx}+2p=0\,,$$

$$(1-4x+x^2)\frac{d^2q}{dx^2}+2(2-x)\frac{dq}{dx}+2q=0\,.$$

Les équations qui devront donner p' et q' seront donc

$$(1+4x+x^2)\frac{d^2p'}{dx^2}-2(2+x)\frac{dp'}{dx}+2p'=0\,,$$

$$(1-4x+x^2)\frac{d^2q'}{dx^2}+2(2-x)\frac{dq'}{dx}+2'q'=0\,.$$

Il suffira donc d'obtenir l'intégrale des deux premières pour avoir celle des deux dernières.

17. Essayons de faire

$$p=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots\ldots,$$

A, B, C, ... étant des coefficiens numériques inconnus, nous aurons

$$\frac{dy}{dx}=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^2p}{dx^2}=2C+6Dx+12Ex^2+20Fx^3+\ldots\ldots;$$

substituant dans la première équation, elle deviendra, en ordonnant,

$$\begin{array}{l|r|r|r|r|l}
0=A & +3Dx+6D & x^2+\ D & x^3+\ 3E & x^4+\ 6F & x^5+\ldots\ldots \\
-2B & +6E & +16E & +30F & +48G & \\
+\ C & & +10F & +15G & +21H &
\end{array}$$

exprimant donc que cette équation est identique, nous aurons

$$\left.\begin{array}{r}
A-2B+C=0\,, \\
D=0\,, \\
D+E=0\,, \\
D+16E+10F=0\,, \\
E+10F+5G=0\,, \\
2F+16G+7H=0\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \left\{\begin{array}{l}
C=2B-A\,, \\
D=0\,, \\
E=0\,, \\
F=0\,, \\
G=0\,, \\
H=0\,, \\
\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Substituant dans la valeur hypothétique de p, elle deviendra

$$p = A + Bx + (2B - A)x^2 = A(1 - x^2) + Bx(1 + 2x) ;$$

où A et B sont les deux constantes arbitraires que comporte l'intégrale.

L'équation en q, traitée de la même manière, donnera

$$q = A'(1 - x^2) + B'x(1 - 2x) ,$$

où A' et B' seront les deux constantes.

18. On tirera de là

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -2Ax + B(1 + 4x) , \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} = -2A'x + B'(1 - 4x) ;$$

en se rappelant qu'ici

$$2V = 2x - 2x^3 ; \quad R = 1 + 4x - 3x^2 , \quad S = 1 + 4x + x^2 ;$$
$$R' = 1 - 4x - 3x^2 , \quad S' = 1 - 4x + x^2 ,$$

et substituant (11) dans les équations du premier ordre en p et q, il viendra, en réduisant,

$$(A - A')(1 - x^2) - (B + B')x(1 - 2x) = 0 ,$$

$$(A - A')(1 - x^2) + (B + B')x(1 + 2x) = 0 .$$

Ces relations devant subsister quel que soit x, nous ferons successivement $x = 0$, $x = 1$; et les deux équations donneront également $A' = A$, $B' = -B$; de sorte que nous aurons

$$p = A(1 - x^2) + Bx(1 + 2x) ,$$

$$q=A(1-x^2)-Bx(1-2x),$$

nous aurons donc aussi

$$p'=A'(1-x^2)+B'x(1+2x),$$

$$q'=A'(1-x^2)-B'x(1-2x);$$

A', B' étant deux nouvelles constantes.

19. Nous conclurons ensuite de là

$$P=p+q=2A(1-x^2)+4Bx^2,$$

$$Q=p-q=2Bx,$$

$$P'=p'+q'=2A'(1-x^2)+4B'x^2,$$

$$Q'=p'-q'=2B'x.$$

En nous rappelant qu'ici $V=x(1-x^2)$, et substituant ces valeurs dans l'équation

$$PQ'-QP'=V,$$

elle deviendra, toutes réductions faites,

$$4(AB'-BA')=1$$

équation de relation entre nos quatre constantes.

20. En subtituant les valeurs de P, Q, P', Q', dans l'équation

$$0=(P+Qy)+(P'+Q'y)c,$$

elle deviendra, en divisant par 2,

$$o=\{[A(1-x^2)+2Bx^2]+Bxy\}+\{[A'(1-x^2)+2B'x^2]+B'xy\}c\ ;$$

ou encore

$$o=\{(A+A'c)(1-x^2)+2(B+B'c)x^2\}+(B+B'c)xy\ ;$$

ou enfin

$$o=\left\{\frac{A+A'c}{B+B'c}(1-x^2)+2x^2\right\}+xy=o\ ;$$

d'où l'on voit qu'il n'y a plus proprement qu'une seule constante $\frac{A+A'c}{B+B'c}$; en la représentant par C l'équation deviendra simplement

$$o=\{2x^2+C(1-x^2)\}+xy\ ;$$

d'où

$$y=-\frac{2x^2+C(1-x^2)}{x}\ ;$$

qui est en effet l'intégrale de l'équation différentielle proposée, comme il est facile de s'en convaincre, par la différentiation et l'élimination de la constante C. (*)

(*) On peut faire, contre cette méthode, l'objection très grave, à ce qu'il nous paraît, que le procédé employé pour integrer les équations du second ordre en p et q, pouvait tout aussi bien, et sans tant de circuit, être immédiatement appliqué à l'équation proposée du premier ordre seulement en y; mais peut-être tout ceci n'est-il encore qu'un provisoire? peut-être M. Kramp, étendant sa théorie, comme il paraît en avoir le dessein, aux équations des ordres supérieurs, nous enseignera-t il dans quelque mémoire subséquent, à intégrer généralement et rigoureusement les équations de la forme

$$G\frac{d^2y}{dx^2}+H\frac{dy}{dx}+k=o\ ,$$

21. Dans un prochain mémoire, nous nous occuperons soit des équations différentielles qui admettent une intégrale de la forme

$$o=(P+Qy+Ry^2)+c(P'+Q'y+R'y^2) ;$$

soit de celle dont l'intégrale a la forme

$$o=(P+Qy)+c(P'+Q'y)+c^2(P''+Q''y) :$$

---

dans le cas où G, H, K sont des fonctions rationnelles et entières en x seulement; ou tout au moins à en ramener l'intégration à celle de quelque autre équation plus simple, dût-elle être même d'un ordre plus élevé. L'intégrale de cette dernière équation doit être de la forme

$$Ly+aM+bN=o ,$$

où L, M, N sont aussi des fonctions entières et rationnelles de x seulement, inconnus du problème, et où a et b sont les deux constantes arbitraires. Il s'agirait donc d'exprimer que le résultat de l'élimination de ces constantes entre cette équation et ses première et seconde différentielles, est identique avec la proposée, et de tirer des trois conditions résultantes les valeurs de L, M, N, ou du moins des équations différentielles, d'un ordre quelconque, faciles à intégrer, et dont chacune ne renfermât qu'une seule de ces inconnues.

J. D. G.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution de la plupart des problèmes de géométrie proposés à la page 356 *du X.e volume de ce recueil* ;

Par M. Vecten, licencié ès sciences.

Les constructions du plus grand nombre des problèmes que nous allons résoudre étant faciles à justifier, nous nous contenterons, pour abréger, d'en indiquer la solution sans la démontrer. Pour le même motif, nous nous dispenserons de mentionner le nombre des solutions de chacun d'eux et les circonstances qui peuvent le rendre impossible.

PROBLÈME I. D'un point donné comme centre, décrire un cercle qui passe par un autre point donné?

Solution. Prenez pour rayon la distance entre ces deux points.

PROBLÈME II. D'un point donné comme centre, décrire un cercle qui touche une droite donnée?

Solution. Prenez pour rayon la longueur de la perpendiculaire abaissée du point donné sur la droite donnée.

PROBLÈME III. D'un point donné comme centre, décrire un cercle qui touche un cercle donné?

Solution. Prenez pour rayon la distance du point donné à l'une des extrémités de celui des diamètres du cercle donné dont la direction passe par ce point.

PROBLÈME IV. Décrire un cercle d'un rayon donné qui, ayant son centre sur une droite donnée, passe par un point donné?

Solution. Prenez pour centre l'une quelconque des intersections de la droite donnée avec un cercle qui ait pour centre le point donné et un rayon égal au rayon donné.

PROBLÈME V. Décrire un cercle d'un rayon donné qui, ayant son centre sur une circonférence donnée, passe par un point donné?

Solution. Prenez pour centre l'une quelconque des intersections du cercle donné avec un autre cercle ayant pour centre le point donné et son rayon égal au rayon donné.

PROBLÈME VI. Décrire un cercle d'un rayon donné qui, ayant son centre sur une droite donnée, touche une autre droite donnée?

Solution. Prenez pour centre le point où la première des deux droites données est coupée par l'une des deux parallèles menées à la seconde à une distance égale au rayon donné.

PROBLÈME VII. Décrire un cercle d'un rayon donné qui, ayant son centre sur une circonférence donnée, touche une droite donnée?

Solution. Prenez pour centre l'un des points où la circonférence donnée est coupée par l'une des deux parallèles menées à la droite donnée à une distance égale au rayon donné.

PROBLÈME VIII. Décrire un cercle d'un rayon donné *qui, ayant son centre sur une droite donnée, touche un cercle donné?*

Solution. Prenez pour centre l'un des points où la droite donnée est coupée par un cercle concentrique au cercle donné, ayant un rayon égal à la somme ou à la différence du sien et du rayon donné.

PROBLÈME IX. Décrire un cercle d'un rayon donné qui, ayant son centre sur une circonférence donnée, touche un cercle donné?

Solution. Prenez pour centre l'un des points où la circonférence donnée est coupée par un cercle concentrique au cercle donné ayant un rayon égal à la somme ou à la différence du sien et du rayon donné.

PROBLÈME X. Décrire un cercle d'un rayon donné, qui passe par deux points donnés?

Solution. Prenez pour centre l'un des points d'intersection de deux cercles ayant pour centres les points donnés et pour rayon commun le rayon donné.

PROBLÈME XI. Décrire un cercle d'un rayon donné, qui passe par un point donné et touche une droite donnée?

Solution. Prenez pour centre l'un des points où un cercle décrit du point donné comme centre, avec le rayon donné, est coupé par l'une ou l'autre des deux parallèles menées à la droite donnée à une distance égale à ce même rayon.

PROBLÈME XII. Décrire un cercle d'un rayon donné, qui touche deux droites données?

Solution. Prenez pour centre l'une quelconque des intersections des deux parallèles menées à une des droites données, à une distance égale au rayon donné, avec une des parallèles menées à l'autre droite à la même distance.

PROBLÈME XIII. Décrire un cercle d'un rayon donné qui, passant par un point donné, touche un cercle donné?

Solution. Prenez pour centre l'un des deux points où la circonférence décrite du point donné comme centre, avec le rayon donné, est coupée par un cercle concentrique au cercle donné, ayant un rayon égal à la somme ou à la différence du sien et du rayon donné.

PROBLÈME XIV. Décrire un cercle d'un rayon donné, qui touche une droite et un cercle donné?

Solution. Prenez pour centre l'un des points où l'une des deux parallèles menées à la droite donnée à une distance égale au rayon donné, est coupée par un cercle concentrique au cercle donné, ayant un rayon égal à la somme ou à la différence du sien et de ce même rayon donné.

PROBLÈME XV. Décrire un cercle d'un rayon donné, qui touche à la fois deux cercles donnés?

Solution. Prenez pour centre l'un des points d'intersection de deux cercles concentriques aux cercles donnés, ayant des rayons respectifs égaux à la somme ou à la différence des leurs et du rayon donné.

PROBLÈME XVI. Décrire un cercle qui, ayant son centre sur une droite donnée, passe par deux points donnés?

Solution. Prenez pour centre le point où la droite donnée est coupée par la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite qui joint les deux points donnés. Ne considérant alors qu'un seul des points donnés, le problème se trouvera ainsi ramené au I.^{er}

PROBLÈME XVII. Décrire un cercle qui, ayant son centre sur une circonférence donnée, passe par deux points donnés?

Solution. Prenez pour centre l'un des points où la circonférence donnée est coupée par la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite qui joint les deux points donnés. Ne considérant alors qu'un seul des points donnés, le problème se trouvera ainsi ramené au II.e

PROBLÈME XVIII. Décrire un cercle qui, ayant son centre sur une droite donnée, passe par un point donné et touche une autre droite donnée?

Solution. Abaissez, du point donné, sur la première des deux droites, une perpendiculaire que vous prolongerez au-delà d'une quantité égale à elle-même; vous obtiendrez ainsi un nouveau point du cercle cherché; de sorte que le problème se trouvera réduit à décrire un cercle qui, passant par deux points donnés, touche une droite donnée; problème que l'on sait resoudre.

PROBLÈME XIX. Décrire un cercle qui, ayant son centre sur une circonférence donnée, passe par un point donné et touche une droite donnée?

Ce problème ne paraît point résoluble par les élémens.

PROBLÈME XX. Décrire un cercle qui, ayant son centre sur une droite donnée, touche deux autres droites données?

Solution. Prenez pour centre le point où la première des droites données est coupée par l'une des droites qui divisent en deux parties égales les quatre angles formés par les deux autres droites données. Ne considérant alors qu'une seule de ces deux droites, le problème se trouvera ainsi ramené au II.e

PROBLÈME XXI. Décrire un cercle qui, ayant son centre sur une circonférence donnée, touche deux droites données?

Solution. Prenez pour centre l'un des points où la circonférence donnée est coupée par l'une des droites qui divisent en deux parties égales les quatre angles formés par les deux droites données. Ne considérant alors qu'une seule de ces droites, le problème se trouvera ramené au II.^e

PROBLÈME XXII. Décrire un cercle qui, ayant son centre sur une droite donnée, passe par un point donné et touche un cercle donné?

Solution. Abaissez du point donné, sur la droite donnée, une perpendiculaire que vous prolongerez au-delà d'une quantié égale à elle-même; vous obtiendrez ainsi un nouveau point du cercle cherché; de manière que le problème se trouvera réduit à décrire un cercle qui, passant par deux points donnés, touche un cercle donné; problème que l'on sait résoudre.

PROBLÈME XXIII. Décrire un cercle qui, ayant son centre sur une circonférence donnée, passe par un point donné et touche un cercle donné?

Ce problème ne paraît point résoluble par les élémens.

PROBLÈME XXIV. Décrire un cercle qui, ayant son centre sur une droite donnée, touche une droite et un cercle donnés?

Solution. Par le point d'intersection de deux droites, menez-en une troisième, faisant avec la première, d'un autre côté, le même angle que fait la seconde avec elle; vous aurez ainsi une nouvelle tangente au cercle cherché; de sorte que votre problème se trouvera ramené à décrire un cercle qui touche deux droites données et un cercle donné; problème qu'on sait résoudre.

PROBLÈME XXV. Décrire un cercle qui, ayant son centre sur une circonférence donnée, touche une droite et un cercle donnés?

Ce problème ne paraît pas résoluble par les élémens ; mais on peut du moins le ramener facilement au XIX.e Si, en effet, on décrit un cercle qui, ayant son centre sur la circonférence donnée, passe par le centre du cercle donné et touche une des deux parallèles menées à la droite donnée à une distance égale au rayon de ce cercle ; son centre sera celui du cercle cherché ; de sorte qu'en ne considérant plus que la droite donnée, ce problème sera ramené au II.e

PROBLÈME XXVI. Décrire un cercle qui, ayant son centre sur une droite donnée, touche deux cercles donnés ?

Solution. Du centre de l'un quelconque des deux cercles donnés, abaissez, sur la droite donnée, une perpendiculaire, que vous prolongerez au-delà de cette droite, d'une quantité égale à elle-même ; de son extrémité comme centre, et avec le rayon de ce même cercle, décrivez-en un nouveau ; le cercle cherché devra aussi lui être tangent ; vous aurez donc à décrire un cercle qui touche trois cercles donnés ; problème qu'on sait résoudre.

PROBLÈME XXII. Décrire un cercle qui, ayant son centre sur une circonférence donnée, touche deux cercles donnés ?

Ce problème ne paraît point résoluble par les élémens ; mais on peut du moins le ramener facilement au XXIII.e Si, en effet, on décrit un cercle concentrique à l'un des deux cercles donnés, dont le rayon soit la somme ou la différence des leurs ; en décrivant un cercle qui, ayant son centre sur la circonférence donnée, touche ce dernier cercle et passe par le centre de l'autre ; son centre sera celui du cercle cherché ; de sorte qu'en ne considérant plus qu'un seul des cercles donnés, le problème se trouvera ramené au III.e

Remarques. I. On voit, par ce qui précède, que des vingt-sept problèmes

problèmes proposés, il n'y en a que quatre seulement dont la solution puisse offrir quelque embarras; et encore deux de ceux-là se ramènent-ils facilement aux deux autres; de sorte que toute la difficulté consiste uniquement dans les problèmes XIX et XXIII (*).

II. Les points et les droites n'étant que des cercles dont les rayons sont respectivement nuls et infinis; il s'ensuit que le XXVII.e problème comprend implicitement les onze qui le précèdent; que le XV.e comprend les cinq qui le précèdent; qu'il en est de même du IX.e, et qu'enfin le III.e comprend implicitement les deux premiers; de sorte qu'il n'y a proprement que quatre problèmes en tout. Mais le dernier paraît n'être résoluble que dans des cas particuliers.

(*) Il est aisé de voir que ces deux problèmes reviennent à déterminer les intersections d'un cercle donné avec une section conique qui n'est pas tracée et dont on a seulement les élémens; et il ne paraît pas, en effet, que ce problème puisse être résolu par un nombre limité d'opérations exécutées avec la règle et le compas seulement.

J. D. G.

Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la page 100 du X.e volume de ce recueil, et d'un autre théorème analogue;

Par M. J. B. Durrande, professeur de mathématiques spéciales et de physique au collége royal de Cahors.

Théorème. *Le lieu des milieux des cordes menées à une section conique quelconque, par l'un quelconque des points de son plan, est une autre section conique, semblable à la première et semblablement située, passant par le centre de celle-ci et par le point donné.*

Démonstration. Soient pris le diamètre passant par le point donné pour axe des x et la parallèle menée par le même point à son conjugué pour axe des y; l'équation de la courbe sera de cette forme

$$y^2=ax^2+2bx+c.$$

Celle d'une droite menée d'une manière quelconque par le point donné sera de la forme

$$y=mx\,,$$

où m est indéterminé. En la combinant avec celle de la courbe, pour éliminer y, on trouvera que les abscisses des deux extrémités de la corde interceptée sont données par l'équation

$$(a-m^2)x^2+2bx+c=0\ .$$

Mais l'abscisse du milieu d'une droite est la demi-somme des abscisses de ses extrémités; et il est connu d'ailleurs que, dans une équation du second degré, dont le premier terme est dégagé de son coefficient, le coefficient du second terme, pris avec un signe contraire, est la somme des racines de l'équation; d'où il suit que l'abscisse du milieu de la corde sera donnée par l'équation

$$x=-\frac{b}{a-m^2} \qquad \text{ou} \qquad (a-m^2)x+b=0\ ;$$

mettant donc pour l'arbitraire m, dans cette dernière, la valeur $\frac{y}{x}$ tirée de l'équation de la corde, on obtiendra, toutes réductions faites, pour l'équation de la courbe cherchée

$$y^2=ax^2+bx\ ,$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

On peut facilement démontrer d'une manière analogue cet autre théorème :

THÉORÈME. Le lieu des milieux des cordes menées à une surface quelconque du second ordre, par un quelconque des points de l'espace, est une autre surface du second ordre, semblable à la première *et semblablement située, passant par le centre de celle-ci et par le point donné.*

Démonstration. Par le centre de la surface et par le point donné faisons passer un plan diamétral quelconque, que nous prendrons pour plan des xy, en prenant pour axe des z la parallèle au conjugué de ce plan diamétral. Par le même point, traçons, sur le plan des xy, des parallèles à deux diamètres conjugués quelconques de la section de la surface par ce plan, et prenons ces parallèles pour axes des x et des y; l'équation de la surface sera de la forme

$$z^2=ax^2+by^2+2a'x+2b'y+c\ .$$

Une droite menée d'une manière quelconque par le point donné aura des équations de cette forme

$$x=mz\ , \qquad y=nz\ ;$$

où m et n sont indéterminés. En les combinant avec celle de la surface, pour en eliminer x, y, on trouvera que les valeurs de z qui répondent aux deux extrémités de la corde interceptée sont données par l'équation

$$(am^2+bn^2-1)z^2+2(a'm+b'n)z+c=0\ ;$$

donc, pour les mêmes raisons que ci-dessus, la valeur de z qui répond au milieu de cette corde sera donnée par l'équation

$$z=-\frac{a'm+b'n}{am^2+bn^2-1} \qquad \text{ou} \qquad (am^2+bn^2-1)z+(a'm+b'n)=0\ ;$$

mettant donc, pour les deux arbitraires m, n, dans cette dernière, leurs valeurs $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ tirées des équations de la corde, on obtiendra, toutes réductions faites, pour l'équation de la surface cherchée,

$$z^2=ax^2+by^2+a'x+b'y\ ;$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

Nous aurions pu facilement, au surplus, par des considérations purement géométriques, déduire le second théorème du premier; mais nous ne voyons pas trop ce qu'on peut gagner à remplacer quelques lignes de calcul par un grand nombre de mots.

Réflexions sur le problème d'analise proposé à la page 131 *du X.^e volume des* Annales;

Par un ABONNÉ.
GERGONNE.

Au Rédacteur des *Annales*;

MONSIEUR,

Dans la quatrième livraison du tome X.^e de votre estimable recueil, vous avez proposé de déterminer la condition ou les conditions de rationnalité des racines de l'équation du troisième degré

$$ax^3+bx^2+cx+d=0\ ,$$

et j'avais eu le dessein de m'occuper de ce problème ; mais, en y réfléchissant sérieusement, il m'a semblé qu'il n'était pas résoluble, ou que du moins, s'il l'était, ce ne pourrait être que d'une manière peu commode pour les besoins de l'analise. Or, comme lorsqu'un problème est proposé, c'est également remplir le but que d'en donner la solution ou de montrer que cette solution ne peut être obtenue, j'ai pensé que vous ne dédaigneriez pas d'accueillir les réflexions auxquelles j'ai été conduit par un examen attentif de ce problème.

Lorsqu'on cherche à quel caractère on peut reconnaître que l'équation du second degré

$$ax^2+bx+c=0\ ,$$

a ses deux racines égales, on arrive pour résultat à l'équation

$$b^2-4ac=0\ :$$

Comme cette équation existe uniquement entre les coefficiens de la proposée, qu'elle établit une relation nécessaire entre ces coefficiens, et qu'en un mot tout y est déterminé ; on peut, par analogie, se demander aussi à quel caractère on reconnaîtra que l'équation du troisième degré

$$ax^3+bx^2+cx+d=0\ ,$$

a deux racines égales ; et cette seconde question conduit à l'équation

$$(bc-9ad)^2-4(b^2-3ac)(c^2-3bd)=0 \text{ ,}$$

absolument de même nature que la précédente. On conçoit même que la question pourrait être indéfiniment étendue aux degrés supérieurs, et qu'elle conduirait, pour chacun d'eux, à des résultats analogues.

Mais lorsqu'on dit que, pour que les racines de l'équation du second degré

$$ax^2+bx+c=0 \text{ ,}$$

soient rationnelles, il faut que la fonction b^2-4ac des coefficiens soit un quarré, on n'établit point proprement une relation entre ces coefficiens qui demeurent encore indéterminés, sous certaines restrictions seulement; en sorte que cette condition revient à pouvoir résoudre rationnellement l'équation

$$t^2-(b^2-4ac)=0 \text{ :}$$

où t est un nombre rationnel tout-à-fait indéterminé.

Lors donc qu'on propose la même question pour le troisième degré, l'analogie conduit à prévoir que, pour que les racines de l'équation soient rationnelles, il n'est pas nécessaire qu'il existe entre ses coefficiens seulement une relation qui puisse déterminer l'un quelconque d'entre eux en fonction des autres; mais qu'il suffit pour cela qu'une certaine fonction de ses coefficiens soit d'une forme particulière, sans que pourtant cette forme leur ôte leur indétermination, c'est-à-dire, qu'il faut que cette fonction soit de la même forme qu'une fonction donnée d'une indéterminée t ou peut-être même de plusieurs; mais quelle est cette fonction, et de quelle forme doit-elle être ? Ce n'est guère encore ici qu'à l'analogie qu'on peut avoir recours. Voyons donc ce qu'elle nous apprend.

Si dans l'équation de condition

$$t^2-(b^2-4ac)=0 ,$$

on change t en $2ay$, ce qui est permis ; elle deviendra

$$4a^2y^2-(b^2-4ac)=0 ;$$

or, cette équation n'est autre que celle à laquelle on parvient en faisant disparaître le second terme de la proposée ; dire donc que, pour que les racines de celle-ci soient rationnelles il faut que b^2-4ac soit un quarré, c'est dire, en d'autres termes, qu'il faut que celles de l'autre le soient aussi; ce qu'on appelle donc proprement la condition de rationnalité des racines des équations du second degré se réduit seulement à dire que, pour que les racines d'une équation complète du second degré soient rationnelles, il est nécessaire et il suffit que les racines de l'équation privée de son second terme jouissent de la même propriété ; ce qui est d'ailleurs évident, puisque la relation entre les inconnues des deux équations n'est que du premier degré seulement.

En nous laissant donc guider par l'analogie, nous serons conduits à dire que, pour que les racines d'une équation complète du troisième degré soient rationnelles, il est nécessaire et il suffit que les racines de l'équation privée de son second terme soient elles-mêmes rationnelles, ce qui n'est pas moins évident ; mais, tandis que, dans le second degré, cette condition permet une vérification facile, il n'en est plus de même dans le troisième ; et c'est à tel point qu'il est raisonnablement permis de douter si la chose vaut la peine d'exé-

cuter

cuter le calcul de la transformation, et s'il ne vaudrait pas au moins autant faire immédiatement l'essai sur la proposée elle-même.

Que si l'on insistait, et si on demandait la condition de rationnalité d'une équation du troisième degré sans second terme, cela reviendrait à faire la même question pour celle du second; et de même que, pour que l'équation

$$t^2+p=0\ ,$$

ait ses racines rationnelles, il est nécessaire et il suffit de trouver pour t une valeur qui rende la fonction t^2 égale à $-p$; pour que l'équation

$$t^3+pt+q=0\ ;$$

ait ses racines rationnelles, il sera nécessaire et il suffira de trouver pour t deux valeurs au moins qui rendent la fonction $t(t^2+p)$ égale à $-q$. Voilà je crois toute la réponse qu'on peut raisonnablement faire à la question proposée, pour le troisième degré; et je ne pense pas qu'on en ait de plus satisfaisantes à se promettre pour les degrés plus élevés. On pourra bien, à la vérité, indiquer certaines relations entre les coefficiens qui rendent les racines rationnelles, et on aura ainsi des conditions *suffisantes*; mais je doute que l'on parvienne jamais à prouver que ces conditions sont *nécessaires*. (*)

Voici, au surplus, de quelle manière j'avois attaqué la question

(*) Quelqu'un nous avait bien adressé une solution du problème ; mais, outre que les principes ne nous en ont pas paru assez solidement établis ; on n'a pas démontré que les conditions que l'on assignait, *suffisantes*, à la vérité, étaient également *nécessaires* ; et il est même douteux qu'elles le soient.

J. D. G.

et quelle sorte de difficulté j'ai rencontrée. J'avais pris simplement l'équation

$$x^3+px+q=0\ ,$$

attendu qu'il est toujours facile de passer de celle-là à l'autre. On sait que les racines de cette équation sont de la forme

$$x=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\ ,\quad x=\alpha\sqrt[3]{A}+\beta\sqrt{B}\ ,\quad x=\beta\sqrt[3]{A}+\alpha\sqrt[3]{B}\ ;$$

α, β étant les racines cubiques imaginaires de l'unité et A, B les racines de l'équation

$$27x^2+27qx-p^3=0\ ,$$

qui, dans le cas dont il s'agit, doit, comme l'on sait, avoir ses racines imaginaires, ce qui exige qu'on ait

$$27q^2+4p^3<0\ .$$

L'équation aux quarrés des différences, qui est

$$y^3+6py^2+9p^2y+(27q^2+4p^3)=0\ ,$$

prouve de plus que cette quantité doit être égale à un quarré négatif. Représentant donc par $18t$ la racine de ce quarré, nous aurons

$$27q^2+4p^3=-324t^2$$

d'où

$$\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=t\sqrt{-3}$$

ainsi pour que les racines de la proposée soient toutes trois réelles, il est d'abord *nécessaire* que

$$-\tfrac{1}{3}\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right),$$

soit un quarré parfait; mais cette condition ne saurait *suffire*.

Au moyen de cette transformation les quantités A, B deviennent

$$-\frac{q}{2}+t\sqrt{-3}\,, \qquad -\frac{q}{2}-t\sqrt{-3}\,,$$

mais doivent-elles être des cubes parfaits? il paraît bien que oui; mais ce n'est pas tout que de le soupçonner, et on pourrait fort bien objecter que peut-être, en développant leurs racines en séries, ce qui donnerait évidemment pour les trois valeurs de x des termes rationnels, les séries résultantes pourraient bien être de la classe de celles qu'on sait sommer rationnellement, lors même que A et B ne sont pas des cubes parfaits.

Admettons pourtant, bien que nous ne l'ayons pas démontré, que la condition de rationnalité des racines de la proposée exige que A et B soient des cubes parfaits, et voyons de quoi dépend cette nouvelle condition. On sait par la théorie de l'extraction des racines des quantités en partie rationnelles et en partie radicales, que, pour qu'une fonction de la forme $G+\sqrt{H}$ soit exactement le cube d'une autre fonction de la forme $g+\sqrt{h}$, il faut d'abord que G^2-H soient un cube parfait, condition qui, à la vérité, est toujours remplie pour A et B; mais on sait aussi que cette condition *nécessaire* n'est pas *suffisante*, et qu'il faut en outre qu'une certaine équation du troisième degré admette tout au moins une racine rationnelle. Nous voilà donc ainsi entraînés, en suivant la voie même la plus directe, dans un cercle vicieux inévitable, lequel consiste à avoir besoin, pour nous assurer de la rationnalité des racines d'une équation du troisième degré, de résoudre le même problème pour une autre équation du même degré. C'est là où sont venus constamment aboutir les diverses sortes de tentatives que j'ai faites, en assez grand nombre, dans la vue d'amener le problème à une heureuse issue; et voilà aussi ce qui m'a conduit à le considérer comme un problème tout-à-fait désespéré.

Agréez, etc.

Lyon, le 23 juillet 1820.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorèmes de Géometrie.

I. Si, considérant successivement deux à deux trois cercles tracés sur un même plan, on détermine, pour chaque système de deux cercles, les centres de similitude, tant interne qu'externe; et que, dans chaque système, on fasse de la distance entre ces deux centres le diamètre d'un nouveau cercle; les trois cercles obtenus par cette construction passeront par les deux mêmes points, et auront ainsi une corde commune.

II. Si, considérant successivement deux à deux quatre sphères situées d'une manière quelconque dans l'espace, on détermine, pour chaque système de deux sphères, les centres de similitude, tant interne qu'externe; et que, dans chaque système, on fasse de la distance entre ces deux centres le diamètre d'une nouvelle sphère; les six sphères obtenues par cette construction passeront par les deux mêmes points, et auront ainsi une corde commune.

ASTRONOMIE.

Description d'un nouveau réticule ;

Par M. BENJAMIN VALZ.

LA diversité, assez grande, des réticules proposés jusqu'à ce jour peut faire penser que les besoins de l'astronomie ne sont pas encore entièrement satisfaits sur ce point. Cette réflexion doit donc encourager à présenter de nouvelles dispositions, jusqu'à ce qu'il ne reste plus rien à désirer pour la commodité et l'exactitude des observations. Sans aspirer à atteindre le but, mais cherchant à en approcher, s'il est possible, je hasarderai donc de proposer une nouvelle construction qui me paraît offrir quelques avantages.

Le réticule rhomboïde, ou plutôt rhombe (*), dont les astronomes se servent depuis long-temps, bien préférable à celui de Cassini, auquel il a succédé, n'est pas cependant exempt d'inconvéniens. On rencontre d'abord bien des difficultés à le construire exactement ;

(*) Lalande attribue l'invention de ce réticule à Bradley, dont il porte le nom, quoique, d'après son compatriote Robert Smith (*Cours complet d'optique*, liv. III, chap. VIII, n.° 278), il ne fut l'inventeur que d'un réticule simplement angulaire, qu'on trouve encore dans les vieux instrumens anglais, et qui, dans les observations orthogonales, laissait perdre un cinquième du champ. Le réticule de 45° en perd encore environ un tiers.

aussi en trouve-t-on souvent de fort défectueux; ensuite, la vérification en est pénible et délicate; enfin, l'évaluation de ses parties n'est pas fort aisée à obtenir. En effet, on est obligé, pour cela, de faire parcourir la diagonale par une étoile, afin de connaître sa valeur, nécessaire pour toutes les observations, orthogonales ou non; mais, est-il facile et peut-on être bien assuré de faire exactement *éclore*, pour ainsi dire, une étoile, dans le sommet précis d'un angle, et de la voir disparaître par le sommet de l'angle opposé? C'est une chose à peu près impossible à exécuter, sur-tout si la lunette n'est pas montée parallactiquement. La difficulté est rendue encore bien plus insurmontable par les diagonales, qui partagent bien ou mal ces angles, et obstruent le point mathématique d'intersection. On pourrait éluder cette difficulté, un peu plus laborieusement, à la vérité, en faisant d'abord traverser deux étoiles voisines d'un même côté par rapport au centre du réticule, et une seconde fois de différens côtés. En effet, soient a, b les routes interceptées des deux astres, dans la première observation; la différence de déclinaison sera $b-a$; et, lorsque les étoiles auront de nouveau traversé le réticule, l'une d'un côté et l'autre de l'autre, à l'opposé, on obtiendra deux autres intervalles a', b'. La grande diagonale sera évidemment $a'+b'+b-a$.

Le réticule carré et celui formé de deux triangles équilatéraux accolés, proposé le dernier, ne paraissent proprement que des modifications tendant à simplifier la construction ou la vérification de celui attribué à Bradley. M. Monteiro-da-Rocha, à Coïmbre, avait aussi proposé un autre réticule rhombe, dont les angles aigus étaient de 45.°, et les côtés prolongés jusqu'au bord du diaphragme. Malgré l'avantage que présentait la suppression des diagonales, dont il devenait inutile de connaître la valeur, il ne paraît pas que cette disposition ait été fort employée; apparemment par ce que le calcul de l'inclinaison nécessitait les observations d'une même étoile aux quatre fils, que les réductions en étaient assez longues, et enfin qu'une partie du champ n'était plus propre à ce nouveau genre d'observation. D'ailleurs, les fils se croisant, on est obligé de les choisir fort déliés, afin qu'ils s'écartent le moins possible d'un même plan ; ce qui ne permet pas d'observer les occultations derrière leur épaisseur, et ne dispense pas d'un éclairage toujours fort incommode.

Le réticule circulaire, perfectionné par M. Kohler, et rendu annulaire, est, sans contredit le plus simple et le plus commode de tous ; sa construction, s'effectuant sur le tour, est rigoureusement exacte, et n'a conséquemment besoin d'aucune vérification ; mais ces avantages décidés ne sont-ils pas compensés par quelques inconvéniens ? D'abord il faut connaître le diamètre de l'anneau ; et comme pour l'obtenir, on ne peut être assuré de faire passer une étoile précisément par le centre que rien n'indique ; on est obligé, pour ne pas emprunter des catalogues des données sujettes à diverses réductions, d'observer les passages à travers l'anneau de deux étoiles voisines, et dans deux stations différentes de la lunette ; A l'aide de ces huit occultations et d'un calcul assez prolixe, on parvient à déterminer le diamètre, ce qu'il faudra répéter chaque fois que l'on fera mouvoir le système des deux oculaires ; le réticule étant supposé placé entre eux dans un chercheur.

Lorsqu'un des astres viendra à passer auprès du centre, non seulement on ne saura pas si c'est au-dessus ou au-dessous, mais encore on ne pourra déduire l'apothème avec justesse ; la différence de déclinaison sera donc peu sûre. Si, au contraire, la route de l'astre, trop éloignée du centre, forme un angle fort aigu avec la circonférence de l'anneau, l'étoile paraîtra *dormir* et on ne pourra saisir exactement les instans où elle semble *s'éteindre* et éclore ensuite, par des degrés insensibles. Cette erreur, qui variera suivant la fatigue de l'œil, sera d'autant plus influente qu'elle s'appliquera sur une corde plus courte. Il y aura donc une partie assez majeure du champ rendue inutile pour les observations. Le principal avantage de ce réticule consiste en ce qu'il est toujours bien placé, et qu'il n'a pas besoin d'être monté parallactiquement ; mais aussi on ne peut alors s'assurer si l'un ou l'autre des deux astres ne passe pas trop près ou trop loin du centre. On est donc exposé à faire souvent des observations qui ne pourront ensuite servir utilement. On pourrait peut-être rémédier à une partie de ces inconvéniens en ajoutant un second anneau plus petit en dedans du grand, ce qui permettrait d'observer plus près du centre ; et un rayon, dont la pointe déliée répondrait à ce point, prouverait, en interceptant l'étoile, si le passage a eu lieu au-dessus ou au-dessous du centre. Il pourrait même servir à diriger la route d'une étoile de façon à la faire passer par ce point, ce qui donnerait le diamètre directement.

Comme ces ingénieux instrumens sont principalement employés pour l'observation des comètes, il paraît convenable de les placer dans un chercheur ou lunette de nuit, afin d'avoir plus de clarté et sur-tout un plus grand champ, ce qui oblige d'employer de préférence la combinaison achromatique d'oculaires de Campani, qui donne un champ plus étendu que celle de Ramsden ; mais le foyer se trouvant, dans cette construction, entre les oculaires, mobiles tous deux et ensemble, la valeur des parties du réticule variera, non seulement suivant la vue de l'observateur, mais encore suivant le degré de clarté ou les ouvertures de l'objectif qui changent le foyer moyen. Les chercheurs ayant de grandes ouvertures à leurs objectifs, qui ne sont cependant pas achromatiques, les aberrations focales sont très-grandes, et d'autant plus sensibles à l'œil que l'astre est plus lumineux. Pour les diminuer, on retrécit, dans ce cas, les ouvertures; mais alors la distance focale moyenne en est alongée ; il faudra donc trop souvent une nouvelle évaluation des parties du réticule qu'on trouvera bien fastidieuse, quelquefois même assez difficile, et entraînant toujours la perte d'un temps précieux.

Les inconvéniens que je viens de signaler m'ont engagé à chercher une nouvelle construction de réticule, exempte, s'il est possible, de la plupart de ces défauts, au risque peut-être d'en créer de nouveaux. Voici de quelle manière j'ai essayé d'y parvenir, du moins pour les observations orthogonales. Dans les autres cas, l'inclinaison s'obtient avec facilité et bien simplement. On peut même appliquer aux observations circompolaires ce nouveau réticule, dont la construction s'exécute ainsi.

Des deux extrémités du diamètre AB (fig. 1), et avec la même ouverture de compas qui a servi à décrire la circonférence ACBD, sur le diaphragme d'un chercheur, déterminez les deux arcs AC, BD, de 60° chacun. Par leurs extrémités, tirez les parallèles AD, CB, et le réticule se trouvera décrit. On pourrait le construire, ainsi qu'on le fait pour le rhombe, en évidant la plaque du diaphragme et n'y laissant subsister que les trois lames tracées; mais, comme ce travail ne peut être exécuté que par un artiste habile, qui conserve aux lames une largeur bien égale, en les taillant en biseau exact, ce qu'on rencontre rarement loin des capitales; on pourra y substituer des fils métalliques qui, formés à la filière, seront nécessairement d'un diamètre bien égal. Ils devront avoir assez d'épaisseur pour éclipser l'astre pendant quelques secondes; et, comme ils ne se croisent pas, il n'y aura pas de superposition qui empêche de les placer rigoureusement dans un même plan, sur une des faces du diaphragme. Le fil équatorial ne servant qu'à placer le réticule dans le sens du mouvement diurne, et nullement pour les observations, pourra se mettre sur la face opposée. Je l'avais d'abord disposé perpendiculairement au fil diagonal, comme on le voit en EF (fig. 1); mais j'ai trouvé ensuite plus convenable de le rendre perpendiculaire aux fils parallèles (fig. 2); la partie du champ, ainsi hors d'usage, se réduisant à bien peu de chose.

Voyons d'abord les formules pour les observations orthogonales. L'angle aux sommets A et B est de 30°, et par conséquent $\mathrm{Cot.}30^\circ=\sqrt{3}=1,732$. Soit t l'intervalle de temps entre les deux premiers fils, réduit en arc de grand cercle, pour le premier astre; soit t' la même quantité pour le second, et soit $\mathrm{d}D$ la différence en déclinaison; on aura

$$\mathrm{d}D=1,732(\pm t\mp t') \qquad (1)$$

Les observations aux deux derniers fils donneraient le même résultat, sans qu'il fût besoin de connaître la valeur des parties du réticule ; mais il convient d'observer aux trois fils, parce qu'on obtient ainsi une vérification avantageuse. La différence des temps des passages à l'un ou à l'autre des deux fils parallèles fera connaître la différence des ascensions droites ; mais, lorsque la déclinaison sera forte, il faudra prendre la différence des milieux des passages aux deux fils parallèles, dès que les intervalles de temps compris entre eux ne seront plus égaux.

Si le réticule n'est pas monté parallactiquement, et qu'on n'ait pas le temps de le diriger sur le mouvement diurne, il suffira d'observer le passage de l'un des astres aux deux fils parallèles, pour calculer l'inclinaison ; l'intervalle des fils étant connu, ou déterminé ensuite par plusieurs étoiles observées, si l'on veut, dans une seule station, bien plus facilement que les diagonales ordinaires. Soit donc a cette différence FR (fig. 3), b l'arc CR intercepté, réduit au grand cercle dans l'observation oblique, J l'inclinaison qu'on connaîtra par

$$\text{Cos.}J=\frac{a}{b}\ ; \qquad (2)$$

Désignons actuellement par τ l'intervalle de temps entre les deux premiers ou les deux derniers fils, pour le premier astre, et τ' pour le second. dP étant la différence de la correction des passages à l'un des fils parallèles, et D la déclinaison connue, nous obtiendrons, dans le triangle AQR,

$$\text{AR}=\text{QR.}\frac{Sin.\text{AQR}}{Sin.\text{QAR}}=2\tau\text{Sin.}(60\pm J),$$

et dans le triangle rectangle APR,

$$\text{PR}=\text{AR}\,Sin.\text{PAR}=2\tau\text{Sin.}J\text{Sin.}(60^\circ\pm J)\ ;$$

$$\mathrm{AP}=\mathrm{PR}\,Cot.\mathrm{PAR}=\mathrm{PRCot.}J\ .$$

Nous avons par conséquent

$$\mathrm{d}P=2(\pm r\mp r')\mathrm{Sin.}J\mathrm{Sin.}(60^{\circ}\pm J)\ , \qquad (3)$$

$$\mathrm{d}D=15\mathrm{dP.Cos.}D\mathrm{Cot.}J\ . \qquad (4)$$

Dans le cas où l'on voudrait ne pas employer les lignes trigonométriques, ou qu'on se trouverait obligé de se passer de leurs tables pour les calculs, on pourrait recourir aux formules suivantes, dans lesquelles $m=\frac{a}{b}=\mathrm{Cos.}J$ et $n=\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}=\mathrm{Tang.}J$.

$$\mathrm{d}D'=\frac{\mathrm{d}D}{15\mathrm{Cos.}D}=m(\pm r\mp r')(1,732m\pm\sqrt{1-m^2})=m^2(\pm r\mp r')(1,732\pm n)\ , \qquad (5)$$

$$\mathrm{d}P=\mathrm{d}D'\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}=n\mathrm{d}D'\ . \qquad (6)$$

Les observations aux trois fils procureront deux résultats et une vérification commode.

Lorsque les astres se trouveront dans les régions circompolaires ; on ne se servira plus que des fils parallèles ; et les deux observations qu'on y fera, pour chacun des astres, suffiront pour calculer la différence d'ascension droite et la déclinaison inconnue.

Pour le prouver, soit P (fig. 4) le pôle de la sphère céleste ; ABC l'arc du parallèle intercepté entre les deux fils du réticule, AC l'arc de grand cercle correspondant ; nous trouverons

$$Sin.\tfrac{1}{2}\mathrm{AC}=Sin.\mathrm{PC}Sin.\tfrac{1}{2}\mathrm{APC}\ ,$$

$$\text{ou }\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}a=\mathrm{Cos.}D\mathrm{Sin.}\tfrac{15}{2}t\ ;$$

et aussi $\text{Sin.}\frac{1}{2}a = \text{Cos.D}'\text{Sin.}\frac{15}{2}t'$,

d'où enfin

$$\text{Cos.}D' = \text{Cos.}D.\frac{\text{Sin.}\frac{15}{2}t}{\text{Sin.}\frac{15}{2}t'}\,. \qquad (7)$$

Lorsque le réticule sera dirigé sur le mouvement diurne, on obtiendra ainsi la déclinaison inconnue : la différence d'ascension droite se déduira de la différence des milieux des passages aux deux fils. Dans les autres positions du réticule, on remarquera que la valeur précédente de la déclinaison inconnue, indépendante de l'intervalle des fils, ne sera pas sensiblement altérée par l'inclinaison, tant que les arcs de grands cercles interceptés seront à peu près égaux, ce qu'on pourra obtenir avec facilité, en dirigeant approximativement les fils parallèles vers le pôle. En effet, les arcs AB, CD (fig. 5) étant parallèles; si l'on suppose deux autres fils AF, BG, qui leur soient perpendiculaires, l'arc FG qu'ils intercepteront, sera égal à l'arc CD, compris entre les véritables fils. On aura donc aussi, pour calculer la déclinaison, la même formule que ci-dessus (7), puisque l'intervalle des fils n'y entre pour rien. Quant à la correction du passage au fil, le triangle sphérique BPD, formé au pôle et aux deux points auxquels les parallèles des astres rencontrent un même fil, nous donnera

$$\mathit{Sin}.\text{BPD} = \frac{\mathit{Cot}.\text{PD}\mathit{Sin}.\text{PB} - \mathit{Cos}.\text{PB}\mathit{Cos}.\text{BPD}}{\mathit{Cot}.\text{PBD}}$$

ou

$$15\text{d}P = (\text{Tang.}D' - \text{Tang.}D)\text{Cos.}D\text{Tang.}J'\text{Cot.}1'' = \frac{\pm\,\text{d}D\text{Tang.}J'}{\text{Cos.}D},$$

ou encore

$$15\text{dP} = \frac{\pm\,\text{d}D\text{Tang.}(\tau - \frac{15}{2}\tau)}{\text{Cos.}D}\,. \qquad (8)$$

L'angle

L'angle J' désigne bien la véritable inclinaison du parallèle, au point où il rencontre le fil, mais non celle du grand cercle ou l'inclinaison moyenne que nous avons employée précédemment. Leur différence, avec une déclinaison considérable, est à bien peu près égale à l'angle au pôle correspondant à la moitié de l'intervalle de temps τ. On aurait plus exactement (fig. 4)

$$\text{Tang.}A=\text{Sin.}D\,\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\tau\,,\quad J'=J-A\,.$$

Les arcs de grands cercles interceptés ne sont cependant pas rigoureusement égaux. La formule (7), employée pour calculer les observations obliques, ne donnera donc qu'une approximation commode; mais, comme il sera facile de diriger les fils parallèles à peu près vers le pôle, on obtiendra presque toujours une exactitude suffisante, sur-tout pour les régions polaires où il est bien difficile d'obtenir des observations même passables. Toutefois on pourrait désirer des formules plus rigoureuses. Cherchons-en donc de telles, au risque de les avoir un peu plus compliquées. Les triangles sphériques APC; BPD (fig. 5) nous fourniront

$$\mathit{Sin}.AC=\frac{\mathit{Sin}.PC\,\mathit{Sin}.APC}{\mathit{Sin}.PAC}\,,\quad \mathit{Sin}.BD=\frac{\mathit{Sin}.PD\,\mathit{Sin}.BPD}{\mathit{Sin}.PBD}\,.$$

Substituant les arcs aux sinus très-petits, et les valeurs des angles au pôle trouvés ci-dessus (8), on aura

$$AC=\frac{dD\,\text{Cos.}D'}{\text{Cos.}D\,\text{Cos.}(J+A)}\,,\quad BD=\frac{-dD\,\text{Cos.}D'}{\text{Cos.}D\,\text{Cos.}(J-A)}\,;$$

donc

$$AC-BD=\frac{2dD\,\text{Sin.}J\,\text{Sin}A\,\text{Cos.}D'}{\text{Cos.}D\,\text{Cos.}(J+A)\,\text{Cos.}(J-A)}=q\,\text{Cos.}D'\,.$$

Enfin, dans le triangle rectiligne rectangle CDR on a

$$\overline{CD}^2=\overline{DR}^2+\overline{CR}^2\ ,$$

ou

$$b'^2=a^2+(\sqrt{a^2-b^2}-q\text{Cos.}D')^2=b^2-2q\text{Cos.}D'a\text{Tang.}J+q^2\text{Cos.}^2D'\ .$$

Substituant pour b' sa valeur, assez approchée $15r'\text{Cos.}D'$, et, plus exactement $2\text{Cos}\,D'\text{Sin.}\frac{15}{2}r'\text{Cot.}1''$, deduite de l'équation $\text{Sin.}\frac{1}{2}b'=\text{Cos.}D'\text{Sin.}\frac{15}{2}r'$, transposant, et faisant pour abréger

$$p=(15r')^2-q^2\quad,\quad S=aq\text{Tang.}J=q\sqrt{b^2-a^2}$$

$$p\text{Cos.}^2D'+2S\text{Cos.}D'=b^2\ ,$$

on aura enfin

$$\text{Cos.}D=-\frac{S}{p}\mp\frac{1}{p}\sqrt{b^2p+S^2}\ .\qquad (*)$$

(*) On pourrait parvenir moins directement à d'autres formules, en projetant les données sur un plan tangent à la sphère au lieu qu'occupent les astres qu'on observe, ou passant même par les co-tangentes des déclinaisons. Soit donc alors P' (fig. 6) le point où l'axe de la sphere rencontre le plan, et faisons

$$\text{FG}=a\ ,\quad \text{FAP}'=J'\ ,\quad \text{AB}=b\ ,\quad \text{FC}=y\ ,\quad \text{AP}'\text{B}=2A\ ,$$

$$\text{GP}'=x\ ,\quad \text{FCP}=z\ ,\quad \text{CD}=b'\ ,\quad \text{GD}=y'\ ,\quad \text{CP}'\text{D}=2A'\ .$$

Nous aurons

$$\text{AP}'=\text{Cot.}D\ ,\quad b=2\text{Cos.}D\text{Sin.}\tfrac{15}{2}r\ ,\quad \text{Sin.}A=\text{Sin.}D\text{Sin.}\tfrac{15}{2}r\ ,$$

$$\text{CP}'=\text{Cot}\,D'\ ,\quad b'=2\text{Cos.}D\,\text{Sin.}\tfrac{15}{2}r'\ ,\quad \text{Sin.}A'=\text{Sin.}D'\text{Sin.}\tfrac{15}{2}r\ ,$$

On pourrait objecter contre l'emploi de tous les réticules, en général, que les observations ne donnent que les arcs dont les droites interceptées entre les fils sont les tangentes, et qu'on leur applique cependant le calcul comme si c'était ces tangentes même. Examinons cette cause d'erreur, et cherchons à en apprécier la faible influence. L'expression de la tangente, en fonction de l'arc étant

---

$$y^2=\text{Cot.}^2D'-(a+x)^2\ ,\quad J'=J+A\ ,$$

$$y'^2=\text{Cot.}^2D'-x^2\ ,\qquad x+a=\text{Cot.}D\text{Sin.}J'\ ,$$

$$(y-y')^2+a^2=b'^2\ .$$

Substituant, dans cette dernière équation, pour y, y' leurs valeurs, il viendra

$$-2\sqrt{[\text{Cot.}^2\text{D}'-x^2][\text{Cot.}^2\text{D}'-(x+a)^2]}+2\text{Cot.}^2\text{D}'-x^2-(x+a)^2+a^2=b'^2;$$

ou, en transposant et quarrant,

$$4\{\text{Cot.}^4\text{D}'-[x^2+(x+a)^2]\text{Cot.}^2\text{D}'+x^2(x+a)^2\}=[2\text{Cot.}^2\text{D}'-x^2-(x+a)^2+a^2-b'^2]^2$$

$$=4\{\text{Cot.}^4\text{D}'-[x^2+(x+a)^2+a^2-b'^2]\text{Cot.}^2\text{D}'+(x^2+ax+\tfrac{1}{2}b'^2\}\ ,$$

ou, en réduisant,

$$(b^2-a^2)\text{Cot.}^2\text{D}'=(x^2+ax+\tfrac{1}{2}b'^2)^2-x^2(x+a)^2=\tfrac{1}{4}\,b'^2(4x^2+4ax+b'^2)\ .$$

En posant, pour abréger,

$$\text{Tang.}x'=\frac{2x+a}{\sqrt{b'^2-a^2}}\ ,$$

on tire de là

$$\text{Cot.}D'=\tfrac{1}{2}b'\sqrt{\frac{4x^2+4ax+b'^2}{b'^2-a^2}}=\tfrac{1}{2}b'\sqrt{\frac{(2x+a)^2}{b'^2-a^2}+1}$$

$$=\tfrac{1}{2}b'\sqrt{1+\text{Tang.}^2\tfrac{1}{2}x'}=\frac{b'}{2\text{Cos.}x'}\ ,$$

et par suite

$$\text{Tang}.A = A + \tfrac{1}{3}A^3 + \tfrac{2}{15}A^5 + \ldots ;$$

soit p une fraction quelconque, nous aurons

$$\text{Tang}.pA = pA + \tfrac{1}{3}p^3A^3 + \ldots ,$$

$$\text{Sin}.D' = \frac{\text{Cos}.x'}{\text{Sin}.\frac{15}{2}\tau'} . \qquad (10)$$

Il faudrait, dans l'expression de Tang.x', substituer pour b' sa valeur, déduite de la déclinaison D', connue approximativement ; mais il sera plus convenable de chercher à dégager cette quantité même ; parce que se trouvant fonction de Cos.D', sa déclinaison, considérable dans ce cas-ci, s'obtiendra, par ce moyen, avec plus d'exactitude. Reprenons pour cela l'équation

$$(b'^2 - a^2)\text{Cot.}^2D' = \tfrac{1}{4}b'(4x^2 + 4ax + b'^2) ,$$

ou bien

$$b'^2 - a^2 = (4x^2 + 4ax + b'^2)\text{Sin.}^2A' ;$$

cela donne

$$b' = \frac{\sqrt{a^2 + 4x(x+a)\text{Sin.A}'}}{\text{Cos.A}'} . \qquad (11)$$

Ayant, par supposition, une très-forte déclinaison, on pourra, sans appréhension, faire Sin.D'=1, dans l'expression de Sin.A'; mais il serait plus exact d'employer la déclinaison connue à peu près. Enfin, nous aurons, pour la correction du passage au fil

$$\text{Sin}.z = \frac{\text{Cot.DSin}.J'}{\text{Cot}.D'}\,\text{Sin}.\tfrac{15}{2}\text{d}P = \frac{\text{Sin}.(J'-z)}{\text{Sin}.D} . \qquad (12)$$

et $$p\,\text{Tang.}A = pA + \tfrac{1}{3}pA^3 + \ldots\ ;$$

l'erreur sera donc

$$\tfrac{1}{3}(p - p^3)A^3 + \ldots\ .$$

Différentiant cette expression, pour obtenir la valeur de p qui répond au maximum, nous trouverons $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$; substituant donc nous obtiendrons, pour la plus grande erreur exprimée en seconde,

$$\frac{2}{9\sqrt{3}} \cdot \frac{A^3}{\text{Sin.}1''} = \frac{2A''^3\,\text{Sin.}^2 1''}{9\sqrt{3}} = \frac{3A''^3}{(10)^{12}}\ .$$

Pour un arc de 1°, qui donne $A = 3600''$, le maximum de l'erreur est $0'',14$; pour 2°, ce sera $1'',13$, différence bien insensible, dans ces sortes d'observations; ce qu'il convenait de prouver, pour éloigner tout scrupule sur l'emploi des réticules, dans le vaste champ des chercheurs.

Les angles soutendus par des lignes égales, dans le milieu et sur les bords du champ, ne sont pas rigoureusement égaux. Pour trouver jusqu'où peut s'étendre leur différence; soient A, A' deux arcs parallèles, répondant à des intervalles égaux du réticule, mais dont le premier se trouve dans le milieu du champ et le second vers les bords, et soit $\mathrm{d}D$ la distance de l'un à l'autre; on trouvera

$$A' = A\,\text{Cos.}\mathrm{d}D = A(1 - 2\,\text{Sin.}^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{d}D),$$

d'où

$$A - A' = 2A\,\text{Sin.}^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{d}D = \tfrac{1}{2}A\,\text{Sin.}^2\mathrm{d}D = \tfrac{1}{2}A\mathrm{d}D''^2\,\text{Sin.}^2 1'' = \frac{12A\mathrm{d}D''^2}{(10)^{12}}\ ,$$

supposant A et dD de 1° chacun, nous aurons $A-A'=0''$, 55. Pour 2°, ce sera $4'',4$, erreurs encore à négliger, mais qu'il fallait vérifier, pour se rassurer entièrement.

Cette dernière correction est la même que celle que donnerait la différence de déclinaison des deux astres, lorsque l'un d'eux serait dans l'équateur; mais elle deviendrait d'autant plus forte que la déclinaison serait plus considérable; on aurait en effet

$$A=\frac{A'\mathrm{Cos}.D'}{\mathrm{Cos}.D}=A'\frac{\mathrm{Cos}.D\pm\mathrm{d}D\mathrm{Sin}.D}{\mathrm{Cos}.D},$$

d'où

$$A-A'=\pm\frac{A'\mathrm{d}D\mathrm{Tang}.D}{\mathrm{Sin}.1''}=\pm A'\mathrm{Tang}.\mathrm{d}D\mathrm{Tang}.D\ .$$

Pour de faibles déclinaisons les différentielles infinitésimales ne sont plus suffisamment exactes, et il faut recourir aux différentielles finies qui donneront

$$A-A'=\pm A'\mathrm{Tang}.D\mathrm{Sin}.\mathrm{d}D\pm\tfrac{1}{2}A'\mathrm{Sin}.^2\mathrm{d}D\ .$$

Si l'on fait $D=0$ ou $-\mathrm{d}D$, on retombera effectivement sur la formule de correction précédente.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Solution des problèmes proposés au Concours général des élèves de mathématiques spéciales de Paris, le 10 *de juillet* 1820 ;

Par M. Treuil, professeur de mathématiques au collége royal de Versailles, et à l'école royale militaire de Saint-Cyr.

Problème I. *Un cercle étant donné, dans un plan horizontal,* on demande,

1.° *De faire voir que, si l'on coupe un cône droit, dont ce cercle soit la base, par une suite de plans parallèles et verticaux, les sections résultantes seront des hyperboles qui auront leurs asymptotes parallèles ?*

2.° *De trouver sur la verticale élevée par le centre du cercle le point où il faut placer le sommet pour que les hyperboles dont il s'agit soient équilatères ?*

Solution. Soient S (fig. 7) le sommet du cône ; O un quelconque des points de son axe, par lequel soit conduit un plan horizontal ; GH un diamètre de cette section, perpendiculaire au plan coupant, MN la trace du plan coupant sur cette même section circulaire ; P l'intersection de MN et GH ; AB la trace du plan coupant sur le plan du triangle GSH ; A et B les intersections de cette trace avec SG et SH ; C le pied de la perpendiculaire abaissée de S sur AB ; α l'angle générateur du cône ; et enfin $2a$ la longueur AB.

Soit pris le plan coupant pour celui des coordonnées rectangulaires ; AB étant l'axe des x et le point A l'origine ; et les x positives étant comptées de A vers P. Soient, en conséquence $AP=x$ et $PM=y$.

Les triangles rectangles APG, BPH donnent

$$PG=AP\text{Tang}.\alpha=x\text{Tang}.\alpha\ ,$$

$$PH=BP\text{Tang}.\alpha=(2a+x)\text{Tang}.\alpha\ ;$$

mais on a

$$\overline{MP}^2 \quad \text{ou} \quad y^2=PG.PH\ ;$$

donc

$$y^2=(2ax+x^2)\text{Tang}.^2\alpha\ ;$$

telle est donc l'équation de la courbe, que l'on reconnaît être une hyperbole.

Si l'on veut transporter l'origine en C, il faudra changer x en $x-a$, et l'équation deviendra

$$y^2=(x^2-a^2)\text{Tang}.^2\alpha\ ;$$

équation d'une hyperbole rapportée à ses diamètres principaux, et dans laquelle le demi-second axe a pour longueur $a\text{Tang}.\alpha$.

Donc, d'après les théories connues, l'équation commune aux deux asymptotes de la courbe est

$$y=\pm x\text{Tang}.\alpha\ ;$$

ces asymptotes font donc, pour toutes les sections parallèles à celle

celle que nous avons considérées, un angle constant avec l'axe transverse de la courbe; puis donc que cet axe transverse est constamment parallèle à lui-même, et qu'il en est de même du plan qui contient cet axe et l'asymptote, il en résulte que les asymptotes des diverses sections doivent être parallèles chacune à chacune (*).

Pour répondre à la seconde partie du problème, on supposera égaux les deux demi-diamètres principaux; ce qui donnera $a\text{Tang.}\alpha=a$, ou $\text{Tang.}\alpha=1$, ou $\alpha=45°$, comme on pouvait bien s'y attendre. Ainsi, pour construire le cône droit dans lequel les sections parallèles à l'axe sont des hyperboles équilatères, il ne s'agit que de prendre sa hauteur égale au rayon de sa base (**).

(*) Il est connu que toutes les sections parallèles faites, non seulement dans un cône droit, mais même dans un cône oblique ou dans une surface conique quelconque, sont des courbes semblables et semblablement situées tant entre elles que par rapport au sommet de la surface, qui en est un point homologue commun.

On voit par là que, si le plan parallèle à ceux des sections, conduit par le sommet, passe dans l'intérieur de la surface conique, auquel cas il la coupe suivant des droites, les sections seront des courbes à asymptotes rectilignes dont les asymptotes seront respectivement parallèles à ces droites, et par suite parallèles chacune à chacune d'une section à l'autre; ainsi la proposition est vraie pour des sections parallèles faites sous une inclinaison quelconque, dans une surface conique quelconque.

Dans le cas particulier du problème proposé, les asymptotes des diverses sections sont toutes parallèles aux droites déterminées dans le cône par un plan conduit par son axe, parallèlement à ceux des sections, et les projections orthogonales de ces droites sur les plans des diverses sections sont les asymptotes même de ces sections. Ainsi, non seulement ces asymptotes sont parallèles, mais elles sont toutes situées sur les deux faces d'un même angle dièdre circonscrit au cône, et dont l'arête est horizontale.

J. D. G.

(**) Plus généralement, si, sur une base circulaire donnée, on voulait construire un cône oblique tel que les asymptotes des sections hyperboliques faites dans

PROBLÈME II. On donne le centre et le rayon d'une sphère ; et on propose de démontrer qu'un plan quelconque perpendiculaire au rayon coupe, suivant un cercle, tout cône qui a son sommet à l'extrémité de ce rayon et pour base un quelconque des cercles de la sphère ?

Solution. Pour résoudre cette question nous allons d'abord démontrer que *si, ayant coupé un cône oblique à base circulaire par un plan perpendiculaire à celui de sa base, passant par le centre de cette base et par le sommet du cône, on fait dans ce cône une section perpendiculaire à ce plan, de telle sorte que cette section fasse avec les deux arêtes déterminées par le plan passant par l'axe, les mêmes angles que fait le plan de la base avec ces mêmes arêtes, mais en sens inverse; la section sera circulaire.*

Soit S (fig. 8) le sommet d'un cône oblique à base circulaire, et soit A'SB' l'angle résultant de sa section par le plan conduit perpendiculairement à celui de sa base, et passant à la fois par le centre de cette base et par le sommet du cône. Soit faite dans ce cône, perpendiculairement à ce plan, une section AMBN, coupant, suivant AB, le plan de l'angle A'SB', de telle sorte que l'angle SAB soit égal à celui que fait SB avec la base du cône, et que par conséquent l'angle SBA soit égal à l'angle que fait SA avec cette même base. Il s'agit de démontrer que cette section est circulaire.

---

ce cône, par une suite de plans parallèles à un plan fixe donné, fissent entre elles un angle égal à un angle donné ; il ne s'agirait que de mener, dans la base donnée, une corde quelconque, parallèle au plan donné ; de conduire, par cette corde, un plan parallèle à ce même plan ; de construire, dans ce dernier plan, et sur cette même corde un arc capable de l'angle donné et d'établir le sommet du cône en l'un quelconque des points de cet arc. On voit qu'il reste, dans cette construction, beaucoup d'arbitraire qu'on peut mettre à profit pour satisfaire à des conditions données.

J. D. G.

Pour cela, par l'un quelconque M de ses points; concevons une section $A'MB'N$ parallèle à la base du cône, dont les intersections respectives avec le plan de l'angle $A'SB'$ et le plan AMBN soient $A'B'$ et MN, se coupant en P sur AB; cette section sera circulaire et perpendiculaire, comme AMBN au plan $A'SB'$; d'où il résulte que MN sera perpendiculaire à ce plan, et conséquemment à AB et $A'B'$. De plus, les angles PBA' et $PA'B$ seront respectivement égaux aux angles $PB'A$ et PAB'; les triangles $A'PB$ et APB' seront donc semblables et donneront, par conséquent,

$$PA : PB' :: PA' : PB\ ,$$

d'où

$$PA'.PB' = PA.PB\ ;$$

mais, par la propriété du cercle,

$$\overline{PM}^2 = PA'.PB'\ ;$$

donc aussi

$$\overline{PM}^2 = PA.PB\ ;$$

donc enfin la section AMBN est un cercle, dont AB est un diamètre (*).

(*) Cette propriété du cône oblique, à base circulaire, peut encore être démontrée comme il suit. Concevons toujours, par la droite qui joint le sommet au centre de la base, un plan perpendiculaire au plan de cette base, lequel déterminera deux droites sur la surface du cône. Concevons que, par la droite qui divise l'angle de ces deux-là en deux parties égales, on conduise un second plan, perpendiculaire à celui de cet angle; ce dernier plan, comme le premier, divisera la surface conique, considérée comme indéfinie, en deux parties exactement symétriques et même superposables; d'où il suit que si, par une droite menée, dans ce second plan, perpendiculairement au premier, on fait

Cela posé, soient C, le centre d'une sphère (fig. 9) et CS l'un quelconque de ses rayons. Faisons de S le sommet d'un cône ayant pour base l'un quelconque des cercles de la sphère; par CS et par le pôle de ce cercle soit conduit un plan qui déterminera sur la sphère un grand cercle GSH, coupant le cône suivant les droites SA′, SB′. Soit GH le diamètre de ce cercle perpendiculaire à CS, coupant SA′ et SB′ respectivement en B et A. A′B′ sera un diamètre de la base du cône, et le plan de notre grand cercle sera un plan perpendiculaire à celui de cette base passant par son centre et par le sommet du cône.

L'angle SA′B′ ayant pour mesure la moitié de l'arc SGB′, c'est-à-dire, la moitié de SG+GB′, et l'angle SAB ayant pour mesure la moitié de SH+GB′; à cause de SH=SG, ces deux angles seront égaux, d'où il suit qu'il en sera de même de SB′A′ et SBA.

Donc, d'après ce qui a été démontré ci-dessus, si par GH on conduit un plan perpendiculaire à CS, ce plan coupera le cône suivant un cercle dont AB sera un diamètre; toutes les sections du cône par des plans parallèles à celui-là, c'est-à-dire, perpendiculaires à CS seront donc également circulaires.

---

au cône deux sections formant, en sens inverse, des angles égaux avec ce même plan, ces sections seront des courbes égales; mais, si l'une d'elles est parallèle à la base du cône, elle sera circulaire; donc alors l'autre le sera aussi. On voit par là (fig. 8) que la droite qui divise l'angle A′SB′ en deux parties égales doit faire des angles égaux, en sens inverse avec AB et A′B′.

J. D. G.

Solutions analitiques des mêmes problèmes ;

Par M. Gergonne.

Les solutions qu'on vient de lire ne laissent sans doute rien à désirer du côté de la rigueur et de la brièveté ; mais, comme les problèmes auxquels elles se rapportent ont été proposés à des élèves de mathématiques spéciales (*), on peut présumer qu'il était dans

(*) Pendant combien de temps encore conservera-t-on cette dénomination ridicule de *mathématiques spéciales ?* Quand bien même on voudrait entendre par là que le cours ainsi nommé est destiné aux élèves qui se consacrent *spécialement* à l'étude des mathématiques, outre que l'ellipse serait par trop forte, cette ellipse serait un véritable mensonge ; attendu que les élèves qui, dans nos écoles, suivent les cours de mathématiques dites spéciales, suivent en même temps des cours de physique et des cours qu'on appelle, on ne sait trop pourquoi, cours de philosophie.

Ceci nous rappelle d'avoir un jour entendu un jeune homme que l'on interrogeait sur la *division logique*, répondre que, par exemple, les mathématiques se divisent en *mathématiques élémentaires*, *mathématiques spéciales* et *mathématiques transcendantes.*

Que l'on tolère dans le monde des locutions vicieuses, à la bonne heure : mais, puisqu'enfin c'est par le langage que les idées s'introduisent et se classent dans notre esprit, on devrait du moins mettre toutes sortes de soin à rendre correcte la langue qu'on parle dans les écoles.

Cette langue est vicieuse sous un grand nombre d'autres rapports. Par exemple, ces expressions : *faire sa médecine*, *son histoire naturelle*, *ses mathématiques*, etc., nous sembleraient tout-à-fait sauvages, et cependant on dit : *faire son* l'intention de ceux qui en ont fait choix qu'elles fussent résolues analitiquement. Si donc je m'étais trouvé au nombre des concurrens, je me serais cru tenu en conscience de les traiter ainsi ; et voici de quelle manière j'aurais procédé.

Première question. Soit pris pour plan des xy le plan du cercle donné comme base du cône droit dont il s'agit ; et soit pris son centre pour origine ; son axe sera ainsi dans l'axe des z. Supposons en outre que son sommet soit du côté des z positif. Si r est le rayon de sa base, l'équation de cette base sera

$$x^2+y^2=r^2 \ .$$

Si, de plus, on appelle k sa hauteur, les équations d'une droite menée d'une manière quelconque par son sommet seront de la forme

$$x=M(z-k) \ ; \qquad y=N(z-k) \ ;$$

M et N étant deux indéterminées.

Cette droite percera le plan des xy en un point dont les équations seront

$$x=-kM \ , \qquad y=-kN \ ,$$

si donc l'on veut que cette même droite soit menée sur la sur-

---

droit, *sa rhétorique*, *sa philosophie*, etc., à peu près comme on dirait, *faire sa barbe ou ses ongles*. L'expression *faire sa philosophie* ne pourrait signifier quelque chose qu'autant qu'on la considérerait comme l'équivalent de celle-ci : *se faire une philosophie à soi* ; or, rien n'est moins propre à atteindre ce but que les cours de nos écoles, où l'on nous donne une *philophie toute faite* ; et souvent encore quelle philosophie !

face du cône, il faudra que ces valeurs de x et y satisfassent à l'équation de sa base ; c'est-à-dire, qu'on devra avoir

$$k^2(M^2+N^2)=r^2 \ .$$

Telle est donc la relation qui doit exister entre M et N, pour que la droite dont les équations sont

$$x=M(z-k) \ , \qquad y=N(z-k) \ ,$$

soit sur le cône. Eliminant donc M, N entre ces trois dernières équations, l'équation résultante

$$k^2(x^2+y^2)=r^2(z-k)^2$$

sera celle de la surface convexe de ce cône.

Supposons présentement que le plan des yz, qui est seulement assujetti à passer par l'axe du cône, ait été choisi parallèle à celui des sections verticales dont il est question dans l'énoncé du problème ; alors, pour avoir les courbes déterminées par ces sections, il ne s'agira que de considérer x dans l'équation du cône comme une constante arbitraire, exprimant la distance variable du plan coupant à l'axe du cône. Si, en outre, on transporte l'origine au sommet, ce qui se réduit à changer $z-k$ en z, l'équation pourra être mise sous cette forme

$$x^2.z^2-\left(\frac{kx}{r}\right)^2y^2=x^2\left(\frac{kx}{r}\right)^2 \ ;$$

équation que l'on reconnaît pour être celle d'une hyperbole dont le demi-axe transverse est $\frac{kx}{r}$ et dont le demi-second axe est x.

Les projections des asymptotes sur le plan des yz auront donc pour équation commune

$$y=\pm\frac{r}{k}z\ ;$$

c'est-à-dire, que ces projections ne seront autre chose que les intersections du cône avec le même plan ; ces asymptotes seront donc toutes parallèles, et situées sur les deux faces d'un angle dièdre circonscrit au cône.

Si l'on veut que les hyperboles soient équilatères, il faudra qu'on ait $\frac{r}{k}=1$ ou $k=r$, c'est-à-dire, qu'il faudra prendre la hauteur du cône égale au rayon de sa base.

Deuxième question. Soit pris le centre de la sphère pour origine des coordonnées rectangulaires, le rayon donné, que nous représenterons par r, se confondant avec l'axe des z positifs ; l'équation de cette sphère sera

$$x^2+y^2+z^2=r^2\ . \qquad (1)$$

Supposons que la base du cône, considérée comme un plan indéfini, ait pour équation

$$z=px+qy+k\ ; \qquad (2)$$

le concours des équations (1, 2) exprimera le périmètre de cette base.

Les équations d'une droite menée d'une manière quelconque par le sommet du cône seront de la forme

$$x=M(z-r)\ , \qquad y=N(z-r)\ ; \qquad (3)$$

où M et N sont deux indéterminées. Cette droite percera le plan

plan (2) en un point dont on aura les coordonnées en combinant entre elles les équations (2, 3). On trouvera ainsi pour ces coordonnées

$$x=M\,\frac{k-r}{1-pM-qN}\,,\qquad y=N\,\frac{k-r}{1-pM-qN}\,,$$

$$z=\frac{k-(pM+qN)r}{1-pM-qN}\,.$$

Si donc on veut que la droite (3) soit sur le cône, il faudra que ce point soit sur la sphère, c'est-à-dire, qu'on devra avoir

$$\left\{M\cdot\frac{k-r}{1-pM-qN}\right\}^2+\left\{N\cdot\frac{k-r}{1-pM-qN}\right\}^2+\left\{\frac{k-(pM+qN)r}{1-pM-qN}\right\}^2=r^2\,,$$

ou bien, en réduisant,

$$(k-r)(M^2+N^2)-2r(pM+qN)+(k+r)=0\,; \qquad (4)$$

Telle est donc la relation qui doit exister entre M et N pour que la droite (3) soit sur la sphère. Eliminant donc ces deux indéterminées de cette équation (4), au moyen des équations (3), l'équation résultante

$$(k-r)(x^2+y^2)-2r(px+qy)(z-r)+(k+r)(z-r)^2=0\,; \qquad (5)$$

sera celle du cône, considéré comme surface indéfinie.

Si donc on veut savoir suivant quelle courbe ce cône est coupé par le plan des xy, il suffira de supposer $z=0$ dans l'équation précédente qui deviendra ainsi

$$(k-r)(x^2+y^2)+2r^2(px+qy)+r^2(k+r)=0\ , \qquad (6)$$

équation que l'on reconnaît appartenir à un cercle. Et comme toutes les sections faites à un même cône par des plans parallèles sont des courbes semblables, il en résulte plus généralement que, *si un cône a son sommet au centre d'une sphère et pour base un quelconque des cercles de cette sphère, toute section du cône par un plan perpendiculaire au rayon qui va à son sommet sera une section circulaire*; c'est le théorème qu'il s'agissait de démontrer; il revient à dire que, *pour un spectateur qui a l'œil en un point de la surface d'une sphère, et pour un tableau perpendiculaire au rayon mené à ce point, la perspective de tout cercle de la sphère est elle-même un cercle*; c'est le principe de la projection de Ptolemée.

L'équation (4) peut être mise sous cette forme

$$\left(x+\frac{pr^2}{k-r}\right)^2+\left(y+\frac{qr^2}{k-r}\right)^2=r^2\cdot\frac{(1+p^2+q^2)r^2-k^2}{(k-r)^2}\ ; \qquad (7)$$

d'où l'on voit que les équations du centre du cercle sont

$$x=-\frac{pr^2}{k-r}\ , \qquad y=-\frac{qr^2}{k-r}\ ; \qquad (8)$$

et qu'en désignant par R son rayon, on a

$$R=\frac{r\sqrt{(1+p^2+q^2)r^2-k^2}}{k-r}\ . \qquad (9)$$

Il est aisé de voir que les équations du rayon perpendiculaire à la base du cône sont

$$x=-pz\ ,\ y=-qz\ ; \qquad (10)$$

et que la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan de cette base est

$$\frac{k}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

d'où il suit que le rayon de la base du cône sera

$$\frac{\sqrt{(1+p^2+q^2)r^2-k^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\ ;$$

En conséquence, si l'on représente par ρ l'arc de grand cercle qui joint le pôle de cette base à sa circonférence, on aura

$$\mathrm{Sin}.\rho=\frac{\sqrt{(1+p^2+q^2)r^2-k^2}}{r\sqrt{1+p^2+q^2}}\ , \qquad \mathrm{Cos}.\rho=\frac{k}{r\sqrt{1+p^2+q^2}}\ . \qquad (11)$$

Cela posé, considérons, sur la sphère, un autre cercle servant de base à un cône de même sommet que le premier ; et supposons que l'équation du plan de ce cercle soit

$$z=p'x+q'y+k'\ . \qquad (12)$$

La section de ce nouveau cône par le plan des xy sera encore un cercle ; les équations de son centre seront

$$x=-\frac{p'r^2}{k'-r}\ ;\qquad y=-\frac{q'r^2}{k'-r}\ ;\qquad (13)$$

en désignant par R' son rayon, on aura

$$R'=\frac{r\sqrt{(1+p'^2+q'^2)r^2-k'^2}}{k'-r}\ .\qquad (14)$$

Les équations du rayon mené au pôle du cercle-base seront

$$x=-p'z\ ;\qquad y=-q'z\ ;\qquad (15)$$

et en appelant ρ' l'arc de grand cercle qui joint son pôle à sa circonférence, on aura

$$\text{Sin.}\rho'=\frac{\sqrt{(1+p'^2+q'^2)r^2-k'^2}}{r\sqrt{1+p'^2+q'^2}}\ ;\quad \text{Cos.}\rho'=\frac{k'}{r\sqrt{1+p'^2+q'^2}}\qquad (16)$$

En conséquence, si l'on représente par D la distance des centres des sections des deux cônes par le plan des xy et par δ l'arc de grand cercle qui joint les pôles de leurs bases, on trouvera

$$D^2=r^4\left\{\left(\frac{p}{k-r}-\frac{p'}{k'-r}\right)^2+\left(\frac{q}{k-r}-\frac{q'}{k'-r}\right)^2\right\}\ ,$$

$$\text{Cos}\,\delta=\frac{1+pp'+qq'}{\sqrt{(1+p^2+q^2)(1+p'^2+q'^2)}}\ .$$

On aura d'après cela

$$R^2+R'^2-D^2=2r^2.\frac{(1+pp'+qq')r^2-kk'}{(k-r)(k'-r)},$$

$$\text{Cos.}\delta-\text{Cos.}\rho\text{Cos.}\rho'=\frac{(1+pp'+qq')r^2-k^2}{r^2\sqrt{(1+p^2+q^2)(1+p'^2+q'^2)}},$$

$$2RR'=\frac{2r^2\sqrt{\{(1+p^2+q^2)r^2-k^2\}\{(1+p'^2+q'^2)r^2-k'^2\}}}{(k-r)(k'-r)},$$

$$\text{Sin.}\rho\text{Sin.}\rho'=\frac{\sqrt{\{(1+p^2+q^2)r^2-k^2\}\{(1+p'^2+q'^2)r^2-k'^2\}}}{r^2\sqrt{(1+p^2+q^2)(1+p'^2+q'^2)}};$$

donc enfin

$$\frac{R^2+R'^2-D^2}{2RR'}=\frac{\text{Cos.}\delta-\text{Cos.}\rho\text{Cos.}\rho'}{\text{Sin.}\rho\text{Sin.}\rho'}$$

$$=\frac{(1+pp'+qq')r^2-kk'}{\sqrt{\{(1+p^2+q^2)r^2-k^2\}\{(1+p'^2+q'^2)r^2-k'^2\}}};$$

or, la première de ces deux expressions est celle du cosinus de l'angle sous lequel se coupent les perspectives des deux cercles de la sphère, et la seconde est celle du cosinus de l'angle sous lequel ces deux cercles se coupent eux-mêmes; donc, *dans la projection de Ptolémée, les perspectives de deux cercles quelconques de la sphère sont deux cercles qui se coupent eux-mêmes sous le même angle que ces deux-là.* Cette intéressante remarque, qui ajoute un si grand prix au système de projection de Ptolémée, est due, je crois, à M. Puissant.

Si donc les deux cercles de la sphère sont tangens l'un à l'autre, leurs perspectives le seront également; ce qui est d'ailleurs évident.

Si donc on proposait de décrire un cercle qui en touchât trois autres donnés sur une sphère, il suffirait pour résoudre le problème de construire, pour un même plan, les projections circulaires de ces trois cercles, suivant la méthode de Ptolémée ; de décrire, dans ce plan, un cercle tangent à ces trois-là, et de chercher ensuite quel est le cercle de la sphère dont ce dernier est la projection. Ce cercle de la sphère toucherait les trois autres, et serait conséquemment le cercle cherché. Il serait curieux de voir à quoi reviendrait finalement cette solution ; mais c'est un soin qu'il convient de laisser à M. Durrande, qui s'est déjà occupé avec tant de succès de ces sortes de problèmes (*).

(*) Nous saisirons, avec empressement, cette occasion de réparer une omission qui nous est échappée, en préparant le mémoire de M. Durrande qui se trouve au commencement de ce volume ; omission qui rend incomplète la démonstration du théorème du n.° 21 (pag. 13). La démonstration que l'on donne en cet endroit ne convient en effet qu'au cas où, comme dans la figure 10, le point de concours des axes radicaux n'est intérieur à aucun des trois cercles ; mais elle ne saurait s'appliquer au cas où, comme dans la figure 11, ces trois cercles ont une partie commune. Voici comment on peut raisonner dans ce cas.

Soient C, C', C'' les trois cercles, AB la corde commune de C' et C'', $A'B'$ celle de C et C'', coupant la première en O, et enfin A'' et B'' les intersections des deux cercles C et C'. Si la droite menée par B'' et O ne passe pas par le point A'', elle coupera le cercle C en quelque point X et le cercle C' en quelque autre point X', et l'on devra avoir, par les propriétés des cordes qui se coupent dans un même cercle

$$OA.OB=OA'.OB',$$

$$OA'.OB'=OX.OB'',$$

$$OX'.OB''=OA.OB;$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de Géométrie.

De même qu'un cercle etant donné sur un plan, on sait trouver son centre et son rayon; on sait aussi, lorsqu'une section conique est donnée, trouver son centre, si elle en a un, ses sommets,

---

d'où on conclura, en multipliant et réduisant,

$$OX'=OX\,;$$

les deux points X, X′ doivent donc se confondre entre eux, et conséquemment avec le point A″; la droite menée par B″ et A″ doit donc passer par le point O; les trois axes radicaux se coupent donc au même point.

Cette démonstration s'appliquerait également au cas de la figure 10; mais elle ne saurait convenir à ceux où tout ou partie des cercles seraient extérieurs les uns aux autres, et il faut alors recourir à celle de la page 13.

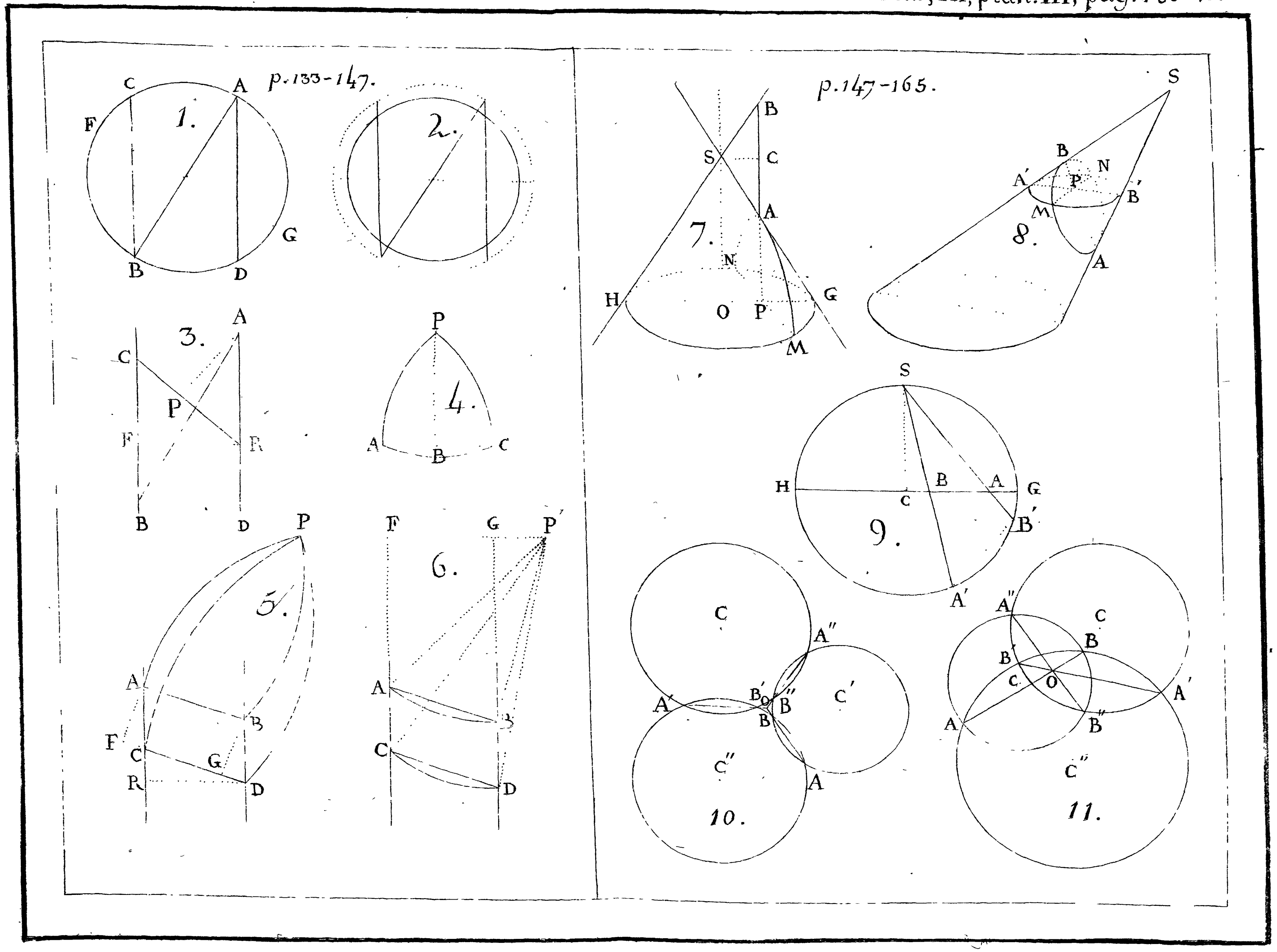
Toutes ces remarques avaient été faites par M. Durrande; mais la précipitation avec laquelle nous avons arrangé son mémoire nous les a faites à regret négliger.

Il y a exactement les mêmes observations à faire sur la démonstration du théorème du n.° 47 (pag. 22), que l'on complètera d'une manière tout-à-fait analogue.

ses foyers, son paramètre et les autres élémens qui la déterminent.

Mais, tandis qu'on sait aussi trouver le centre et le rayon d'un cercle dont un arc seulement est donné, personne encore n'a enseigné à trouver les divers élémens d'une section conique dont on connaît seulement un arc qui ne contient aucun de ses sommets.

C'est ce problème que l'on recommande ici à l'attention des géomètres.



J. D. G. fecit

COMBINAISONS.

Solution de quelques problèmes dépendant de la théorie des combinaisons ;

Par M. ***.
GERGONNE.

Je me propose de traiter ici quelques problèmes de combinaison dont je n'ai encore rencontré la solution nulle part. Indépendamment de l'attrait que présentent toujours ces sortes de problèmes et de l'utile exercice qu'ils donnent à l'esprit ; on sait qu'ils se rattachent à diverses théories intéressantes, et notamment à celle des probabilités.

PROBLÈME I. De combien de manières peut-on faire n *parts, avec* m *choses toutes différentes les unes des autres, avec la faculté de faire les parts si inégales qu'on voudra ; mais sous la condition d'admettre au moins une chose dans chaque part ; c'est-à-dire, de ne point faire de parts nulles, et d'employer la totalité des choses, dans chaque système de répartition ?*

Solution. Ayons d'abord égard au rang qu'occupent les parts, dans chaque système de répartition ; c'est-à-dire, considérons d'abord comme systèmes de répartitions différens ceux-là mêmes où les mêmes parts sont disposées dans un autre ordre ; il nous sera facile ensuite de voir ce que doivent devenir nos formules, lorsqu'on ne veut plus tenir compte de cette différence.

Si d'abord on ne veut faire qu'*une* part unique, on sera contraint de la composer des m choses, ce qui ne se pourra que d'une manière; de sorte que le nombre des manières de faire une part sera donc simplement 1.

S'agit-il de faire *deux* parts? on pourra prendre successivement, pour la première 1, 2, 3, ... $m-1$, choses, et tout le reste pour la seconde; mais, en général, on pourra composer la première part de k choses d'un nombre de manières exprimé par

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\ldots\ldots\frac{m-k+1}{k},$$

et puisqu'alors la seconde part se trouve tout-à-fait déterminée, il s'ensuit que, suivant qu'on voudra faire la premiere part de 1, 2, 3, ... $m-2$, $m-1$ choses, le nombre des systêmes de répartition possibles sera

$$\begin{array}{ll}
\text{Pour 1 chose} \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{m}{1}, \\
2 \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}, \\
3 \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
m-2 \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}, \\
m-1 \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{m}{1};
\end{array}$$

Le nombre total des modes de répartition en deux parts sera donc la somme des ces termes, que l'on reconnaît de suite être

$$(1+1)^m-2=2^m-2 .$$

Il est clair d'ailleurs que ces divers systèmes de répartition ne différeront deux à deux que par le rang des deux mêmes parts, dont la première dans l'un sera la seconde dans l'autre.

S'agit-il de faire *trois* parts? si l'on veut composer la première de k choses, cela se pourra d'un nombre de manières exprimé par

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\frac{m-k+1}{k} ;$$

il restera ensuite à répartir en deux parts les $m-k$ choses restantes; ce qui, d'après ce qui précède, pourra se faire d'un nombre de manières exprimé par

$$2^{m-k}-2 ;$$

ainsi le nombre total des systèmes de répartition où la première part sera composée de k choses sera donc

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-k+1}{k}(2^{m-k}-2) ;$$

faisant donc successivement, dans cette formule, $k=1, 2, 3, \ldots, m-2, m-1$, on aura, pour le nombre des systèmes de répartition relatif à chaque nombre de choses adopté à la première part, savoir :

Pour 1 chose . . . . $\frac{m}{1}(2^{m-1}-2)$,

2 . . . . $\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}(2^{m-2}-2)$,

$$3 \ldots\ldots\ldots \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}(2^{m-3}-2)\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$m-2 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}(2^2-2)\ ,$$

$$m-1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{m}{1}(2-2)\ ,$$

à la vérité, il est impossible d'admettre $m-1$ choses à la première part, lorsqu'il en faut faire trois ; mais aussi le facteur $2-2$ réduit à zéro le nombre des systèmes de répartition qui convient à ce cas.

Le nombre total des modes de répartition possibles en trois parts sera donc la somme de tous ces nombres ; mais cette somme se décompose dans les deux séries que voici

$$\frac{m}{1}2^{m-1}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}2^{m-2}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}2^{m-3}+\ldots\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}2^2+\frac{m}{1}2,$$

$$-2\left(\frac{m}{1}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-2}{3}+\ldots\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}+\frac{m}{1}\right);$$

la somme de la première est évidemment

$$(2+1)^m-2^m-1=3^m-2^m-1\ ,$$

et celle de la seconde

$$-2[(1+1)^m-2]=-2.2^m+4\ ;$$

réunissant donc ces deux sommes, nous aurons pour le nombre total des systèmes de répartition de nos m choses en trois parts

$$3^m-3.2^m+3\ .$$

On conçoit d'ailleurs que ces systèmes ne différeront six à six que par les rangs que les trois mêmes parts y occuperont.

S'agit-il de former *quatre* parts ? en se déterminant à former la première de k choses, on pourra choisir cette part d'un nombre de manières exprimé par

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdots\frac{m-k+1}{k}\ ;$$

il restera ensuite à faire trois parts des $m-k$ choses restantes, ce qui, d'après ce qui précède, pourra se faire d'un nombre de manières exprimé par

$$3^{m-k}-3.2^{m-k}+3\ ;$$

d'où il suit que le nombre total des modes de répartition où la première part comprend k choses, est

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdots\frac{m-k+1}{k}(3^{m-k}-3.2^{m-k}+3)\ ;$$

faisant donc successivement, dans cette formule, $k=1$, 2, 3, ..., $m-2$, $m-1$, on trouvera, pour le nombre des systèmes de répartition relatif à chaque nombre de choses adopté à la première part, savoir:

Pour 1 chose. . . . . . $\frac{m}{1}(3^{m-1}-3.2^{m-1}+3)$;

2 . . . . $\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}(3^{m-2}-3.2^{m-2}+3)$,

$$3\ \ldots\ldots\ \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}(3^{m-3}-3.2^{m-3}+3)\ ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ;$$

$$m-2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}(3^2-3.2^2+3)\ ,$$

$$m-1\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{m}{1}(3-3.2+3)\ .$$

A la vérité, lorsqu'on doit répartir m choses en quatre parts, la première part n'en saurait admettre $m-1$, ni même $m-2$; mais aussi arrive-t-il que les facteurs $3^2-3.2^2+3$ et $3-3.2+3$, qui répondent aux deux derniers cas, sont nuls d'eux-mêmes.

Le nombre total des systèmes possibles de répartition de nos m choses en quatre parts sera donc la somme de toutes ces formules, laquelle se résout évidemment en ces trois suites

$$\frac{m}{1}.3^{m-1}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}.3^{m-2}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}.3^{m-3}+\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}.3^2+\frac{m}{1}\ 3,$$

$$-3\left(\frac{m}{1}.2^{m-1}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}.2^{m-2}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}.2^{m-3}+\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}.2^2+\frac{m}{1}.2\right),$$

$$+3\left(\frac{m}{1}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}+\ldots\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}+\frac{m}{1}\right),$$

lesquelles peuvent ensuite être respectivement remplacées par les expressions suivantes

$$+(3+1)^m-3^m-1=4^m-3^m-1\ ,$$

$$-3[(2+1)^m-2^m-1]=-3.3^m+3.2^m+3\ ,$$

$$+3[(1+1)^m-1-1]=\quad +3.2^m-6\ .$$

En conséquence, le nombre total des systèmes de décompositions en quatre parts sera

$$4^m-4.3^m+6.2^m-4;$$

bien entendu que ces systèmes ne différeront, 24 à 24, que par les rangs respectifs des quatre mêmes parts.

Un raisonnement tout-à-fait semblable prouvera que le nombre total des systèmes de décomposition en cinq parts est la somme des nombres

$$\begin{array}{lrl}
+\ (4+1)^m-4^m-1 & =5^m-\ 4^m & -1\ , \\
-4[(3+1)^m-3^m-1]= & -4.4^m+4.3^m & +4\ , \\
+6[(2+1)^m-2^m-1]= & +6.3^m-6.2^m & -6\ , \\
-4[(1+1)^m-1\ -1]= & -4.2^m & +8\ ;
\end{array}$$

c'est-à-dire, que le nombre de ces systèmes est

$$5^m-5.4^m+10.3^m-10.2^m+5\ .$$

On trouvera pareillement que, pour le cas de la répartition en six parts, le nombre des systèmes est

$$6^m-6.5^m+15.4^m-20.3^m+15.2^m-6\ ;$$

et ainsi de suite.

Rapprochons présentement les uns des autres ces divers résultats. Nous voyons que, suivant le nombre des parts que l'on veut faire, le nombre des systèmes de répartition possibles est, savoir;

Pour le cas d'une part unique . . . . $+1$;

de 2 . . . . 2^m-2 ,

de 3 . . . . $3^m-3.2^m+3$,

de 4 . . . . $4^m-4.3^m+6.2^m-4$,

de 5 . . . . $5^m-5.4^m+10.3^m-10.2^m+5$,

de 6 . . . $6^m-6.5^m+15.4^m-20.3^m+15.2^m-6$,

or, la loi de ces résultats est manifeste, et l'on ne peut conclure de suite, comme il serait d'ailleurs facile de s'en assurer par une induction rigoureuse, que l'on peut distribuer en n parts m choses toutes différentes les unes des autres, de manière à ce qu'aucune part ne soit nulle, d'un nombre de manières exprimé par

$$n^m-\frac{n}{1}(n-1)^m+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-2)^m-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}(n-3)^m+\ldots\ldots$$

$$\pm\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}2^m\mp\frac{n}{1} ;$$

pourvu toutefois que l'on admette comme systèmes différens ceux-là même où les mêmes parts ne sont simplement que transposées.

Avant d'aller plus loin, observons que, comme il est impossible de faire n parts effectives avec un nombre de choses inferieur à n ; et que comme, d'un autre côté, les diverses manières de faire n parts avec n choses ne sont que les diverses manières de permuter ces choses entre elles ; il s'ensuit qu'on doit avoir

$$n-\frac{n}{1}(n-1)+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-2)-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}(n-3)+\ldots\pm n=0 ,$$

n^2-

$$n^2-\frac{n}{1}(n-1)^2+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-2)^2-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}(n-3)^2+\ldots\pm n=0,$$

. . . . ;

$$n^{n-1}-\frac{n}{1}(n-1)^{n-1}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-2)^{n-1}-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}(n-3)^{n-1}+\ldots\pm n=0,$$

$$n^n-\frac{n}{1}(n-1)^n+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-2)^n-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}(n-3)^n+\ldots\pm n=1.2.3\ldots n.$$

Nous croyons devoir consigner ici ces diverses relations, qui d'ailleurs se vérifient parfaitement, dans les cas particuliers, parce que souvent elles peuvent être utilement employées, comme moyens de réduction (*). Elles peuvent aussi, dans certains cas, faciliter des éliminations.

Que, par exemple, il faille tirer la valeur de x des quatre équations

$$4t+4^2u+4^3v+4^4x=A\ ,$$

$$3t+3^2u+3^3v+3^4x=B\ ,$$

(*) Elles sont du genre de celle donnée par M. Sarrus, à la page 222 du précédent volume, et on peut, comme par rapport à celle-là, se demander si elles auraient lieu encore dans le cas où n serait fractionnaire ou négatif. On peut, au surplus, de leur combinaison, en déduire une infinité d'autres. Si, par exemple, on en prend la somme, on aura

$$\frac{1}{n-1}[n^n-1]-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{n-2}[(n-1)^n-1]+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{n-3}$$

$$[(n-2)^n-1]-\ldots\ldots\pm n^2=1.2.3\ldots\ldots n\ .$$

J. D. G.

$$2t+2^2u+2^3v+2^4x=C ;$$

$$t+u+v+x=D ;$$

en remarquant que, d'après ce qui précède,

$$4-4.3+6.2-4=0 ;$$

$$4^2-4.3^2+6.2^2-4=0 ,$$

$$4^3-4.3^3+6.2^3-4=0 ;$$

$$4^4-4.3^4+6.2^4-4=1.2.3.4 ,$$

on voit que, pour parvenir au but, il ne s'agit que de prendre la somme des produits respectifs de ces quatre équations par $+1$, -4, $+6$, -4; ce qui donne sur-le-champ,

$$1.2.3.4x=A-4B+6C-4D .$$

Tout ce que nous venons de dire est, comme nous l'avons observé, relatif au cas où l'on admet, comme autant de différens systèmes de répartition, ceux-là même qui peuvent ne différer les uns des autres que par les rangs que les mêmes parts y occupent; mais si, au contraire, on ne veut admettre, comme systèmes différens, que ceux-là seulement qui ne sont pas, en totalité, composés des mêmes parts, on considérera que, dans le cas de n parts, par exemple, un seul système, pris au hasard, peut, par la simple permutation des parts dont il est formé, en fournir un nombre $1.2.3.4.....n$, lesquels ne doivent plus compter ici que pour une part unique; d'où il suit que, dans le cas de n parts, le nombre des systèmes de répartition réellement différens ne doit plus être simplement que

$$\frac{n^m - \frac{n}{1}(n-1)^m + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-2)^m - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}(n-3)^m + \ldots \pm \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}2^m \pm n}{1.2.3\ldots\ldots n}$$

ainsi, ce sera dans le cas de *une* part. . . . . $\frac{1}{1}$;

de 2. . . . . $\frac{2^m-2}{1.3}$;

de 3. . . . . $\frac{3^m-3.2^m+3}{1.2.3}$,

de 4. . . . . $\frac{4^m-4\,3^m+6.2^m-4}{1.2.3.4}$,

de 5. . . . . $\frac{5^m-5.4^m+10.3^m-10.2^m+5}{1.2.3.4.5}$,

de 6. . . . . $\frac{6^m-6.5^m+15.4^m-20.3^m+15.2^m-6}{1.2.3.4.5.6}$;

et ainsi des autres; d'où l'on voit que ces sortes de fonctions n'ont que l'apparence fractionnaire.

Si l'on demande, par exemple, de combien de manières dix fruits, tous d'espèces différentes, peuvent être répartis entre quatre personnes, on trouvera, pour le nombre cherché,

$$4^{10}-4.3^{10}+6.2^{10}-4=818520 ;$$

mais, si l'on demandait simplement de combien de manières on peut faire quatre parts avec ces dix fruits, sans aucun égard aux personnes à qui ces parts devraient être destinées, la réponse serait

$$\frac{818520}{1.2.3.4}=34105 .$$

PROBLÈME II. De combien de manières peut-on faire n *parts, avec* m *choses toutes différentes les unes des autres, lorsqu'on a la faculté de faire tant de parts nulles qu'on veut, sous la condition cependant d'employer toutes les* m *choses dans chaque mode de répartition?*

Solution. La solution de ce problème est très-facile à déduire de celle du problème qui vient d'être résolu, ainsi qu'on va le voir; mais il s'en faut que les résultats qu'on en obtient soient aussi simples que ceux que nous avons obtenus du premier.

D'abord, si l'on ne veut faire qu'*une* seule part, on ne pourra faire de parts nulles; tout se passera donc comme dans le premier problème, et l'on aura, pour le nombre des modes de répartition, $\frac{1}{1}$.

Si l'on veut faire *deux* parts, on ne pourra faire qu'une seule part nulle, et d'une seule manière seulement, et conséquemment le nombre des systèmes qu'avait donné le précédent problème pour ce cas devra simplement être augmenté d'une unité; il sera donc, dans le cas actuel,

$$\frac{2^m-2}{2}+1=\frac{2^m}{2}.$$

Si l'on veut faire *trois* parts, on pourra faire une ou deux parts nulles. On pourra faire une part nulle d'autant de manières qu'il y en a de faire, avec m choses, deux parts dont aucune ne soit nulle; et, quant à deux parts nulles, on ne pourra les faire que d'une manière unique, puisqu'on sera contraint de tout mettre dans la troisième. Le nombre total des systèmes de répartition en trois parts sera donc

$$\frac{3^m-3.2^m+3}{1.2.3}+\frac{2^m-2}{2}+1,$$

ou bien, par ce qui précède,

$$\frac{3^m-3.2^m+3}{1.2.3}+\frac{2^m}{2}=\frac{3^m+3}{1.2.3}.$$

Si l'on veut faire *quatre* parts, on en pourra faire une, deux ou trois nulles. On en pourra faire une nulle d'autant de manières qu'il y en a de faire, avec m choses, trois parts dont aucune ne soit nulle. On en pourra faire deux nulles d'autant de manières qu'il y en a de faire, avec m choses, deux parts dont aucune ne soit nulle. Enfin, on n'en pourra faire trois nulles que d'une manière unique. En conséquence, le nombre des systèmes de quatre parts sera ici

$$\frac{4^m-4.3^m+6.2^m-4}{1.2.3.4}+\frac{3^m-3.2^m+3}{1.2.3}+\frac{2^m}{2},$$

ou, d'après ce qui précède,

$$\frac{4^m-4.3^m+6.2^m-4}{1.2.3.4}+\frac{3^m+3}{1.2.3}=\frac{4^m+6.2^m+8}{1.2.3.4}.$$

En poursuivant le même raisonnement, on trouvera qu'ici le nombre des systèmes de cinq parts est

$$\frac{5^m-5.4^m+10.3^m-10.2^m+5}{1.2.3.4.5}+\frac{4^m+6.2^m+8}{1.2.3.4}=\frac{5^m+10.3^m+20.2^m+45}{1.2.3.4.5};$$

que le nombre des systèmes de six parts est

$$\frac{6^m+15.4^m+40.3^m+135.2^m+264}{1.2.3.4.5.6};$$

et ainsi de suite.

Comme ces résultats se présentent sous une forme peu symétriques, il vaudra peut-être mieux se rappeler simplement, dans la pratique, que, pour obtenir la solution du problème proposé, il faut prendre la somme d'autant de termes de la suite, très-régulière;

$$\frac{1}{1},$$

$$\frac{2^m-2}{1.2},$$

$$\frac{3^m-3.2^m+3}{1.2.3},$$

$$\frac{4^m-4.3^m+6.2^m-4}{1.2.3.4},$$

$$\frac{5^m-5.4^m+10.3^m-10.2^m+5}{1.2.3.4.5},$$

$$\frac{6^m-6.5^m+15.4^m-20.3^m+15.2^m-6}{1.2.3.4.5.6},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qu'il y a de parts à faire.

Si, par exemple, il s'agit, comme ci-dessus, de répartir dix fruits de nature différentes en quatre parts, on aura

$$\left.\begin{array}{r}
\dfrac{4^{10}-4.3^{10}+6.2^{10}-4}{1.2.3.4}=34105\\[2ex]
\dfrac{3^{10}-3.2^{10}+3}{1.2.3}=9330\\[2ex]
\dfrac{2^{10}-2}{1.2}=511\\[2ex]
\dfrac{1}{1}=1
\end{array}\right\}\ 53947\,;$$

de sorte que le nombre des systèmes de répartition sera 53947.

Mais ceci suppose qu'on ne tient aucun compte de la manière dont les parts sont disposées ; or, il y a des cas où il est nécessaire d'avoir égard à leur disposition ; et tel est, en particulier, celui où il s'agirait de répartir les dix fruits entre quatre personnes ; car le système de répartition où, par exemple, telle personne aurait tout, ne pourrait être assimilé à celui où cette même personne n'aurait rien. Voyons donc comment on pourra avoir égard à cette circonstance.

S'il n'est question que d'*une* part unique, on ne pourra, dans ce cas, comme dans le précédent, la faire que d'*une* manière.

S'il s'agit de *deux* parts, en les faisant d'abord toutes deux effectives, comme dans le Problème I, le nombre des systèmes de répartition sera 2^m-2. En faisant ensuite une part nulle, elle pourra être indifféremment la première ou la seconde, ce qui fournira encore deux systèmes ; de sorte que leur nombre total sera simplement 2^m.

S'agit-il de faire *trois* parts, on pourra d'abord les rendre toutes effectives d'un nombre de manières exprimé par

$$3^m-3.2^m+3 .$$

En choisissant ensuite une part déterminée pour être nulle, on pourra former les deux autres d'un nombre de manières exprimé par 2^m-2 ; mais, comme la part nulle pourra occuper trois places différentes ; il en résultera encore un nombre de système de répartitions exprimé par

$$3.2^m-6 .$$

Enfin, il y aura encore trois systèmes possibles où deux parts seront nulles. Réunissant donc tous ces résultats, on trouvera que le nombre total des systèmes de répartition en trois parts est simplement 3^m.

En poursuivant le même raisonnement, on trouvera 4^m pour le nombre des systèmes de répartition en quatre parts, 5^m pour le nombre des systèmes de répartition en cinq parts, et ainsi de suite; d'où on sera conduit à conclure qu'en général, le nombre des systèmes possibles de répartitions de m choses en n parts est n^m; c'est, au surplus, une conclusion qu'il serait facile d'établir sur un raisonnement rigoureux.

Ainsi par exemple, s'il est question de la répartition des dix fruits d'espèces diverses entre quatre personnes différentes; elle pourra avoir lieu d'un nombre de manières exprimées par $4^{10}=1048576$.

PROBLÈME III. De combien de manières différentes peut-on faire n *parts, avec* m *choses toutes égales entre elles avec la faculté de faire les parts aussi inégales qu'on voudra; mais, sous la condition de ne point faire de parts nulles, et d'employer la totalité des choses, dans chaque système de répartition?*

Solution. Ce problème semblerait, au premier abord, devoir être incomparablement plus simple que le premier. Nous l'avons cependant trouvé beaucoup plus compliqué, peut-être par suite de la manière dont nous l'avons attaqué. En conséquence nous nous bornerons à en traiter les cas les plus simples.

Si d'abord on ne doit faire qu'*une* part, il est clair qu'il faudra tout employer; et qu'ainsi cela ne pourra s'exécuter que d'*une* manière unique.

Veut-on faire deux parts? en s'imposant la condition de placer constamment la plus petite des deux parts à la gauche de la plus grande, lorsqu'elles seront inégales, tous les systèmes possibles de répartition pourront être compris dans le tableau suivant:

$$1 \ldots\ldots\ldots (m-1)\,,$$

$$2 \ldots\ldots\ldots (m-2)\,,$$

$$3 \ldots\ldots\ldots (m-3)\,;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

et

et ce tableau devra être prolongé jusqu'à ce que, dans la première colonne, on soit parvenu à la moitié de m, si m est pair, ou au nombre immédiatement inférieur à cette moitié, c'est-à-dire, à $\frac{1}{2}(m-1)$, si m est impair.

Il en résulte immédiatement que le nombre des systèmes de répartition sera,

Si m est de la forme $2k$ . . . . $\dfrac{m}{2}$;

Si m est de la forme $2k+1$, ... $\dfrac{m-1}{2}$;

du moins si l'on n'a aucun égard à l'ordre des parts dans chaque système de répartition. Dans le premier cas, il y aura un seul système ou les deux parts seront égales; dans le second, les deux parts seront constamment inégales.

Si donc on voulait avoir égard à la disposition des parts dans chaque système, il faudrait doubler chacun des deux nombres que nous venons d'obtenir, en retranchant une unité au double du premier, à raison des deux parts égales; ce qui donnerait également $m-1$ pour le nombre des systèmes quel que fût m; comme il est d'ailleurs évident.

Supposons présentement qu'il soit question de faire *trois* parts? en s'imposant la condition de disposer constamment les parts, dans chaque système, par ordre de grandeur, de gauche à droite, de la plus petite à la plus grande, et de ranger dans une même colonne tous les systèmes dans lesquels la première part est la même; on obtiendra le tableau de répartition que voici:

$1, 1, m-2$	$2, 2, m-4$	$3, 3, m-6$	$4, 4, m-8$	....
$1, 2, m-3$	$2, 3, m-5$	$3, 4, m-7$	$4, 5, m-9$	....
$1, 3, m-4$	$2, 4, m-6$	$3, 5, m-8$	$4, 6, m-10$	....
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	....

et il ne s'agira, pour parvenir au but, que de compter le nombre des systèmes de répartition enregistrés dans ce tableau; ce à quoi on parviendra à l'aide des observations suivantes.

La première colonne, en y supprimant le 1 initial, indique toutes les manières de faire deux parts avec $m-1$ choses égales; et comme suivant que m est pair ou impair, $m-1$ est au contraire impair ou pair, il s'ensuit, d'après ce qui a été dit plus haut, que le nombre des lignes de cette première colonne est

$$\text{Si } m \text{ est pair} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{m-2}{2},$$

$$\text{Si } m \text{ est impair} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{m-1}{2}.$$

La seconde colonne, en y supprimant le 2 initial, est le tableau de toutes les manières de faire deux parts avec $m-2$ choses, dans lequel on aurait supprimé la première ligne; et, comme $m-2$ est pair ou impair, dans les mêmes circonstances que m, il s'ensuit que le nombre des lignes de cette seconde colonne est

$$\text{Si } m \text{ est pair } \frac{m-2}{2}-1 \quad \text{ou} \quad \ldots\ldots\ldots \frac{m-4}{2},$$

$$\text{Si } m \text{ est impair } \frac{m-3}{2}-1 \quad \text{ou} \quad \ldots\ldots\ldots \frac{m-5}{2}.$$

La troisième colonne, en y supprimant le 3 initial, offre le tableau de toutes les manières de faire deux parts avec $m-3$ choses, dans lequel on aurait supprimé les deux premières lignes; en observant donc que, suivant que m est pair ou impair, $m-3$ est au contraire impair ou pair, on trouvera que le nombre des lignes de cette troisième colonne est

$$\text{Si } m \text{ est pair } \frac{m-4}{2}- \quad \text{ou} \quad \ldots\ldots\ldots \frac{m-8}{2},$$

$$\text{Si } m \text{ est impair } \frac{m-3}{2}-2 \quad \text{ou} \quad \ldots\ldots\ldots \frac{m-7}{2}.$$

Par un raisonnement tout-à-fait semblable, on prouvera que le nombre des lignes de la quatrième colonne est

$$\text{Si } m \text{ est pair } \frac{m-4}{2}-3 \text{ ou } \ldots\ldots\ldots \frac{m-10}{2},$$

$$\text{Si } m \text{ est impair } \frac{m-5}{2}-3 \text{ ou } \ldots\ldots\ldots \frac{m-11}{2};$$

que le nombre des lignes de la cinquième est

$$\text{Si } m \text{ est pair } \frac{m-6}{2}-4 \text{ ou } \ldots\ldots\ldots \frac{m-14}{2},$$

$$\text{Si } m \text{ est impair } \frac{m-5}{2}-4 \text{ ou } \ldots\ldots\ldots \frac{m-13}{2};$$

et ainsi de suite.

Il résulte de là que le nombre total des lignes de tout le tableau, c'est-à-dire, le nombre cherché, est

$$\text{Si } m \text{ est pair } =\tfrac{1}{2}\{(m-2)+(m-4)+(m-8)+(m-10)+(m-14)+\ldots\},$$

$$\text{Si } m \text{ est impair } =\tfrac{1}{2}\{(m-1)+(m-5)+(m-7)+(m-11)+(m-13)+\ldots\}.$$

Pour être en état de sommer ces suites, il faut au moins pouvoir assigner le dernier terme de chacune d'elles. Occupons-nous d'abord de la première ; m y étant pair ne peut être que de l'une de ces trois formes $6k$, $6k+2$, $6k+4$.

Dans le premier cas, il est évident que la dernière colonne n'aura qu'une ligne qui sera

$$2k,\ 2k,\ 2k, \text{ ou } \frac{m}{3},\ \frac{m}{3},\ \frac{m}{3};$$

la série aura donc $\frac{m}{3}$ termes dont le dernier sera l'unité ou $\frac{2}{2}$; cette série sera donc

$$\tfrac{1}{2}\{(m-2)+(m-4)+(m-8)+(m-10)+(m-14)+\ldots+4+2\},$$

laquelle se décompose en ces deux-ci :

$$\tfrac{1}{2}\{(m-2)+(m-8)+(m-14)+(m-20)+\ldots\ldots+10+4\},$$

$$\tfrac{1}{2}\{(m-4)+(m-10)+(m-16)+(m-22)+\ldots\ldots+8+2\};$$

c'est-à-dire, en deux progressions par différences, ayant 6 pour raison commune, et ayant chacune $\frac{m}{6}$ termes ; on aura donc, pour la réunion de leurs sommes de termes

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{6}\left\{\frac{m+2}{2}+\frac{m-2}{2}\right\}=\frac{m^2}{12};$$

et ce sera là le nombre des solutions du problème.

Si m, toujours pair, est de la forme $6k+2$, la dernière colonne aura deux lignes qui seront

$$\left.\begin{matrix} 2k, & 2k, & 2k+2, \\ 2k, & 2k+1, & 2k+1, \end{matrix}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{matrix} \frac{m-2}{3}, & \frac{m-2}{3}, & \frac{m+4}{3}, \\ \frac{m-2}{3}, & \frac{m+1}{3}, & \frac{m+1}{3}, \end{matrix}\right.$$

la série aura donc $\frac{m-2}{3}$ termes, dont le dernier sera 2 ou $\frac{4}{2}$; cette série sera donc

$$\tfrac{1}{2}\{(m-2)+(m-4)+(m-8)+(m-10)+(m-14)+\ldots+6+4\},$$

laquelle se décompose en ces deux-ci

$$\tfrac{1}{2}\{(m-2)+(m-8)+(m-14)+(m-20)+\ldots\ldots+12+6\};$$

$$\tfrac{1}{2}\{(m-4)+(m-10)+(m-16)+(m-22)+\ldots\ldots+10+4\};$$

c'est-à-dire, en deux progressions par différences dont la raison commune est 6, et dont le nombre des termes est $\frac{m-2}{6}$, pour l'un et l'autre. Réunissant donc les sommes de ces deux séries, nous aurons

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m-2}{6}\left\{\frac{m+4}{2}+\frac{m}{2}\right\}=\frac{(m-2)(m+2)}{12}=\frac{m^2-4}{12};$$

et c'est là, dans ce cas, la solution du problème.

Le nombre m, toujours pair, est-il enfin de la forme $6k+4$; la dernière colonne du tableau n'aura qu'une seule ligne qui sera

$$2k+1\ ,\ 2k+1\ ,\ 2k+2\ ,\quad \text{ou}\quad \frac{m-1}{3},\ \frac{m-1}{3},\ \frac{m+2}{3};$$

la série aura donc $\frac{m-1}{3}$ termes, dont le dernier sera l'unité ou $\frac{2}{2}$; cette série sera donc

$$\tfrac{1}{2}\{(m-2)+(m-4)+(m-8)+(m-10)+(m-14)+\dots+6+2\},$$

laquelle se décompose en ces deux-ci

$$\tfrac{1}{2}\{(m-2)+(m-8)+(m-14)+(m-20)+\dots+8+2\};$$

$$\tfrac{1}{2}\{(m-4)+(m-10)+(m-16)+(m-22)+\dots+12+6\};$$

c'est-à-dire, en deux progressions par différences dont la raison commune est 6, et dont le nombre des termes est $\frac{m+2}{6}$, pour la première, et $\frac{m-4}{6}$, pour la seconde. Réunissant donc les sommes de ces deux séries, nous aurons

$$\tfrac{1}{2}\left\{\frac{m}{2}\cdot\frac{m+2}{6}+\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m-4}{6}\right\}=\frac{(m-2)(m+2)}{12}=\frac{m^2-4}{12}.$$

qui sera, pour ce cas, le nombre cherché.

Supposons présentement que m soit impair, il sera de l'une de ces trois formes $6k+1$, $6k+3$, $6k+5$.

Dans le premier cas, la dernière colonne du tableau n'aura qu'une seule ligne, qui sera

$$2k\ ,\ 2k\ ,\ 2k+1\ ,\quad \text{ou}\quad \frac{m-1}{3}\ ,\quad \frac{m-1}{3}\ ,\quad \frac{m+2}{3}\ ;$$

la série aura donc $\frac{m-1}{3}$ termes, et son dernier terme sera l'unité ou $\frac{2}{2}$; cette série sera donc

$$\tfrac{1}{2}\{(m-1)+(m-5)+(m-7)+(m-11)+(m-13)+\ldots\ldots+6+2\},$$

laquelle se décompose en ces deux-ci :

$$\tfrac{1}{2}\{(m-1)+(m-7)+(m-13)+(m-19)+\ldots\ldots+6\}\ ,$$

$$\tfrac{1}{2}\{(m-5)+(m-11)+(m-17)+(m-23)+\ldots\ldots+2\}\ ,$$

c'est-à-dire, en deux progressions par différences, ayant, l'une et l'autre, $\frac{m-1}{6}$ termes, et dont la raison commune est 6; on aura donc, pour la réunion de leurs sommes de termes

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m-1}{6}\left\{\frac{m+5}{2}+\frac{m-3}{2}\right\}=\frac{(m-1)(m+1)}{12}=\frac{m^2-1}{12}\ ;$$

et ce sera là le nombre des solutions du problème.

Si m, toujours impair, est de la forme $6k+3$, la dernière colonne n'aura qu'une ligne, qui sera

$$2k+1\ ,\ 2k+1\ ,\ 2k+1\ ;\quad \text{ou}\quad \frac{m}{3}\ ,\quad \frac{m}{3}\ ,\quad \frac{m}{3}\ ;$$

la série aura donc $\frac{m}{3}$ termes, dont le dernier sera l'unité ou $\frac{2}{2}$; cette série sera donc

$$\tfrac{1}{2}\{(m-1)+(m-5)+(m-7)+(m-11)+(m-13)+\ldots+4+2\},$$

laquelle se décompose en ces deux-ci :

$$\tfrac{1}{2}\{(m-1)+(m-7)+(m-13)+(m-19)+\ldots\ldots+8+2\};$$

$$\tfrac{1}{2}\{(m-5)+(m-11)+(m-17)+(m-23)+\ldots\ldots+10+4\};$$

c'est-à-dire, en deux progressions par différences dont 6 est la raison commune et dont le nombre des termes est $\frac{m+3}{6}$, pour la première, et $\frac{m-3}{6}$, pour la seconde ; leurs sommes de termes réunies donneront donc

$$\tfrac{1}{2}\cdot\left\{\frac{m+3}{6}\cdot\frac{m+1}{2}+\frac{m-3}{6}\cdot\frac{m-1}{2}\right\}=\frac{m^2+3}{12};$$

et ce sera là le nombre des solutions du problème.

Si enfin m, toujours impair, est de la forme $6k+5$, le dernier tableau aura deux lignes qui seront

$$\left.\begin{array}{l} 2k+1,\ 2k+1,\ 2k+3, \\ \\ 2k+1,\ 2k+2,\ 2k+2, \end{array}\right\}\ \text{ou}\ \left\{\begin{array}{l} \frac{m-2}{3},\ \frac{m-2}{3},\ \frac{m+4}{3}; \\ \\ \frac{m-2}{3},\ \frac{m+1}{3},\ \frac{m+1}{3}; \end{array}\right.$$

le nombre des termes de la série sera donc $\frac{m-2}{3}$, et son dernier terme sera 2 ou $\frac{4}{2}$; cette série sera donc

$$\tfrac{1}{2}\{(m-1)+(m-5)+(m-7)+(m-11)+(m-13)+\ldots\ldots+6+4\};$$

laquelle se décompose en ces deux-ci :

$$\tfrac{1}{2}\{(m-1)+(m-7)+(m-13)+(m-19)+\ldots\ldots+10+4\},$$

$$\tfrac{1}{2}\{(m-5)+(m-11)+(m-17)+(m-23)+\ldots\ldots+12+6\};$$

c'est-à-dire, en deux progressions dont la raison commune est 6, et dont le nombre des termes est $\frac{m+1}{6}$, pour la première, et $\frac{m-5}{6}$ pour la seconde; on aura donc, pour la réunion des sommes de leurs termes

$$\tfrac{1}{2}\left\{\frac{m+1}{6}\cdot\frac{m+3}{2}+\frac{m-5}{6}\cdot\frac{m+1}{2}\right\}=\frac{(m-1)(m+1)}{12}=\frac{m^2-1}{12};$$

et ce sera là le nombre des solutions du problème.

En résumant présentement ces divers résultats, et observant que les formes $6k+3$, $6k+4$, $6k+5$ rentrent respectivement dans les formes $6k-3$, $6k-2$, $6k-1$; nous pourrons dire que le nombre des manières de faire *trois* parts effectives avec m choses, toutes égales entre elles, est

Si m est de la forme $6k$, ... $\frac{m^2}{12}$,

Si m est de la forme $6k\pm1$; .... $\frac{m^2-1}{12}$,

Si m est de la forme $6k\pm2$, ... $\frac{m^2-4}{12}$;

Si m est de la forme $6k\pm3$, ... $\frac{m^2+3}{12}$.

On peut désirer de connaître combien il y a de systèmes dans lesquels plusieurs parts sont égales et combien il y a de parts égales dans chacun de ceux-là. Pour cela, remarquons que, d'abord les trois parts ne sauraient être égales qu'autant que m est de l'une ou l'autre des deux formes $6k$, $6k\pm3$, et cela ne saurait arriver qu'une seule fois.

Mais,

Mais, quelle que soit la forme de m, il y aura toujours des systèmes, en nombre plus ou moins grand, dans lesquels deux seulement des trois parts seront égales; c'est d'abord ce qui arrive constamment dans la première ligne de chaque colonne du tableau; et ce sont alors les deux premières parts, c'est-à-dire, les deux plus petites qui sont dans ce cas. En outre, de deux en deux colonnes, à commencer par la première ou par la seconde, suivant que m est impair ou pair, la dernière ligne a aussi deux parts égales; mais ce sont ici les deux dernières ou les deux plus fortes.

En conséquence, et d'après ce qui précède, 1.° si m est de la forme $6k$, le nombre des systèmes à deux parts égales sera

$$\left(\frac{m}{3}-1\right)+\left(\frac{m}{6}-1\right)=\frac{m-4}{2}\,.$$

2.° Si m est de la forme $6k+1$, le nombre des systèmes à deux parts égales sera

$$\frac{m-1}{3}+\frac{m-1}{6}=\frac{m+1}{2}\,;$$

3.° Si m est de la forme $6k+2$, le nombre des systèmes à deux parts égales sera

$$\frac{m-2}{3}+\frac{m-2}{6}=\frac{m-2}{2}\,;$$

4.° Si m est de la forme $6k+3$, le nombre des systèmes à deux parts égales sera

$$\left(\frac{m}{3}-1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}-1\right)=\frac{m-3}{2}\,.$$

5.° Si m est de la forme $6k+4$, le nombre des systèmes à deux parts égales sera

$$\frac{m-1}{3}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{m-1}{3}-1\right)=\frac{m-2}{2}.$$

6.° Si enfin m est de la forme $6k+5$, le nombre des systèmes à deux parts égales sera

$$\frac{m-2}{3}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{m-2}{3}+1\right)=\frac{m-1}{2}.$$

Ainsi, en résumé, le nombre des systèmes à deux parts égales sera,

Si m est de la forme $6k$, ... $\frac{m-4}{2}$,

Si m est de la forme $6k\pm1$, ... $\frac{m-1}{2}$,

Si m est de la forme $6k\pm2$, ... $\frac{m-2}{2}$,

Si m est de la forme $6k\pm3$, ... $\frac{m-3}{2}$.

En retranchant ces nombres de ceux qui expriment le nombre total des parts, et retranchant en outre une unité, dans le premier et le dernier cas, à raison du système unique dans lequel les trois parts sont égales, on trouvera, pour le nombre des systèmes dans lesquels les trois parts sont inégales

m étant de la forme $6k$ ..... $\frac{m^2}{12}-\frac{m-4}{2}-1=\frac{m^2-6m+12}{12}$,

m étant de la forme $6k\pm1$ ..... $\frac{m^2-1}{12}-\frac{m-1}{2}=\frac{m^2-6m+5}{12}$,

m étant de la forme $6k\pm2$ ..... $\frac{m^2-4}{12}-\frac{m-2}{2}=\frac{m^2-6m+8}{12}$,

m étant de la forme $6k\pm3$ ..... $\frac{m^2+3}{12}-\frac{m-3}{2}-1=\frac{m^2-6m+9}{12}$;

Dans tout ce qui précède, nous avons tacitement supposé que l'on n'avait aucun égard à l'ordre des parts ; mais, si l'on convenait de considérer comme systèmes de répartition distincts ceux-là mêmes qui ne différeraient les uns des autres que par la disposition respective des mêmes parts, voici comment, dans cette nouvelle hypothèse, on parviendrait à assigner le nombre total des systèmes de répartition.

Soit, en général, N_1 le nombre des systèmes à trois parts égales, dans la première hypothèse; nombre que nous avons vu n'être jamais supérieur à l'unité et être souvent nul ; soient en outre N_2 le nombre des systèmes à deux parts égales et N_3 les nombre de ceux dans lesquels les trois parts sont inégales.

Dans la nouvelle hypothèse, les systèmes à trois parts égales n'étant susceptibles d'aucune permutation, N_1 restera toujours N_1.

Dans les systèmes à deux parts égales, la part seule de son espèce pouvant occuper successivement le premier, le second ou le troisième rang N_2 deviendra ici $3N_2$.

Enfin, dans les systèmes à trois parts inégales, les parts étant susceptibles de toutes les sortes de permutations, N_3 devra devenir $6N_3$.

Ainsi, le nombre total des systèmes de répartition qui d'abord était simplement $N_1+N_2+N_3$, deviendra ici

$$N_1+3N_2+6N_3 \quad ;$$

mettant donc successivement pour N_1, N_2, N_3, dans cette dernière formule les nombres qui conviennent à chaque cas, nous trouverons que, dans tous les cas, le nombre cherché est également $\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}$; ce qu'on justifierait d'ailleurs par un raisonnement direct.

De la même manière que nous avons déduit le cas de trois parts de celui de deux, on déduirait pareillement celui des quatre parts de celui de trois, celui de cinq de celui de quatre, et ainsi de suite ; mais le nombre des formes du nombre m qu'il deviendrait nécessaire de discuter croîtrait rapidement, à mesure que le nombre des parts à former deviendrait plus grand.

PROBLÈME IV. De combien de manières différentes peut-on faire n *parts, avec* m *choses toutes égales entre elles, avec la faculté de faire tant de parts nulles qu'on voudra ; mais sous la condition néanmoins d'employer toutes les* m *choses dans chaque répartition ?*

Solution. La solution de ce problème se déduit de celle du Problème III, de la même manière que nous avons déduit celle du Problème II de celle du Problème I.

N'ayons d'abord aucun égard à la disposition des parts entre elles, dans un même système de répartition. Si l'on ne veut faire qu'une seule part, on ne pourra faire de parts nulles ; et conséquemment le nombre des systèmes de répartition sera encore égal à l'unité.

Si l'on veut faire *deux* parts, on ne pourra faire qu'une part nulle, et d'une manière seulement ; le nombre des systèmes de répartition sera donc, d'après le précédent problème,

Si m est de la forme $2k$, ... $\frac{m}{2}+1=\frac{m+2}{2}$,

Si m est de la forme $2k\pm1$, ... $\frac{m-1}{2}+1=\frac{m+1}{2}$.

Il y aura toujours un système unique à deux parts égales, dans le premier cas, et point dans le second.

Si donc on veut avoir égard à l'ordre des parts, on remarquera que deux parts sont, en général, susceptibles de deux dispositions différentes, mais que cependant, dans le premier cas, les deux parts égales ne sont point susceptibles de permutations. En conséquence, on trouvera que, quel que soit m, le nombre des systèmes de répartition, dans ce cas, est constamment $m+1$.

Si l'on veut faire trois parts, on pourra faire une ou deux parts nulles seulement. On pourra faire une part nulle d'autant de manières qu'il y en a de faire, avec m choses égales, deux parts dont aucune ne soit nulle. On pourra faire deux parts nulles d'une manière unique. En conséquence, et d'après le précédent problème, le nombre des systèmes possibles de répartition sera

Pour la forme paire. . . . $6k$; $\frac{m^2}{12}+\frac{m}{2}+1=\frac{m^2+6m+12}{12}$,

Pour la forme impaire . . . $6k\pm1$, $\frac{m^2-1}{12}+\frac{m-1}{2}+1=\frac{m^2+6m+5}{12}$,

Pour la forme paire. . . . $6k\pm2$, $\frac{m^2-4}{12}+\frac{m}{2}+1=\frac{m^2+6m+8}{12}$,

Pour la forme impaire. . . . $6k\pm3$, $\frac{m^2+3}{12}+\frac{m-1}{2}+1=\frac{m^2+6m+9}{12}$.

Ici le nombre des systèmes à trois parts égales sera toujours 1, pour les deux formes extrêmes, et zéro pour les deux autres. Quant au nombre des systèmes à deux parts égales, il se trouvera d'abord, pour toutes les formes, augmenté d'une unité, à raison du système à deux parts nulles; mais, dans les formes paires, il se trouvera encore augmenté d'une unité, à raison du système où deux parts sont égales à la moitié de m et la troisième nulle. Le nombre des systèmes à deux parts égales se trouvera donc ainsi, dans le cas actuel,

Pour la forme $6k$, ... $\frac{m-4}{2}+2=\frac{m}{2}$;

Pour la forme $6k\pm1$, ... $\frac{m-1}{2}+1=\frac{m+1}{2}$, Pour la forme $6k \pm 2$, ... $\frac{m-2}{2}+2=\frac{m+2}{2}$,

Pour la forme $6k \pm 3$, ... $\frac{m-3}{2}+1=\frac{m-1}{2}$.

Retranchant donc ces nombres de ceux que nous avions trouvés pour le nombre total des systèmes de répartition, et retranchant en outre une unité pour les deux formes extrêmes, à raison des trois parts égales, nous aurons pour le nombre des systèmes où les trois parts sont inégales,

Pour la forme $6k$,.... $\frac{m^2+6m+12}{12}-\frac{m}{2}-1=\frac{m^2}{12}$,

Pour la forme $6k \pm 1$, ... $\frac{m^2+6m+5}{12}-\frac{m+1}{2}=\frac{m^2-1}{12}$,

Pour la forme $6k \pm 2$, ... $\frac{m^2+6m+8}{12}-\frac{m+2}{2}=\frac{m^2-4}{12}$,

Pour la forme $6k \pm 3$, ... $\frac{m^2+6m+9}{12}-\frac{m-1}{2}-1=\frac{m^2+3}{12}$.

En rapprochant ces résultats de ceux auxquels nous a conduit le troisième problème, on est conduit à en conclure que le nombre des manières de faire trois parts avec m choses égales, lorsqu'on admet des parts nulles, mais qu'on rejette les systèmes dans lesquels plusieurs parts sont égales, est égal au nombre des manières de faire trois parts avec les mêmes choses lorsqu'au contraire l'on admet les systèmes dans lesquels des parts sont égales, mais en rejetant ceux où des parts sont nulles ; d'où l'on peut encore conclure que, dans la totalité des systèmes de répartition, il y en a autant où les parts ne sont pas toutes effectives qu'il y en a où elles ne sont pas toutes inégales.

Veut-on présentement avoir égard à la disposition des parts les unes par rapport aux autres ; en procédant comme nous l'avons fait dans le précédent problème, on trouvera

$$\text{Pour } m \text{ pair}, \ldots\ldots \quad \frac{(m+2)(m+7)}{2},$$

$$\text{Pour } m \text{ impair}, \ldots\ldots \quad \frac{(m+1)(m+8)}{2}.$$

On poursuivrait sur le même plan, s'il était question de former un plus grand nombre de parts.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration du théorème d'analise transcendante, énoncé à la page 388 du X.e volume des Annales ;

Par M. Frédéric Sarrus,
Et par un ancien Elève de l'école polytechnique.

M. Sarrus attaque la question d'une manière tout-à-fait synthétique. Il remarque d'abord que l'on a, par les théories connues,

$$\text{Sin.}\, z = 2\text{Sin.}\frac{z}{2}\,\text{Cos.}\frac{z}{2},$$

$$\text{Sin.}\frac{z}{2} = 2\text{Sin.}\frac{z}{4}\,\text{Cos.}\frac{z}{4},$$

$$\text{Sin.}\frac{z}{4}=2\text{Sin.}\frac{z}{8}\text{Cos.}\frac{z}{8}\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,$$

$$\text{Sin.}\frac{z}{2^{n-2}}=2\text{Sin.}\frac{z}{2^{n-1}}\text{Cos.}\frac{z}{2^{n-1}}\ ;$$

$$\text{Sin.}\frac{z}{2^{n-1}}=2\text{Sin.}\frac{z}{2^n}\text{Cos.}\frac{z}{2^n}\ ;$$

d'où; en multipliant et réduisant,

$$\text{Sin.}z=2^n\text{Sin.}\frac{z}{2^n}\text{Cos.}\frac{z}{2}\text{Cos.}\frac{z}{4}\text{Cos.}\frac{z}{8}\ldots\ldots\text{Cos.}\frac{z}{2^n}\ .$$

Mais comme, à mesure que n augmente, $\text{Sin.}\frac{z}{2^n}$ tend sans cesse à devenir $\frac{z}{2^n}$; il s'ensuit que, dans le même cas, $2^n\text{Sin.}\frac{z}{2^n}$ tend sans cesse à se confondre avec l'arc z; de sorte qu'en faisant n infini, on a rigoureusement

$$\text{Sin.}z=z\text{Cos.}\frac{z}{2}\text{Cos.}\frac{z}{4}\text{Cos.}\frac{z}{8}\text{Cos.}\frac{z}{16}\text{Cos.}\frac{z}{32}\ldots\ldots;$$

formule dont le second membre a une infinité de facteurs tendant sans cesse vers l'unité, quel que soit l'arc z, ce qui en garantit la convergence.

En prenant les différentielles logarithmiques des deux membres, on tire de là, en transposant,

$$\frac{1}{z}=\text{Cot.}z+\frac{1}{2}\text{Tang.}\frac{z}{2}+\frac{1}{4}\text{Tang.}\frac{z}{4}+\frac{1}{8}\text{Tang.}\frac{z}{8}+\ldots.\quad \text{(I)}$$

Si

Si l'on pose ensuite $z=\frac{\varpi}{2}$, ϖ étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité, en observant que $\text{Cot.}\frac{\varpi}{2}=0$ et divisant par 2, on aura

$$\frac{1}{\varpi}=\frac{1}{4}\text{Tang}\frac{\varpi}{4}+\frac{1}{8}\text{Tang.}\frac{\varpi}{8}+\frac{1}{16}\text{Tang.}\frac{\varpi}{16}+\ldots\ldots, \qquad \text{(II)}$$

qui est précisément la formule à démontrer.

M. Sarrus observe que ces deux séries, l'une et l'autre très-régulières, convergent rapidement toutes deux vers des progressions décroissantes par quotiens ayant 4 pour raison; de sorte qu'en prenant pour n un très-grand nombre, la dernière, par exemple, pourra être sensiblement remplacée par cette formule finie

$$\frac{1}{\varpi}=\frac{1}{4}\text{Tang.}\frac{\varpi}{4}+\frac{1}{8}\text{Tang.}\frac{\varpi}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\text{Tang.}\frac{\varpi}{2^n}+\frac{2}{3.2^n}\text{Tang.}\frac{\varpi}{2^{n+1}}.$$

L'anonyme, au contraire, parvient à son but par un procédé tout-à-fait analitique, et conséquemmeut inverse de celui de M. Sarrus. Il cherche généralement quelle fonction finie peut être équivalente à la série infinie

$$\frac{1}{4}\text{Tang.}\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\text{Tang.}\frac{x}{8}+\frac{1}{16}\text{Tang.}\frac{x}{16}+\ldots\ldots;$$

où x désigne un arc quelconque. Posant donc cette série égale à une certaine variable y, multipliant par dx et intégrant, il obtient

$$\int y\,dx=C-\left\{\text{Log.Cos.}\frac{x}{4}+\text{Log.Cos.}\frac{x}{8}+\text{Log.Cos.}\frac{x}{16}+\ldots\right\};$$

ou bien

$$\int y\mathrm{d}x = C - \mathrm{Log.}\left(\mathrm{Cos.}\frac{x}{4}\,\mathrm{Cos.}\frac{x}{8}\,\mathrm{Cos.}\frac{x}{16}\,\mathrm{Cos.}\frac{x}{32}\ldots\right);$$

observant ensuite que

$$\mathrm{Cos.}\frac{x}{4}\,\mathrm{Cos.}\frac{x}{8}\,\mathrm{Cos.}\frac{x}{16}\,\mathrm{Cos.}\frac{x}{32}\ldots\ldots=\frac{\mathrm{Sin.}x}{x\mathrm{Cos.}\frac{x}{2}},$$

il en conclut que

$$\int y\mathrm{d}x = C - \mathrm{Log.}\frac{\mathrm{Sin.}x}{x\mathrm{Cos.}\frac{x}{2}} = C - \mathrm{Log.Sin.}x + \mathrm{Log.Cos.}\frac{x}{2} - \mathrm{Log.}x\,;$$

d'où, en différentiant et divisant par $\mathrm{d}x$,

$$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\mathrm{Tang.}\frac{x}{2} - \mathrm{Cot.}x = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\mathrm{Cot.}\frac{x}{2}\,;$$

ce qui donne, en remettant pour y sa valeur et transposant,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\mathrm{Cot.}\frac{x}{2} = \frac{1}{4}\mathrm{Tang.}\frac{x}{4} + \frac{1}{8}\mathrm{Tang.}\frac{x}{8} + \frac{1}{16}\mathrm{Tang.}\frac{x}{16} + \ldots\ldots\,;$$

formule qui est générale quel que soit l'arc x.

Si ensuite on suppose $x=\frac{\varpi}{2}$, on tombe précisément sur la formule proposée à démontrer.

Solution du problème d'analise indéterminée proposé à la page 388 du X.e volume de ce recueil ;

Par MM. Frédéric Sarrus, Auguste Ollive et Fauquier, capitaine au corps royal du génie, ancien élève de l'école polytechnique.

PROBLÈME. *Par combien de systèmes de valeurs entières et positives de* x *et* y *peut-on rendre la fonction* $\frac{xy}{x+y}$ *égale à un nombre entier positif* $N=a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$, *dans lequel* a, b, c, d, ... *sont des nombres premiers inégaux différens de l'unité?*

Solution. On a vu (tom. X, pag. 385) qu'en prenant

$$x=pr(p+q)\,; \qquad y=qr(p+q)\,;$$

on avait

$$\frac{xy}{x+y}=pqr\,;$$

de sorte que si l'on ne voulait qu'une solution, tout se réduirait à décomposer le nombre N en trois facteurs ; ce qui est toujours possible ; sauf à prendre, s'il est nécessaire, un ou deux de ces facteurs, ou même tous les trois, égaux à l'unité.

Soit $N=m^2ghk$; g et h pouvant indifféremment être ou n'être pas divisibles par m ; soit qu'on pose

$$p=mg\ ,\qquad q=mh\ ;\qquad \text{d'où}\qquad r=k\ ,$$

ou bien

$$p=g\ ,\qquad q=h\ ,\qquad \text{d'où}\qquad r=m^2k\ ;$$

on trouve également

$$x=m^2gk(g+h)\ ,\qquad y=m^2hk(g+h)\ ;$$

c'est à-dire que, toutes les fois que l'on prendra pour p et q des facteurs de N non premiers entre eux, on n'obtiendra pas pour x et y des valeurs différentes de celles qu'on aurait eu si l'on eût substitué à ces deux nombres les quotiens de leur division par leur plus grand commun diviseur.

Ainsi, demander combien il peut y avoir de différens systèmes de valeurs entières et positives de x et y qui rendent la fonction $\frac{xy}{x+y}$ égale à un nombre entier positif donné $N=a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots o^\omega$, c'est demander, en d'autres termes, de combien de manières on peut extraire du nombre $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots\ldots o^\omega$ deux facteurs entiers et positifs premiers entre eux; et c'est aussi à cela que le problème a également été réduit par les trois géomètres qui l'ont traité. M. Sarrus ne nous a donné la sienne que verbalement, il y a déjà assez long-temps; MM. Fauquier et Ollive nous ont transmis les leurs presque consécutivement. La marche du raisonnement est à peu près le même dans toutes; et si nous adoptons ici de préférence la manière de le présenter de MM. Sarrus et Ollive, c'est uniquement parce qu'elle nous paraît un peu plus rapide.

Mais, avant d'entrer en matière, il est d'abord nécessaire d'établir ici une distinction. Lorsqu'on demande simplement de trouver deux nombres tels, qu'en divisant leur produit par leur somme, le quotient soit égal à un nombre donné ; il est clair que, dire que ces deux nombres sont G et H, ou bien dire que ces deux nombres sont H et G, c'est dire une seule et même chose ; tandis que si, au contraire, on considérait l'équation $\frac{xy}{x+y}=N$ comme celle d'une certaine courbe, les deux systèmes de valeurs

$$\left\{\begin{array}{l} x=G\,, \\ y=H\,, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=H\,, \\ y=G\,, \end{array}\right.$$

appartiendraient à des points essentiellement différens. Quoiqu'il semble plus naturel d'envisager le présent problème sous le premier point de vue que sous le second; c'est pourtant sous ce dernier que nous l'envisagerons d'abord, sauf à modifier ensuite la formule finale de manière à la rendre propre à l'autre cas.

Et, comme, en permutant entre eux les deux nombres p et q, on ne fait que permuter également entre eux les deux nombres x et y; nous envisagerons d'abord ces deux mêmes nombres p et q comme non permutables; et comme ils doivent être premiers entre eux, et ne peuvent conséquemment être égaux que dans le seul cas où ils sont l'un et l'autre égaux à l'unité; il en résulte que, ce seul cas excepté, il y aura deux fois plus de solutions dans la seconde hypothèse que dans la première. Si donc, dans cette seconde hypothèse, le nombre total des solutions est $2z+1$; dans la première, ce nombre se réduira simplement à $z+1$.

Ces choses ainsi entendues, concevons que l'on prenne d'abord p et q égaux entre eux et à l'unité; cela ne se pourra que d'une manière unique. Nous pourrons ensuite introduire successivement, d'abord dans p et non dans q, puis dans q et non dans p, tous les facteurs a, jusqu'au nombre α inclusivement; ce qui fera déjà naître un nombre $2\alpha+1$ de solutions dans lesquelles aucun des facteurs b, c, d,......o, n'aura été employé, et dans lesquelles l'un ou l'autre des deux nombres p, q sera constamment égal à l'unité.

Soient prises les valeurs de p et q répondant à une quelconque de ces solutions, et concevons qu'on y introduise successivement, d'abord dans p et non dans q, puis dans q et non dans p, tous les facteurs b jusqu'au nombre β inclusivement ; on en verra naître, y compris le système de valeurs qu'on aura choisi, $2\beta+1$ solutions ; et, attendu que chacun des $2\alpha+1$ premiers systèmes en fournirait un pareil nombre, il s'ensuit que le nombre total des systèmes de valeurs de p et q dans lesquels aucun des facteurs c, d,.....o n'est employé est $(2\alpha+1)(2\beta+1)$.

En prenant un quelconque de ces systèmes, on pourra, ou le laisser tel qu'il est, ou bien y introduire successivement, d'abord dans p et non dans q, puis dans q et non dans p, tous les facteurs c jusqu'au nombre γ inclusivement ; ce seul système en fera donc naître un nombre d'autres exprimé par $2\gamma+1$; et, comme on en pourrait dire autant de chacun de ceux dont il fait partie, il s'ensuit que le nombre total des systèmes de valeurs de p et q dans lesquels aucun des facteurs d,....o n'est employé, est $(2\alpha+1)(2\beta+1)(2\gamma+1)$.

En poursuivant donc ce raisonnement jusqu'après l'introduction des facteurs o, on verra que le nombre des solutions dont le problème est susceptible, du moins en considérant p et q, et par suite x et y comme non permutable entre eux, est

$$(2\alpha+1)(2\beta+1)(2\gamma+1)\,.......\,(2\omega+1)\;.$$

Que si, au contraire, on ne veut établir aucune distinction entre x et y, ni conséquemment entre p et q ; c'est-à-dire, si, revenant au premier des deux points de vue sous lesquels la question peut être envisagée, on demande simplement de combien de manières on peut trouver deux nombres tels qu'en divisant leur produit par leur somme, le quotient soit $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots o^\omega$; la réponse à cette question sera

$$\tfrac{1}{2}[(2\alpha+1)(2\beta+1)(2\gamma+1)\ldots\ldots(2\omega+1)+1].$$

M. Fauquier termine en observant, 1.° que, si l'on a $N=a^\alpha$, le nombre des solutions du problème sera $\alpha+1$; 2.° que, si l'on a $N=abc\ldots\ldots o$, n étant le nombre des facteurs, le nombre des solutions du problème sera $\dfrac{3^n+1}{2}$.

Nous terminerons nous-mêmes par une application numérique. Si l'on veut savoir combien il y a de systèmes de deux nombres dont le produit divisé par la somme donne pour quotient $360=2^3.3^2.5$; on aura $\alpha=3$, $\beta=2$, $\gamma=1$; de sorte que le nombre demandé sera

$$\tfrac{1}{2}(7.5.3+1)=\tfrac{106}{2}=53;$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Combinaisons.

I. De combien de manières peut-on choisir n lettres parmi m lettres desquelles il s'en trouve un nombre α égales à a, un nombre β égales à b, un nombre γ égales à c, et ainsi de suite ; ou, en d'autres termes, combien le monome $a^\alpha b^\beta c^\gamma$........., dans lequel $\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots=m$ admet-il de diviseurs distincts de n dimensions?

II. De combien de manières peut-on faire n parts avec m lettres, parmi lesquelles il s'en trouve un nombre α égales à a, un nombre β égales à b, un nombre γ égales à c, et ainsi de suite ; soit qu'on ait ou qu'on n'ait pas égard à l'ordre des parts, dans chaque système de répartition ; et soit qu'on admette ou qu'on exclue les parts nulles ; mais sous la condition d'employer la totalité des m lettres dans chaque système de répartition ?

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère, au moyen de quatre conditions données;

Par MM. Brianchon, capitaine d'artillerie, professeur de mathématiques à l'école d'artillerie de la garde royale, et Poncelet, capitaine du génie, employé à Metz.

THÉORÈME I. *Dans tout triangle inscrit à une hyperbole équilatère, le point de concours des trois hauteurs est situé sur la courbe.*

Démonstration. On sait que, pour tout hexagone ABCDEF (fig. 1) inscrit à une section conique, les trois points de concours H, I, K, des côtés opposés sont en ligne droite (*). Si donc, la courbe ayant des branches infinies, on suppose que l'hexagone ait deux de ses sommets, comme E, F, situés à l'infini, le point I, concours des deux côtés opposés EF, BC, se trouvera à l'infini; ce qui revient à dire que BC et HK seront parallèles.

Maintenant, la courbe étant une hyperbole, il est clair que les deux côtés DE, FA, adjacens à EF qui est à l'infini, seront respectivement parallèles aux deux asymptotes, et, partant, seront

(*) Voyez, pour les démonstrations géométrique et algébrique de cette propriété, les pages 78 et 381 du IV.e volume du présent recueil.

J. D. G.

rectangulaires, pour le cas de l'hyperbole équilatère, qui est celui dont il s'agit ici.

Les deux derniers sommets E, F de l'hexagone inscrit à cette courbe étant ainsi portés à l'infini, les quatre autres resteront arbitraires. Soient donc pris à volonté les trois premiers A, B, C (fig. 2), et soit marqué le quatrième D tel que les deux côtés AB, CD, respectivement opposés à DE, FA, soient rectangulaires entre eux. Il résulte de ceci que AH est perpendiculaire sur DK. D'ailleurs AK est perpendiculaire sur DH, par la propriété des asymptotes; donc le point A est le croisement des trois hauteurs du triangle DHK; donc AD est perpendiculaire sur HK, et conséquemment aussi sur BC, parallèle à HK. Mais, par construction, CD est perpendiculaire sur AB; donc le point D est le croisement des trois hauteurs du triangle ABC. Or, le triangle ABC a été inscrit à volonté à la courbe; donc généralement « dans tout triangle » ABC, inscrit à une hyperbole équilatère, le point de croisement » D des trois hauteurs est un point de la courbe »; *ce qu'il fallait démontrer*.

Si l'un A des angles du triangle inscrit varie de grandeur, en tendant vers l'angle droit, le point D se déplacera sur la courbe en s'approchant continuellement du sommet A; ce qui revient à dire que la sécante AD, perpendiculaire sur BC, tendra sans cesse à toucher la courbe en A, et qu'enfin elle sera tangente quand l'angle A sera droit. Donc.

THÉORÈME II. Dans tout triangle rectangle inscrit à une hyperbole équilatère, la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypothénuse est tangente à la courbe.

Il suit de là que, si l'angle droit occille sur son sommet, l'hypothénuse se déplacera parallèlement à elle-même et à la normale menée à ce sommet; ce qui est un cas particulier du beau théorème démontré par M. Frégier dans le présent recueil (*).

(*) Voyez tom. VI, pag. 229 et 321, et tom. VII, pag. 95. *J. D. G.*

Au moyen de ce qui précède, si on connaissait deux points A, B (fig. 3) de la courbe, et la tangente AP en l'un A de ces points, on pourrait en construire un troisième C en cette manière : du point B abaissez une perpendiculaire BC sur la tangente donnée, elle ira couper au point cherché C la perpendiculaire AC à AB.

On sait donc résoudre ces trois problèmes :

Décrire une hyperbole équilatère dont on a trois points et la tangente en l'un d'eux ?

Décrire une hyperbole équilatère dont on a deux points et les tangentes en ces points ?

Décrire une hyperbole équilatère dont on a deux points, la tangente en l'un de ces points et une autre tangente quelconque ?

En effet, par la construction qui vient d'être indiquée, on obtiendra un nouveau point de la courbe; après quoi, pour achever, on aura recours aux solutions connues de ces questions : (*)

Décrire une section conique dont on a quatre points et la tangente en l'un d'eux ?

Décrire une section conique dont on a trois points et les tangentes en deux de ces points ?

Décrire une section conique dont on a trois points, une tangente quelconque et la tangente en l'un de ces points ?

Il résulte encore du théorème I que, lorsqu'on connaît trois points A, B, C (fig. 2) d'une hyperbole équilatère, on en a un quatrième D qui est le croisement des trois hauteurs du triangle ABC; en sorte qu'on sait aussi résoudre ces deux problèmes :

Décrire une hyperbole équilatère dont on a quatre points ?

Décrire une hyperbole équilatère dont on a trois points et une tangente ?

Car, au moyen de la construction indiquée, on obtiendra un

(*) *Mémoire sur les lignes du second ordre, etc.*, par C. J. BRIANCHON, Paris, 1817.

nouveau point de la courbe ; après quoi, pour achever, on aura recours aux solutions connues de ces questions : (*)

Décrire une section conique dont on a cinq points ?

Décrire une section conique dont on a quatre points et une tangente ?

THÉORÈME III. Si deux points, situés sur le plan d'une hyperbole équilatère, sont les milieux ou les pôles respectifs de deux cordes ou de deux droites quelconques également situées sur ce plan ; et que, par chacun d'eux, on mène une parallèle à la corde ou à la polaire qui correspond à l'autre, le cercle qui passera par ces deux points et par celui où se coupent les parallèles passera aussi par le centre de la courbe.

Démonstration. Soient, en premier lieu, CE, CF (fig. 4) les directions indéfinies des deux cordes en question, I, K leurs milieux respectifs, O le centre de l'hyperbole équilatère et EF l'une de ses asymptotes, rencontrant en E, F les deux cordes CI, CK prolongées ; les droites OK, OI seront les diamètres de la courbe, conjugués à la direction de ces cordes.

Cela posé, puisque l'angle des asymptotes est droit et que le point K est le milieu de la partie interceptée par ces asymptotes sur la direction de CF, la distance KO=KF et par conséquent l'angle KFO=KOF. Par la même raison, l'angle IEO=IOE ; mais, à cause du triangle CEF, l'angle C est supplément de la somme des angles E, F, est par conséquent supplément de celle des angles KOF, IOE ; donc il est égal à l'angle IOK, formé de l'autre côté de IK par les diamètres IK, IO. D'ailleurs, on prouverait, de la même manière que, si le point O était supposé du côté du sommet de l'angle C, l'angle IOK, formé par ces mêmes diamètres, serait égal au supplément de l'angle C ; donc il est sur la circonférence du cercle qui passe par les points K, I et par

(*) Même ouvrage.

celui L où se coupent les parallèles KL, IL menées par chacun d'eux à la corde qui passe par l'autre : c'est-à-dire que,

1.° « Si par chacun des points milieux de deux cordes quel-
» conques d'une hyperbole équilatère, on mène une parallèle à la
» corde qui correspond à l'autre, le cercle qui passera par ces deux
» points et par celui où se coupent les parallèles passera aussi par
» le centre de la courbe. »

En second lieu, soient PG, PH (fig. 5) deux droites quelconques, situées sur le plan d'une hyperbole équilatère, R, Q leurs pôles respectifs, par rapport à cette courbe. Concevons, par le point Q, la parallèle QC à la polaire PH de ce point; la corde correspondante sera évidemment partagée en deux parties égales en Q; car, d'après la théorie généralement connue des pôles, « le
» diamètre d'une section conique qui renferme les milieux de toutes
» les cordes parallèles à une même droite, située sur le plan de
» la courbe, passe aussi par le pôle de cette droite ».

Par la même raison, si par le point R, pôle de la droite PG, on mène la parallèle CR à cette droite, rencontrant la première au point C, la corde qui lui correspond, dans l'hyperbole équilatère, sera divisée en deux parties égales en R; ainsi, les points R, Q seront les milieux des droites ou cordes indéfinies RC, QC, qui passent respectivement par ces points, et sont parallèles aux deux droites PG, PH.

Il suit de là et de ce qui précède que

2.° « La circonférence qui passe par deux points quelconques
» R, Q, situés sur le plan d'une hyperbole équilatère, et par le
» point L où se coupent les parallèles menées par chacun d'eux
» à la polaire PG ou PH de l'autre passe aussi par le centre de
» la courbe ».

Il est d'ailleurs évident que les mêmes choses auraient encore lieu si, à la place de l'une des deux droites et de son pôle, on substituait une corde et son point milieu; ce qui complète la démonstration du théorème énoncé.

S'il arrivait, dans le cas où l'on considère deux droites PG, PH et leurs pôles R, Q, que chacun de ces derniers fût situé sur la droite qui correspond à l'autre; c'est-à-dire, si le point Q se trouvait sur PG et le point R sur PH, les parallèles RL, QL se confondraient évidemment avec ces droites; donc la circonférence qui renferme le centre de l'hyperbole équilatère correspondante passerait alors par le point P où se rencontrent ces mêmes droites; mais, d'après la théorie des pôles, ce point a évidemment pour polaire la droite qui passe par les points Q, R; de sorte que ces trois points sont tels que chacun d'eux est le pôle de la droite qui contient les deux autres; on peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME IV. Lorsque trois points situés sur le plan d'une hyperbole équilatère sont tels que chacun d'eux est le pôle de la droite qui contient les deux autres, le cercle qui passe par ces trois points passe aussi par le centre de la courbe.

Quatre tangentes AB, BC, CD, DE (fig. 6) à une même section conique, forment, par leur pénétration mutuelle, un quadrilatère complet TABCSD, dont les trois diagonales AC, BD, ST sont, comme l'on sait, telles que « chacune d'elles est la polaire de l'intersection des deux autres »; de sorte que, si la courbe est une hyperbole équilatère, la circonférence qui passera par les trois points P, Q, R, intersection des diagonales, passera aussi, d'après ce qui précède, par le centre de la courbe; d'où résulte ce nouveau théorème :

THÉORÈME V. Si l'on mène quatre tangentes quelconques à une hyperbole équilatère, le centre de la courbe sera situé sur la circonférence qui passe par les trois points d'intersection des diagonales du quadrilatère complet formé par ces tangentes.

Ou, ce qui revient au même,

Les centres de toutes les hyperboles équilatères tangentes à quatre droites quelconques, tracées sur un plan, sont situés sur la circonférence d'un cercle unique qui passe par les trois points *d'intersection des diagonales du quadrilatère complet formé par ces droites.*

D'un autre côté, il résulte d'un théorème découvert par Newton (*Principes mathématiques, etc.*, livre I, Lemme XXV, Corollaire 3) que

« Dans tout quadrilatère circonscrit à une conique quelconque, » les trois points milieux des diagonales sont sur une droite unique » qui passe par le centre de la courbe »,

Ou, ce qui revient encore au même,

« Les centres de toutes les sections coniques tangentes à quatre » droites quelconques, tracées sur un même plan, sont situés sur » la droite unique qui passe par les trois points milieux des dia- » gonales du quadrilatère complet formé par ces droites ».

Donc, dans le cas de l'hyperbole équilatère, le centre de la courbe se trouve à la fois sur la droite unique dont il s'agit et sur la circonférence du cercle qui passe par les trois points P, Q, R, où se croisent les diagonales ; en sorte qu'on peut aussi résoudre ce nouveau problème :

Décrire une hyperbole équilatère dont on a quatre tangentes ?

En effet, ayant déterminé, au moyen de ce qui précède, le centre de la courbe (et il y en a évidemment deux, en général, qui résolvent la question), on le joindra par une droite avec l'un quelconque P des points d'intersection des diagonales, laquelle ira rencontrer la diagonale opposée BD, polaire de P en un point X qui, d'après la théorie des pôles, sera nécessairement le milieu de la corde correspondante, et par conséquent aussi le milieu de la partie interceptée par les asymptotes sur cette diagonale ; portant donc, à partir du point X, deux distances égales à OX, sur la direction de la droite indéfinie BDX, leurs extrémités appartiendront aux deux asymptotes de la courbe, qui ainsi sera parfaitement déterminée de grandeur et de situation : car le point qui divisera en deux parties égales la distance interceptée par les asymptotes sur l'une quelconque des quatre tangentes données sera le point de contact de cette tangente.

Supposons maintenant que ABCD soit un quadrilatère inscrit à une section conique quelconque ; les points de concours S, T de ses côtés opposés et le point d'intersection Q de ses deux diagonales simples seront encore, d'après la théorie des pôles, trois points tels que « chacun d'entre eux sera le pôle de la droite qui passe par » les deux autres » ; donc, si la courbe est une hyperbole équilatère, son centre se trouvera situé, d'après le Théorème IV démontré ci-dessus, sur la circonférence du cercle qui passe par les trois points Q, S, T, et par conséquent :

THÉORÈME VI. Dans tout quadrilatère simple, inscrit à une hyperbole équilatère quelconque, le cercle passant par les deux points de concours des côtés opposés et par le point d'intersection des diagonales passe aussi par le centre de la courbe.

Il suit de là que, quand quatre points A, B, C, D sont donnés sur un plan, on connaît aussi la circonférence qui passe par le centre de l'hyperbole équilatère passant par ces quatre points (*); d'ailleurs le Théorème III indique d'autres circonférences qui renferment également ce centre ; donc il est entièrement déterminé de position sur le plan des quatre points donnés, et il en est par conséquent de même des asymptotes de la courbe; car, si l'on prend le milieu K de l'une quelconque CD des distances qui séparent deux à deux les points donnés, puisque l'on porte, à partir de K, sur la direction infinie de CD, deux longueurs égales à la distance de ce même point au centre de la courbe ; leurs extrémités appartiendront aux asymptotes de cette courbe. Voilà donc

(*) On peut remarquer qu'à quatre mêmes points donnés sur un plan correspondent toujours trois quadrilatères simples différens, mais qui tous redonnent les mêmes points Q, S, T ; en sorte que la circonférence en question est unique.

une

une nouvelle solution, très-directe et très-simple, du problème déjà résolu plus haut, dans lequel il s'agit de *décrire une hyperbole équilatère passant par quatre points donnés sur un plan.*

On peut tirer du Théorème III d'autres conséquences également remarquables.

Que A, B, C (fig. 7) soient trois points quelconques, appartenant à une hyperbole équilatère; si l'on divise les côtés CA, CB du triangle ABC, formé par ces points, en deux parties égales, aux nouveaux points I, K, et que, par ces derniers, on mène les parallèles IL, KL aux côtés CB, CA, elles viendront se couper en un point L qui, d'après le théorème cité, appartiendra au cercle qui, passant par I, K, passe en outre par le centre de l'hyperbole équilatère; mais le point L se confond évidemment avec le milieu du troisième côté AB du triangle ABC; donc

THÉORÈME VII. Dans tout triangle inscrit à une hyperbole équilatère, le cercle qui passe par les trois points milieux des côtés passe aussi par le centre de la courbe.

Ou, ce qui revient au même,

Les centres de toutes les hyperboles équilatères circonscrites à un même triangle quelconque sont sur la circonférence d'un cercle qui renferme les trois points milieux des côtés de ce triangle.

On peut conclure de là et de ce qui précède que, quand un quadrilatère quelconque ABCD (fig. 6) est inscrit à une hyperbole équilatère, le centre de la courbe doit se trouver, à la fois, sur les circonférences de huit cercles différens.

En effet, si l'on trace les diagonales AC, BD de ce quadrilatère, on obtiendra quatre triangles inscrits à la courbe, dont les points milieux G, H, I, K, L, M, qui sont aussi ceux des diagonales et des côtés du quadrilatère détermineront un égal nombre de circonférences, passant par le centre de cette courbe; d'ailleurs, ce centre devra aussi se trouver sur la circonférence qui renferme les trois points Q, S, T, où se coupent les diagonales et les côtés opposés du quadrilatère (Théorème VI); et il en sera de même encore de chacune des trois circonférences qui, passant par les points milieux de deux côtés opposés ou des deux diagonales de ce quadrilatère, renfermerait aussi le point où le coupent les deux parallèles menées par chacun d'eux (Théorème III) au côté ou à la diagonale qui renferme l'autre.

Le point où se coupent les huit circonférences dont il vient d'être question est nécessairement unique ; car, s'il était possible qu'il y en eût un second, toutes les circonférences devraient y passer à la fois, comme par le premier; or, toutes ces circonférences, excepté celle qui renferme les points Q, S, T, et pourvu qu'on ne combine pas entre elles celles qui passent par les milieux des deux côtés opposés ou des diagonales du quadrilatère, sont évidemment telles que, prises deux à deux, elles ont pour intersection commune l'un des points milieux de ces côtés et de ces diagonales; donc il faudrait que tous ces points milieux fussent confondus en un seul, ce qui est absurde; donc enfin le centre de l'hyperbole équilatère qui passe par quatre points donnés sur un plan est unique.

Si l'on fait attention à la manière particulière dont se trouve déterminé le point dont il s'agit, relativement aux côtés et diagonales du quadrilatère ABCD, il sera permis d'en déduire la conséquence générale qui suit :

THÉORÈME VIII. *Quatre points étant pris à volonté sur un plan, il existe un autre point, et un seul point, tel qu'en le joignant par des droites avec les milieux des six distances qui séparent les quatre premiers deux à deux, l'angle formé par deux quelconques de ces droites est égal à celui des deux distances qui leur correspondent, ou en est le supplément. Ce point unique est, en outre, le centre de l'hyperbole équilatère passant par les quatre points dont il s'agit.*

Ce théorème souffre pourtant une exception qu'il est nécessaire de signaler : c'est lorsque l'un D (fig. 7) des quatre points que l'on considère est le croisement des hauteurs du triangle ABC, formé par les trois autres ; car alors (Théorème I), il y a une infinité d'hyperboles équilatères passant par les quatre points A, B, C, D ; et par conséquent la position du centre de la courbe ne saurait être unique ; elle est nécessairement indéterminée. Or, il résulte de là que les huit circonférences de cercles dont il vient d'être question, et qui renferment simultanément le centre, doivent se confondre en un seul et même cercle ; ce qui donne lieu à la proposition suivante qui offre un nouveau principe à la géométrie élémentaire :

THÉORÈME IX. Le cercle qui passe par les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle quelconque sur les côtés qui leur sont opposés, passe aussi par les milieux de ces trois côtés, ainsi que par les milieux des distances qui séparent les sommets du point de croisement des perpendiculaires.

Démonstration. Soient P, Q, R les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets du triangle ABC sur les côtés opposés ; et soient K, I, L les points milieux de ces côtés.

Les triangles rectangles CBQ et ABR étant semblables, on aura

$$BC : BQ :: AB : BR ;$$

d'où, à cause que K et L sont les points milieux de BC et AB,

$$BK . BR = BL . BQ ;$$

c'est-à-dire que les quatre points K, R, L, Q appartiennent à une même circonférence.

On prouverait semblablement que les quatre points K, R, I, P sont sur un cercle, aussi bien que les quatre points P, I, Q, L.

Cela posé, s'il était possible que les trois cercles en question ne fussent pas un seul et même cercle, il faudrait que les directions des cordes qui leur sont deux à deux communes concourussent en un point unique ; or, ces cordes sont précisément les côtés du triangle ABC, lesquels ne sauraient concourir en un même point ; donc il est également impossible de supposer que les trois cercles diffèrent entre eux ; donc ils se confondent en un seul et même cercle.

Soient maintenant C', A', B' les points milieux des distances DC, DA, DB qui séparent le point de croisement D des hauteurs du triangle ABC de chacun de ses sommets respectifs. Les triangles rectangles CDR et CQB étant semblables, on aura

$$CD : CR :: CB : CQ \ ;$$

d'où, à cause que les points C' et K sont les milieux des distances CD et CB,

$$CC'.CQ = CR.CK \ ;$$

c'est-à dire que le cercle qui passe par K, R, Q passe aussi par C'.

On prouverait de la même manière que ce cercle passe par les deux autres points A', B'; donc il passe à la fois par les neuf points P, Q, R, I, K, L, A', B', C'; *ce qu'il fallait démontrer.*

Les théorèmes qui précèdent subsistent, en tout ou en partie, et avec des modifications convenables, dans les diverses circonstances particulières que peut présenter le système des trois ou quatre points que l'on considère, et qu'on suppose appartenir à une hyperbole équilatère.

Par exemple, si l'un A des sommets du triangle ABC s'éloigne à l'infini des deux autres, et que, par conséquent, les côtés CA, AB deviennent parallèles, comme l'exprime la figure 8; le pied R de la perpendiculaire AR s'écartera à l'infini sur BC; et il en sera de même des milieux I, L des côtés AC, AB du triangle et des points A', B', C'; par conséquent, une portion toute entière du cercle qui passe par ces points sera elle-même passée à l'infini, c'est-à-dire qu'elle se sera confondue avec la droite qui contient tous les points à l'infini du plan de la figure.

Il suit de là que l'autre partie de ce cercle sera, de son côté, devenue une ligne droite; et c'est ce qui a lieu en effet; car, si des sommets B, C on abaisse des perpendiculaires sur les côtés opposés du triangle, leurs pieds respectifs R, Q seront en ligne droite avec le milieu K du côté BC. Dans le cas particulier qui nous occupe donc, la suite des centres des hyperboles équilatères appartenant aux points A, B, C doit se trouver sur la droite indéfinie PKQ, comme cela a lieu en effet.

Dans la même hypothése, où le point A s'éloigne à l'infini et où les côtés CA, BA deviennent par conséquent parallèles, le point de croisement D des trois hauteurs du triangle ABC étant aussi passé à l'infini, il est, dans ce cas particulier, bien évident que c'est, avec les trois autres, un quatrième point de l'hyperbole équilatère.

Il y a ici une remarque essentielle à faire; c'est que, bien que par quatre points donnés à volonté sur un plan, on puisse toujours faire passer une hyperbole équilatère; cependant, quand deux de ces points doivent être situés à l'infini, il n'est pas possible de se les donner arbitrairement, par le système de deux droites quelconques concourant respectivement en ces points; il faut nécessairement que les droites dont il s'agit soient perpendiculaires entre elles, puisqu'elles doivent être parallèles aux asymptotes de la courbe.

Si le sommet A du triangle ABC (fig. 7), au lieu de s'écarter indéfiniment des deux autres B, C, se rapprochait, au contraire, de l'un d'eux C, jusqu'à ce que le côté AC devînt infiniment petit ou nul, en conservant toujours sa direction primitive; les points L, K se trouveraient eux-mêmes rapprochés à une distance infiniment petite l'un de l'autre, sur une parallèle à AC, passant par le milieu du côté AB ou CB; quant au point milieu I du côté AC, il serait confondu avec le sommet A.

Soit donc AP (fig. 9) la direction indéfinie de la droite qui renferme les deux points ou sommets confondus en un seul au point A, et soit B le troisième point ou le troisième sommet que l'on considère; divisons le double côté BA en deux parties égales au point L par la parallèle LK à AP, le cercle qui passera par A et touchera la parallèle KL en L réprésentera évidemment celui qui, dans le cas général, passe par les milieux des côtés du triangle ABC; par conséquent, il renfermera la suite des centres des hyperboles équilatères qui passent par les points A, B et touchent la droite AP en A. Du reste, il serait facile de reconnaître ce que sont devenues les autres propriétés du cercle dont il s'agit, et d'en déduire divers théorèmes analogues à ceux exposés dans ce qui précède, et qui n'en seraient que des cas particuliers.

Ainsi, le moyen que nous avons indiqué ci-dessus, pour trouver le centre et finalement les asymptotes d'une hyperbole équilatère assujettie à passer par quatre points donnés sur un plan, s'applique très-bien au cas particulier où l'on suppose ces points, en tout ou en partie, réunis deux à deux en un seul, sur des droites ou tangentes dont la direction est assignée, ainsi que le point de contact; comme il s'applique aussi très-bien à celui où un ou deux de ces mêmes points passent à l'infini sur des droites dont la direction est également assignée.

Mais, quand l'on ne se donne que trois points de l'hyperbole équilatère, avec une tangente quelconque, il n'est plus possible de déterminer de la même manière le centre de la courbe; car alors on n'obtient qu'un seul cercle, dont la circonférence renferme ce centre; il faut donc avoir recours au procédé indiqué plus haut, au moyen duquel on peut obtenir directement un quatrième point de la courbe; ce qui ramène le problème à celui où il s'agit de *décrire une section conique dont on a quatre points et une tangente.*

Enfin, quand on se donne deux points et deux tangentes quelconques de l'hyperbole équilatère, ou seulement un point et trois tangentes quelconques, les deux procédés dont il s'agit sont également en défaut. Néanmoins, dans le premier de ces deux cas, on trouve encore un cercle dont la circonférence renferme le centre de la courbe; ce qui donne lieu à ce nouveau théorème:

THÉORÈME X. Les centres de toutes les hyperboles équilatères tangentes à deux droites et passant par deux points donnés sur un plan sont situés sur une circonférence de cercle unique.

Dans le même cas, on parvient à déterminer, d'une manière très-simple, un système de deux droites dont l'intersection avec le cercle en question donne encore la position des centres des quatre hyperboles équilatères qui résolvent le problème; mais la démonstration de ces diverses propositions exige l'emploi des principes qui sont, jusqu'à un certain point, étrangers à l'objet actuel de cet article.

On a vu, dans ce qui précède, le rôle qu'on peut faire jouer aux différens lieux des centres des sections coniques assujetties à certaines conditions, pour fixer entièrement la position du centre de la courbe, et par conséquent celle de cette courbe elle-même, quand le nombre de ces conditions ne laisse plus rien d'arbitraire ni d'indéterminé. Il se présente, à ce sujet, une question fort intéressante, et qui nous semble n'avoir pas encore été résolue d'une manière complète, et dans toute sa généralité; en voici l'énoncé:

Déterminer quelle est la nature de la courbe qui renferme les centres de toutes les sections coniques assujetties à quatre conditions telles que de passer par des points ou de toucher des droites données sur un plan ?

Aux divers cas particuliers dont il a déjà été question dans le présent article, et dont le plus remarquable est, sans contredit, celui qui résulte du théorème cité de Newton sur le quadrilatère circonscrit à une section conique, nous ajouterons les suivans qui, si nous ne nous trompons, n'ont pas encore été démontrés ou résolus :

Les centres de toutes les sections coniques assujetties à passer par quatre points donnés sur un plan sont situés sur une autre section conique passant par les points où se coupent les deux diagonales et les côtés opposés du quadrilatère correspondant aux quatre points donnés.

Les centres de toutes les sections coniques assujetties à toucher deux droites et à passer par deux points donnés sur un plan sont situés sur une autre section conique passant par le point d'inter-

section des deux droites, par le milieu de la distance qui sépare entre eux les deux points et par le milieu de la partie interceptée par ces droites sur la direction indéfinie de celle qui renferme les deux mêmes points (*).

(*) Nous croyons devoir rappeler au lecteur qu'à la page 261 du VIII.e volume de ce recueil, M. Coste a résolu, pour la parabole, les questions analogues à celles qui font l'objet du présent mémoire, qui forme ainsi, avec le sien, un complément nécessaire à l'ouvrage de M. Brianchon sur les lignes du second ordre.

Quel que soit le mérite de ces diverses recherches; on ne doit pas désespérer toutefois de parvenir un jour à les faire dépendre comme cas particulier d'un problème unique : celui où il s'agit de décrire une conique qui en touche cinq autres données sur un plan; problème que nous avons proposé (Tom. VIII, pag. 284) et qui est peut-être susceptible d'une construction élégante et d'un facile énoncé. C'est ainsi que nous sommes parvenus à faire dériver la solution des dix problèmes de Viète et des quinze problèmes de Fermat sur les contacts des cercles et des sphères de celle du plus difficile d'entre eux (Voyez tom. IV, pag. 349, tom. VII, pag. 289, et tom. XI, pag. 1).

J. D. G.

GÉOMÉTRIE

GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE.

Sur le tracé des voûtes en anses de paniers ;

Par un Abonné.

Au Rédacteur des *Annales* ;

Monsieur,

On vient de construire un pont qui traverse le Taro, sur la route de Parme à Plaisance. Il est composé de 20 arches en anses de paniers à 5 centres, égales et de niveau, de 24 mètres de diamètre et 6 mètres de montée chacune. Les piles ont $4\frac{1}{2}$ mètres d'épaisseur ; de sorte qu'il a, y compris les culées, plus de 600 mètres de longueur ; et c'est peut-être le plus long qui existe en maçonnerie en Europe. Quoique ce pont me semble très-beau, il n'a cependant pas été exempt de critiques. L'une de ces critiques s'est portée sur le tracé des arches : on a prétendu qu'elles manquent de grâce. Sans décider si ce reproche est fondé ou non, il me semble que, pour l'apprécier équitablement, il faudrait d'abord se former le type d'une arche parfaite, ce qui n'a point encore été fait que je sache, et comparer ensuite l'arche donnée à ce type.

Je crois que le terme de comparaison, le type ou l'arche modèle devrait remplir les conditions suivantes ; savoir : 1.° que les deux demi-anses soient parfaitement égales; 2.° que les naissances soient de niveau et perpendiculaires au diamètre ; 3.° que chaque demi-anse soit une courbe continue, dont la courbure soit uniformément diminuée, de la naissance à la clef; c'est-à-dire, de telle sorte qu'en prenant sur la courbe deux portions quelconques de même amplitude et qu'on leur mène des normales par leurs extrémités, ces normales et les arcs qu'elles intercepteront forment des secteurs semblables (*).

Les deux premières conditions sont généralement observées. Quant à la troisième, il n'y a que la spirale logarithmique qui puisse y satisfaire; cette courbe a seule la propriété de donner des secteurs semblables pour des arcs de même amplitude ; c'est-à-dire, pour des arcs dont les normales extrêmes font entre elles des angles égaux. La demi-anse de panier qui pourrait servir de type serait donc un arc de spirale logarithmique dont l'amplitude serait de 90° ; c'est-à-dire, dont les normales, menées par ses extrêmités, seraient

(*) Serait-il déraisonnable de penser que, dans tout ceci, il y a inévitablement un peu d'arbitraire; que l'habitude y joue un assez grand rôle, et qu'il en est à peu près comme des modes, dont les plus bisarres même finissent par trouver grâce pour ce qu'elles semblaient d'abord avoir de plus choquant? Aujourd'hui, par exemple, on semble ne pas mal s'accommoder d'arches surbaissées formées d'un seul arc de cercle, et dans lesquelles conséquemment les tangentes aux naissances sont loin d'être verticales. Quant à la troisième condition, peut-être suffirait-il que la courbure de la demi-anse, toujours convexe, ne variât pas d'un point à l'autre d'une manière trop sensible, ce qui exclurait les anses de paniers à un petit nombre de centres; mais nous ne voyons pas pourquoi, suivant le plus ou le moins d'ouverture qu'on voudrait donner aux arches, on n'adopterait pas tantôt des quarts d'ellipses, tantôt des demi-cycloïdes alongées, tantôt des développantes de cercles, tantôt des quarts de développées d'ellipses; et en général toutes courbes assujetties à une loi continue. Que si l'on trouvait plus commode l'emploi des arcs de cercles, nous pensons qu'on ne se trouverait pas très-mal, dans certains cas, de la développante d'un quart de polygone régulier d'un nombre de côtés pairement pair.

J. D. G.

perpendiculaires entre elles, et formeraient, l'une la demi-base et l'autre la montée de l'anse de panier.

Soit AHKB un arc de spirale logarithmique (fig. 10). Si l'on prend sur son périmètre les arcs AH, HK, KB de même amplitude, et que l'on en tire les cordes; l'on peut déduire de la génération de la courbe que ces cordes formeront une progression géométrique, de manière que HK sera moyenne proportionnelle entre AH et KB; et de plus, les angles AHK, HKB seront égaux; d'où il suit que, si l'on divise ces angles en deux parties égales, par les droites HM et KM, ces deux droites seront égales; de sorte que les points H et K seront sur une circonférence de cercle ayant le point M pour centre et ayant pour rayon MH=MK. En outre, si, sur AH et KB comme bases, on construit des triangles isocèles HLA et KNB, semblables à HMK; les points A et H, ainsi que les points K et B, se trouveront aussi sur deux circonférences de cercles ayant les points L et N pour centres et pour rayons respectifs LA=LH et NK=NB. Ainsi, les points A, H, K, B se trouveront placés, en même temps, sur la spirale et sur trois arcs de cercles semblables, qui se raccorderont en H et K, et dont les cordes et par conséquent les rayons LA, MH, NK seront en progression géométrique. On voit de plus que si, au lieu de diviser l'arc de spirale AB, formant la demi-anse, en trois parties de même amplitude, on l'eût divisé en quatre ou en un plus grand nombre, il y aurait eu un plus grand nombre de points placés sur le périmètre de cette courbe; et que par conséquent la courbe formée par les arcs de cercles approchera d'autant plus de la spirale que ces arcs seront en plus grand nombre.

Comme l'on n'a pas de moyen facile pour décrire la spirale d'un mouvement continu; on ne peut guère employer cette courbe pour former l'anse du panier; et l'on est obligé de lui substituer une courbe discontinue, formée par des arcs de cercles qui se raccordent par leurs extrémités. L'anse de panier qui aura le plus de grâce sera conséquemment celle qui aura un plus grand nombre de points placés sur la spirale. Pour remplir cette condition, soit n le nombre des centres de la demi-anse ; on prendra chacun des arcs de cercle d'un nombre de degré exprimé par $\frac{90}{n}$, et on fera croître leurs rayons en progression géométrique.

La question est donc réduite à trouver les rayons de ces arcs, lorsque la demi-base et la montée sont données. Cette question a été proposée (*Annales*, tom. IV, pag. 92), et résolue analitiquement par MM. Argand et Bérard (même volume, pag. 256 et suiv.). Il faut, en général, résoudre par approximation l'équation qui donne la raison de la progression formée par les rayons consécutifs ; mais, dans le cas où la demi-anse ne doit avoir que trois centres, et c'est le cas des arches du pont du Taro, on peut trouver les rayons de la manière suivante.

Au lieu de supposer que la courbe AHKB est un arc de spirale, je suppose qu'elle soit formée de trois arcs de cercle AH, HK, KB, de 30° chacun. Nous avons vu que la corde HK doit être moyenne proportionnelle entre les cordes AH et KB. Supposons ces dernières prolongées jusqu'à leur rencontre en D, et soient AC et CB la demi-base et la montée ; les deux angles DAC et DBC seront chacun de 75° ; portant donc DA sur DB de D en F et tirant AF, cette dernière droite sera parallèle à la corde HK. Par le point F, soit élevée à DB la perpendiculaire indéfinie FD′, et soit G le milieu de FB. Je divise la longueur FD en un nombre arbitraire de parties égales ou inégales F1, 12, 2D, et du point G comme centre, avec les rayons G1, G2, GD, je décris des arcs coupant la perpendiculaire indéfinie FD′, aux points 1′, 2′, D′. Je porte respectivement les ordonnées F1′, F2′, FD′ sur des parallèles menées à FA par les points 1, 2, D, de 1 en 1″, de 2 en 2″ et de D en D″. Par les points F, 1″, 2″, D″, je fais passer une courbe auxiliaire F1″2″D″, et cette courbe coupe la droite AD au point H. Menant donc par ce point la parallèle HK à AF, terminée en K à DB, cette parallèle sera la corde intermédiaire, moyenne proportionnelle entre AH et KB; et le problème amené à ce point sera censé résolu.

Cette construction est facile à justifier. Il est clair, en effet, par la nature de la courbe auxiliaire, que si, du point G comme centre et avec GK pour rayon, on décrit le demi-cercle KK'O, on aura KH=FK'; mais FK' est moyenne proportionnelle entre FK et FO, c'est-à-dire, entre AH, et KB; d'où il suit que KH est aussi moyenne proportionnelle entre ces deux droites.

Agréez, etc.

Parme, le 20 octobre 1820.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du premier des cinq problèmes de géométrie proposés à la page 160 *du X.e volume de ce recueil;*

Par M. M....s.

PROBLÈME. *Déterminer l'aire d'un quadrilatère rectiligne circonscrit au cercle, en fonction de ses quatre côtés?*

I.

Dans tout quadrilatère rectiligne circonscrit à un cercle, la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres.

Soit (fig. 11) ABCDA un quadrilatère rectiligne, dont les côtés AB, BC, CD, DA, touchent respectivement un cercle aux points a, b, c, d; il s'agit de prouver que $AB+CD=BC+DA$,

On sait, en effet, qu'on a

$$Aa=Ad\ ,$$

$$Ba=Bb\ ,$$

$$Cc=Cb\ ,$$

$$Dc=Dd\ ,$$

d'où on conclut, en ajoutant et réduisant, $AB+CD=BC+DA$; comme nous l'avions annoncé.

II.

Si, dans un quadrilatère rectiligne, la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres, un cercle pourra toujours lui être inscrit.

Soit (fig. 12) ABCDA un quadrilatère rectiligne dans lequel on a $AB+CD=BC+DA$; il s'agit de prouver qu'un cercle peut toujours lui être inscrit.

Comme on peut toujours décrire un cercle qui touche trois des côtés du quadrilatère, tout se réduit à prouver que ce cercle touchera aussi son quatrième côté.

Supposons donc qu'on ait décrit un cercle qui touche respectivement les côtés AB, BC, CD en a, b, c; il s'agit de prouver que ce cercle touchera aussi le quatrième côté DA.

Si l'on nie cette proposition, il faudra admettre que, par le point D on peut mener au cercle une tangente différente de DC et DA, touchant ce cercle en quelque point d, et coupant AB ou son prolongement en quelque point E; alors le quadrilatère EBCDE se trouvant inscrit au cercle, on devra avoir (I)

$$EB+CD=BC+DE\ ;$$

mais on a par hypothèse

$$AB+CD=BC+AD\ ;$$

Retranchant donc la première de ces deux équations de la seconde, il viendra, en réduisant,

$$AE=AD-DE \quad \text{ou} \quad AE+ED=AD\ ;$$

résultat absurde qui prouve que la tangente DE ne saurait différer de DA, que par conséquent le cercle tangent aux trois côtés AB, BC, CD du quadrilatère dont il s'agit doit aussi toucher le quatrième DA, et qu'ainsi, de cela seulement que la somme de deux côtés opposés d'un quadrilatère rectiligne est égale à la somme des deux autres, le quadrilatère est circonscriptible au cercle.

III.

De ce qui vient d'être dit, il résulte évidemment que, lorsqu'on propose de construire un quadrilatère dont les côtés soient donnés et qui soit circonscriptible au cercle, on propose un problème impossible ou indéterminé; impossible, si la somme de deux côtés opposés n'est pas égale à la somme des deux autres : indéterminé, si, au contraire, cette relation a lieu. Donc aussi demander l'aire d'un tel quadrilatère c'est proposer un problème impossible, s'il n'est pas indéterminé.

IV.

Par des raisonnemens tout-à-fait semblables, on parviendra facilement à s'assurer que proposer de déterminer l'aire d'un quadrilatère sphérique circonscriptible à un petit cercle de la sphère, en fonction de ses quatre côtés, c'est également proposer un problème indéterminé, toutes les fois qu'il n'est pas impossible.

Berlin, le 24 octobre 1820.

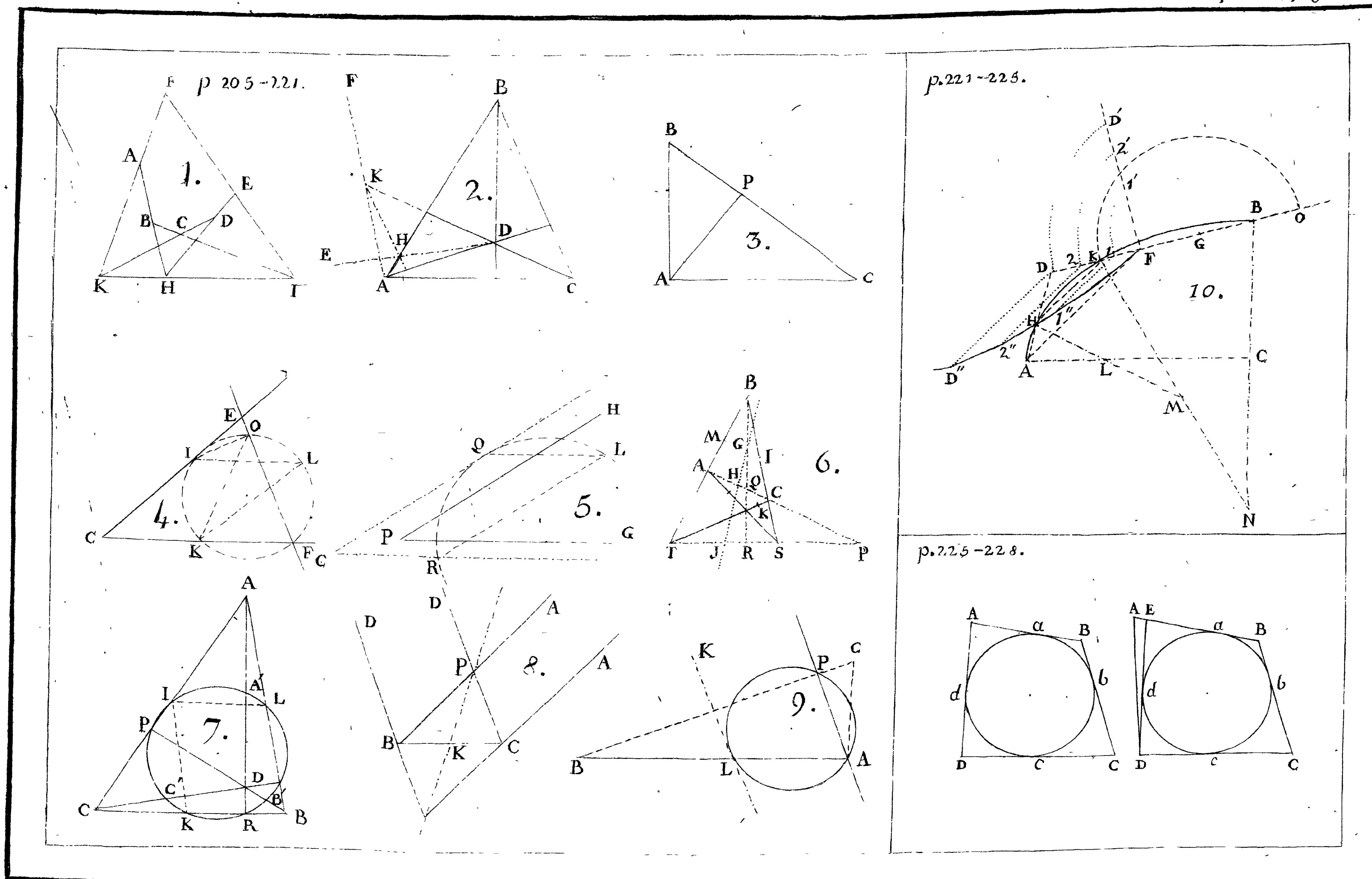
QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. Quel est le lieu des centres de toutes les sections coniques qui passent par m points et touchent n droites données sur un plan, avec la condition $m+n=4$?

II. Quel est le lieu des centres de toutes les hyperboles équilatères qui passent par m points et touchent n droites données sur un plan, avec la condition $m+n=3$?

III. Quel est le lieu des foyers de toutes les paraboles qui passent par m points et touchent n droites données sur un plan, avec la condition $m+n=3$?



J. D. G. fecit.

OPTIQUE.

Recherches de dioptrique, renfermant la solution du dernier des deux problèmes proposés à la page 288 *du X.*e *volume de ce recueil ;*

Par M. GERGONNE.

LE but que nous nous proposons ici est d'examiner comment s'opère la vision et sous quelle apparence se présentent les objets lumineux ou éclairés, lorsque ces objets se trouvent plongés dans un milieu homogène d'une densité constante, et que l'œil qui les contemple se trouve dans un autre milieu homogène, également d'une densité constante, contigu à celui-là et séparé de lui par un plan indéfini. C'est exactement le cas où nous sommes lorsque nous regardons les poissons dans l'eau, et c'est aussi celui où ils se trouvent, ainsi que les plongeurs, lorsqu'ils nous regardent. Nous aurons occasion, chemin faisant, de traiter, comme cas très-particulier, le dernier des deux problèmes proposés à la page 288 du X.e volume de ce recueil.

Bien que la question que nous abordons ici soit une des plus simples de toutes celles que la dioptrique peut avoir en vue, elle ne laisse pas que d'être assez compliquée. Elle a déjà été sommairement traitée par M. Lenthéric, professeur au collége royal de Montpellier, dans une thèse qu'il a soutenue pour le doctorat, à la faculté des sciences, en mai 1820; et nous n'avons d'autre but ici que de développer davantage et de simplifier en même temps, s'il est possible, les résultats obtenus par cet estimable professeur.

Pour fixer les idées et éviter en même temps les circonlocutions, nous supposerons constamment que les deux milieux dont il s'agit sont l'air et l'eau; que, par conséquent, le plan indéfini qui les sépare est un plan horizontal; et que le milieu inférieur est celui des deux qui réfracte le plus énergiquement la lumière; mais on sent fort bien que nos formules et nos méthodes n'en seront pas moins facilement applicables à toute autre hypothèse qu'on voudra faire sur la nature des deux milieux. Nous aurons d'ailleurs à examiner successivement le cas où l'objet est dans l'eau et l'œil dans l'air et celui où c'est, au contraire, l'œil qui est dans l'eau, tandis que l'objet est dans l'air, nous verrons que ces deux cas, bien que peu différens en apparence, sont cependant bien loin d'offrir des résultats analogues.

Soit donc un point lumineux plongé dans l'eau; ce point dardera dans tous les sens des rayons de lumière dont la direction sera rectiligne et constante tant qu'ils demeureront dans ce fluide; mais une fois que ceux qui seront dirigés de manière à pouvoir en sortir auront atteint la surface de l'eau, ils continueront leur marche dans l'air suivant une direction encore rectiligne, mais différente de la première et plus éloignée qu'elle de la direction verticale (*).

Si un œil se trouve situé d'une manière quelconque dans l'air, plusieurs des rayons qui y auront pénétré viendront le frapper.

(*) Je n'adopte ici l'hypothèse de l'émission que pour plus de simplicité. Je n'ignore pas que les belles recherches de M. Fresnel semblent présentement faire pencher la balance en faveur de l'hypothèse des ondulations. Je sais aussi que la lumière parvenue à la surface de l'eau ne pénètre pas toute dans l'air, et qu'une partie y rentre en se réfléchissant à cette surface; mais c'est là une circonstance dont il est permis ici de faire abstraction.

Par l'effet de l'habitude cet œil croira le point lumineux placé dans la direction suivant laquelle il en aura reçu la sensation, et précisément à l'endroit d'où les rayons du faisceau entré dans la prunelle divergeraient, s'ils n'avaient point été rompus à la surface de l'eau.

Si, par le point lumineux, on conçoit un plan vertical quelconque, ce plan contiendra un certain nombre de rayons émanés du point dont il s'agit; or, les circonstances étant absolument les mêmes de part et d'autre de ce plan, les rayons à leur entrée dans l'air, tout en prenant une nouvelle direction, ne s'écarteront ni à droite ni à gauche de ce même plan, et ne pourront conséquemment parvenir à l'œil qu'autant qu'il y sera lui-même situé; c'est donc aussi dans ce plan que l'image sera aperçue.

On voit donc que si, par l'œil et par le point lumineux, on conçoit un plan vertical, c'est dans ce plan uniquement que se passera tout le phénomène de la vision; d'où il résulte encore que si, au lieu d'un point unique, on a un objet visible d'une certaine étendue; pourvu que les diverses parties de cet objet se trouvent comprises dans un même plan vertical avec l'œil, son image se trouvera aussi toute entière comprise dans le même plan. Dans ce cas particulier, le problème, au lieu d'appartenir à la géométrie à trois dimensions, n'est donc qu'un simple problème de géométrie plane. En conséquence, c'est par lui que nous croyons devoir commencer, d'autant que le problème général peut ensuite s'en déduire avec facilité.

1. Supposons donc (fig. 1) que le plan de la figure soit le plan vertical conduit par l'œil et par le point lumineux. Soit CX l'intersection de ce plan avec la surface supérieure du liquide; soit P le point lumineux et soit CY une verticale conduite par ce point. Considérons deux rayons infiniment voisins PI, PI′, atteignant la surface de l'eau en I, I′; en entrant dans l'air, ils prendront les directions nouvelles IL, I′L′. Soit p le point de concours de ces

nouvelles directions ; il est clair qu'un œil placé vers LL' sera dans le même cas que si, l'eau n'existant pas, le point lumineux, au lieu d'être en P, se trouvait en p ; c'est-à-dire, en d'autres termes, que le point p sera le lieu apparent ou l'image du point P.

2. Or, il est visible que le point p est un de ceux de la courbe à laquelle tous les rayons réfractés sont tangens, c'est-à-dire, de la courbe enveloppe de tous ces rayons ; et que de plus le rayon réfracté IL est tangent à cette courbe en p ; si donc (fig. 2) MN est la courbe enveloppe de tous les rayons réfractés relatifs au point P ; en quelque point O que l'œil se trouve dans l'air, en menant par ce point O une tangente Op à cette courbe, son point de contact p sera le lieu de l'image, c'est-à-dire, le lieu apparent du point P, pour un œil situé en O. La courbe MpN est ce qu'on appelle la *Caustique* relative au point P.

3. L'objet principal de la recherche qui nous occupe doit donc être la détermination de la nature de cette courbe. Pour parvenir à ce but (fig. 3), soient prises respectivement l'horizontale CX et la verticale CY pour axes des x et des y ; désignons par k l'enfoncement CP du point P au-dessous du niveau de l'eau ; et considérons un rayon quelconque émané du point P, ayant PI pour direction dans l'eau et IL pour direction hors de l'eau. Désignons par z la distance variable CI de l'origine C au point d'incidence I ; et, par ce point I, menons la verticale indéfinie GH ; l'angle $GIP=IPC$ sera ce qu'on appelle l'*angle d'incidence* et l'angle HIL sera ce qu'on appelle l'*angle de réfraction*.

4. Or, suivant les premiers principes de la dioptrique, pour les deux mêmes milieux, le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction doit être constant, et tout-à-fait indépendant de la direction du rayon incident. Supposant donc que le sinus d'incidence dans l'eau soit constamment au sinus de réfraction dans l'air dans le rapport de q à p, nous aurons

$$\frac{Sin.\mathrm{IPC}}{Sin.\mathrm{LIH}}=\frac{p}{q}\ ,$$

d'où

$$Cos.\mathrm{LIX}=Sin.\mathrm{LIH}=\frac{p}{q}\,Sin.\mathrm{IPC}\ ;$$

mais on a

$$Sin.\mathrm{IPC}=\frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{IP}}=\frac{z}{\sqrt{k^2+z^2}}\ ;$$

donc

$$Cos.\mathrm{XIL}=\frac{pz}{q\sqrt{k^2+z^2}}\ ,\quad Sin.\mathrm{XIL}=\frac{\sqrt{q^2k^2-(p^2-q^2)z^2}}{q\sqrt{k^2+z^2}}\ ;$$

d'où

$$Tang.\mathrm{XIL}=\frac{\sqrt{q^2k^2-(p^2-q^2)z^2}}{pz}\ ;$$

de sorte qu'en posant, pour abréger ;

$$\frac{p^2-q^2}{q^2}=\frac{p^2}{q^2}-1=m^2\ ,\quad \frac{p}{q}=n\ ,$$

d'où

$$n^2=1+m^2\ ,$$

nous aurons

$$Tang.\mathrm{XIL}=\frac{\sqrt{k^2-m^2z^2}}{nz}\ .$$

En conséquence, l'équation du rayon réfracté IL, c'est-à-dire, l'équation générale de tous les rayons réfractés relatifs au point P sera

$$y=\frac{\sqrt{k^2-m^2z^2}}{nz}(x-z)\ ;$$

équation dans laquelle z est un paramètre tout-à-fait indéterminé.

5. Suivant donc les principes du calcul différentiel, l'équation de l'enveloppe de tous les rayons réfractés, c'est-à-dire, l'équation de la caustique, sera (*) le résultat de l'élimination de z entre cette dernière équation et sa différentielle, prise uniquement par rapport à cette lettre. Cette différentielle est, toutes réductions faites,

$$k^2x-m^2z^3=0\,.$$

Pour éliminer facilement z entre elle et l'équation primitive du rayon réfracté, nous les résoudrons par rapport à x et y, ainsi que nous l'avons déjà fait dans une circonstance analogue (tom. V, pag. 288). Cette dernière donne immédiatement la valeur de x ; et, en la substituant dans l'autre, on obtient

$$x=\frac{m^2z^3}{k^2}\,,\quad y=-\frac{(k^2-m^2z^2)^{\frac{3}{2}}}{nk^2}\;;$$

d'où résulte

$$\left(\frac{mx}{k}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{m^2z^2}{k^2}\,,\qquad \left(\frac{ny}{k}\right)^{\frac{2}{3}}=1-\frac{m^2z^2}{k^2}\;;$$

ajoutant donc ces deux équations membre à membre, nous aurons pour celle de la caustique cherchée

$$\left(\frac{mx}{k}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{ny}{k}\right)^{\frac{2}{3}}=1\,.$$

6. Or, il est connu (tom. V, pag. 288) que l'équation d'une ellipse étant

(*) Voyez la page 361 du III.e volume de ce recueil.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,$$

l'équation de sa développée est

$$\left(\frac{ax}{b^2-a^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{by}{b^2-a^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1\,;$$

donc notre caustique n'est autre que la développée d'une ellipse dont les demi-diamètres principaux sont donnés par les deux équations

$$\frac{a}{b^2-a^2}=\frac{m}{k}\,,\quad \frac{b}{b^2-a^2}=\frac{n}{k}\,,$$

d'où, on ayant égard à la relation $n^2=1+m^2$, trouvée ci-dessus (4), on tire

$$a=mk\,,\qquad b=nk\,;$$

de sorte que l'équation de cette ellipse est

$$\left(\frac{x}{mk}\right)^2+\left(\frac{y}{nk}\right)^2=1\,.$$

On a, en outre,

$$\frac{b}{a}=\frac{n}{m}\,,\qquad \sqrt{b^2-a^2}=k\,.$$

7. Ainsi, toutes les fois qu'un point lumineux est plongé dans l'eau, ceux d'entre les rayons qui en émanent qui sont compris dans un même plan vertical quelconque passant par ce point, donnent naissance, après leur sortie du liquide, à une caustique qui n'est autre chose que la développée d'une ellipse qui a son centre à la surface du liquide, et son grand axe vertical. L'un des foyers de

cette ellipse est le point lumineux lui-même ; et ses dimensions, proportionnelles à l'enfoncement de ce point, ne dépendent que du rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction ; de telle sorte que les ellipses qui répondent à divers points, et par suite leurs développées, sont des courbes semblables. On aurait des conséquences analogues pour deux autres milieux transparens, solides ou fluides ; il n'y aurait absolument de changé que le rapport des dimensions des ellipses (*) ; pourvu toutefois que le point lumineux fût toujours dans celui des deux milieux qui jouirait du pouvoir réfringent le plus énergique. On conçoit, au surplus, qu'il n'y a que celle des deux moitiés de la développée de l'ellipse qui appartient à ce milieu qui puisse être utile au problème ; de sorte que c'est seulement cette demi-développée qui doit être considérée comme la caustique.

(*) Dans le passage de l'eau dans l'air on a, à très-peu près, $p=4$, $q=3$, d'où $n=\frac{4}{3}$, $m=\frac{\sqrt{7}}{3}$, ou sensiblement $m=\frac{8}{9}$. Cela donne $\frac{n}{m}=\frac{3}{2}$; c'est-à-dire que l'axe vertical de l'ellipse est à son axe horizontal environ dans le rapport de 3 à 2.

S'il s'agit du passage du verre dans l'air, on aura, à très-peu près $p=3$, $q=2$, d'où $n=\frac{3}{2}$, $m=\frac{\sqrt{5}}{2}$, ou sensiblement $m=\frac{9}{8}$. Cela donne $\frac{n}{m}=\frac{4}{3}$, c'est-à-dire que l'axe vertical de l'ellipse est à son axe horizontal environ dans le rapport de 4 à 3.

S'il s'agit enfin du passage du verre dans l'eau, on aura, à très-peu près, $p=9$, $q=8$, d'où $n=\frac{9}{8}$, $m=\frac{\sqrt{17}}{8}$, ou sensiblement $m=\frac{1}{2}$. Cela donne $\frac{n}{m}=\frac{9}{4}$, c'est-à-dire que l'axe vertical de l'ellipse est à son axe horizontal environ dans le rapport de 9 à 4.

En général, l'ellipse est d'autant plus alongée que les pouvoirs réfringens des deux milieux sont moins différens.

8.

8. De ce qui précède, et de la figure connue de la développée de l'ellipse, il est facile de déduire diverses conséquences, dont les plus remarquables sont les suivantes :

1.° Tant que l'œil du spectateur ne sort pas de la verticale qui passe par le point lumineux, l'image de ce point ne sort pas non plus de cette verticale, sur laquelle l'œil peut d'ailleurs se mouvoir sans que cette image paraisse aucunement changer de place. Elle paraît toujours d'ailleurs plus rapprochée de la surface de l'eau que l'objet lui-même, et d'une quantité constamment proportionnelle à l'enfoncement de cet objet (*).

2.° Si l'œil se meut sur la surface même de l'eau, à mesure qu'il s'éloignera de la verticale menée par le point lumineux, l'image de ce point s'éloignera aussi de cette même verticale et dans le même sens, en se rapprochant peu à peu de la surface de l'eau. Lorsque l'œil se trouvera distant de la verticale de la

(*) Si l'œil est dans l'air, suivant que l'objet sera dans l'eau ou dans le verre, son image se trouvera rapprochée d'un *quart* ou d'un *tiers* du plan horizontal qui sépare les deux milieux. Si l'œil est dans l'eau et l'objet dans le verre, ce rapprochement sera seulement d'un *neuvième.*

Lorsque M. Lenthéric soutint, à la faculté des sciences de Montpellier, la thèse dont il a été question ci-dessus, un des juges lui objecta que la réfraction étant nulle dans le sens normal, l'objet doit être vu à sa véritable place lorsque l'œil se trouve verticalement au-dessus. Cela pourrait être vrai, si l'ouverture de la prunelle était un point mathématique ; mais cette ouverture est la plus grande des deux bases d'un tronc de cône formé par ceux d'entre les rayons lumineux qui, étant sortis de l'eau, parviennent à l'œil. Ce tronc de cône a sa plus petite base à la surface de l'eau, et cette dernière est, à son tour, la base d'un cône entier, ayant son sommet au point lumineux, et comprenant les mêmes rayons dans l'eau. Or, c'est au sommet du cône, dont le tronc pose sur l'œil, que l'image doit être aperçue ; et, comme ce cône est plus obtus que celui qui a son sommet à l'objet, il s'ensuit que l'image doit être plus voisine de l'œil que ne l'est cet objet.

quantité $\frac{k}{n}$, l'image se confondra avec lui ; c'est-à-dire que cette image sera aussi à la surface de l'eau et à la distance $\frac{k}{n}$ de la verticale qui passe par l'objet. Passé ce terme, l'œil aura beau s'écarter davantage, il verra toujours l'objet à la même place à la surface de l'eau (*).

3.° Dans toute situation intermédiaire de l'œil, l'image paraîtra toujours hors de la verticale du même côté que lui, et plus élevée que l'objet. Si, en partant d'une situation donnée, cet œil s'élève verticalement, il verra l'image s'enfoncer par degrés, en se rapprochant de la verticale; ce sera le contraire si l'œil descend verticalement. Si, partant de la même situation, l'œil se meut horizontalement, en s'écartant de la verticale, l'image s'en écartera dans le même sens et se rapprochera peu à peu de la surface de l'eau. On reconnaîtra enfin que l'œil, mu obliquement, dans une direction rectiligne, parcourt une tangente à la caustique, lorsque, malgré son mouvement, l'image lui semblera immobile. Cette circonstance pourrait même offrir un moyen de déterminer la caustique d'une manière expérimentale, et d'en conclure ensuite le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction.

9. De ce que les caustiques relatives à différens points sont semblables, et semblablement situées par rapport à la ligne de niveau, résulte un procédé graphique assez simple pour déterminer le lieu de l'image de tant de points visibles qu'on voudra. Soit toujours CX (fig. 4) le niveau supérieur de l'eau, et soit O′ le lieu fixe

---

(*) L'œil étant dans l'air, suivant que l'objet sera dans l'eau ou dans le verre, la distance $\frac{k}{n}$ sera les *trois quarts* ou les *deux tiers* de l'enfoncement de l'objet. Si l'œil est dans l'eau et l'objet dans le verre, cette distance sera les *huit neuvièmes* de l'enfoncement de cet objet.

de l'œil ; sur la verticale CP, conduite par O', on prendra arbitrairement un point P, pour lequel on tracera avec soin la caustique MNM', que nous appellerons la caustique normale. On fera bien d'ailleurs de prendre le point P le plus bas possible, afin d'avoir une caustique de plus grande dimension. Cette caustique, ainsi tracée, une fois pour toutes, rien ne seraplus aisé que d'assigner l'image d'un point donné quelconque, pour un œil placé en O'.

Soit, en effet, P' le point dont il s'agit; en menant PP', son point d'intersection S avec CX sera évidemment le centre de similitude des caustiques relatives aux points P, P'. On menera P'O' et SO' qu'on fera couper en O par une parallèle PO à P'O'. On menera par O, à la caustique normale, la tangente O*p* la touchant en *p*. On menera enfin S*p* qu'on fera couper en *p'* par une parallèle O'*p'* à O*p*; et alors, de même que *p* est l'image de P, pour un œil placé en O; *p'* sera l'image de P', pour un œil placé en O', et conséquemment le point demandé.

10. En renversant cette construction, on pourra déterminer, pour une situation donnée de l'œil, en quel lieu doit se trouver un point lumineux, pour que son image soit vue en un point donné.

Soit toujours O' le lieu de l'œil, et soit *p'* l'image donnée d'un point dont il faut assigner la situation. On menera *p'*O' et, parallèlement à cette droite, une tangente *p*O à la caustique normale. *p* étant le point de contact de cette tangente, on menera *pp'* coupant CX en S, et SO' coupant *p*O en O. On menera enfin OP, et ensuite SP, coupée en P' par une parallèle O'P' à OP. Il est clair qu'alors P étant, pour l'œil placé en O, le lieu de l'objet dont l'image est en *p*; P' sera pareillement, pour un œil placé en O', le lieu de l'objet dont l'image est vue en *p'*; c'est-à-dire, que P' sera le point cherché.

11. Sachant ainsi, pour une situation donnée de l'œil, assigner, soit le lieu de l'image d'un point donné quelconque, soit le lieu d'un point dont l'image est donnée; rien ne sera plus aisé que de tracer par points, soit l'image d'une ligne droite ou courbe

plane quelconque située, avec l'œil, dans un plan vertical, soit la ligne dont une ligne donnée droite ou courbe plane située dans un même plan vertical est l'image.

S'il s'agit d'un dessin tant soit peu compliqué, ce qu'il y aura de mieux à faire, sera de tracer à l'avance, soit les images d'une suite de droites verticales et horizontales équidistantes, soit les courbes ayant pour images des droites verticales et horizontales équidistantes. On achèvera ensuite le dessin proposé, de la même manière que l'on trace les *anamorphoses*.

12. Essayons présentement de traduire ces diverses constructions en analise; c'est-à-dire, de déterminer les coordonnées de p' par celles de P', et réciproquement. Appelons $x'y'$ les premières, X', Y' les dernières; tout se réduira évidemment à trouver deux équations de relation entre ces quatre variables et les constantes du problème.

13. Appelons k la longueur arbitraire CP, et h la hauteur CO' de l'œil au-dessus du niveau de l'eau. Tout étant d'ailleurs dans la figure 5, comme dans la figure 4, abaissons du point O la perpendiculaire OT sur CS et du point P' la perpendiculaire P'C' sur la même droite; en menant OC, O'C', TP, CP', les triangles rectangles C'CO' et CTO seront semblables; et il en sera de même des triangles rectangles P'C'C et PCT; on aura donc

$$\mathrm{P'C'} : \mathrm{C'C} :: \mathrm{PC} : \mathrm{CT} ,$$

$$\mathrm{P'C'} : \mathrm{CO'} :: \mathrm{PC} : \mathrm{TO} ;$$

c'est-à-dire;

$$Y' : X' :: k : \mathrm{CT} ,$$

$$Y' : h :: k : \mathrm{TO} ;$$

en conséquence, les équations du point O seront, en ayant égard aux signes

$$x=+\frac{kX'}{Y'}\,,\quad y=-\frac{kh}{Y'}\,. \qquad (1)$$

Désignons, en outre, par x'', y'' les coordonnées du point p de contact de la tangente Op menée par le point O à la caustique relative au point P; en abaissant des points p, p' les perpendiculaires pq, $p'q'$ sur CS, nous aurons

$$\mathrm{CP}:\mathrm{C'P'}::\begin{cases}\mathrm{C}q:\mathrm{C'}q'\,;\\ pq:p'q'\,;\end{cases}$$

c'est-à-dire;

$$k:Y'::\begin{cases}x'':(X'-x')\,;\\ y'':y'\,;\end{cases}$$

d'où, en ayant égard aux signes,

$$x'-X'=-\frac{x''Y'}{k}\,;\qquad y'=-\frac{y''Y'}{k}\,; \qquad (2)$$

il ne s'agit donc plus que de chasser de ces dernières formules x'', y'', en exprimant qu'elles sont les coordonnées d'une tangente menée par le point O à la caustique relative au point P.

14. D'abord, parce que le point p est sur cette caustique, on aura

$$\left(\frac{mx''}{k}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{ny''}{k}\right)^{\frac{2}{3}}=1\,; \qquad (3)$$

d'où, en différentiant;

$$\frac{dy''}{dx''}=-\frac{m}{n}\sqrt[3]{\frac{ny''}{mx''}} \;;$$

en conséquence, l'équation de la tangente en p sera

$$y-y''+\frac{m}{n}(x-x'')\sqrt[3]{\frac{ny''}{mx''}}=0 \;,$$

ou

$$n^2x''(y-y'')^3+m^2y''(x-x'')^3=0 \;;$$

puis donc que cette tangente doit passer par le point O, on aura

$$n^2x''\left(\frac{kh}{Y'}+y''\right)^3-m^2y''\left(\frac{kX'}{Y'}-x''\right)^3=0 \,,$$

ou

$$n^2x''(y''Y'+kh)^3+m^2y''(x''Y'-kX')^3=0 \,. \qquad (4)$$

Il faudrait donc se servir des équations (3, 4) pour chasser x'', y'' des équations (2); mais il revient au même, et il est incomparablement plus simple de se servir de ces dernières qui donnent

$$x''=-\frac{k(x'-X')}{Y'} \,, \qquad y''=-\frac{ky'}{Y'} \,,$$

pour chasser x'', y'' des deux autres. Cela donne, en supprimant les accens, désormais superflus,

$$\left\{\frac{m(x-X)}{Y}\right\}^{\frac{2}{3}}+\left\{\frac{ny}{Y}\right\}^{\frac{2}{3}}=1 \,, \qquad \text{(I)}$$

$$n^2(x-X)(y-h)^3+m^2x^3y=0 \,. \qquad \text{(II)}$$

Ainsi, en prenant l'axe des x à la surface de l'eau et prenant pour axe des y la verticale passant par l'œil, on pourra, à l'aide de ces équations, déterminer, soit au moyen des coordonnées X, Y d'un point les coordonnées x, y de son image, soit au moyen des coordonnées x, y de cette image, les coordonnées X, Y du point auquel elle appartient.

15. Il serait assez difficile de tirer de ces équations les valeurs des coordonnées x, y de l'image d'un point en fonction des coordonnées X, Y de ce point; mais le problème inverse, c'est-à-dire, celui de la détermination des coordonnées X, Y d'un point en fonction des coordonnées x, y de son image est, au contraire, très-facile à résoudre. En éliminant, en effet, $x-X$ entre les deux équations ci-dessus, il vient

$$\left\{\frac{ny}{Y}\right\}^{\frac{2}{3}}\left\{1+\left[\frac{mx}{n(y-h)}\right]^2\right\}=1\,;$$

après quoi l'on tire de l'équation (II) et de celle-ci

$$X=x+\frac{m^2}{n^2}y\left(\frac{x}{y-h}\right)^3, \qquad \text{(III)}$$

$$Y=ny\left\{1+\left[\frac{mx}{n(y-h)}\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}. \qquad \text{(IV)}$$

16. Qu'on ait présentement une ligne droite ou courbe plane, située avec l'œil dans un même plan vertical, et donnée par l'équation

$$\mathrm{F}(X, Y)=0\,,$$

l'équation de son image s'obtiendra en mettant pour X, Y dans celle-ci leurs valeurs données par les équations (III, IV). Que si, au contraire, on donne l'équation

$$f(x, y)=0,$$

d'une ligne droite ou courbe plane, située dans un même plan vertical avec l'œil, et qu'on demande de quelle autre ligne elle est l'image ; il faudra, pour résoudre le problème, combiner l'équation de cette ligne soit avec les équations (I, II) soit avec les équations (III, IV) pour en éliminer x, y ; l'équation résultante en X, Y sera celle de la ligne cherchée ; d'où l'on voit qu'en général ce second problème sera plus difficile à résoudre que le premier.

17. Pour seules applications de ce procédé, nous chercherons l'équation de l'image d'une droite verticale et celle de l'image d'une droite horizontale. Soit une droite verticale donnée par l'équation

$$X=g ;$$

l'équation de son image sera évidemment

$$x+\frac{m^2}{n^2}y\left(\frac{x}{y-h}\right)^3=g ;$$

ou bien

$$n^2(x-g)(y-h)^3+m^2x^3y=0 . \text{(*)}$$

Soit qu'on y fasse $y=0$ ou $y=-\infty$, on a également $x=g$, ce qui nous annonce que la droite et son image se confondent également et à la surface de l'eau et à une profondeur infinie dans

(*) Il est très-digne de remarque que cette courbe (tom. V, pag. 292) est en même temps celle sur laquelle se trouveraient les images d'un point lumineux situé hors de l'eau, sur le prolongement de la verticale dont il s'agit, si la surface du liquide devenait la surface antérieure d'une glace étamée, d'une épaisseur quelconque.

le

le liquide; de sorte que cette droite est elle-même asymptote de son image.

Cherchons sous quel angle l'image dévie de la droite verticale à la surface de l'eau, et quel en est le plus grand écartement. En différentiant l'équation de cette image, on en tire

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{n^2(y-h)^3+3m^2x^2y}{m^2x^3+3n^2(x-g)(y-h)^2}\,.$$

A la surface de l'eau, $\frac{dy}{dx}$ devient la co-tangente de l'angle que fait la verticale avec son image; puis donc qu'on a alors $x=g$, $y=0$, en désignant cet angle par θ, on aura

$$\text{Tang.}\theta=\frac{m^2g^3}{n^2h^3}\;;$$

mais, si l'on désigne par ε l'angle que fait avec la verticale le rayon visuel mené de l'œil au point où la droite et son image percent la surface de l'eau, on aura

$$\text{Tang.}\varepsilon=\frac{g}{h}\;;$$

donc

$$\text{Tang.}\theta=\frac{m^2}{n^2}\,\text{Tang.}^3\varepsilon\;;$$

ainsi, la tangente de l'angle θ, toujours moindre que le cube de la tangente de l'angle ε, et pouvant croître indéfiniment comme celle-ci, est constamment proportionnelle à son cube.

Pour savoir présentement en quel point la tangente à l'image de notre verticale lui est parallèle, et connaître ainsi le *maximum* de son écartement, il suffit d'égaler à zéro le dénominateur de la valeur de $\frac{dy}{dx}$; ce qui donne

$$m^2x^3+3n^2(x-g)(y-h)^2=0 \;;$$

équation qu'il faudra combiner avec l'équation

$$m^2x^3y+n^2(x-g)(y-h)^3=0$$

de l'image, pour avoir les coordonnées du point cherché.

On tire immédiatement de ces équations, en transposant et divisant

$$y=\frac{y-h}{3} \qquad \text{d'où} \qquad y=-\frac{h}{2} \;;$$

ainsi, quels que soient les deux milieux et quelle que soit la distance de l'œil à la verticale dont il s'agit, c'est toujours à une profondeur moitié de la hauteur de l'œil au-dessus de la surface du liquide que le plus grand écartement a lieu.

En substituant cette valeur de y dans la première des deux équations, elle devient

$$4m^2x^3+27n^2h^2(x-g)=0 \;,$$

équation qui n'a évidemment qu'une seule racine réelle qu'on pourrait facilement obtenir par les formules connues.

18. Supposons, en second lieu, qu'il soit question d'une droite horizontale donnée par l'équation

$$Y=-k \;,$$

l'équation de son image sera évidemment

$$k+ny\left\{1+\left[\frac{mx}{n(y-h)}\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}},$$

ou bien

$$n^6k^2(y-h)^6=n^2y^2\{m^2x^2+n^2(y-h)^2\}^3 .$$

ou encore

$$x=\pm\frac{n}{m}(y-h)\sqrt{\left(\frac{k}{ny}\right)^{\frac{2}{3}}-1} .$$

d'où l'on voit que cette courbe est symétrique par rapport à la verticale qui passe par l'œil, ainsi que cela doit être. De plus, comme l'équation est satisfaite en posant simultanément $x=\pm\infty$ et $y=0$, il s'ensuit que la courbe a pour asymptote l'horizontale qui détermine la surface supérieure du liquide ; et c'était encore là un résultat facile à déduire de nos constructions graphiques.

19. On pourrait aussi rechercher si le liquide dans lequel les objets sont supposés plongés amplifie ou réduit leurs dimensions apparentes et s'il donne naissance aux franges colorées ; mais la complication de nos formules nous avertit assez que nous ne pourrions aborder ces questions sans dépasser de beaucoup les bornes que nous devons nous prescrire ici. Nous nous contenterons donc d'observer, relativement à la première de ces deux questions, qu'il résulte de ce qui a été dit (8) que, si l'œil se trouve sur le prolongement d'une verticale plongée dans l'eau et divisée en parties égales, il la verra aussi divisée en parties égales, mais plus petites ; d'où l'on voit que, par l'effet du milieu, les dimensions verticales des objets placés directement au-dessous de l'œil paraissent plus petites ; et il est aisé de déduire de nos constructions que, dans les mêmes circonstances, il en doit être de même de leurs dimensions horizontales. Ainsi, l'effet du milieu sur des objets qui ne s'écartent pas trop de la verticale passant par l'œil doit être de les faire paraître à la fois plus petits et plus rapprochés.

20. Changeons présentement les rôles ; supposons que le point lumineux est dans l'air, tandis que l'œil est, au contraire, plongé dans l'eau. Soit toujours (fig. 6) le plan de la figure un plan vertical passant par l'objet et par l'œil, soit CX l'intersection de ce plan avec la surface de l'eau ; prenons cette droite pour axe des x. Soit P l'objet ; et prenons pour axe des y la verticale CY conduite par P. Soit PI un rayon incident quelconque et Soit IL le même rayon réfracté. Par le point d'incidence I soit menée la verticale indéfinie GH. Soient $\mathrm{CP}=k$, $\mathrm{CI}=z$; et soit toujours le rapport du sinus d'incidence dans l'air au sinus de réfraction dans l'eau celui de p à q ; nous aurons

$$\frac{\mathit{Sin}.\mathrm{HIP}}{\mathit{Sin}.\mathrm{GIL}}=\frac{\mathit{Sin}.\mathrm{CPI}}{\mathit{Sin}.\mathrm{GIL}}=\frac{z}{\mathit{Sin}.\mathrm{GIL}\sqrt{k^2+z^2}}=\frac{p}{q}\ ;$$

d'où

$$\mathit{Sin}.\mathrm{GIL}=\frac{qz}{p\sqrt{k^2+z^2}}\ ;$$

donc

$$\mathit{Sin}.\mathrm{XIL}=\frac{\sqrt{p^2k^2+(p^2-q^2)z^2}}{p\sqrt{k^2-z^2}}\ ,\quad \mathit{Cos}.\mathrm{XIL}=\frac{qz}{p\sqrt{k^2+z^2}}\ ;$$

et par suite

$$\mathit{Tang}.\mathrm{XIL}=\frac{\sqrt{p^2k^2+(p^2-q^2)z^2}}{qz}\ .$$

En posant, pour abréger,

$$\frac{p^2-q^2}{p^2}=1-\frac{q^2}{p^2}=m^2\ ,\qquad \frac{q}{p}=n\ ;$$

d'où

$$m^2+n^2=1\ ;$$

nous aurons

$$Tang.\mathrm{XIL}=\frac{\sqrt{k^2+m^2z^2}}{nz}.$$

En conséquence, l'équation du rayon réfracté ou, pour mieux dire, l'équation générale de tous les rayons réfractés relatifs au point P sera

$$y=-\frac{\sqrt{k^2+m^2z^2}}{nz}(x-z);$$

équation dans laquelle z est un paramètre tout-à-fait indéterminé.

21. Il faudrait donc, pour en conclure l'équation de la caustique relative au point P, éliminer z entre cette équation et sa différentielle, prise uniquement par rapport à z; mais cette équation ne différant de sa correspondante (4), relative à la première hypothèse, qu'en ce que m et n s'y trouvent respectivement changés en $m\sqrt{-1}$ et $-n$; nous obtiendrons immédiatement la caustique cherchée, en faisant un pareil changement dans l'équation (5) de la caustique qui répond au premier cas, laquelle deviendra ainsi

$$\left(\frac{ny}{k}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{mx}{k}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

21. Or, il résulte de ce qui a été dit (6) que l'équation d'une hyperbole étant

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{x}{a}\right)^2=1,$$

l'équation de sa développée doit être

$$\left(\frac{by}{b^2+a^2}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{ax}{b^2+a^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1;$$

donc, notre caustique n'est autre que la développée d'une hyperbole dont les demi-diamètres principaux sont donnés par les deux équations

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{m}{k}\,,\qquad \frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{n}{k}\,,$$

d'où, en ayant égard à la relation $m^2+n^2=1$, trouvée ci-dessus (20), on tire

$$a=mk\,,\qquad b=nk\,;$$

de sorte que l'équation de cette hyperbole est

$$\left(\frac{y}{nk}\right)^2-\left(\frac{x}{mk}\right)^2=1\,.$$

On a, en outre;

$$\frac{b}{a}=\frac{n}{m}\sqrt{b^2+a^2}=k\,.$$

22. Ainsi, toutes les fois qu'un point lumineux est hors de l'eau, ceux d'entre les rayons qui en émanent qui sont compris dans un même plan vertical quelconque passant par ce point, donnent naissance, après avoir pénétré dans le liquide, à une caustique qui n'est autre chose que la développée d'une hyperbole qui a son centre à la surface du liquide et son axe transverse vertical. L'un des foyers de cette hyperbole est le point lumineux lui-même; et ses dimensions, proportionnelles à l'élévation de ce point au-dessus du niveau de l'eau, ne dépendent que du rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction; de telle sorte que les hyperboles qui répondent à divers points, et par suite leurs développées, sont des courbes semblables. On aurait des conséquences analogues pour deux autres milieux transparens, solides ou fluides; il n'y aurait absolument de changé que le rapport des dimensions des

hyperboles (*) ; pourvu toutefois que le point lumineux fût toujours dans celui des deux milieux qui jouirait du pouvoir refringent le moins énergique. On conçoit, au surplus, qu'il n'y a que celle des deux moitiés de la développée de l'hyperbole qui appartient à ce milieu qui puisse être utile au problème ; de sorte que c'est seulement cette demi-développée qui doit être considérée comme la caustique.

23. La développée de l'hyperbole a, comme elle, des branches infinies ; mais, a-t-elle aussi comme elle des asymptotes ? Si l'on voulait s'en tenir au raisonnement employé par la presque totalité des auteurs de géométrie analitique pour la recherche de ces sortes de lignes dans l'hyperbole, on serait d'abord tenté de le croire. On tire, en effet, de l'équation de cette développée

$$y=\pm\frac{m}{n}x\sqrt[\frac{2}{3}]{1+\left(\frac{k}{mx}\right)^{\frac{2}{3}}}\,;$$

or, pourrait-on dire, à mesure que x deviendra plus grand, le facteur radical du second membre tendra sans cesse à devenir l'unité;

(*) Dans le passage de l'air dans l'eau, on trouve, à très-peu près, $m=\frac{2}{3}$; $n=\frac{3}{4}$, d'où $\frac{n}{m}=\frac{9}{8}$; c'est-à-dire que l'axe transverse de l'hyperbole est à son axe horizontal sensiblement dans le rapport de 9 à 8.

S'il s'agit du passage de l'air dans le verre, on aura, à très-peu près, $m=\frac{3}{4}$, $n=\frac{2}{3}$, d'où $\frac{n}{m}=\frac{8}{9}$; c'est-à-dire que l'axe transverse de l'hyperbole est à son axe horizontal sensiblement dans le rapport de 8 à 9.

Si enfin, il est question du passage de l'eau dans le verre, on aura, à très-peu près, $m=\frac{4}{9}$, $n=\frac{8}{9}$, $\frac{n}{m}=2$; c'est-à-dire que l'axe transverse de l'hyperbole sera sensiblement double de son axe horizontal.

En général, l'axe transverse sera d'autant plus grand par rapport à l'autre, que les pouvoirs refringens seront moins différens.

donc aussi, à mesure que x deviendra plus grand, cette équation tendra sans cesse à se réduire à

$$y=\pm\frac{m}{n}x\ ;$$

et le deviendra, en effet, lorsque x deviendra indéfini; d'où il paraîtrait naturel de conclure que la courbe a deux asymptotes passant par l'origine; et comme l'équation des asymptotes de l'hyperbole est

$$y=\pm\frac{n}{m}x\ ,$$

il s'ensuivrait que les asymptotes de la développée sont respectivement perpendiculaires à celles de la courbe.

24. La vérité est pourtant que la développée de l'hyperbole n'a point d'asymptotes. Pour nous en convaincre, cherchons l'équation de la tangente à cette courbe par l'un de ses points; en différentiant son équation, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{m}{n}\sqrt[3]{\frac{ny}{mx}}\ ;$$

d'où il suit que l'équation de la tangente à la courbe par un point (x', y') pris sur son périmètre est

$$y-y'=\frac{m}{n}\sqrt[3]{\frac{ny'}{mx'}}(x-x')\ ;$$

Si l'on veut connaître à quelle distance de l'origine cette tangente coupe l'axe des y, il suffira de faire $x=0$ dans son équation, ce qui donnera, pour la distance demandée

$$y=y'-\frac{m}{n}x'\sqrt[3]{\frac{ny'}{mx'}}\ ,$$

ou encore

$y=y'$

$$y=y'-\frac{1}{n}\left(\frac{mx'}{k}\right)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{nk^2y'};$$

Mais, d'après la situation du point (x', y'), on a

$$\left(\frac{mx'}{k}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{ny'}{k}\right)^{\frac{2}{3}}-1;$$

donc, en substituant,

$$y=y'-\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{ny'}{k}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right\}\sqrt[3]{nk^2y'},$$

ou, en développant et réduisant,

$$y=\sqrt[3]{\frac{k^2y'}{n^2}},$$

quantité qui devient infinie en même temps que y'. On voit donc qu'à mesure que le point de contact s'éloigne du point de rebroussement de la courbe, la tangente coupe l'axe qui passe par ce point à des distances de plus en plus grandes du centre de la courbe; d'où il suit que les tangentes à l'infini, loin de passer par ce centre, en passent, au contraire, à une distance infinie.

Tout ce qu'on peut donc conclure de notre premier raisonnement (23), c'est qu'à mesure que les branches de la développée s'étendent, elles tendent sans cesse à devenir perpendiculaires aux asymptotes, avec lesquelles elles forment constamment un angle obtus du côté du centre. C'est ainsi que les branches de la parabole forment constamment un angle obtus avec la directrice du côté du sommet (*)

25. De tout ce qui précède, il résulte diverses conséquences, dont les plus remarquables sont les suivantes :

1.° Tant que l'œil, plongé dans l'eau, ne sort pas de la verticale qui passe par le point lumineux, situé hors de l'eau, l'image de ce point ne sort pas non plus de cette verticale, sur laquelle l'œil peut d'ailleurs se mouvoir, sans que cette image paraisse aucunement se déplacer. Elle paraît d'ailleurs plus élevée au-dessus de la surface de l'eau que l'objet lui-même, et d'une quantité constamment proportionnelle à l'élévation de cet objet (**).

2.° Si l'œil se meut sur la surface même de l'eau, à mesure qu'il s'éloignera de la verticale menée par le point lumineux, l'image de ce point s'éloignera aussi de cette verticale, mais en sens inverse, et en s'éloignant de plus en plus de la surface de l'eau.

3.° Dans toute situation intermédiaire de l'œil, l'image paraîtra toujours hors de la verticale du côté opposé, et plus élevée que l'objet. Si, en partant d'une situation donnée, cet œil s'enfonce verticalement dans le liquide, il verra l'image descendre peu à peu, en se rapprochant de la verticale ; ce sera le contraire, si l'œil s'élève vers la surface de l'eau. Si, partant de la même situation, l'œil se meut horizontalement, en s'écartant de la verticale, l'image

(*) On voit, par cette discussion, que c'est avec beaucoup de raison que M. l'examinateur Reynaud rejette, comme vicieuse, la manière ordinaire de déterminer les asymptotes de l'hyperbole.

(**) Si l'œil est dans l'eau et l'objet dans l'air, cette élévation sera d'*un tiers* en sus. Si l'œil est dans le verre, suivant que l'objet sera dans l'air ou dans l'eau, ce surcroit d'élévation sera d'*une moitié* ou d'*un huitième* en sus.

s'en écartera en sens inverse, en s'élevant de plus en plus. On reconnaîtra enfin que l'œil, mu obliquement, dans une direction rectiligne, parcourt une tangente à la caustique, lorsque, malgré son mouvement, l'image lui semblera immobile.

26. Ici, comme dans le cas où l'œil est dans l'air et l'objet dans l'eau, on peut, avec une *caustique normale*, construite avec soin, et une fois pour toutes, déterminer, par un tracé graphique, et pour une situation donnée de l'œil, soit le lieu de l'image d'un point donné, soit le lieu d'un point dont l'image est donnée. Il suffira, pour savoir comment doivent s'exécuter ces constructions, d'appliquer à la figure 7 ce qui a été dit (9, 10).

27. On pourra donc aussi (11) construire graphiquement par points, soit l'image d'une ligne droite ou courbe plane donnée, située dans un même plan vertical avec l'œil, soit la ligne dont une ligne droite ou courbe plane donnée, située dans un même plan vertical avec l'œil, est l'image.

28. En appliquant à la figure 8 les raisonnemens et calculs que nous avons faits (12, 13, 14, 15), on trouvera qu'en prenant l'axe des x sur la surface de l'eau, faisant passer verticalement l'axe des y par l'œil et désignant par h la hauteur de la surface du liquide au-dessus de lui, si X, Y désignent les coordonnées d'un point lumineux, et x, y celles de son image, on aura

$$X=x-\frac{m^2}{n^2}y\left(\frac{x}{y+h}\right)^3,$$

$$Y=ny\left\{1-\left[\frac{mx}{n(y+h)}\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}};$$

formules dont on fera les mêmes usages que de leurs correspondantes (15).

29. Si l'on demande, par exemple, l'image d'une droite verticale donnée par l'équation

$$X=g\ ;$$

l'équation de cette image sera

$$x-\frac{m^2}{n^2}y\left(\frac{x}{y+h}\right)^3=g\ ,$$

ou bien

$$n^2(x-g)(y+h)^3-m^2x^4y=0\ ;$$

Soit qu'on fasse, dans cette équation, $y=0$ ou $y=+\infty$; on a également $x=g$, ce qui nous annonce que la droite et son image se confondent également soit à la surface de l'eau, soit à une hauteur infinie au-dessus du liquide, de telle sorte que la droite est elle-même asymptote de son image.

Cherchons sous quel angle l'image dévie de la droite verticale à la surface de l'eau, et quel en est le plus grand écartement. En différentiant cette équation, on en tire

$$\frac{dy}{dx}=\frac{n^2(y+h)^3-3m^2x^2y}{m^2x^3-3n^2(x-g)(y+h)^2}\ ;$$

à la surface de l'eau, $\frac{dy}{dx}$ devient la co-tangente de l'angle que fait la droite avec son image ; mais, en ce point, on a $x=g$, $y=0$; donc, en désignant cet angle par θ, on aura

$$\text{Tang.}\iota = \frac{m^2g^3}{n^2h^3} = \frac{m^2}{n^2}\,\text{Tang.}^3\epsilon\ ;$$

en posant $\frac{g}{h}=\text{Tang.}\epsilon$; formule qui donnera les mêmes conséquences que son analogue (17).

Le point où le plus grand écartement aura lieu sera donné par le système des deux équations

$$n^2(x-g)(y+h)^3=m^2x^3y\ ,$$

$$3n^2(x-g)(y+h)^2=m^2x^3\quad ;$$

d'où l'on tire, par division,

$$\frac{y+h}{3}=y\ ;\quad \text{d'où}\quad y=\frac{h}{2}\ ,$$

comme nous l'avons trouvé (17) pour le premier cas ; la valeur correspondante de x sera donnée par l'équation du troisième degré

$$4m^2x^3-gn^2h^2(x-g)=0\ ;$$

équation qui peut avoir ses trois racines réelles, mais dont deux doivent être étrangères à la question.

3o. S'agit-il, au contraire, de l'image d'une droite horizontale, donnée par l'équation

$$Y=k\,,$$

l'équation de cette image sera

$$k=ny\left\{1-\left[\frac{mx}{n(y+h)}\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}},$$

ou bien

$$n^4k^2(y+h)^6=y^2\{n^2(y+h)^2-m^2x^2\}^3\,;$$

ou encore

$$x=\pm\frac{n}{m}(y+h)\sqrt{1-\left(\frac{k}{ny}\right)^{\frac{2}{3}}}\,;$$

équation d'une courbe symétrique par rapport à la verticale qui passe par l'œil, ainsi que cela doit être.

31. En raisonnant comme nous l'avons fait (23), on trouverait facilement que cette courbe a deux asymptotes, exprimées par l'équation

$$x=\pm\frac{n}{m}(y+h)\,;$$

mais; puisque nous nous sommes convaincus que cette manière de raisonner est fautive, substituons-lui, comme nous l'avons fait alors, un raisonnement plus rigoureux. Par la différentiation, on tire de l'équation de la courbe

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{m}{n}\,\frac{\sqrt{1-\left(\frac{k}{ny}\right)^{\frac{2}{3}}}}{1-\frac{2y-h}{3y}\left(\frac{k}{ny}\right)^{\frac{2}{3}}}\,;$$

d'où il suit que l'équation de la tangente, en un point (x', y'), est

$$y-y'=\pm\frac{m}{n}\cdot\frac{\sqrt{1-\left(\frac{k}{ny'}\right)^{\frac{2}{3}}}}{1-\frac{2y'-h}{3y'}\left(\frac{k}{ny'}\right)^{\frac{2}{3}}}(x-x') .$$

Si, pour savoir à quelle distance de l'origine cette tangente coupe l'axe des y, on fait, dans son équation, $x=0$, il viendra, en transposant,

$$y=y'\mp\frac{m}{n}\frac{\sqrt{1-\left(\frac{k}{ny'}\right)^{\frac{2}{3}}}}{1-\frac{2y'-h}{3y'}\left(\frac{k}{ny'}\right)^{\frac{2}{3}}}x' .$$

En mettant, dans cette formule, pour x' sa valeur

$$x=\pm\frac{n}{m}(y'+h)\sqrt{1-\left(\frac{k}{ny'}\right)^{\frac{2}{3}}} ,$$

elle deviendra

$$y=y'-(y'+h)\cdot\frac{1-\left(\frac{k}{ny'}\right)^{\frac{2}{3}}}{1-\frac{2y'-h}{3y'}\left(\frac{k}{ny'}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=y'-(y'+h)\frac{\left(\frac{ny'}{k}\right)^{\frac{2}{3}}-1}{\left(\frac{ny'}{k}\right)^{\frac{2}{3}}-\frac{2y'-h}{3y'}} .$$

Or, à mesure que y' deviendra plus grand $\frac{2y'-h}{3y'}$ tendra sans cesse vers la fraction $\frac{2}{3}$; et, comme d'un autre côté $\frac{ny'}{k}$ augmentera sans cesse, la fraction qui multiplie $y'+h$, dans le second terme de la valeur de y, tendra sans cesse à devenir l'unité ; donc, cette valeur de y tendra sans cesse à se réduire à

$$y=y'-(y'+h)=-h\ ;$$

donc, elle deviendra telle, en effet, lorsque y' sera infinie. Ainsi, la courbe a réellement des asymptotes, données par l'équation

$$x=\pm\frac{n}{m}(y+h) \quad \text{ou} \quad y+h=\pm\frac{m}{n}x\ ;$$

d'où l'on voit que ces asymptotes passent par l'œil du spectateur et qu'elles sont les mêmes pour les images de toutes les droites parallèles à la surface de l'eau, puisque k n'entre pas dans leur équation. De plus, l'angle que font avec l'horizontale les asymptotes des hyperboles dont les développées sont les caustiques des différens points visibles ayant pour tangente $\pm\frac{n}{m}$, il en faut conclure que les asymptotes dont il s'agit ici sont perpendiculaires à celles-là (*).

(*) Il se présente ici une sorte de paradoxe qu'il est nécessaire d'expliquer. L'équation

32. On pourrait encore se faire ici des questions analogues à celles que nous avons indiquées (19) ; mais, pour les mêmes raisons

---

$$x=\pm\frac{n}{m}(y+h)\ ,$$

des asymptotes de la courbe image d'une droite horizontale n'étant autre chose que ce que devient l'équation

$$x=\pm\frac{n}{m}(y+h)\sqrt{1-\left(\frac{k}{ny}\right)^{\frac{2}{3}}}\ ,$$

de l'image elle-même, lorsqu'on y fait $k=0$, il paraît s'ensuivre que ces asymptotes sont l'image d'une droite située à la surface de l'eau. D'un autre côté, une telle droite, se trouvant dans le même milieu avec l'œil, ne semblerait avoir d'autre image qu'elle-même ; enfin, il serait absurde de dire que l'image de la ligne de niveau est un angle qui a son sommet à l'œil, puisqu'alors il s'ensuivrait que l'image de la partie de cette ligne, comprise dans l'angle, se trouverait abaissée, ce qui ne saurait être.

Toutes ces difficultés s'évanouissent en recourant à l'équation non résolue de l'image d'une droite horizontale. Nous avons trouvé, pour cette équation,

$$n^4k^2(y+h)^6=y^2\{n^2(y+h)^2-m^2x^2\}^3\ ,$$

et, lorsqne $k=0$, elle se réduit à

$$y^2\{n^2(y+h)^2-m^2x^2\}^3=0\ ;$$

elle se décompose donc alors en ces deux ci que nous avons données alors, nous ne nous y arrêterons pas, et nous nous bornerons seulement à observer que, tandis que, lorsque l'œil est dans l'air, l'effet de la présence de l'eau est de diminuer à la fois la grandeur et la distance des objets plongés dans ce fluide, il arrive précisément le contraire lorsque ces objets sont dans l'air, tandis que l'œil est dans l'eau.

33. Nous terminerons par traiter brièvement nos deux problèmes dans toute leur généralité, c'est-à-dire, en embrassant à la fois les trois dimensions de l'espace; et d'abord occupons-nous de leur résolution graphique.

34. Soit conduite par l'œil une verticale, et par cette verticale soit conduit un plan vertical quelconque sur lequel soit tracée la caustique répondant à un quelconque des points de cette droite.

Cela posé, veut-on l'image p d'un point P quelconque de l'espace, ou le point P dont un point donné quelconque p de l'espace est l'image; par l'œil et par le point donné on conduira un plan vertical qu'on imaginera tourner ensuite autour de son intersection avec le premier, jusqu'à ce qu'il se confonde avec lui, en entraînant d'ailleurs le point donné dans le mouvement. On appliquera alors les méthodes données (9, 10, 26) à la recherche

---

$$y=0\,, \qquad x=\pm\frac{n}{m}(y+h)\,,$$

dont la première a lieu dans toute l'étendue de la valeur de x, tandis que la seconde n'a lieu que jusqu'au niveau de l'eau. La partie d'une droite située à la surface de l'eau interceptée entre les asymptotes sera donc vue à sa véritable place, tandis que ses prolongemens, de part et d'autre, seront vus à la fois à leur véritable place et sur ces mêmes asymptotes.

du point inconnu qui, entraîné de nouveau avec le plan mobile, se trouvera à sa véritable place, lorsque ce plan aura lui-même repris sa situation primitive.

35. Au moyen de ce qui précède, on pourra donc tracer par points, soit l'image d'une ligne droite ou courbe plane ou à double courbure ou même d'une surface courbe donnée et située d'une manière quelconque dans l'espace, soit la ligne ou surface dont une ligne droite ou courbe plane ou à double courbure ou même une surface courbe donnée et située d'une manière quelconque dans l'espace est l'image; on pourra donc, en particulier, résoudre graphiquement la dernière des deux questions proposées à la page 288 du X.e volume de ce recueil.

36. Dans le cas particulier où c'est une surface qui est donnée, si c'est une surface de révolution dont l'axe soit vertical et passe par l'œil, il est évident que la surface cherchée sera exactement dans le même cas. Il suffira donc de déduire la génératrice de l'une de celle de l'autre, ce qui ramenera la question à un problème de géométrie plane.

37. Occupons-nous présentement de la résolution algébrique des mêmes problèmes. Prenons la verticale qui passe par l'œil pour l'axe des z; par son pied, faisons passer sur la surface de l'eau deux droites fixes quelconques, perpendiculaires entre elles, que nous prendrons pour axes des x et des y; soient P un point quelconque et p son image; soient désignées par X, Y, Z les coordonnées du premier et par x, y, z celles du second; ces deux points seront avec l'œil dans un même plan vertical. Prenons l'intersection de ce plan avec la surface du liquide pour axe des r; soient pour ce plan Z, R les coordonnées de P, et soient z, r celles de p; soit enfin désignée par h, soit la hauteur de l'œil au-dessus de la surface du liquide, soit son enfoncement au-dessous; nous aurons (15, 28)

$$R = r \pm \frac{m^2}{n^2} z \left(\frac{r}{z \mp h} \right)^3 ,$$

$$Z = nz \left\{ 1 \pm \left[\frac{mr}{n(z \mp h)} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} ;$$

les signes supérieurs ou inférieurs devant être pris ; suivant que l'œil est au-dessus ou au-dessous de la surface du liquide. Mais on a évidemment

$$X^2 + Y^2 = R^2 , \qquad x^2 + y^2 = r^2 , \qquad Xy = Yx ;$$

d'où

$$X = \frac{Rx}{r} , \qquad Y = \frac{Ry}{r} ;$$

il viendra donc, en substituant,

$$X = x \left\{ 1 \pm \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{z(x^2+y^2)}{(z \mp h)^3} \right\} ,$$

$$Y = y \left\{ 1 \pm \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{z(x^2+y^2)}{(z \mp h)^3} \right\} ,$$

$$Z = nz \left\{ 1 \pm \frac{m^2}{n^2} \frac{x^2+y^2}{(z \mp h)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} ;$$

38. Si donc une surface courbe est donnée par l'équation

$$F(X, Y, Z)=0;$$

en y mettant pour X, Y, Z les valeurs que nous venons d'obtenir, l'équation résultante en x, y, z sera celle de l'image de cette surface. A l'inverse, l'équation

$$f(x, y, z)=0,$$

étant donnée comme celle de l'image d'une surface inconnue, pour avoir l'équation de cette surface, il suffira d'éliminer x, y, z entre cette équation et les valeurs de X, Y, Z en x, y, z.

39. Puisque, donner ou chercher une ligne droite ou courbe, plane ou à double courbure, c'est donner ou chercher les deux surfaces dont elle est l'intersection; il sera toujours facile d'obtenir, par ce qui précède, soit les deux équations de l'image d'une ligne dont les deux équations sont données, soit les deux équations d'une ligne dont l'image est donnée par ses deux équations.

40. Nous avons vu (17, 18, 29, 30) que l'image d'une droite, soit verticale, soit horizontale, située avec l'œil dans un même plan vertical, est généralement une ligne courbe; or, une ligne courbe ne saurait être un cas particulier d'une ligne droite; puis donc qu'une droite verticale ou horizontale n'est qu'un cas particulier d'une droite inclinée, on en peut conclure qu'à plus forte raison l'image d'une droite située d'une manière quelconque dans un même plan vertical avec l'œil, est généralement une ligne courbe.

Mais une droite située dans un même plan vertical avec l'œil n'est qu'un cas particulier d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace ; donc, pour la même raison que ci-dessus, l'image d'une ligne droite, de quelque manière qu'elle soit située, tant par rapport à l'œil que par rapport à la surface qui sépare les deux milieux, est généralement une ligne courbe (*).

Nous terminerons en observant qu'il y a une différence très-marquée entre la manière dont nous voyons les poissons et celle dont ils nous voient. Lorsqu'en effet nous regardons ce qui se passe dans une eau claire, et point très-profonde, nous pouvons apercevoir, autour de la verticale qui passe par notre œil, tous les objets qui ne sont pas trop loin de nous et leurs images ne sont que peu déformées ; en un mot, notre situation par rapport à ces objets diffère peu de ce qu'elle serait si le liquide n'existait pas. Pour les poissons, au contraire, les images des objets situés hors de l'eau se trouvent toutes renfermées dans l'intérieur d'un cône droit ayant son sommet à l'œil et son axe vertical, et dont l'angle générateur est d'environ $48^{\circ}.22'$ Les poissons se trouvent donc dans le même cas que s'ils étaient placés au fond d'un fossé creusé en entonnoir. En outre, pour peu qu'un objet soit voisin de la surface du liquide éloigné de l'axe du cône, son image, d'ailleurs très-applatie, se trouve presque sur la surface du cône et à une immense distance de son sommet, de sorte qu'elle doit presque échapper à la vue et paraître extrêmement déformée. Les poissons ne peuvent donc voir d'une manière bien distincte que les objets

---

(*) C'est donc une erreur de supposer, comme paraissent le faire la plupart des physiciens, que, lorsqu'on plonge en partie et obliquement dans l'eau un bâton rectiligne, la partie plongée se présente à l'œil sous un aspect rectiligne, différant seulement en direction de la partie située hors de l'eau ; La Fontaine a donc été fondé à dire :

Quand l'eau *courbe* un bâton, ma raison le redresse ;

et il se serait exprimé d'une manière moins exacte, s'il eût dit : quand l'eau *brise*, etc.

peu élevés au-dessus de l'eau et peu distans de la verticale passant par leur œil (*).

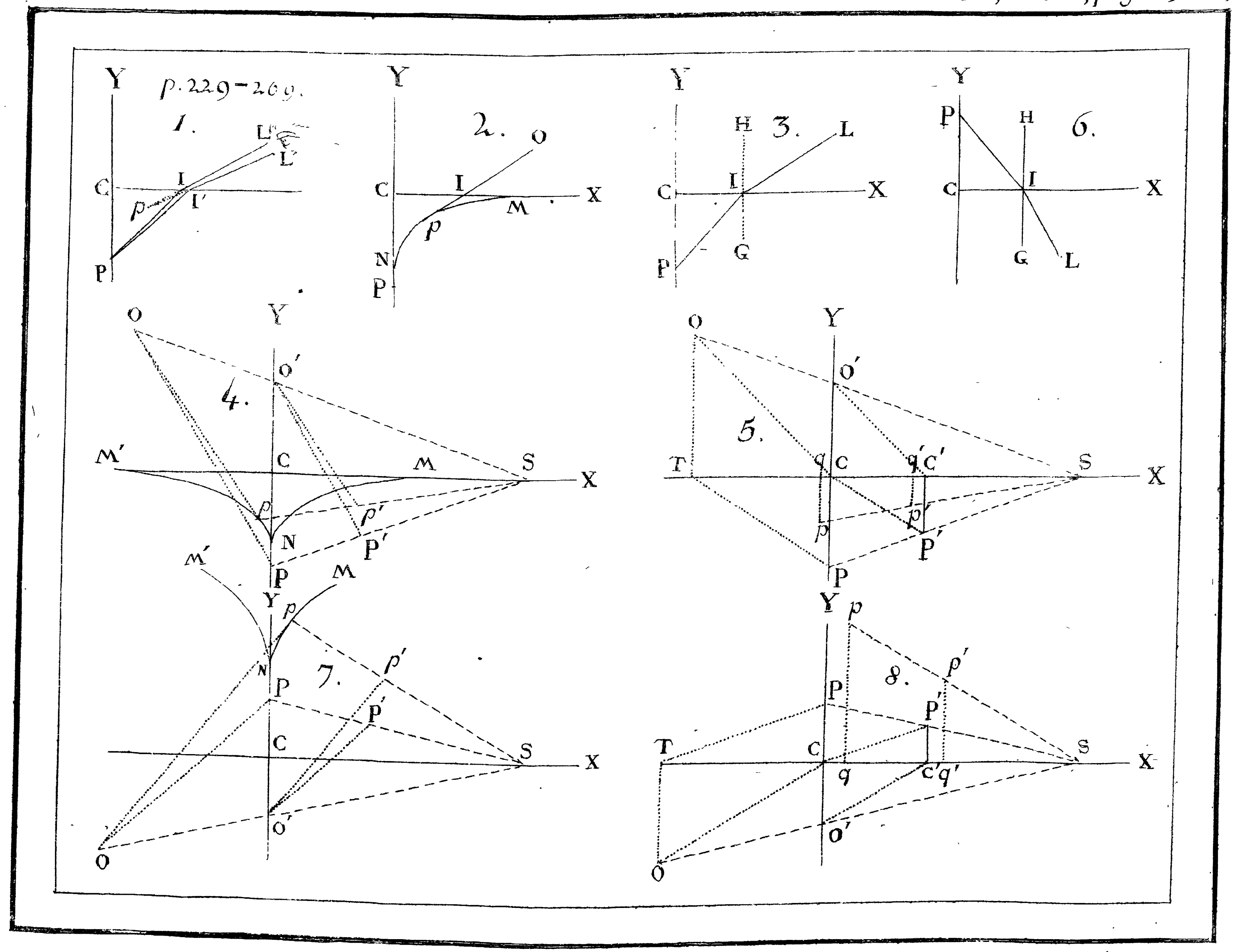
(*) Un des juges de M. Lentheric s'est cru fondé à infirmer ces conclusions par la considération que l'œil des poissons n'est pas conformé comme le nôtre ; mais puisque, dans ce que nous avons dit sur la manière dont nous voyons les poissons, nous n'avons supposé autre chose, sinon que notre œil était conformé pour voir dans l'air ; il s'ensuit que, pourvu que l'œil des poissons soit fait pour voir dans l'eau, ces conclusions doivent être admises.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie transcendante.

I. QUELLE est la courbe plane qui jouit de cette propriété que, si un angle d'une grandeur donnée et invariable se meut sur son plan de manière à lui être toujours circonscrit, ses côtés formeront avec la sécante passant par leurs points de contact un triangle constamment semblable à un triangle donné ?

II. Quelle est la surface qui jouit de cette propriété que, si un angle trièdre donné et invariable, mobile dans l'espace, lui est toujours circonscrit, ses faces formeront avec le plan mené par leurs points de contact un tétraèdre semblable à un tétraèdre donné ?



J. D' G. fecit.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Mémoire sur l'intégration des équations linéaires;

Par M. Henri Gerner Schmidten.

L'intégration d'une équation différentielle ne consiste, à proprement parler, qu'à trouver la fonction la plus générale qui satisfasse à l'équation proposée ; et des cas particuliers peuvent seuls donner naissance à des questions relatives à l'évaluation de cette fonction. Pour résoudre ce dernier problème, il faut, en effet, absolument connaître la valeur arithmétique de chacune des quantités dont se compose la fonction dont il s'agit ; et alors il faut avoir autant de méthodes d'évaluation différentes qu'il peut y avoir de relations différentes entre ces mêmes quantités.

De là naît l'impossibilité de donner des méthodes d'évaluation qui soient propres à des équations générales, ainsi que celle de parcourir l'infinie variété des équations particulières qui peuvent s'y trouver implicitement comprises ; d'où il paraît naturel de conclure que l'unique moyen d'avancer cette partie de l'analise et de surmonter les difficultés qu'elle présente, est de trouver des méthodes propres à développer la même fonction sous plusieurs formes différentes, parmi lesquelles on puisse choisir celle qui conviendra le mieux à chaque cas particulier. Ces fonctions doivent d'ailleurs être aussi simples que la nature des équations qui leur donnent naissance peut le comporter ; et les séries qu'elles forment doivent en outre offrir une loi facile à saisir. La méthode qu'offre la série de Taylor (jusqu'ici la seule générale que nous ayons) n'étant d'ailleurs applicable qu'à des cas très-particuliers ; comme il est naturel que les intégrales se compliquent, de plus en plus, à mesure que les équations sont plus générales : on se trouve fondé à considérer l'intégration des équations non linéaires comme surpassant, généralement parlant, les forces de l'analise.

Soit, en effet, y une fonction d'un certain nombre de variables indépendantes, donnée par l'*équation différentielle*

$$\varphi.y=\mathrm{f}.y\ ;$$

$\varphi.y$ étant une fonction qui contient les coefficiens différentiels ou aux différences de l'ordre le plus élevé qui soient dans l'équation proposée, et $\mathrm{f}y$ étant une autre fonction quelconque des variables indépendantes des coefficiens differentiels ou aux différences ; on aura l'*équation intégrale*

$$y=X+\frac{1}{\varphi}\mathrm{f}.y\ ;$$

$\frac{1}{\varphi}$ signifiant la fonction inverse de φ ; et X étant la fonction la plus générale qui satisfasse à l'équation $\varphi.X=0$.

Au moyen de cette relation implicite, on trouvera facilement la valeur explicite de y, par des substitutions successives ; ce sera

$$y=X+\frac{1}{\varphi}\mathrm{f}(X+\frac{1}{\varphi}\mathrm{f}(X+\frac{1}{\varphi}\mathrm{f}(X+\ldots\ldots$$

Maintenant, il se peut que chaque substitution rapproche cette série de la véritable valeur de y ; mais il se peut aussi qu'elle l'en éloigne ; et alors on devra donner une autre forme à la série ; ce qui est toujours possible d'autant de manières differentes qu'il y en aura de partager l'équation entre les deux termes $\varphi.y$ et $\mathrm{f}.y$.

On voit cependant que la valeur de y restera ; en général, très-compliquée, à moins que $\varphi.y$ et $f.y$ ne soient linéaires par rapport à y, ce qui embrasse déjà une classe d'équation très-étendue et très-importante : celle des *équations linéaires*.

On a, dans ce cas,

$$y=X+\frac{1}{\varphi}fX+\frac{1}{\varphi}f\left(\frac{1}{\varphi}fX\right)+\frac{1}{\varphi}f\left(\frac{1}{\varphi}f\left(\frac{1}{\varphi}fX\right)\right)+\ldots\ldots;$$

et je me propose d'en exposer les principales conséquences, en commençant par la partie la plus simple, qui sert en même temps de base au reste.

§. I.

Des équations différentielles à deux variables.

Le résultat le plus général qu'on ait obtenu sur ces équations, est le théorème de Lagrange, au moyen duquel on sait ramener l'équation la plus générale à une autre qui ne renferme pas de terme indépendant de la fonction inconnue. De plus, on intègre sans difficulté, par des fonctions exponentielles ou algébriques les équations de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+b\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots.+g\frac{dy}{dx}+hy=0;$$

$$\frac{d^n y}{dx^n}+\frac{a}{x}\cdot\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\frac{b}{x^2}\cdot\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots.+\frac{g}{x^{n-1}}\frac{dy}{dx}+\frac{h}{x^n}=0;$$

et par des intégrales définies celles de la forme

$$(a_0+b_0x)\frac{d^n y}{dx^n}+(a_1+b_1x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+(a_2+b_2x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+(a_n+b_nx)=0;$$

mais les méthodes qu'a donné Euler pour intégrer les équations, par l'introduction d'une nouvelle variable, ne s'emploient avec succès que lorsque les intégrales en sont déjà données par des séries ; et l'on n'a pas de moyen direct de trouver la forme de la série qui satisfait à une équation proposée.

D'ailleurs, on voit facilement qu'en général il doit être impossible d'intégrer une équation sous forme finie, puisqu'il n'y a qu'une suite infinie qui puisse embrasser, dans sa généralité, toutes les sortes de transcendantes que l'intégrale peut comporter, et dont un petit nombre seulement a été introduit dans le langage analitique.

Si l'on savait transformer l'équation proposée en une différentielle complète, on la ramenerait ainsi à une autre d'un ordre moins élevé ; et, en continuant de la même manière, on parviendrait enfin à l'expression générale de la fonction inconnue. Il s'agirait donc de mettre l'équation proposée

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + My = N,$$

dans laquelle P, Q, ... M, N sont des fonctions de x, sous la forme

$$\frac{1}{X_n}\frac{d.}{dx}\left(\frac{X^n}{X^{n-1}}\frac{d.}{dx}\left(\ldots\frac{X_3}{X_2}\frac{d.}{dx}\left(\frac{X_2}{X_1}\frac{d.}{dx}\left(X_1 y\right)\right)\ldots\right)\right) = N;$$

X_1, X_2, X_3, ... X_n étant des fonctions de x qu'il faut déterminer en effectuant les différentiations, et comparant ensuite les coefficiens à ceux de l'équation proposée. Cette méthode conduit à un système de n équations simultanées, et toutes non linéaires, à l'exception de celle-ci

$$P = \frac{dX_1}{X_1 dx} + \frac{dX_2}{X_2 dx} + \ldots + \frac{dX_n}{X_n dx},$$

et par conséquent beaucoup plus difficiles à résoudre que l'équation proposée. Ces opérations ont quelque analogie avec celles que l'on fait, avec tout aussi peu de succès, sur les équations algébriques des degrés supérieurs, à une seule inconnue, dans le dessein de les résoudre. Cependant on est parvenu, par des considérations particulières, à présenter, sous forme finie, les racines des quatre premiers degrés de celles-ci ; mais il faut observer que cela ne s'exécute qu'au moyen de transcendantes particulières pour chaque degré, auxquelles, à raison du fréquent usage qu'on en fait, on a cru devoir affecter des symboles particuliers, qui leur donnent, du moins, quant aux notations, l'apparence de fonctions finies. Ainsi, par exemple, la racine quarrée est déjà une transcendante à l'égard de la racine de l'équation du premier degré ; de sorte que l'on ne doit chercher, par aucune analogie, à présenter l'intégrale de l'équation du second ordre sous forme finie, au moyen des fonctions exponentielles qui représentent, en général, celle du premier ordre. En effet, si l'on compare les quantités X_1, X_2 avec P, Q, dans l'équation du second ordre, on aura

$$P = \frac{dX_2}{X_2 dx} + \frac{dX_1}{X_1 dx}, \qquad Q = \frac{d.}{dx}\frac{dX_1}{X_1 dx} + \frac{dX_1}{X_1 dx}\cdot\frac{dX_2}{X_2 dx};$$

en posant donc

$$\frac{dX_1}{X_1 dx} = z,$$

ce qui donne

$$\frac{dz}{dx} + zP - z^2 = Q,$$

si l'on fait ensuite

$$z = -\frac{dy}{y dx},$$

il viendra

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0\ ,\quad (1)$$

c'est-à-dire l'équation proposée. En faisant, au contraire,

$$\frac{dX_2}{X_2dx}=z\ ,$$

on aurait

$$\frac{dz}{dx}-Pz+z^2=\frac{dP}{dx}-Q\ ;$$

d'où, en posant,

$$z=\frac{dy}{ydx}\ ,$$

on conclurait

$$\frac{d^2y}{dx^2}-P\frac{dy}{dx}+\left(Q-\frac{dP}{dx}\right)y=0\ .\qquad (2)$$

Ainsi l'on fait dépendre l'équation (1) de (2) ; mais ce résultat n'est que très-particulier, et ne donne pas lieu à d'autres tranformations, attendu que le même procédé, appliqué à (2), reconduit à (1).

On pourrait encore former des équations par les quantités données X_1, X_2, X_3 ......, comme on forme des équations algébriques au moyen de leurs racines ; mais ces recherches ne conduisent qu'à des cas particuliers et peu utiles. Cependant, il nous sera facile de découvrir les cas les plus généraux ou la détermination des quantités X_1, X_2, X_3 ...., dépend seulement d'opérations algébriques. Il nous suffit pour cela de considérer l'equation du troisième ordre, pour laquelle on aura, en employant les notations de Lagrange, les relations suivantes :

$$P = \frac{X'_1}{X_1} + \frac{X'_2}{X_2} + \frac{X'_3}{X_3} ;$$

$$Q = \frac{1}{X_3}\left(\frac{X_3 X'_1}{X_1}\right) + \frac{1}{X_3}\left(\frac{X_3 X'_2}{X_2}\right) + \frac{1}{X_2}\left(\frac{X_2 X'_1}{X_1}\right)' ,$$

$$R = \frac{1}{X_3}\left(\frac{X_3}{X_2}\left(\frac{X_2}{X_1} X'_1\right)'\right)' .$$

Il faut donc, par exemple, qu'on ait

$$\frac{X'_3}{X_3} = c_3 \frac{X'_1}{X_1} , \quad \text{d'où} \quad X_3 = b_3 X_1^{c_3} ;$$

on aura de même

$$X_2 = b_2 X_1^{c_2} ;$$

b_3, c_3, b_2, c_2, ... étant des constantes. On doit encore avoir l'équation

$$\frac{1}{X_3}\left(X_3 \frac{X'_1}{X_1}\right)' = \frac{c_4}{X_2}\left(\frac{X_2 X'_1}{X_1}\right)' ,$$

qui revient à

$$\frac{X''_1}{X'_1} + \frac{c_4(c_2 - 1) - (c_3 - 1)}{1 - c_4} \frac{X'_1}{X_1} = 0 ;$$

c_4 étant une nouvelle constante. Posant donc

$$\frac{c_4(c_2 - 1) - (c_3 - 1)}{1 - c_4} = \delta ,$$

on aura

$$X_1^{\delta} X'_1 = h , \quad \text{et} \quad X_1 = (g + (\delta + 1)x)^{\frac{1}{\delta + 1}} ,$$

forme qui devient exponentielle, lorsque $\delta = -1$.

Cette forme est seulement deduite de la considération des deux coefficiens ; mais on trouvera facilement que, pour un ordre quelconque, la relation entre les quantites X_1, X_2, X_3, ..., que nous avons établie, réduira chaque coefficient à une quantité algébrique, multipliee ou non par une puissance de la variable indépendante telle que l'exposant est toujours $-m$, celui de la différentielle correspondante étant $n-m$. La détermination des quantités inconnues dependra, en tous cas, d'une équation du degré n ; et, si l'on sait résoudre celle-ci, on a l'integrale de l'équation

$$\frac{d^ny}{dx^n}+\frac{a}{x}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\frac{b}{x^2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+\frac{gy}{x^n}=X,$$

ou de celle-ci

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+b\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+gy=X,$$

comme on le sait depuis long-temps.

On voit ainsi que l'introduction des quantités X_1, X_2, X_3, ...; auxquelles, par analogie, on pourrait donner le nom de *racines*, ne facilite l'intégration que dans des cas particuliers, et qu'il faut modifier le procédé pour obtenir des résultats généraux. En observant que la determination d'un nombre m de ces quantités que nous appellerons pour un moment *racines*, conduit à une équation de l'ordre m ; on pourrait partager l'équation proposée en deux parties, à chacune desquelles on donnerait la forme de différentielle parfaite, par le moyen d'équations des deux ordres m et $n-m$. En effet, soit l'équation proposée

$$\frac{d^ny}{dx_n}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+My=N,$$

on lui donnera la forme

$\frac{1}{X_m}$

$$\frac{1}{X_m}\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x}\left(\frac{X_m}{X_{m-1}}\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x}\left(\ldots\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x}\left(\frac{X_2}{X_1}\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x}\left(\frac{X_1\mathrm{d}^{n-m}y}{\mathrm{d}x^{n-m}}\right)\right)\ldots\right)\right)$$

$$=N+\frac{1}{Z_{n-m}}\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x}\left(\frac{Z_{n-m}}{Z_{n-m-1}}\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x}\left(\ldots\ldots\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x}\left(Z_1y\right)\ldots\right)\right);$$

et faisant, pour abréger, le second membre $=\mathrm{f}(y)$, on aura l'intégrale générale

$$y=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\ldots\ldots+a_{m+1}x^{n-m-1}$$

$$+a_m\int^{n-m}\frac{1}{X_1}\mathrm{d}x^{n-m}+a_{m-1}\int^{n-m}\frac{1}{X_1}\int\frac{X_1}{X_2}\mathrm{d}x^{n-m+1}+\ldots\ldots$$

$$+a_1\int^{n-m}\frac{1}{X_1}\int\frac{X_1}{X_2}\int\ldots\int\frac{X_{m-1}}{X_m}\int X_m\mathrm{f}(y)\mathrm{d}x^n\ ;$$

a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... a_1 étant des constantes ; de sorte que, si l'on représente par ω la partie indépendante de y, on aura

$$y=\omega+\int^{n-m}\frac{1}{X_1}\int\frac{X_1}{X_2}\int\ldots\int\frac{X_{m-1}}{X_m}\int X_m\mathrm{f}(\omega)\mathrm{d}x^n$$

$$+\int^{n-m}\frac{1}{X_1}\int\frac{X_1}{X_2}\int\ldots\int X_m\mathrm{f}\left(\int^{n-m}\frac{1}{X_1}\int\frac{X_1}{X_2}\int\ldots\int X_m\mathrm{f}(\omega)\right)\mathrm{d}x^{2n}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Comme on peut choisir m à son gré, on peut trouver un grand nombre de formes différentes, par le seul changement de cette quantité ; et l'on trouverait une infinité de formes différentes, en partageant autrement l'équation proposée. Par exemple, si l'on savait la partager en deux du même ordre, dont chacune fût facilement intégrable, on lui donnerait la forme

$$\frac{1}{X_n}\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{X_n}{X_{n-1}}\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}\left(\ldots\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{X_2}{X_1}\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}\left(X_1 y\right)\right)\ldots\right)\right)$$

$$=N+\frac{1}{Z_n}\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{Z_n}{Z_{n-1}}\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}\left(\ldots\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{Z_2}{Z_1}\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}\left(Z_1 y\right)\right)\ldots\right)\right);$$

et l'on en trouverait l'intégrale complète de deux manières. Ces recherches n'ont, comme l'on voit, aucune difficulté; et c'est pour cette raison que je ne m'arrête pas à discuter les formules générales, dont l'usage s'entendra beaucoup mieux par des exemples particuliers.

Quoique l'on ait, dans ce qui précède, une méthode générale et directe pour trouver, d'une infinité de manières différentes, l'intégrale d'une équation proposée; on trouve encore de grandes difficultés relativement à l'évaluation de cette intégrale, sur-tout lorsque l'équation est d'un ordre un peu élevé.

Toutefois cette méthode embrasse sous un seul point de vue toutes celles qui ont été données jusqu'ici, et résout, d'une manière satisfaisante, un grand nombre d'équations qu'on ne saurait intégrer sans son secours, ou du moins dont on n'obtiendrait l'intégration que par des tâtonnemens plus ou moins heureux. Au surplus, après avoir présenté les intégrales sous la forme de séries, on peut tenter d'employer la méthode d'Euler, pour les ramener à des intégrales définies, mais ces recherches étant de leur nature très-particulières, ce ne saurait être ici le lieu de s'en occuper.

Je vais maintenant appliquer ces principes généraux à l'équation du premier ordre, dont la forme est

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+Py=Q,$$

d'où l'on formera celle-ci :

$$\frac{1}{X_1}\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}(X_1 y)=Q\ ;$$

en comparant; on aura

$$\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}x}=PX_1\ ;$$

dont l'intégrale est

$$X_1=a+\int PX_1\mathrm{d}x\ ;$$

c'est-à-dire,

$$X_1=a(1+\int P\mathrm{d}x+\int P\int P\mathrm{d}x^2+\int P\int P\int P\mathrm{d}x^3+\ldots\ldots\ldots)\ ;$$

a étant une constante arbitraire; et, après avoir trouvé X_1, on aura

$$y=\frac{c}{X_1}+\frac{1}{X_1}\int X_1 Q\mathrm{d}x\ ;$$

c étant une nouvelle constante; mais l'intégrale n'en contient pourtant qu'une, attendu que a disparaît dans le second terme.

Telle est donc l'intégrale complète la plus simple de l'équation du premier ordre, et l'on voit qu'elle se présente nécessairement sous la forme d'une série infinie, à moins que l'on n'adopte quelque nouveau symbole pour représenter la valeur de X_1. On trouve, en effet,

$$X_1=a\left\{1+\frac{\int P\mathrm{d}x}{1}+\frac{(\int P\mathrm{d}x)^2}{1.2}+\frac{(\int P\mathrm{d}x)^3}{1.2.3}+\ldots\right\}\ ;$$

ce qui revient à

$$ae^{\int P\mathrm{d}x},$$

suivant le signe qu'on a adopté pour la fonction exponentielle; qui est la transcendante la plus simple qui, en général, puisse représenter l'intégrale de l'équation du premier ordre. Malgré cette forme, qu'on a employée avec beaucoup de succès, on trouve encore des difficultés très-grandes, et même insurmontables, à évaluer les intégrales de cet ordre; et si l'on observe combien ces fonctions, que l'on connaît sous le nom de *quadratures*, sont limitées vis-à-vis des intégrales des ordres supérieurs, l'on doit s'attendre à d'autant moins de succès pour l'évaluation de ces dernières formes. Aussi, je ne m'occuperai presque pas des équations supérieures au second ordre qui ne conduiraient à des résultats satisfaisans que dans des cas très-particuliers; et d'ailleurs les applications les plus importantes de l'analise ne conduisent, en général, qu'à des équations du premier ou tout au plus du second ordre.

L'intégrale générale de l'équation du second ordre doit être regardée comme une transcendante irréductible, qui ne s'abaisse aux quadratures que dans des cas très-particuliers; mais ici je me propose seulement de développer quelques-unes des formes générales les plus remarquables qu'on peut lui donner; et alors les cas où elles sont susceptibles de simplification se montrent facilement. Soit l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\,\frac{dy}{dx}+Qy=R\ ;$$

on peut lui donner la forme

$$\frac{1}{X_2}\,\frac{d.}{dx}\left(\frac{X_2}{X_1}\,\frac{d.}{dx}\left(X_1 y\right)\right)=R\ .$$

Mais nous avons déjà observé que, dans ce cas, la détermination des racines X_1, X_2 mène à une équation de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2}-P\,\frac{dy}{dx}+\left(Q-\frac{dP}{dx}\right)y=0\ ;$$

ou à une autre qui est ce que devient la proposée, dans le cas de de $R=0$. Nous avons donc très-peu gagné, et par conséquent, nous mettrons de préférence l'équation sous cette forme

$$\frac{1}{X_1}\frac{d.}{dx}\left(\frac{dy}{dx}X_1\right)=R-Qy\ ,$$

qui donne

$$X_1=e^{\int P dx}\ ,$$

et ensuite

$$y=a_0+a_1\int\frac{dx}{X_1}+\int\frac{1}{X_1}\int X_1 R dx^2-\int\frac{1}{X_1}\int X_1 Q y dx^2\ ;$$

a_0 et a_1 étant des constantes arbitraires. En posant donc

$$a_0+a_1\int\frac{dx}{X_1}+\int\frac{1}{X_1}\int R X_1 dx^2=U\ ,$$

il viendra

$$y=U-\int\frac{1}{X_1}\int X_1 Q U dx^2+\int\frac{1}{X_1}\int X_1 Q\int\frac{1}{X_1}\int X_1 Q U dx^4-\ldots\ldots$$

On trouve une forme qui est quelquefois plus simple en posant l'équation

$$\frac{1}{X_1}\frac{d^2.}{dx^2}(X_1 y)+X_2 y=R\ ;$$

d'où, en comparant,

$$\frac{dX_1}{X_1 dx}=\frac{P}{2}\ ,\quad X_2+\frac{d^2X_1}{X_1 dx^2}=Q\ ;$$

ou

$$X_1=e^{\int\frac{P dx}{2}}\ ;\qquad X_2=Q-\frac{P^2}{4}-\frac{dP}{2dx}\ .$$

En intégrant, on aura

$$X_1 y = a_0 + a_1 x + \int^2 X_1 R \mathrm{d}x^2 - \int^2 X_2 X_1 y \mathrm{d}x^2 ;$$

d'où, en posant

$$a_0 + a_1 x + \int^2 X_1 R \mathrm{d}x^2 = U ,$$

on tirera

$$y = \frac{1}{X_1}\left(U - \int^2 X_2 U \mathrm{d}x^2 + \int^2 X_2 \int^2 X_2 U \mathrm{d}x^4 - \int^2 X_2 \int^2 X_2 \int^2 X_2 U \mathrm{d}x^6 + \ldots\right)$$

Si les fonctions P, Q sont soumises à la seule condition de rendre X_2 égale à une constante c^2, on trouve facilement

$$y = \frac{1}{X_1}\left\{\mathrm{Sin.}(\alpha x + \beta) + \mathrm{Sin.}cx \int \frac{1}{\mathrm{Sin.}^2 cx} \int \mathrm{Sin.}cx . X_1 R \mathrm{d}x^2\right\}$$

α et β étant de nouvelles constantes arbitraires.

On pourrait encore parvenir à un grand nombre d'autres formules ; mais, ces recherches n'ayant aucune difficulté, d'après ce qui précède, je ne donnerai plus qu'un seul exemple, dont l'emploi devient nécessaire dans des cas particuliers, comme je le ferai voir ensuite. En mettant l'equation proposée sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + qy = r + s\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q_1 y\right),$$

et supposant d'ailleurs que chacun des deux membres s'intègre facilement, on fera

$$\frac{1}{X_2}\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{X_2}{X_1}\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}\left(X_1 y\right)\right) = r + \frac{s}{Z_2}\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{Z_2}{Z_1}\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}\left(Z_1 y\right)\right) ;$$

d'où

$$y=\frac{a_0}{X_1}+\frac{a_1}{X_1}\int\frac{X_1}{X_2}\mathrm{d}x+\frac{1}{X_1}\int\frac{X_1}{X_2}\int X_2 r\mathrm{d}x^2$$

$$+\frac{1}{X_1}\int\frac{X_1}{X_2}\int\frac{X_2 s}{Z_2}\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x}\left(\frac{Z_2}{Z_1}\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x}\left(Z_1 y\right)\right)\mathrm{d}x^2\ ;$$

représentant ensuite par U la partie indépendante de y, on aura

$$y=U+\frac{1}{X_1}\int\frac{X_1}{X_2}\int\frac{X_2 s}{Z_2}\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x}\left(\frac{Z_2}{Z_1}\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x}\left(Z_1 U\right)\right)\mathrm{d}x^2+\ldots\ldots$$

On verra facilement que les grandes difficultés attachées à cette méthode tiennent principalement aux signes d'intégration, lorsque les fonctions X_1, X_2, X_3, ... sont un peu générales ; mais on trouvera, en même temps, qu'il doit nécessairement y avoir de ces signes dans l'intégrale complète, qui ne saurait sans cela contenir des constantes arbitraires. Donc, s'il y avait des questions où l'on n'eût besoin que d'une intégrale particulière, on parviendrait bien plus aisément à l'expression de la fonction inconnue, en mettant l'équation sous la forme

$$y=\frac{R}{Q}-\frac{1}{QX_1}\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x}\left(X_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right),$$

dans laquelle

$$X_1=e^{\int P\mathrm{d}x}\ ;$$

en employant alors les notations de Lagrange, on aurait

$$y=\frac{R}{Q}-\frac{1}{QX_1}\left(X_1\left(\frac{R}{Q}\right)'\right)'+\frac{1}{QX_1}\left(X_1\left(\frac{1}{QX_1}\left(X_1\left(\frac{R}{Q}\right)'\right)'\right)'\right)'-\ldots$$

Il serait facile aussi de présenter un grand nombre de formes pour les intégrales des équations supérieures ; mais les raisons que j'ai données plus haut me les font passer sous silence ; et je vais m'occuper de quelques exemples particuliers qui sont plus propres à montrer l'usage et l'esprit de la méthode.

Nous avons vu quelles sont les équations les plus générales qui s'intègrent immédiatement, sous forme finie, par des fonctions exponentielles ou par des puissances ; je vais faire voir maintenant quelle est l'équation la plus générale dont l'intégrale se développe par une ou plusieurs séries de puissances ascendantes ou descendantes de la variable indépendante.

Pour cela, il faut que l'équation soit réductible à la forme

$$x^{-\alpha_n}(x^{\alpha_n-\alpha_{n-1}}(\ldots\ldots(x^{\alpha_2-\alpha_1}(x^{\alpha_1}y)')'\ldots\ldots)')'$$

$$=ax^{b}+\delta x^{i-\beta_n}(x^{\beta_n-\beta_{n-1}}(\ldots\ldots(x^{\beta_2-\beta_1}(x^{\beta_1}y)')'\ldots)')' ;$$

d'où l'on trouvera facilement

$$y=c_n x^{-\alpha_1}+c_{n-1}x^{-\alpha_2+1}+c_{n-2}x^{-\alpha_3+2}+\ldots+c_1{}^{-\alpha_n+n-1}$$

$$+\frac{ax^{b+n}}{(b+\alpha_n+1)\ldots\ldots(b+\alpha_n+n)}$$

$$+\delta x^{-\alpha_1}\int x^{\alpha_1-\alpha_2}\int\ldots\int x^{i+\alpha_n-\beta_n}(x^{\beta_n-\beta_{n-1}}(\ldots(x^{\beta_1}y)'\ldots)')'dx^{n} ;$$

par des substitutions successives, on aura $n+1$ séries, dont chacune, divisée par une certaine puissance, procède seulement suivant les puissances ascendantes de x^i. Pour abréger, et attendu que toutes ont la même forme, je n'en développe qu'une seule, savoir :

$$c_n x^{-\alpha_1}\left\{1+\frac{\delta(\beta_n-\alpha_1-n+1)(\beta_{n-1}-\alpha_1-n+2)\ldots(\beta_1-\alpha_1)}{(\alpha_n-\alpha_1+i-n+1)(\alpha_{n-1}-\alpha_1+i-n+2)\ldots i}x^{i}\right.$$

$+$

$$+\frac{\delta^2(\beta_1+\varepsilon-\alpha_1-n+1)\ldots(\beta_1+\varepsilon-\alpha_1)(\ldots\ldots)\ldots\ldots}{(\alpha_n+2\varepsilon-\alpha_1-n+1)\ldots 2\varepsilon(\alpha_n-\alpha_1+\varepsilon-n+1)\ldots}x^{2\varepsilon}$$

$$+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \}$$

En commençant l'intégration par rapport au second membre de l'équation, on obtiendrait $n+1$ séries semblables, qui procèderaient suivant les puissances descendantes de x^ε. On trouvera d'ailleurs facilement que l'équation revient à celle-ci :

$$(a_0+B_0x^\varepsilon)\frac{d^ny}{dx^n}+\frac{A_1+B_1x^\varepsilon}{x}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

$$+\frac{A_2+B_2x^\varepsilon}{x^2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+\frac{A_n+B_nx^\varepsilon}{x^n}y=ax^b\ ;$$

A_0, A_1, A_2, ... A_n, B_0, B_1, B_2 ...... B_n étant des constantes.

Pour le cas où $n=2$, on a présenté l'intégrale de cette équation par un procédé qu'il ne serait pas difficile d'étendre à celle-ci ; mais encore, dans ce cas, la méthode directe a des avantages, comme je le ferai voir par un exemple. Soit l'équation très-simple

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\alpha}{x}\frac{dy}{dx}+\beta x^\gamma y=\varepsilon x^\delta\ ,$$

on aura

$$y=a_1-\frac{a_0}{1-\alpha}x^{1-\alpha}+\frac{\varepsilon x^{\delta+2}}{(\delta+2)(\delta+\alpha+1)}-\beta\int x^{-\alpha}\int x^{\gamma+\alpha}y\,dx^2\ ;$$

d'où

$$y=a_1\left\{1-\frac{\beta x^{\gamma+2}}{(\gamma+2)(\gamma+\alpha+1)}+\frac{\beta x^{2\gamma+4}}{(\gamma+2)(2\gamma+4)(\gamma+\alpha+1)(2\gamma+\alpha+3)}-\ldots\right\}$$

$$+\frac{a_0x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left\{1-\frac{\beta x^{\gamma+2}}{(\gamma+2)(\gamma+3-\alpha)}+\frac{\beta^2x^{2\gamma+4}}{(\gamma+2)(2\gamma+4)(\gamma+3-\alpha)(2\gamma+5-\alpha)}-\ldots\right\}$$

$$+\frac{\varepsilon x^{\delta+2}}{(\delta+2)(\delta+\alpha+1)}\left\{1-\frac{\beta x^{\gamma+2}}{(\delta+\gamma+4)(\delta+\gamma+3+\alpha)}\right.$$

$$\left.+\frac{\beta^2 x^{2\gamma+4}}{(\gamma+\delta+4)(2\gamma+\delta+6)(\delta+\gamma+\alpha+3)(\delta+2\gamma+\alpha+5)}-\ldots\right\};$$

ce qu'on trouverait aussi par la méthode des coefficiens indéterminés; mais, dans le cas où $\alpha=1$, on n'y reussirait pas; car alors il s'introduit des quantités infinies dans la serie, ce qui annonce un changement de forme (*Calcul des fonctions*, leçon XVIII); il s'agit donc de savoir quelle est la forme de la valeur de y qui répond à ce cas; or, on trouve alors

$$y=a_1-a_0\,\text{Log.}x+\frac{\varepsilon x^{\delta+2}}{(\delta+2)^2}-\beta\int\frac{1}{x}\int x^{\gamma+1}y\,dx^2,$$

c'est-à-dire,

$$y=(a_1+a_0\text{Log}\,x)\left\{1-\frac{\beta x^{\gamma+2}}{(\gamma+2)^2}+\frac{\beta^2 x^{2\gamma+4}}{1.2^2.(\gamma+2)^4}-\frac{\beta^3 x^{3\gamma+6}}{1.2^2.3^2(\gamma+2)^6}+\ldots\right\}$$

$$-a_0\left\{\frac{A_1\beta x^{\gamma+2}}{(\gamma+2)^3}-\frac{A_2\beta^2 x^{2\gamma+4}}{2.1.2^2(\gamma+2)^6}+\frac{A_3\beta^3 x^{3\gamma+6}}{3\,1.2^2.5\,(\gamma+2)^7}-\ldots\right\}$$

$$+\frac{\varepsilon x^{\delta+2}}{(\gamma+2)^2}\left\{1-\frac{\beta x^{\gamma+2}}{(\delta+\gamma+4)^2}+\frac{\beta^2 x^{2\gamma+4}}{(\delta+\gamma+4)^2(\delta+\gamma+6)^2}-\ldots\right\}.$$

A_1, A_2, …… étant des constantes qui se déterminent par l'équation

$$A_{n+1}=\frac{n+1}{n}A_n+2,$$

d'où

$$A_n=n\Sigma\frac{2}{n+1};$$

ce qui donne.

$$A_1=2\,,\quad A_2=6\,,\quad A_3=11\,;\quad A_4=\tfrac{50}{3}\,,\ldots\ldots;$$

Cette équation se recommande particulièrement à raison de l'application à la physique qu'elle peut offrir. Si, en effet, on y suppose $\gamma=0$, $\delta=0$, on obtient celle qui détermine la figure d'une large goutte de mercure abandonnée à elle-même sur un disque de verre horizontal (Voyez le *Supplément à la théorie de l'action capillaire*), et à laquelle M. Laplace satisfait par une intégrale définie, sans constante arbitraire, qui revient à la dernière des séries que nous venons de présenter. L'on voit que la difficulté consiste seulement à trouver la forme que prend l'intégrale cherchée; car, après cela, les coefficiens se déterminent aisément par la méthode des différences, comme M. Lacroix l'a présenté (*Traité des différences et des séries*, pag. 216 et suiv.).

Je n'ajouterai plus qu'un seul exemple qui suffira pour éclaircir les principes, qui n'ont d'ailleurs aucune difficulté; et l'on verra qu'en général les équations, qui ne sont pas trop compliquées, ont déjà des intégrales très-prolixes; c'est pourquoi je me bornerai seulement à faire voir les formes que celles-ci doivent avoir, et à indiquer la marche qu'il faut suivre pour déterminer les coefficiens.

Soit donc l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha\frac{dy}{dx}=(be^{\beta x}+ce^{\gamma x})y\;;$$

on aura

$$y=a_0+a_1e^{-\alpha x}+\int e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}(be^{\beta x}+ce^{\gamma x})y\,dx^2\,,$$

d'où

$$
y = a_0 \left\{ \begin{array}{l}
1 + \frac{be^{\beta x}}{\beta(\beta+\alpha)} + \frac{b^2 e^{2\beta x}}{\beta\, 2\beta(\beta+\alpha)(2\beta+\alpha)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b^m A_{m,0} e^{m\beta x} + \ldots \\
+ \frac{ce^{\gamma x}}{\gamma(\gamma+\alpha)} + \left\{ \frac{1}{\beta(\beta+\alpha)} + \frac{1}{\gamma(\gamma+\alpha)} \right\} \frac{bce^{(\beta+\gamma)x}}{(\beta+\gamma)(\beta+\gamma+\alpha)} + . + b^{m-1} c A_{n,1} e^{[(m-1)\beta+\gamma]x} + \ldots \\
\qquad + \frac{c^2 e^{2\gamma x}}{\gamma.2\gamma(\gamma+\alpha)(2\gamma+\alpha)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + b^{m-n} c^n A_{m,n} e^{[(m-n)\beta+n\gamma]x} + \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + c^m A_{m,m} e^{m\gamma x} + \ldots
\end{array} \right\}
$$

$$
+ a_1 e^{-\alpha} \left\{ \begin{array}{l}
1 + \frac{be^{\beta x}}{\beta(\beta-\alpha)} + \frac{b^2 e^{2\beta x}}{\beta.2\beta(\beta-\alpha)(2\beta-\alpha)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \frac{ce^{\gamma x}}{\gamma(\gamma-\alpha)} + \left\{ \frac{1}{\beta(\beta-\alpha)} + \frac{1}{\gamma(\gamma-\alpha)} \right\} \frac{bce^{(\beta+\gamma)x}}{(\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)} + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad + \frac{c^2 e^{2\gamma x}}{\gamma.2\gamma(\gamma-\alpha)(2\gamma-\alpha)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array} \right\} ;
$$

où il faut remarquer que chacun des termes de la dernière série se deduit de son correspondant dans la premiere, par le simple changement du signe de α. Quant aux coefficiens $A_{m,0}$, $A_{m,1}$, ... $A_{m,m}$, ils se déterminent, en general, au moyen de l'équation

$$
A_{m+1,n+1} = \frac{A_{m,n} + A_{m,n+1}}{[(m-n)\beta + (n+1)\gamma + \alpha][(m-n)\beta + (n+1)\gamma]} ,
$$

dont l'intégration entraîne déjà des calculs assez longs. On pourrait maintenant tenter de ramener les series obtenues à une forme finie, par des intégrales définies; mais ces recherches, comme je l'observerai, sont d'une nature très-particulière; d'autant plus que la methode d'Euler exige toujours que les constantes satisfassent à certaines conditions arithmétiques, au défaut desquelles elles ne sont pas applicables.

Il faut observer que l'intégrale précédente devient incomplète lorsque $\alpha=0$; car alors les deux series sont identiques, et l'intégrale doit par conséquent changer de forme. En effet, on trouve pour ce cas

$$y=a_0+a_1x+\int\int(be^{\beta x}+ce^{\gamma x})y\,\mathrm{d}x^2\ ,$$

ce qui introduit nécessairement des puissances de la variable indépendante. Le cas de $\beta=0$ ou de $\gamma=0$ annonce aussi un changement de forme; car alors l'équation proposée prend la forme très-simple

$$\frac{\mathrm{d}\{e^{mx}\mathrm{d}(e^{(n-m)x}y)\}}{\mathrm{d}x^2}=ce^{(\gamma+m)x}y\ ;$$

ce qui réduit l'intégrale à des séries à simple entrée.

Mais un autre cas donne lieu à des calculs très-compliqués; savoir: celui de $\beta+\gamma=0$ ou $\gamma=-\beta$, pour lequel il s'introduit dans l'intégrale des puissances de la variable indépendante, dont les coefficiens ne se déterminent que par des équations aux différences finies à trois variables. En effet, pour ce cas qui se présente aussi sous la forme.

$$y=a_0+a_1e^{-\alpha x}+b\int e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}\mathrm{Sin.}(\varepsilon x+\delta)y\,\mathrm{d}x^2\ ,$$

la première des séries que nous avons trouvées devient, abstraction faite du multiplicateur a_0,

$$1+\frac{be^{\beta x}}{\beta(\beta+\alpha)}+\frac{b^2e^{2\beta x}}{\beta.2\beta(\beta+\alpha)(2\beta+\alpha)}+\ldots\ldots+b^{2m}A_{2m,0,0}e^{2m\beta x}$$

$$+\frac{ce^{-\beta x}}{\beta(\beta+\alpha)}+\frac{2bcx}{\alpha(\beta^2-\alpha^2)}+\ldots+b^{2m-1}c(A_{2m,1,0}+A_{2m,1,1}x)e^{2(m-1)\beta x}$$

$$+\frac{c^2e^{-2\beta x}}{\beta.2\beta(\beta-\alpha)(2\beta-\alpha)}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+b^mc^m(A_{2m,m,0}+A_{2m,m,1}x+\ldots+A_{2m,m,m}x^m)$$

$$+b^{m-1}c^{m+1}(A_{2m,m+1,0}+A_{2m,m+1,1}x+\ldots+A_{2m,m+1,m-1})e^{-2\beta x}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+c^{2m}A_{2m,2m,0}e^{-2m\beta x}$$

$$+b^{2m+1}A_{2m+1,0,0}e^{(2m+1)\beta x}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+b^{2m}c(A_{2m+1,1,0}+A_{2m+1,1,1}x)e^{(2m-1)\beta x}+\ldots\ldots\ldots$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+b^{m+1}c^m(A_{2m+1,m,0}+A_{2m+1,m,1}x+\ldots+A_{2m+1,m,m}x^m)e^{\beta x}+\ldots$$

$$+b^mc^{m+1}(A_{2m+1,m+1,0}+A_{2m+1,m+1,1}x+\ldots+A_{2m+1,m+1,m}x^m)e^{-\beta x}+\ldots$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+bc^{2m}(A_{2m+1,2m,0}+A_{2m+1,2m,1}x)e^{(1-2m)\beta x}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+c^{2m+1}A_{2m+1,2m+1,0}e^{-(2m+1)\beta x}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On trouvera que l'équation aux différences finies, d'où dépend la détermination des coefficiens, devient assez compliquée, quoiqu'elle ne soit pas difficile à former ; et que les difficultés de son intégration, qui tiennent sans doute à la nature du problème, consistent principalement dans l'extrême longueur des calculs. C'est pourquoi je me dispense d'entrer ici dans le détail de ces opérations, qui n'offriraient d'ailleurs aucun principe ou artifice de calcul digne d'être remarqués, et qui ne pourraient conséquemment mériter de l'intérêt que par les applications.

Les principes que j'ai exposés au commencement de ce mémoire, et que je viens d'appliquer à l'intégration des équations différentielles, conduisent aussi à celle des équations aux différences finies, ainsi que je vais présentement le faire voir.

§. II.

Des équations aux différences finies à deux variables.

Les équations aux différences finies à deux variables peuvent être envisagées sous deux points de vue, dont l'un répond proprement au nom qu'on leur donne, tandis que l'autre les représente comme exprimant les relations entre des valeurs successives d'une même variable. C'est sous ce dernier point de vue que Lagrange (*Calcul des fonctions*, leçon XVIII) les a considérées comme étant d'une nature tout-à-fait différente de celle des équations différentielles. Aussi cette forme conduit-elle aux résultats les plus généraux et les plus utiles qu'on puisse obtenir. Cependant, il ne sera peut-être pas inutile d'exposer ceux qu'offre la première forme ; soit pour choisir, dans des cas particuliers, celui qui convient le mieux à l'objet qu'on a en vue, soit pour réunir sous un point de vue unique des méthodes qui, au premier aspect, pourraient sembler différentes.

Dans ce cas, on peut envisager la différence et l'intégrale finie comme des fonctions linéaires de la différentielle et de l'intégrale qui y répond ; et cette relation a donné lieu à une infinite de formes créées par l'analogie, et puis rigoureusement vérifiées par des considérations générales. Mais, comme ces recherches sortent de mon sujet, je me permets seulement d'exposer ici une liaison entre la différentielle et la différence, qui correspond parfaitement à celle qui existe entre les fonctions exponentielles et les puissances, indépendamment des expressions en séries.

En effet, si l'on observe que l'équation

$$\frac{d^n(e^{nx}y)}{dx^n}=n^n e^{nx}\left\{y+\frac{n}{1.n}\frac{dy}{dx}+\frac{n(n-1)}{1.2n^2}\frac{d^2y}{dx^2}+\ldots\right\},$$

par la supposition de $n=\infty$, se change dans celle-ci:

$$\frac{1}{n^n.e^{nx}}\cdot\frac{d^n(e^{nx}y)}{dx^n}=y+\frac{dy}{dx}+\frac{1}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots$$

qui revient à

$$\frac{1}{n^n.e^{nx}}\cdot\frac{d^n(e^{nx}y)}{dx^n}=y+\Delta y,$$

on trouve que la génération de cette dernière quantité à beaucoup d'analogie avec celle de $e^x=\frac{(n+z)^n}{n^n}$, n étant $=\infty$.

Comme les intégrations aux différences finies sont, en général, beaucoup plus difficiles à effectuer que celles aux différentielles ; on verra que la méthode générale exposée au commencement de ce mémoire s'applique, avec d'autant moins de succès, aux équations qui nous occupent présentement, que la considération des valeurs successives, qui réduit l'intégration à des éliminations, offre des résultats plus simples et plus généraux. c'est pourquoi je ne traiterai que brièvement de cette espèce d'équations.

Soit donc l'équation

$\Delta^n y$

$$\Delta^n y+P\Delta^{n-1}y+Q\Delta^{n-2}y+\ldots\ldots+My=N\ ;$$

on en aurait l'intégrale complète, si l'on pouvait trouver n quantités X', X'', X''', ... $X^{(n)}$, qui satisfissent à l'équation

$$\Delta(X^{(n)}\Delta(X^{(n-1)}\Delta(\ldots\Delta(X'y)\ldots)))=X_1^{(n)}X_2^{(n-1)}\ldots X''_{n-1}X'_nN\ ;$$

X_m étant $=(1+\Delta)^m X_0$ suivant les notations adoptées. Mais on s'assurera facilement que la comparaison entre les coefficiens respectifs de $\Delta^{m-1}y$, $\Delta^{m-2}y$, ... conduiraient, en général, à des équations très compliquées, et par conséquent, qu'il faut laisser un ou plusieurs coefficiens indéterminés suivant le même procédé que nous avons employé plus haut.

L'équation du premier ordre s'intègre, en général, sans difficulté. Soit, en effet,

$$\Delta y+P_x y=Q_x\ ;$$

en faisant

$$\Delta(X'y)=X'_1Q_x\ ;$$

on aura, pour déterminer X', l'équation

$$\Delta X'=(\Delta X'+X')P_x\ ,\quad \text{ou}\quad X'_1=\frac{X'}{1-P_x}\ ;$$

d'où l'on tire, en prenant les logarithmes et intégrant;

$$X'=e^{-\Sigma\text{Log.}(1-P_x)}\ ;$$

ce qui revient à

$$X'=[1-P_{x-1}]^{\overline{x-1}}\ ;$$

suivant la notation de Vaudermonde.

Maintenant, on trouve aisément

$$y=\frac{\alpha}{[1-P_{x-1}]^{x-1}}+\frac{\Sigma.Q_x[1-P_{x-1}]^{x-1}}{[1-P_{x-1}]^{x-1}}\ ;$$

α étant une fonction dont la différence $=0$.

L'équation du second ordre ne s'intègre que sous la forme d'une série infinie ; et, pour les raisons que j'ai développées plus haut, je me bornerai à un seul exemple. Il faut d'ailleurs observer que cette équation s'intègre d'une manière très-élégante par les fractions continues.

Soit donc la proposée

$$\Delta^2 y+P_x\Delta y+Q_x y=R_x\ ;$$

on fera

$$\frac{\Delta(X'\Delta y)}{X'_1}+Q_x y=R_x\ ,$$

ce qui donnera

$$\frac{\Delta X'}{X'_1}=P_x\ ,\quad \text{ou}\quad X'=[1-P_{x-1}]^{x-1}\ ;$$

et l'on aura

$$y=\beta+\Sigma\frac{\alpha}{X'}+\Sigma\frac{1}{X'}\Sigma X'_1 R_x-\Sigma\frac{1}{X'}\Sigma X'_1 Q_x y\ .$$

Faisant donc la partie indépendante de y égale à Z, on trouvera

$$y=Z-\Sigma\frac{1}{X'}\Sigma X'_1 Q_x Z+\Sigma\frac{1}{X'}\Sigma X'_1 Q_x\Sigma\frac{1}{X'}\Sigma X'_1 Q_x Z-\ldots\ldots$$

Un exemple très-simple est

$$\Delta^2 y=(a-1)\Delta y+cb^x y\ ;$$

on a, pour ce cas,

$$y=\beta+\Sigma\alpha a^{x-1}+c\Sigma a^{x-1}\Sigma\frac{b^x}{a^x}\,y\ ,$$

et, en supposant α et β constantes,

$$y=\beta\left\{1+\frac{cb^x}{(b-a)(b-1)}+\frac{c^2b^{2x}}{(b^2-a)(b^2-1)(b-a)(b-1)}+\ldots\right\}$$

$$+\frac{\alpha a^{x-1}}{a-1}\left\{1+\frac{cb^x}{a(ab-1)(b-1)}+\frac{c^2b^{2x}}{a^2(b^2a-1)(b^2-1)(ba-1)(b-1)}+\ldots\right\}.$$

Cette intégrale change de forme lorsque $b=a$, $a=1$ ou $b=1$; et, dans ce dernier cas, on s'assurera aisément qu'elle se réduit à la forme finie, comme toute équation linéaire à coefficiens constans.

Il faut encore jeter un coup-d'œil sur les équations qui renferment à la fois des differences et des différentielles par rapport à la même variable.

§. III.

Des équations aux différences mêlées à deux variables.

L'équation aux différences mêlées de l'ordre n renfermant en général $(n+1)^2+1$ termes, je ne considère ici que celle du premier ordre, dont l'intégration comporte encore de grandes difficultés. Il est d'ailleurs facile de s'assurer que l'intégration d'une équation quelconque, à coefficiens constans, dépend seulement d'opérations algébriques.

Soit donc l'équation du premier ordre

$$\Delta\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P_x\Delta y+Q_x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+R_x y=S_x\ ;$$

il faut tâcher de la rendre en différences ou en différentielles complètes ; mais on verra qu'en général cela est impossible ; car la forme la plus générale qu'on puisse lui donner est

$$\Delta\left(M_x\,\frac{\mathrm{d}(N_x y)}{\mathrm{d}x}\right),$$

par laquelle on ne saurait satisfaire à trois conditions. En effet ; en comparant, on trouve

$$\frac{\mathrm{d}N_{x+1}}{N_{x+1}\mathrm{d}x}=P_1\ ;\quad \frac{\Delta(M_xN_x)}{M_{x+1}N_{x+1}}=Q_x\ \frac{\Delta\left(M_x\frac{\mathrm{d}N_x}{\mathrm{d}x}\right)}{M_{x+1}N_{x+1}}=R_x\ .$$

On tire des deux premières

$$N_{x+1}=e^{\int P\mathrm{d}x}\ ,\quad M_xN_x=\frac{1}{[1-Q_{x-1}]^{x+1}}\ ,$$

et, pour satisfaire à la dernière relation, il faut mettre l'équation sous la forme

$$\Delta\left\{M_x\frac{\mathrm{d}(N_xy)}{\mathrm{d}x}\right\}=M_{x+1}N_{x+1}\{P_x+(Q_x-1)P_{x-1}-R_x\}y\ ,$$

d'où on tire, en représentant par T_x le coefficient de y dans le second membre,

$$y=\frac{c}{N_x}+\frac{1}{N_x}\int\frac{\alpha\mathrm{d}x}{M_x}+\frac{1}{N_x}\int\frac{\mathrm{d}x}{M_x}\Sigma M_{x+1}N_{x+1}S_x+\frac{1}{N_x}\int\frac{\mathrm{d}x}{M_x}\Sigma T_xy\ ;$$

c étant une constante, et α une fonction telle que $\Delta\alpha=0$. Si ensuite on représente par Z la partie indépendante de y, on aura, en sous-entendant les indices,

$$y=Z+\frac{1}{N}\int\frac{1}{M}\Sigma TZ\mathrm{d}x+\frac{1}{N}\int\frac{1}{M}\Sigma\frac{T}{N}\int\frac{1}{M}\Sigma TZ\mathrm{d}x^2+\ldots\ldots$$

On trouve facilement une seconde forme générale, en mettant l'équation proposée sous la forme d'une différentielle complète ; mais, dans tous les cas, la succession alternative des signes $\int$ et Σ soumet ces formules générales à des difficultés qui font ressortir les avantages des travaux de MM. Biot et Poisson sur le même sujet.

Après avoir développé les principales conséquences des principes généraux, relativement aux équations à deux variables, il me reste maintenant à traiter des équations aux différences partielles.

§. IV.

Des équations linéaires aux différences partielles.

Parmi le petit nombre des résultats généraux auxquels on est parvenu, relativement à l'intégration des équations linéaires, il faut principalement remarquer celui qui ramène l'intégration d'une équation quelconque à ne dépendre que de celle d'une équation qui ne contient pas de terme indépendant de la fonction inconnue. Cependant, on ne sait que rarement intégrer immédiatement, sous forme finie, une équation à plusieurs variables, pas même dans les cas analogues à ceux où l'on intègre les équations à deux variables, par des fonctions connues, comme, par exemple, lorsque les coefficiens sont constans. L'introduction de nouvelles variables conduit quelquefois à des résultats satisfaisans, qui sont pourtant très-particuliers, et exigent le plus souvent que l'intégrale soit donnée en série infinie, seule forme à laquelle toute intégrale soit réductible. On sait que la série de Taylor donne le moyen d'intégrer les équations, soit à deux, soit à plusieurs variables; mais nous avons vu qu'en général elle est inapplicable à celles-là, et à plus forte raison à celles-ci. C'est pourquoi on a formé des séries qui procèdent suivant des différentielles ascendantes, forme beaucoup plus avantageuse et toujours possible, à l'exception de quelques cas particuliers, analogues à ceux où la série de Taylor se trouve en défaut; mais, quelque élégans que soient les résultats obtenus par cette méthode, on peut se demander si elle conduit toujours aux formes les plus simples des intégrales, qui se développent, comme on sait, d'une infinité de manières différentes. Il est donc important d'avoir une méthode générale et directe pour cet objet, et c'est une telle méthode que je me propose d'exposer suivant les principes établis au commencement de ce mémoire ; mais il faut commencer par la discussion du cas où l'équation s'intègre immédiatement sous forme finie, ou du moins par celui où son intégrale se ramène à celle d'une équation du premier ordre ; et l'on verra ainsi pourquoi on ne peut obtenir cet avantage que dans des cas particuliers.

Supposons, pour abréger, qu'une équation de l'ordre m, à n variables indépendantes, contienne les variables indépendantes dans tous ses termes ; elle renfermera, en général, un nombre de coefficiens exprimé par

$$\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}\cdots\cdots\frac{m+n}{n}-1\,;$$

et il s'agira de lui donner telle forme que l'on parvienne à l'intégrale complète par l'intégration de m équations du premier ordre ; mais chacune de ces équations ne renfermant, en général, que n coefficiens, il n'est pas possible d'introduire, de cette manière, plus de mn quantités indéterminées dans l'équation proposée ; et, à moins qu'on n'ait

$$mn > \frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}\cdots\cdots\frac{m+n}{n}-2,$$

il devient impossible d'y satisfaire, en général. En effet, si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{dz}{dx}+P_{m,1}\frac{dz}{dy}+P_{m,2}\frac{dz}{dt}+\ldots+P_{m,n}z=\mathrm{D}[P_{m,n},z]\;,$$

$P_{m,1}$; $P_{m,2}$,..... $P_{m,n}$ étant des fonctions quelconques des variables indépendantes ; on formera l'équation

$$\mathrm{D}[P_{m,n}\,,\mathrm{D}[P_{m-1,n}\,,\mathrm{D}[\ldots\mathrm{D}[P_{1,n},z]\ldots]]]=0\;,$$

qui renferme mn quantités indéterminées. Dans tous les cas particuliers où elles satisfont aux coefficiens de l'équation proposée, on sait ramener celle-ci à des équations du premier ordre. Il est d'ailleurs facile de voir qu'un terme indépendant de z ne changerait en rien ce procédé. Mais l'équation à deux variables est la seule qu'on puisse toujours mettre sous cette forme, quoique la détermination des quantités $P_{m,1}$, $P_{m-1,1}$, ... mène, en général à des équations plus difficiles à traiter que la proposée elle-même, ainsi que nous l'avons déjà vu; mais l'équation générale du second ordre a déjà $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}$ conditions de trop; et plus les ordres sont élevés, et plus aussi le nombre des conditions surpasse celui des quantités à déterminer. Pour satisfaire à toutes les conditions, on introduit souvent avec succès de nouvelles variables, par rapport auxquelles on obtient alors des intégrales définies on indéfinies; mais, le plus souvent, ces recherches conduisent à des équations plus difficiles que celles qu'on s'était d'abord proposées. Il faut d'ailleurs observer que, pour le cas des coefficiens constans, les quantités $P_{m,1}$, $P_{m-1,1}$, ... prennent les mêmes propriétés que de simples facteurs, comme l'a fait voir M. Brisson.

Maintenant, après avoir observé combien sont particuliers les cas où une équation s'intègre immédiatement sous forme finie, je vais reprendre le principe général, pour exposer les principales modifications qu'il doit subir pour devenir applicable aux équations partielles, et, en particulier, à celles qui ne renferment que deux variables indépendantes. Il s'agit seulement de partager l'équation de la manière la plus avantageuse, et pour cela, ce qui paraît le plus simple est de déterminer autant de coefficiens que possible, par des équations du premier ordre, comme nous venons de l'exposer, et puis de transporter les termes indéterminés de l'autre côté, ce qui donne à l'équation proposée la forme

$$\mathrm{D}[P_{m,n},\, \mathrm{D}[P_{m-1,n},\, \mathrm{D}[\ldots\mathrm{D}[P_{1,n},\, z]\ldots]]] = \mathrm{f}z\,,$$

fz étant une fonction quelconque linéaire de z, et le premier membre étant du premier ordre par rapport à

$$D[P_{m-1,n}, D[\ldots\ldots D[P_{1,n}, z]\ldots\ldots]] .$$

On trouve facilement celle-ci, en fonction de fz, avec une fonction arbitraire de $n-1$ variables ; et, en continuant ainsi, on parvient à la valeur de z en fonction de fz, avec m fonctions arbitraires. Soit alors

$$z=N+\varphi(z) ,$$

on trouvera

$$z=N+\varphi(N)+\varphi^2(N)+\ldots\ldots$$

Il est facile de voir que les quantités $P_{m,n}$, $P_{m-1,n}$, ... se déterminent d'une infinité de manières différentes, et, par conséquent, donnent lieu à autant de formes différentes ; mais il est impossible de donner des règles générales pour le partage de l'équation, et chaque cas particulier indique, sans difficulté, le parti le plus avantageux que l'on puisse tirer du principe général. Cependant, il existe, dans tous les ordres, une classe d'équations qui donne lieu à des considérations trop étendues pour ne pas les exposer ici.

Soit donc l'équation

$$\text{f}z=\varphi z ;$$

fz et φz étant des fonctions quelconques linéaires de z, telles seulement que les coefficiens différentiels et les variables indépendantes qui sont contenues dans la première ne doivent pas se trouver dans la seconde. Alors on trouvera facilement qu'il est toujours possible de satisfaire à l'équation par une série de la forme

$$A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

A_1;

A_1, A_2, A_3, ... étant seulement fonctions des variables indépendantes renfermées dans fz, et B_1, B_2, B_3, ... des fonctions des variables indépendantes renfermées dans φz; mais on voit, en même temps, que cette forme ne peut être générale que lorsque fz ou φz ne contient qu'une seule variable indépendante; car l'intégrale générale doit contenir des fonctions arbitraires de toutes les variables indépendantes moins une, ce qui n'est possible ici que dans le cas que nous avons indiqué. C'est pourquoi je suppose que fz ne contient qu'une seule variable independante, et alors l'intégrale peut être générale, comme on s'en assurera facilement par le principe des substitutions successives; mais aussi je ferai voir qu'on peut satisfaire à l'équation proposée de beaucoup d'autres manières. En effet, pour déterminer les quantités A_1, A_2, A_3, ... B_1, B_2, B_3, ..., on n'a que la condition

$$A_1\varphi B_1+A_2\varphi B_2+\ldots+A_m\varphi B_m+\ldots=B_1 fA_1+B_2 fA_2+\ldots+B_m fA_m+\ldots$$

Or, pour avoir l'intégrale complète, il faut avoir m fonctions arbitraires, m étant l'ordre de l'équation proposée; il faut donc absolument qu'un nombre m des quantités B_1, B_2, ... soient indéterminées, A_1, A_2, ... étant seulement fonctions d'une variable, ce qui est impossible, à moins qu'on n'ait

$$fA_1=0\;,\; fA_2=0\;,\ldots\ldots\ldots\; fA_m=0\;;$$

conditions qui introduisent m constantes arbitraires, assujetties seulement à ne pas rendre égales entre elles deux des quantités A_1, A_2, ... Il s'agit donc seulement de satisfaire aux équations

$$A_1\varphi B_1=B_{m+1}fA_{m+1}\;,\quad A_2\varphi B_2=B_{m+2}fA_{m+2}\;,\ldots\ldots$$

ce à quoi on parvient facilement en supposant

$$B_{m+1}=\varphi B_1\;,\quad B_{m+2}=\varphi B_2\;,\quad B_{m+3}=\varphi B_3\;,\ldots\ldots$$

et $$fA_{m+1}=A_1\ ,\quad fA_{m+2}=A_2\ ,\quad fA_{m+3}=A_3\ ,\ \ldots\ldots$$

les relations entre A_1, A_2, A_3, ... étant des équations ordinaires de l'ordre m, pour lesquelles il s'agit seulement d'avoir une intégrale particulière ; désignant donc par $\frac{1}{f}$ la fonction inverse de f, on aura ainsi

$$A_{m+1}=\frac{1}{f}A_1\ ,$$

et l'intégrale complète

$$\begin{aligned}z=&A_1B_1+A_2B_2+\ldots\ldots\ldots+A_mB_m\\&+\varphi B_1\,.\,\frac{1}{f}A_1+\varphi B_2\,.\,\frac{1}{f}A_2+\ldots+\varphi B_m\,.\,\frac{1}{f}A_m\\&+\varphi^2B_1\,.\,\frac{1}{f^2}A_1+\varphi^2B_2\,.\,\frac{1}{f}A_2+\ldots\ldots\\&+\varphi^3B_1\,.\,\frac{1}{f^3}A_1+\ldots\\&+\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

φ^2 et $\frac{1}{f^2}$ étant la même chose que $\varphi\varphi$ et $\frac{1}{f}\,\frac{1}{f}$, et ainsi des autres.

Par le théorème de Parseval, on peut encore ramener chacune des séries

$$A_1B_1+\varphi B_1\,.\,\frac{1}{f}A_1+\varphi^2B_1\,.\,\frac{1}{f^2}B_1+\ldots\ldots,$$

$$A_2B_2+\varphi B_2\,.\,\frac{1}{f}A_2+\varphi^2B_2\,.\,\frac{1}{f^2}B_2+\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

à ne dépendre que de celles-ci :

$$A_1+\frac{1}{f}A_1+\frac{1}{f^2}A_1+\ldots\ldots,$$

$$B_1+\varphi B_1+\varphi^2 B_1+\ldots\ldots\ldots,$$

dont la dernière conduit à une équation à $n-1$ variables indépendantes, la proposée en renfermant n; mais les imaginaires que cette methode introduit la rendent peu susceptible d'application.

On peut encore satisfaire à la forme

$$A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3+\ldots\ldots\ldots$$

de beaucoup d'autres manières; ainsi, si l'on ne veut pas de fonctions arbitraires, la manière la plus simple de satisfaire à l'equation

$$B_1 fA_1+B_2 fA_2+\ldots\ldots=A_1\varphi B_1+A_2\varphi B_2+\ldots\ldots$$

sera de faire

$$B_1 fA_1=A_1\varphi B_1, \qquad B_2 fA_2=A_2\varphi B_2, \ldots\ldots$$

or, ces équations étant toutes semblables, il suffira de considérer celle-ci:

$$B_r fA_r=A_r\varphi B_r,$$

à laquelle on satisfera de la manière la plus générale, en posant

$$B_r=c_r\varphi B_r, \qquad fA_r=\frac{1}{c_r}A_r,$$

c_r étant une constante arbitraire; et l'on trouvera, en intégrant ces équations,

$$B_r=\Gamma(c_r), \qquad A_r=\Pi(c_r).$$

Soient donc c_1, c_2, ... des constantes arbitraires, et C_1, C_2, ... des fonctions quelconques de celles-ci ; on peut faire

$$z = C_1\Gamma(c_1).\Pi(c_1) + C_2\Gamma(c_2).\Pi(c_2) + \ldots\ldots ;$$

ou, si l'on veut,

$$z = SC\Gamma(c).\Pi(c) \qquad \text{ou} \qquad \int \Gamma(c).\Pi(c)\varphi(c)\mathrm{d}c ,$$

$\varphi(c)$ étant une fonction arbitraire de c.

Il est sans doute superflu de faire voir la variété infinie qu'on pourrait donner aux intégrales de l'équation proposée, en laissant indéterminées deux ou un plus grand nombre de quantités A_1, B_1, ..., et en comparant de différentes manières les autres termes de la série.

Il faut encore observer qu'il n'est pas nécessaire que les fonctions $\mathrm{f}z$ et φz contiennent seulement des différentielles pour que les méthodes précédentes soient applicables ; elles le sont encore, lorsque ces fonctions contiennent des différentielles négatives, c'est-à-dire, des intégrales ; mais ce cas donne lieu à des observations qui ne s'exposent pas d'une manière assez claire lorsqu'on demeure dans les généralités, ainsi que je le fais ici ; et, comme elles se présentent d'ailleurs d'elles-mêmes assez facilement, je n'en parlerai qu'en traitant, en particulier, des équations à trois variables ; et alors je ferai voir l'usage des facteurs pour ramener une équation à cette forme, lorsque cela est possible. Je parlerai aussi, plus bas, du cas où les coefficiens sont des fonctions quelconques de la somme des variables indépendantes. Je ne ferai ici qu'une seule observation sur l'équation à coefficiens constans. Elle consiste en ce que si l'on pose l'équation

$$\mathrm{f}z = M ,$$

$\mathrm{f}z$ étant une fonction linéaire quelconque de z, à coefficiens constans, et M une fonction quelconque des variables indépendantes; en représentant par N la fonction la plus générale qui satisfasse à l'équation

$$fN=0\,;$$

on aura, par les principes qui ont été suffisamment développés par M. Servois,

$$z=N+\frac{1}{f}M\,,$$

, qui a la forme d'un polynome, pourra être développée par toutes les méthodes connues pour le développement des fonctions purement algébriques; et l'on parviendra ainsi directement, d'après ces principes, à tous les résultats de M. Français.

Je vais présentement m'occuper de l'équation à deux variables indépendantes, et, en particulier, de celle du second ordre, afin d'éclaircir mieux les considérations générales que je viens d'exposer. En général, toutes les équations du premier ordre se ramènent à des équations ordinaires, et il serait ainsi inutile d'y appliquer immédiatement le principe des substitutions successives, quoiqu'il devienne nécessaire pour intégrer celle-ci.

Soit donc l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\alpha\frac{d^2z}{dxdy}+\beta\frac{d^2z}{dy^2}+\gamma\frac{dz}{dy}+\delta\frac{dz}{dx}+\varepsilon z=\theta\,;$$

α, β, γ, δ, ε, θ étant des fonctions quelconques de x et y; il s'agit de lui donner la forme

$$\frac{du}{dx}+P\frac{du}{dy}+Qu=\theta\,,$$

en supposant

$$u=\frac{dz}{dx}+P_1\frac{dz}{dy}+Q_1 z\,;$$

Pour cela, on trouvera les conditions

$$\alpha=P+P_1\;,\quad \beta=PP_1\;,\quad \gamma=\frac{dP_1}{dx}+P\frac{dP_1}{dy}+PQ_1+P_1Q\,,$$

$$\delta=Q+Q_1\;,\quad \varepsilon=\frac{dQ_1}{dx}+P\frac{dQ_1}{dy}+QQ_1\;.$$

Or, comme, en général, il est impossible de satisfaire à toutes ces conditions, il est nécessaire de mettre l'equation sous une autre forme

Faisons, par exemple,

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\alpha\frac{d^2z}{dxdy}+\beta\frac{d^2z}{dy^2}+\gamma\frac{dz}{dy}+\delta\frac{dz}{dx}+\varepsilon z=\theta+\eta z\;;$$

on pourra toujours déterminer η, de manière que toutes ces conditions soient remplies. Apres avoir integré les deux equations du premier ordre, on aura un resultat

$$z=U+\mathrm{f}z\;,$$

U renfermant deux fonctions arbitraires, et fz étant une fonction lineaire qui contient des signes d'integration par rapport à x et y; on aura, en consequence,

$$z=U+\mathrm{f}U+\mathrm{f}^2U+\mathrm{f}^3U+\ldots\;;$$

mais on tombe souvent sur des difficultés insurmontables, sur tout lorsque l'intégration des equations du premier ordre conduit à des equations non linéaires; c'est pourquoi je considere encore l'equation générale du second ordre sous un autre point de vue. Par la methode que M. Laplace a indiquée, on sait ramener toute equation du second ordre à l'une des formes suivantes :

$$\frac{d^2z}{dx\,dy}+p\frac{dz}{dx}+q\frac{dz}{dy}+rz=s\,, \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}+p\frac{dz}{dx}+q\frac{dz}{dy}+rz=s\,; \qquad \text{(B)}$$

où p, q, r, s sont des fonctions quelconques de x et y qui se deduisent des variables independantes de l'equation proposee par l'intégration de deux équations du premier ordre.

Je commence par la premiere ; et, en faisant

$$e^{\int p\,dy}=n\,,\ e^{\int q\,dy}=mn\,,\ pq+\frac{dp}{dx}-r=\nu\,,$$

je lui donne la forme

$$\frac{d\left\{m\dfrac{d(nz)}{dy}\right\}}{dx}=mns+mn\nu z.$$

On voit que cette équation s'intègre immédiatement sous forme finie lorsque $\nu=0$. En supposant respectivement ψ et φ fonctions arbitraires de x et y, et faisant

$$\frac{\psi}{n}+\frac{1}{n}\int\frac{\varphi}{m}\,dy+\frac{1}{m}\int\frac{1}{m}{}^{x}\!\!\int mns\,dy\,dx=T\,,$$

on trouvera

$$z=T+\frac{1}{n}{}^{y}\!\!\int\frac{1}{m}{}^{x}\!\!\int mn\nu z\,dy\,dx\,,$$

c'est-à-dire,

$$z=T+\frac{1}{n}\int^{y}\frac{1}{m}\int^{x} mnvT\,dy\,dx$$

$$+\frac{1}{n}\int^{y}\frac{1}{m}\int^{x} mv\int^{y}\frac{1}{m}\int^{x} mnvT\,dy^2dx^2+\ldots \qquad (1)$$

Il est facile de trouver, pour cette intégrale, une infinité d'autres formes plus ou moins simples ; mais je n'en présenterai qu'une seule, qui est quelquefois préférable à celle-ci.

En faisant

$$m=e^{-\int p\,dy}, \quad n=e^{\int\frac{r}{q}dy}, \quad U=\psi+\int m\varphi\,dx+\int^{x} m\int^{y}\frac{s}{m}\,dx\,dy,$$

ψ et φ étant des fonctions arbitraires de y et de x respectivement, on aura

$$\frac{m\,d\left(\frac{1}{m}\frac{dz}{dx}\right)}{dy}=s-\frac{q}{n}\,\frac{d(nz)}{dy},$$

d'où

$$z=U-\int^{x} m\int^{y}\frac{q}{mn}\,\frac{d(nU)}{dy}\,dx\,dy+\ldots \qquad (2)$$

La forme la plus simple qui intègre l'équation (B) s'obtient de la manière suivante : faisant

$$n=e^{-\int p\,dx}, \quad m=e^{\int\frac{r}{p}dy}, \quad U=\frac{\varphi}{m}+\frac{1}{m}\int sm\,dy,$$

φ étant fonction arbitraire de x on aura

$$\frac{1}{m}\,\frac{d\,mz}{dy}=s-n\frac{d.\frac{1}{n}\frac{dz}{dx}}{dx},$$

d'où

$z=U$

$$z = U - \frac{1}{m}\int \frac{mn}{q}\left(\frac{1}{n}U'\right)' dy$$

$$+\frac{1}{m}\int \frac{mn}{q}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{m}\int \frac{mn}{q}\left(\frac{1}{n}U'\right)'\right)'\right)' dy^2 - \ldots\ldots$$

les dérivations se rapportant à x. Cette forme, quoiqu'elle contienne seulement une fonction arbitraire n'en est pas moins générale, comme l'on sait; et il était facile de trouver une autre forme qui en contînt deux. Pour cela, il fallait commencer l'intégration par rapport à x.

Maintenant, après avoir présenté des formes générales, pour l'intégration des équations à trois variables, il peut être intéressant de discuter les cas les plus étendus qui soient susceptibles de simplification. Les méthodes dont on se sert pour cet effet consistent à introduire de nouvelles variables, par rapport auxquelles on obtient des intégrales, définies ou indéfinies; et les plus générales sont celle de Parceval et celle qui conduit à l'intégrale complète par une somme indéfinie d'intégrales particulières. Cependant, ces méthodes en laissent toujours à désirer d'autres, dans le cas où il est possible d'en avoir; aussi connaît-on, pour certains cas particuliers, plusieurs autres méthodes fort élégantes.

Prenons l'équation

$$\frac{d^2z}{dxdy} + p\frac{dz}{dx} + q\frac{dz}{dy} + rz = 0\ ;$$

p, q, r étant des fonctions quelconques de $x+y$; alors on trouvera facilement, pour la forme (1), et en observant qu'en général

$$\int Me^{ty}dy = e^{-tx}\int Me^{t(x+y)}dy\ ,$$

qu'une valeur $z = ue^{tx}$ satisfait à l'équation proposée, de même que

$z=\varpi e^{ty}$, u et ϖ étant des fonctions indéterminées de $x+y$. Faisant, pour abréger, $x+y=v$, et observant que

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}=\frac{du}{dv}\,; \qquad \frac{d\varpi}{dx}=\frac{d\varpi}{dy}=\frac{d\varpi}{dv}\,,$$

on aura, pour déterminer u et ϖ, les équations à deux variables

$$\frac{d^2u}{dv^2}+(t+p+q)\frac{du}{dv}+(tp+r)u=0\,,$$

$$\frac{d^2\varpi}{dv^2}+(t+p+q)\frac{d\varpi}{dv}+(tq+r)\varpi=0\,.$$

En faisant

$$u=F(v\,,t)\,, \qquad \varpi=f(v\,,t)\,,$$

et représentant par T, T_1 des fonctions arbitraires de t, on aura

$$z=\int e^{tx}TF(v\,,t)dt+\int e^{ty}T_1 f(v\,,t)dt\,.$$

Si la quantité s, de la forme générale, était une fonction quelconque de v, on trouverait aisément que la série qui la renferme se ramenerait à l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2z}{dv^2}+(p+q)\frac{dz}{dv}+rz=s\,;$$

sans constantes arbitraires. Il faut observer que ces principes s'appliquent à une équation d'un ordre quelconque, entre un nombre quelconque de variables.

Soit l'équation

$$\frac{d^2z}{dxdy}=v\frac{dz}{dx}+\xi\varpi\frac{dz}{dy}+\xi\pi z\,, \tag{b}$$

υ, ω, ϖ étant des fonctions quelconques de y, et ξ une fonction quelconque de x. Quoiqu'elle n'ait pas la forme $fz=\varphi z$, que nous avons traitée plus haut, il est facile de la lui donner par des facteurs. En effet, on a, par la formule (2),

$$\frac{dz}{\xi dx}=m\int\frac{\omega}{mn}\frac{d(nz)}{dy}dy\ ,$$

m et n étant des fonctions de y; et, par l'introduction des fonctions arbitraires et par les substitutions successives, on en trouve facilement l'intégrale complète

$$z=\psi+\int\xi dx.m\int\frac{\omega}{mn}\frac{d(n\psi)}{dy}dy+\int\xi\int\xi dx^2.m\int\frac{\omega}{mn}\frac{d.}{dy}\left(mu\int\frac{\omega}{mn}\frac{d.}{dy}(n\psi)dy^2\right.$$

$$+m\int\varphi dx+\int\xi\int\varphi dx^2.m\int\frac{\omega}{mn}d(mn)+\ldots\ldots$$

séries qui se ramènent à la forme finie, par le théorème de Parseval et l'intégration des deux équations du premier ordre à deux variables.

On peut encore intégrer l'équation proposée par une infinité d'intégrales particulières, comme nous l'avons dit plus haut. En effet, si l'on fait

$$z=XY\ ,\quad \text{on aura}\quad Y\frac{dX}{\xi dx}=Xm\int\frac{\omega}{mn}.d(nY)\ ,$$

d'où

$$cXdx=\frac{dX}{\xi}\ ;\quad cd\left(\frac{Y}{m}\right)=\frac{\omega}{mn}d(nY)\ ;$$

de là on conclura facilement, en substituant les valeurs de m et n,

$$X=e^{c\int\xi dx}\ ,\quad Y=e^{\int\frac{c\upsilon+\varpi}{c-\omega}dy}\ ,\quad z=\int e^{c\int\xi dx+\int\frac{c\upsilon+\varpi}{c-\omega}dy}\varphi(c)dc\ .$$

On ne peut, que dans un cas particulier, savoir, lorsque $\alpha = 1$, appliquer à (b) la méthode par laquelle nous avons réduit (a) à une equation du second ordre à deux variables.

Pour donner un exemple de l'intégration par d'autres méthodes, il faut nécessairement choisir une équation moins générale. Je vais employer les principes donnés par Euler, pour intégrer les équations à deux variables et par lesquels on peut aussi intégrer quelques équations partielles, sans les réduire auparavant à des équations ordinaires du second ordre. Soit donc l'equation

$$\frac{dz^2}{dy\,dx} = \frac{\alpha}{y}\,\frac{dz}{dx} + \xi y^{\beta}\frac{dz}{dy} + \gamma \xi y^{\beta - 1} z = 0\ ;$$

α, β, γ étant des constantes, et ξ une fonction de x. Alors on a

$$z = \psi + \int \xi dx . y^{\alpha} \int y^{\beta-\alpha-\gamma}(y^{\gamma}\psi)' dy$$

$$+ \int \xi \int \xi dx^2 . y^{\alpha} \int y^{\beta-\alpha-\gamma}\, y^{\alpha+\gamma} \int y^{\beta-\alpha-\gamma}(y^{\gamma}\psi)')' dy^2$$

$$+ y^{\alpha}\varphi + \frac{\alpha+\gamma}{\beta} y^{\alpha+\beta} \int \xi\varphi dx + \frac{(\alpha+\gamma)(\alpha+\gamma+\beta)}{1.2.\beta^2} y^{\alpha+2\beta} \int \xi \int \xi\varphi dx^2 + \ldots.$$

Maintenant il faut observer qu'entre les limites 0 et 1, on a

$$\int (1-t^n)^{\frac{p-n}{n}} t^{\gamma + (i+1)n - 1} dt = \frac{\gamma(\gamma+n)\ldots\ldots(\gamma+in)}{(\gamma+p)(\gamma+p+n)\ldots.(\gamma+p+in)} \int (1-t^n)^{\frac{p-n}{n}} t^{\gamma-1} dt$$

en supposant que les constantes sont telles que l'intégrale ne devienne pas infinie entre ces limites, et que les mêmes conditions sont remplies dans le présent problème. En faisant

$$u = \varphi + t^{\beta} y^{\beta} \int \xi\varphi dx + t^{2\beta} y^{2\beta} \int \xi \int \xi\varphi dx^2 + \ldots\ldots,$$

on aura, entre ces limites,

$$G \int (1-u^{\beta})^{-\frac{\alpha+\gamma}{\beta}} t^{\alpha+\gamma-1} u\,dt = \varphi + \frac{\alpha+\gamma}{\beta} y^{\beta} \int \xi\varphi dx$$

$$+ \frac{(\alpha+\gamma)(\alpha+\gamma+\beta)}{1.2\beta^2} y^{2\beta} \int \xi \int \xi\varphi dx^2 + \ldots.$$

en supposant

$$G=\frac{1}{\int(1-t^\beta)^{-\frac{\alpha+\gamma}{\beta}}t^{\alpha+\gamma-1}\mathrm{d}t}\,,\quad u=e^{t^\beta y^\beta\int\xi\mathrm{d}x}\int e^{-t^\beta y^\beta\int\xi\mathrm{d}x}\varphi'\mathrm{d}x\,,$$

où φ' est la fonction dérivée de φ. pour trouver la valeur de la première serie, on fera

$$\psi=\Sigma.A_m y^m\,;$$

d'où l'on conclura

$$\Sigma.A_m\left\{y^m+\frac{\gamma+m}{m-\alpha+\beta}y^{\beta+m}\int\xi\mathrm{d}x+\frac{(\gamma+m)(\gamma+m+\beta)}{(m-\alpha+\beta)(m-\alpha+2\beta)}\int\xi\int\xi\mathrm{d}x^2+\ldots\right\};$$

et, en observant que

$$e^{t^\beta y^\beta\int\xi\mathrm{d}x}=1+t^\beta y^\beta\int\xi\mathrm{d}x+t^{2\beta}y^{2\beta}\int\xi\int\xi\mathrm{d}x^2+\ldots\ldots$$

et faisant de plus

$$\frac{Am}{\int(1-t^\beta)^{-\frac{\alpha+\gamma}{\beta}}t^{\gamma+m-1}\mathrm{d}t}=B_m\,,$$

on aura

$$\Sigma.B_m y^m\int(1-t^\beta)^{-\frac{\alpha+\gamma}{\beta}}t^{\gamma+m-1}e^{t^\beta y^\beta\int\xi\mathrm{d}x}=\Sigma.A_m\left\{y^m+\frac{\gamma+m}{m-\alpha+\beta}y^{m+\beta}\int\xi\mathrm{d}x+\ldots\right\}$$

et en faisant

$$\Sigma.B_m y^m=\Gamma(y)\,,\qquad \varphi'=\Pi(x)\,,$$

on aura ensuite

$$z=\int(1-t^\beta)^{-\frac{\alpha+\gamma}{\beta}}t^{\gamma-1}e^{t^\beta y^\beta\int\xi\mathrm{d}x}\{\Gamma(ty)+t^\alpha y^\alpha\int e^{-t^\beta y^\beta\int\xi\mathrm{d}x}\Pi(x)\mathrm{d}x\}\mathrm{d}t\,;$$

l'intégrale étant prise entre $t=0$ et $t=1$.

Prenons encore l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\xi\frac{dz}{dx}+\varpi\upsilon\frac{dz}{dy}+\varpi\omega z,$$

ξ, ϖ; υ; ω étant des fonctions quelconques, les deux premières de x et les deux dernières de y. Alors, en faisant

$$m=e^{\int\frac{\omega}{\upsilon}dy},\quad n=e^{\int\xi dx},$$

on aura

$$z=\frac{1}{m}\left\{\varphi+\int\frac{dy}{\upsilon}\cdot\frac{n}{\varpi}\left(\frac{\varphi'}{n}\right)'+\int\frac{1}{\upsilon}\int\frac{dy^2}{\upsilon}\cdot\frac{n}{\varpi}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{n}{\varpi}\left(\frac{\varphi'}{n}\right)'\right)'\right)'+\ldots\right\}$$

Par le théorème de Parseval, et par la méthode générale exposée plus haut, on réduit cette série à l'intégrale d'une équation ordinaire du second ordre; mais, dans un cas assez étendu, elle se réduit à la forme finie, par la méthode qu'a indiqué M. Laplace (*Journal polytechnique*, cahier VIII).

En effet, lorsque $\varpi=n^2$, on a

$$z=\frac{1}{m}\left\{\varphi+\int\frac{dy}{\upsilon}\frac{1}{n}\left(\frac{\varphi'}{n}\right)'+\int\frac{1}{\upsilon}\int\frac{dy^2}{\upsilon}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{\varphi'}{n}\right)'\right)'\right)'+\ldots\right\}$$

et, si l'on donne à la série

$$\varphi+\alpha\frac{1}{n}\varphi'+\frac{\alpha^2}{1.2}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\varphi'\right)'+\frac{\alpha^3}{1.2.3}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\varphi'\right)'\right)'+\ldots$$

la forme

$$f\left(\int n\,dx+\alpha\right),$$

c'est-à-dire d'une fonction arbitraire de $\int n\,dx+\alpha$; en observant que, entre $\alpha=-\infty$ et $\alpha=+\infty$, on a

$$\int e^{-\alpha^2}\alpha^{2\gamma}d\alpha=\frac{1.3(2\gamma-1)}{2^\gamma}\sqrt{\varpi},\quad \int e^{-\alpha^2}\alpha^{2\gamma-1}d\alpha=0,$$

on trouvera facilement que l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{n^3}{n} \frac{dz}{dx} + n^2 v \frac{dz}{dy} + n^2 \omega z\ ;$$

où n est une fonction quelconque de x, devient

$$z = e^{-\int \frac{\omega}{v} dy} \int e^{-\alpha^2} f\left(\int n dx + 2\alpha \sqrt{\int \frac{dy}{\omega}}\right) d\alpha\ ;$$

l'intégrale étant prise entre $\alpha = -\infty$ et $\alpha = +\infty$.

Dans ce qui précède, je crois en avoir dit assez pour éclaircir le principe duquel je suis parti ; et il me paraît superflu d'y ajouter plus d'exemples et de développemens, sur-tout pour les ordres supérieurs, qui doivent naturellement avoir des intégrales très-compliquées ; à moins que les équations ne soient très-particulières ; les raisons que j'ai déduites plus haut me dispensent également de traiter des équations aux différences finies à plusieurs variables. Il est d'ailleurs impossible de donner des règles pour les cas particuliers qui admettent des simplifications dans les méthodes générales ; mais ces simplifications se présentent d'elles-mêmes sans difficulté. Depuis long-temps on se sert du principe des substitutions successives, comme d'une méthode d'approximation, fondée sur des valeurs particulières des quantités qui entrent dans l'équation proposée ; et on l'a employée, faute de méthodes plus rigoureuses ; c'est pourquoi je me suis sur-tout attaché à l'exposer sous un point de vue qui doit la faire considérer comme la seule méthode générale qui existe pour l'intégration des équations ; j'ai tâché ensuite d'en déduire les principales conséquences, indépendamment de la nature particulière des fonctions qu'on a introduites dans la langue analitique, par des motifs le plus souvent étrangers à cette branche de l'analise ; et, conformément aux idées de M. Lacroix (*Calc. diff. et intég.*, tom. II, pag. 576), j'ai indiqué les classes qui ont des propriétés communes, et qui jouissent de l'avantage de se ramener à d'autres plus simples. J'ai, plus d'une fois, observé que, dans certains cas, on parvient plus brièvement au but par des considérations particulières ; mais il n'en est pas pour cela moins nécessaire, suivant la remarque de l'illustre Lagrange, de généraliser et de réduire les théories, à mesure que la science s'étend et s'enrichit de procédés nouveaux.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème d'analise indéterminée.

QUEL est le plus petit nombre *non premier* qui rende la formule 2^n-2 divisible par n ?

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Construction géométrique d'un cercle qui en touche trois autres donnés sur un plan ou sur une sphère, d'un cône droit qui en touche trois autres de même sommet, et d'une sphère qui en touche quatre autres dans l'espace;

Par M. PONCELET, capitaine au corps royal du génie, ancien élève de l'école polytechnique. (*)

J'APPELLE points homologues *directs* ou *inverses*, relativement à deux cercles tracés sur un même plan, et à l'un quelconque de leurs centres de similitude, deux points de leurs circonférences qui, étant situés à la fois sur une droite passant par le centre de similitude dont il s'agit, appartiennent à deux arcs dont la courbure est dirigée dans le *même sens* ou en *sens contraire*, par rapport à ce centre de similitude. D'où il suit que les rayons menés

(*) Les constructions dont il va être question sont celles qui ont été annoncées à la page 82 de ce volume. Nous avons pensé qu'elles pourraient offrir un rapprochement curieux avec celles de M. Durrande, insérées également dans le présent volume; et, à notre prière, l'auteur a bien voulu nous les communiquer.

J. D. G.

à deux points homologues sont ou ne sont pas parallèles, suivant que ces points sont directement ou inversement homologues.

En conséquence de ces définitions, deux arcs, deux cordes, deux tangentes, etc., appartenant respectivement à deux cercles, seront *directement* ou *inversement* homologues, suivant que leurs extrémités ou points de contacts seront des points de l'une ou de l'autre espèce.

On voit, d'après cela, que, pour un point, un arc, une corde, une tangente, etc., donné sur l'un des cercles, il ne correspond jamais sur l'autre qu'un seul point, un seul arc, une seule corde, une seule tangente, etc., duquel on puisse dire qu'il est son homologue de l'une ou de l'autre espèce, du moins relativement au même centre de similitude.

Il est facile de voir, au surplus, que les cordes et tangentes homologues sont ou ne sont pas parallèles, suivant qu'elles sont directement ou inversement homologues; ou, en d'autres termes, que les cordes et tangentes directement homologues concourent sur la corde à l'infini commune aux deux cercles, tandis qu'au contraire les cordes et tangentes inversement homologues concourent sur la corde à distance finie commune à ces deux mêmes cercles, c'est-à-dire, sur leur *axe radical*; ce qui présente un moyen fort simple de construire cet axe par de simples intersections de lignes droites.

Toutes ces définitions et toutes ces remarques peuvent être facilement étendues, avec les modifications convenables, à deux cercles tracés sur une sphère, à deux cônes droits de même sommet, à deux cylindres droits dont les axes sont parallèles et enfin à deux sphères. On peut même les étendre à deux courbes planes ou à double courbure et à deux surfaces courbes, soumises ou non à la loi de continuité, pourvu qu'elles aient un centre de similitude.

Les choses ainsi entendues, voici comment on construira un cercle qui en touche trois autres, donnés sur un même plan.

Soient C, C', C'' les trois cercles donnés, et soit d'abord déterminé celui des quatre axes de similitude de ces trois cercles qui répond à l'espèce de contact qu'on se propose d'obtenir ; cet axe contiendra trois des six centres de similitude, les seuls dont il sera question dans ce qui va suivre.

Soit pris arbitrairement un point M sur la circonférence de C (*) ; soit M′ le point inversement homologue à M sur C′ ; soit M″ le point inversement homologue à M′ sur C″ ; et soit enfin N le point inversement homologue à M″ sur C.

S'il arrive que M et N se confondent, M, M′, M″ seront les points de contact du cercle cherché avec les trois cercles donnés ; de telle sorte que, par le simple tracé de trois droites, on aura réduit le problème à faire passer un cercle par trois points donnés.

Si les points M, N ne se confondent pas, en les joignant par une droite, cette droite ira couper l'axe de similitude en un point P qui sera invariablement le même, quel que soit le point de départ M ; et la polaire de ce point P, par rapport au cercle C, coupera ce même cercle à ses points de contact avec les deux cercles cherchés.

On pourrait, par un semblable procédé, déterminer les points de contact de ces deux mêmes cercles avec les cercles C′, C″ ; mais il est clair que, si l'on détermine sur ces derniers les cordes respectivement homologues à celle qu'on aura déterminée sur C, elles joueront, par rapport à eux, le même rôle que celle-ci par rapport à C, et de plus concourront avec elle en un point qui, comme on le sait déjà, et comme il résulte d'ailleurs de ce qui précède, sera le *centre radical* des trois cercles donnés, ou le point d'intersection unique de leurs trois cordes communes deux à deux.

La même opération, répétée pour chacun des quatre axes de

(*) Pour plus d'exactitude pratique, il convient de choisir pour C le plus grand des trois cercles donnés.

similitude, donnerait les cordes et les points de contact qui appartiennent aux huit circonférences tangentes aux proposés ; mais, si l'on remarque que la polaire du centre radical, par rapport à l'un quelconque des cercles proposés, rencontre les quatre axes de similitude en des points qui sont précisément les pôles des quatre cordes de contact qui appartiennent à ce cercle, il sera beaucoup plus simple, une fois qu'on aura obtenu, par la construction qui précède, le centre radical et les premières cordes de contact, de s'en servir pour déterminer simultanément les systèmes des trois autres. Ces diverses constructions n'exigent d'ailleurs que l'emploi d'une simple règle, quand on aura la connaissance préalable des centres de similitude, ou seulement celle des centres des cercles donnés.

Si, au lieu de s'arrêter, dans la construction ci-dessus, au quatrième point N, trouvé sur C, on continuait, de la même manière, à chercher son homologue inverse N′ sur C′, puis l'homologue inverse N″ de celui-ci sur C″, puis enfin l'homologue inverse de ce dernier sur C ; ce dernier point serait, dans tous les cas, le point M de départ lui-même ; les six droites tracées d'après les conditions qui précèdent, et qui se trouveraient dirigées deux à deux vers les trois centres de similitude que l'on considère, formeraient donc naturellement un hexagone fermé, dont les sommets opposés appartiendraient deux à deux à un même cercle, et dont les trois diagonales varieraient de position en même temps que le point de départ ou premier sommet, en pivotant respectivement autour de points fixes, placés sur l'axe de similitude correspondant ; ce qui offre le moyen de construire simultanément et d'une manière symétrique les trois cordes, et par suite les six points de contact appartenant aux deux cercles tangens relatifs à cet axe de similitude. Il est en outre bien digne de remarque que les six sommets de l'un quelconque des hexagones ainsi construits sont, à la fois, sur une même circonférence de cercle ayant l'axe de similitude correspondant pour corde commune avec les deux cercles tangens au proposé qui appartiennent à cet axe.

Les constructions qui précèdent ont l'avantage d'être fort simples, puisqu'elles n'exigent que le tracé de lignes droites et qu'elles dispensent de construire les cordes communes ou les axes radicaux qui appartiennent aux trois cercles proposés, combinés deux à deux. On peut même éviter l'emploi direct des axes de similitude au moyen du procédé qui suit :

Ayant choisi, à volonté, trois centres de similitude, situés en ligne droite, et appartenant aux trois cercles donnés combinés deux à deux; prenez sur l'un d'eux C une corde quelconque; cherchez son homologue inverse par rapport à C', puis l'homologue inverse de celle ci par rapport à C'', et ainsi de suite, en procédant constamment dans le même ordre. Après la sixième opération, vous retomberez évidemment sur la première corde. Vous n'aurez donc, en tout, que seize lignes droites à tracer, y compris les deux cordes de chaque cercle, lesquelles se rencontreront en un point qui appartiendra à la corde de contact cherchée relative à ce cercle. Cela posé, tracez les deux nouvelles cordes qui réunissent deux à deux celles des extrémités des premières qui ne proviennent pas de la même combinaison, et qui sont par conséquent indépendantes entre elles; ces deux cordes, ainsi obtenues dans chaque cercle, se rencontreront en un second point, appartenant à la corde de contact cherchée, laquelle sera ainsi parfaitement déterminée, pour chacun des cercles proposés.

Les constructions et propositions qui précèdent subsistent, d'une manière analogue, pour trois et quatre sphères, données à volonté dans l'espace, pour trois cônes qui ont un même sommet, et enfin pour trois cercles quelconques tracés sur une même sphère. On s'en convaincra d'une manière tout-à-fait simple, dans ce dernier cas, en considérant l'un des quatre systèmes de trois surfaces coniques qui renferment deux à deux les cercles proposés, et examinant ce qui se passe dans le plan d'une section quelconque renfermant la droite ou axe qui joint les trois sommets correspondans; car, en supposant ensuite que ce plan se meuve autour de l'axe dont il s'agit, jusqu'à devenir tangent à la fois aux trois surfaces coniques, il coupera évidemment, dans cette double position, la sphère donnée suivant un cercle tangent à la fois aux trois proposés; ce qui peut servir, en même temps, à justifier ce qui a été dit ci-dessus relativement au cas particulier où les trois cercles donnés sont tracés sur un même plan.

On peut remarquer que les propositions relatives au système de trois cercles tracés sur un plan, sont tout-à-fait analogues à celles que j'ai énoncées dans le tom. VIII.e des *Annales* (pag. 141), relativement aux polygones inscrits à une conique, dont les côtés sont assujettis à pivoter autour de points fixes situés en ligne droite; et, en effet, il devient très-facile de passer des unes aux autres, en invoquant le principe de la continuité. C'est un rapprochement que je n'ai pas manqué de faire, dans le mémoire dont M. Cauchy a rendu compte à l'institut.

TRIGONOMÉTRIE.

Exposition des principes fondamentaux de la théorie des fonctions circulaires ;

Par M. Frédéric Sarrus, docteur ès sciences.

On sait que toute la théorie des fonctions circulaires est renfermée dans les quatre formules qui donnent les sinus et cosinus de la somme et de la différence de deux arcs en fonction des sinus et cosinus de ces arcs eux-mêmes. Mais, si ces formules se demontrent avec assez de facilité, tant que les arcs dont il s'agit sont moindres que le quart de cercle, il n'en est plus de même lorsqu'on suppose ces arcs d'une grandeur quelconque. Peut-être même est-il permis de douter que les efforts qui ont été faits dans ces derniers temps pour remplir cette lacune des élémens aient complètement atteint le but louable que leurs auteurs s'en étaient promis; et c'est ce qui nous enhardit à revenir de nouveau sur cette doctrine fondamentale, pour la présenter d'une manière qui nous paraît à la fois très-simple, très-générale et très-rigoureuse.

Soient x, y deux arcs tout-à-fait arbitraires, et pouvant même excéder une ou plusieurs circonféreuces; par les mêmes considérations qui, dans la géométrie analitique, donnent la distance d'un point à l'origine et la distance entre deux points, on aura, d'après la définition des *cordes*, *sinus* et *cosinus*, et en prenant le rayon pour unité,

$$\text{Sin.}^2x+\text{Cos.}^2x=1\ ;$$

$$\text{Sin.}^2y+\text{Cos.}^2y=1\ ,$$

$$(\text{Sin.}x-\text{Sin.}y)^2+(\text{Cos.}x-\text{Cos.}y)^2=\text{Cord.}^2(x-y)\ ;$$

En développant le premier membre de la dernière de ces trois équations, et ayant égard aux deux premières, il viendra

$$2-2(\text{Sin.}x\text{Sin.}y+\text{Cos.}x\text{Cos}\,y)=\text{Cord.}^2(x-y)\ ; \qquad \text{(A)}$$

qui, en posant $y=0$, d'où $\text{Sin.}y=0$, $\text{Cos.}y=1$, donne

$$2-2\text{Cos.}x=\text{Cord.}^2x\ ,$$

d'où, en changeant x en $x-y$;

$$2-2\text{Cos.}(x-y)=\text{Cord.}^2(x-y)\ ; \qquad \text{(B)}$$

éliminant donc $\text{Cord.}^2(x-y)$ entre les équations (A, B), il viendra, en réduisant,

$$\text{Cos.}(x-y)=\text{Cos.}x\text{Cos.}y+\text{Sin.}x\text{Sin.}y\ , \qquad \text{(I)}$$

En changeant, dans cette dernière équation, y en $x-y$, elle deviendra

$$\text{Cos.}y=\text{Cos.}x\text{Cos}\,(x-y)+\text{Sin.}x\text{Sin.}(x-y)\ ;$$

ou, en mettant pour $\text{Cos.}(x-y)$ sa valeur (I)

Cos.y

$$\text{Cos.}y=\text{Cos.}^2x\text{Cos.}y+\text{Sin.}x\text{Cos.}x\text{Sin.}y+\text{Sin.}x\text{Sin.}(x-y)\ .$$

En changeant Cos.^2x en $1-\text{Sin.}^2x$, effaçant alors le terme $\text{Cos}\,y$, commun aux deux membres, divisant ensuite par $\text{Sin.}x$ et transposant, on aura

$$\text{Sin.}(x-y)=\text{Sin.}x\text{Cos.}y-\text{Cos.}x\text{Sin.}y\ . \qquad \text{(II)}$$

Si, présentement, dans les équations (I, II), on change x en $x+y$, elles deviendront, en renversant

$$\text{Sin.}y\text{Sin.}(x+y)+\text{Cos.}y\text{Cos.}(x+y)=\text{Cos.}x\ ;$$

$$\text{Cos.}y\text{Sin.}(x+y)-\text{Sin}\,y\text{Cos.}(x+y=\text{Sin.}x\ ;$$

prenant la différence des produits de la première par $\text{Cos.}y$ et de la seconde par $\text{Sin.}y$, puis la somme des produits de la première par $\text{Sin.}y$ et de la seconde par $\text{Cos.}y$, en se rappelant chaque fois que $\text{Sin.}^2y+\text{Cos.}^2y=1$, il viendra

$$\text{Cos.}(x+y)=\text{Cos.}x\text{Cos.}y-\text{Sin.}x\text{Sin.}y\ , \qquad \text{(III)}$$

$$\text{Sin.}(x+y)=\text{Sin.}x\text{Cos.}y+\text{Cos.}x\text{Sin.}y\ ; \qquad \text{(IV)}$$

de manière que nos quatre formules fondamentales se trouveront ainsi établies, sans avoir fait aucune supposition particulière sur la grandeur des arcs x et y.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 289 du IX.e volume de ce recueil ;

Par M. Gergonne.

Le modeste auteur des deux beaux théorèmes que nous allons démontrer y avait attaché jusqu'ici trop peu d'importance pour songer à nous en fournir lui-même la démonstration que d'ailleurs nous avions vainement cherchée de notre côté. Nous désespérions donc de pouvoir suppléer à son silence, lorsque M. le capitaine Poncelet, lié d'amitié avec lui, a bien voulu nous apprendre que ces théorèmes étaient fondés sur des principes de statique analogues à ceux que nous avions nous-mêmes appliqués, quelques pages auparavant (tom. IX, page 281), à d'autres recherches géométriques. Ce trait de lumière nous a suffi pour parvenir au but que nous nous étions proposé, et qui paraîtrait assez difficile à atteindre par toute autre voie; ce qui offre une nouvelle preuve de l'utilité de la statique dans la géométrie.

THÉORÈME I. Soient pris arbitrairement, sur un plan, n points que l'on numérotera et désignera, à volonté, par (1), (2), (3),..... (n).

Soient joints chacun de ces n points, à partir du point (1), à celui qui porte le numéro immédiatement supérieur, jusqu'au dernier (n) par des droites qui seront évidemment au nombre de

$n-1$; et soient respectivement designées ces droites par les deux points qui les déterminent en cette manière

$$\overline{(1)(2)}\ ,\quad \overline{(2)(3)}\ ,\quad \overline{(3)(4)}\ ,\ldots\ldots,\ \overline{(n-1)(n)}\,.$$

Sur la direction de chacune de ces droites, soit pris arbitrairement un point ; et soit désigné chacun des $n-1$ points ainsi choisis par les deux numéros qui désignent la droite sur laquelle il se trouve situé, ainsi qu'il suit :

$$(12)\ ,\quad (23)\ ,\quad (34)\ldots\ldots\ldots\ldots(n-1\ ,\ n)\,.$$

Soient joints, deux à deux, par de nouvelles droites, ceux de ces points et des premiers dont les indices renferment en tout trois nombres consécutifs de la suite naturelle, sans répétition ni lacunes ; et soient désignées les droites de cette nouvelle série, au nombre de $2(n-2)$, par l'ensemble des indices des deux points qui les déterminent, en cette manière

$$\overline{(1)(23)}\ ,\ \overline{(2)(34)}\ ,\ \overline{(3)(45)}\ldots\ldots\overline{(n-2)(n-1\ ,n)}\ ,$$

$$\overline{(12)(3)}\ ,\ \overline{(23)(4)}\ ,\ \overline{(34)(5)}\ldots\ldots\overline{(n-2\ ,\ n-1)(n)}\ ;$$

les droites qui, deux à deux, auront les mêmes nombres à leurs indices se couperont, en général, et donneront ainsi $n-2$ points d'intersection, que nous désignerons respectivement par l'ensemble des nombres qui forment les indices de ces droites, en cette manière

$$(123)\ ,\quad (234)\ ,\quad (345)\ldots\ldots(n-2\ ,\ n-1\ ,\ n)\,.$$

Soient de même joints, deux à deux, par de nouvelles droites, ceux des points des trois séries dont les indices renferment, en tout, quatre nombres consecutifs de la suite naturelle, sans répétition ni lacune; et soient designees les droites de cette troisieme série, au nombre de $3(n-3)$, par l'ensemble des indices des deux points qui les déterminent, en cette maniere

$$\overline{(1)(234)}\,,\;\overline{(2)(345)}\,,\;\overline{(3)(456)}\ldots\ldots\overline{(n-3)(n-2\,,n-1\,,n)}\;;$$

$$\overline{(12)(34)}\,,\;\overline{(23)(45)}\,,\;\overline{(34)(56)}\ldots\ldots\overline{(n-3\,,n-2)(n-1\,,n)}\;,$$

$$\overline{(123)(4)}\,,\;\overline{(234)(5)}\,,\;\overline{(345)(6)}\ldots\ldots\overline{(n-3\,,n-2\,,n-1)(n)}\;;$$

il arrivera que les droites qui, trois à trois, auront les mêmes nombres à leurs indices (et ce sont ici, comme on le voit, celles qui appartiennent à une même colonne verticale) se couperont au même point, de sorte qu'elles ne fourniront que $n-3$ points d'intersection, que nous designerons respectivement par les nombres qui forment les indices de ces droites, en cette manière

$$(1234)\,,\quad(2345)\,,\quad(3456)\,,\ldots\ldots(n-3,\,n-2\,,\,n-1\,,\,n)\;.$$

En poursuivant le même procédé, avec les mêmes attentions, nous obtiendrons une quatrieme série de droites, au nombre de $4(n-4)$, concourant, quatre à quatre, en un même point, et n'ayant ainsi que $n-4$ intersections, puis une cinquième série de droite, au nombre de $5(n-5)$, concourant, cinq à cinq, en un même point, et n'ayant ainsi que $n-5$ intersections; de sorte que nous arriverons finalement à $n-1$ droites concourant toutes en un point unique, designé par $(123\ldots\ldots\,n)$.

Démonstration. Comme un plus grand nombre de points ne peut qu'alonger la demonstration du théorème, sans la rendre plus difficile; afin de fixer les idées, et pour être en même temps plus clairs et plus briefs, nous supposerons que les points dont il s'agit ne sont qu'au nombre de cinq seulement, situés d'ailleurs d'une manière quelconque sur un plan, et respectivement désignés par

$$(1)\ ,\quad (2)\ ,\quad (3)\ ,\quad (4)\ ,\quad (5)\ ;$$

de sorte que les quatre droites qui les joindront consécutivement, deux à deux, seront

$$\overline{(1)(2)}\ ,\quad \overline{(2)(3)}\ ,\quad \overline{(3)(4)}\ ,\quad \overline{(4)(5)}\ .$$

Supposons que ces points soient des masses quelconques, positives ou négatives, dont il s'agit de trouver le centre commun de gravité, à cause de l'indétermination de ces masses, on pourra toujours supposer que les quatre points

$$(12)\ ,\quad (23)\ ,\quad (34)\ ,\quad (45)\ ,$$

pris arbitrairement et respectivement sur nos quatre droites, sont les centres communs de gravité respectifs des masses

$$(1)\ \text{et}\ (2),\ (2)\ \text{et}\ (3),\ (3)\ \text{et}\ (4),\ (4)\ \text{et}\ (5)\ .$$

Il est clair, en second lieu, que les droites

$$\overline{(1)(23)}\ ,\quad \overline{(2)(34)}\ ,\quad \overline{(3)(45)}\ ,$$

ainsi que les droites

$$\overline{(12)(3)}\ ,\quad \overline{(23)(4)}\ ,\quad \overline{(34)(5)}\ ,$$

contiendront respectivement les centres communs de gravité des trois systèmes de trois masses

$$(1)\ ,\ (2)\ ,\ (3)\ ;\quad (2)\ ,\ (3)\ ,\ (4)\ ;\quad (3)\ ,\ (4)\ ,\ (5)\ ;$$

d'où il suit que les points d'intersection

$$(123)\,,\quad(234)\,,\quad(345)\,,$$

seront les centres de gravité respectifs de ces trois mêmes systèmes.

Concluons de là que les droites

$$\overline{(1)(234)}\,,\qquad\overline{(2)(345)}\,,$$

que les droites

$$\overline{(12)(34)}\,,\qquad\overline{(23)(45)}\,;$$

et les droites

$$\overline{(123)(4)}\,,\qquad\overline{(234)(5)}\,;$$

contiendront également les centres de gravité respectifs des deux systèmes de quatre masses

$$(1)\,,\ (2)\,,\ (3)\,,\ (4)\,;\qquad(2)\,,\ (3)\,,\ (4)\,,\ (5)\,;$$

de sorte que les trois premières droites concourront en un premier point, et les trois dernières en un second point que l'on pourra respectivement désigner par

$$(1234)\,,\qquad(2345)\,,$$

et qui seront les centres de gravité respectifs de ces mêmes systèmes.

Or, de tout ce qui précède, il suit que les quatre droites

$$\overline{(1)(2345)}\,,$$

$$\overline{(12)(345)}\,,$$

$$\overline{(123)(45)}\,,$$

$$\overline{(1234)(5)}\,,$$

contiennent également le centre commun de gravité des cinq masses proposées ; puis donc que ce centre de gravité est unique, il s'ensuit que ces quatre droites se coupent en un seul et même point, que l'on peut désigner par

$$(12345),$$

et qui est lui-même ce centre de gravité.

THÉORÈME II. Soient n droites arbitraires et indéfinies, tracées sur un même plan, que l'on numérotera et désignera, à volonté, par $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, ... $\overline{n}$.

Désignons l'intersection de chaque droite avec celle qui porte le numéro immédiatement supérieur, de la première à la dernière, par l'ensemble de leurs indices, en cette manière

$$(\overline{1}\,,\,\overline{2})\,,\quad(\overline{2}\,,\,\overline{3})\,,\quad(\overline{3}\,,\,\overline{4})\,,\ldots\ldots(\overline{n-1}\,,\,\overline{n})\,.$$

Par chacun de ces points, soit menée une droite arbitraire et désignons les $n-1$ droites ainsi menées par les numéros des deux droites primitives par l'intersection desquelles elles passent respectivement, ainsi qu'il suit :

$$\overline{12}\,,\quad\overline{23}\,,\quad\overline{34}\,,\ldots\ldots\overline{(n-1)n}\,;$$

Considérons, deux à deux, les intersections des droites des deux séries dont les indices renferment, en tout, trois nombres consécutifs de la suite naturelle, sans répétition ni lacune ; et soient désignés les points de cette nouvelle série, au nombre de $2(n-2)$, par l'ensemble des indices des deux droites qui les déterminent, en cette manière

$$(\overline{1}\,,\,\overline{23})\,,\quad(\overline{2}\,,\,\overline{34})\,,\quad(\overline{3}\,,\,\overline{45})\,,\ldots\ldots(\overline{n-2}\,,\,\overline{n-1.n})\,;$$

$$(\overline{12}\,,\,\overline{3})\,,\quad(\overline{23}\,,\,\overline{4})\,,\quad(\overline{34}\,,\,\overline{5})\,,\ldots\ldots(\overline{n-2.n-1}\,,\,\overline{n})\,;$$

les points qui, deux à deux, porteront les mêmes nombres à leurs indices détermineront une nouvelle série de $n-1$ droites, que nous désignerons respectivement par l'ensemble des nombres qui forment les indices de ces points, en cette manière

$$\overline{123}\,,\quad \overline{234}\,,\quad \overline{345}\,,\ldots\ldots\overline{n-2.n-1.n}\,.$$

Soient de même considérées, deux à deux, les intersections des droites des trois séries dont les indices renferment, en tout, quatre nombres consécutifs de la suite naturelle, sans répétition ni lacune; et soient désignés les points de cette troisième série, au nombre de $3(n-3)$, par l'ensemble des indices des droites qui les déterminent, en cette manière

$$(\overline{1}\,,\overline{234})\,,\quad (\overline{2}\,,\overline{345})\,,\quad (\overline{3}\,,\overline{456})\,,\ldots\ldots\ldots(\overline{n-3}\,,\overline{n-2.n-1.n})\,,$$

$$(\overline{12}\,,\overline{34})\,,\quad (\overline{23}\,,\overline{45})\,,\quad (\overline{34}\,,\overline{56})\,,\ldots\ldots\ldots(\overline{n-3.n-2}\,,\overline{n-1.n})\,,$$

$$(\overline{123}\,,\overline{4})\,,\quad (\overline{234}\,,\overline{5})\,,\quad (\overline{345}\,,\overline{6})\,,\ldots\ldots\ldots(\overline{n-3.n-2.n-1}\,,\overline{n})\,;$$

il arrivera que les points qui, trois à trois, auront les mêmes nombres à leurs indices (et ce sont ici, comme on le voit, ceux qui appartiennent à une même colonne verticale) seront situés sur une même ligne droite, et ne détermineront ainsi que $n-3$ nouvelles droites, que nous désignerons respectivement par les nombres qui forment les indices de ces points, en cette manière

$$\overline{1234}\,,\quad \overline{2345}\,,\quad \overline{3456}\,,\ldots\ldots\ldots\overline{n-3.n-2.n-1.n}\,.$$

En poursuivant le même procédé, avec les mêmes attentions, nous obtiendrons une quatrième série de points, au nombre de $4(n-4)$, situés, quatre à quatre, sur une même droite, et ne déterminant ainsi que $n-4$ nouvelles droites, puis une cinquième série de points, au nombre de $5(n-5)$, situés, cinq à cinq, sur une

une même droite, et ne déterminant ainsi que $n-5$ nouvelles droites; de sorte que nous arriverons finalement à $n-1$ points situés sur une droite unique, désignée par $\overline{123......n}$.

Démonstration. Pour les mêmes raisons déjà déduites ci-dessus, nous ne supposerons seulement que cinq droites données, et respectivement désignées par

$$\overline{1}\,,\ \overline{2}\,,\ \overline{3}\,,\ \overline{4}\,,\ \overline{5}\,;$$

de sorte que leurs quatre points d'intersections consécutives seront

$$(\overline{1}\,,\overline{2})\,,\ (\overline{2}\,,\overline{3})\,,\ (\overline{3}\,,\overline{4})\,,\ (\overline{4}\,,\overline{5})\,.$$

Supposons que ces droites soient les directions de cinq forces d'un même système dont il s'agit de trouver la résultante; à cause de la complète indétermination du sens et de l'intensité de ces forces, on pourra toujours supposer que les quatre droites arbitraires

$$\overline{12}\,,\ \overline{23}\,,\ \overline{34}\,,\ \overline{45}\,,$$

sont les directions respectives des résultantes des couples de forces

$$\overline{1} \text{ et } \overline{2}\,,\ \overline{2} \text{ et } \overline{3}\,,\ \overline{3} \text{ et } \overline{4}\,,\ \overline{4} \text{ et } \overline{5}\,,$$

Il est clair, en second lieu, que les points

$$(\overline{1}\,,\overline{23})\,,\ (\overline{2}\,,\overline{34})\,,\ (\overline{3}\,,\overline{45})\,;$$

ainsi que les points

$$(\overline{12}\,,\overline{3})\,,\ (\overline{23}\,,\overline{4})\,,\ (\overline{34}\,,\overline{5})\,;$$

seront respectivement sur la direction des résultantes des systèmes de trois forces

$$\overline{1}\,,\overline{2}\,,\overline{3}\,;\ \ \overline{2}\,,\overline{3}\,,\overline{4}\,;\ \ \overline{3}\,,\overline{4}\,,\overline{5}\,,$$

d'où il suit que les droites

$$\overline{123}\,,\quad \overline{234}\,,\quad \overline{345}\,,$$

déterminées par les points correspondans, seront les directions même des résultantes de ces systèmes de forces.

Concluons de là que les points

$$(\overline{1}\,,\,\overline{234})\,,\quad (\overline{2}\,,\,\overline{345})\,,$$

que les points

$$(\overline{12}\,,\,\overline{34})\,,\quad (\overline{23}\,,\,\overline{45})\,,$$

et les points

$$(\overline{123}\,,\,\overline{4})\,,\quad (\overline{234}\,,\,\overline{5})\,,$$

seront également situés sur les résultantes respectives des deux systemes de quatre forces

$$\overline{1}\,,\,\overline{2}\,,\,\overline{3}\,,\,\overline{4}\,;\quad \overline{2}\,,\,\overline{3}\,,\,\overline{4}\,,\,\overline{5}\,;$$

de sorte que les trois premiers sont sur une même droite, et les trois derniers sur une autre droite ; lesquelles peuvent être respectivement designées par

$$\overline{1234}\,,\quad \overline{2345}\,,$$

et sont les directions respectives des résultantes de ces deux systèmes.

Or, de tout ce qui précède, il suit que les quatre points

$$(\overline{1}\,,\,\overline{2345})\,,$$

$$(\overline{12}\,,\,\overline{345})\,,$$

$$(\overline{123}\,,\,\overline{45})\,,$$

$$(\overline{1234}\,,\,\overline{5})\,,$$

sont également situés sur la résultante commune des cinq forces proposées ; puis donc que cette résultante est unique, il s'ensuit que ces quatre points sont sur une même droite, que l'on peut désigner par

$$\overline{12345}\,,$$

et qui est elle-même la direction de la résultante générale du système.

On voit que ces deux théorèmes ont entre eux une correspondance parfaite. Cette correspondance est même telle que chacun d'eux peut facilement être déduit comme conséquence de l'autre. Concevons, en effet, qu'ayant tracé sur un plan une section conique quelconque, et qu'ayant aussi tracé sur ce même plan la figure relative à l'un quelconque de ces deux théorèmes, on détermine ensuite les pôles des droites et les polaires des points de cette figure, par rapport à la section conique dont il s'agit ; en se rappelant que les pôles des droites qui concourent en un même point appartiennent à une même droite, et qu'à l'inverse les polaires des points qui appartiennent à une même droite concourent en un même point, on verra clairement que les pôles et polaires ainsi tracés formeront la figure relative à l'autre théorème, qui se trouvera ainsi démontré à l'aide de celui-là.

Si l'on considère la figure relative à l'un quelconque de ces deux théorèmes comme la base d'une pyramide ayant son sommet en un point quelconque, et que, par ce sommet, on conçoive des droites menées à tous les points et des plans menés à toutes les droites de la figure, on apercevra sur-le-champ que nos théorèmes ont leurs analogues relativement à des systèmes de droites et de plans indéfinis, concourant en un même point.

Si l'on suppose enfin que ce point de concours des droites ou des plans est le centre d'une sphère, on verra que nos deux théorèmes doivent encore avoir lieu sur la surface sphérique ; pourvu qu'on y remplace les droites par des arcs de grands cercles.

Si l'on suppose, dans le premier des deux théorèmes, que certaines masses sont égales et de signes contraires, ou dans le second, que certaines forces forment des couples, ce qui éloignera soit le centre commun de gravité, soit la résultante à l'infini ; ces circonstances introduiront, dans l'énoncé des deux théorèmes, des modifications plus longues à expliquer, à raison de l'infinie variété dont elles sont susceptibles, qu'elles ne sont difficiles à concevoir.

On peut ensuite appliquer à chaque polygone, en particulier, à partir du quadrilatère, soit les théorèmes généraux, soit ces théorèmes modifiés de la manière qu'il vient d'être dit ; de sorte que nos deux théorèmes peuvent être envisagés, en quelque sorte, comme des magasins de propriétés des polygones, desquelles on peut ensuite facilement déduire la solution d'une multitude de problèmes du genre de ceux qui ont été récemment traités par M. le professeur BRIANCHON, dans son *Application de la théorie des transversales*. Ainsi, nos deux theorèmes ne se recommandent pas moins par l'utilité pratique qu'on en peut tirer que par leur élégante généralité.

Nous ne devons pas quitter ce sujet sans faire observer que si, pour plus de symétrie entre les deux théorèmes, nous avons supposé, dans le premier, que les points donnés étaient situés sur un même plan ; le théorème n'en est pas moins vrai, lorsque ces points sont distribués d'une manière quelconque dans l'espace ; il n'y a même pas alors un seul mot à changer à sa démonstration. Mais, on ne saurait, au contraire, donner une extension analogue à l'autre théorème ; attendu que, tandis que deux points sont toujours sur une même droite, deux droites ne concourent pas toujours en un même point.

Solution du problème d'arithmétique proposé à la page 96 de ce volume ;

Par MM. LENTHÉRIC, docteur ès sciences, professeur au collége royal de Montpellier,
AUGUSTE OLLIVE, licencié ès lettres,
Et VECTEN, licencié ès lettres.

PROBLÈME. *On a écrit de suite, et sans aucune séparation, les nombres consécutifs de la suite naturelle, en cette manière :*

$$1234567891011121314151617181920212223\ldots\ldots$$

En considérant simplement cette suite comme une suite de chiffres posés à côté les uns des autres ; on propose d'assigner le chiffre qui doit y occuper un rang quelconque n *, sans être obligé d'écrire ceux qui le précèdent ?*

Solution. Les trois géomètres qui se sont occupés de cette question l'ont également décomposée dans les trois suivantes : 1.° assigner combien de chiffres a le nombre naturel dont le chiffre cherché fait partie ; 2.° determiner, en particulier, quel est ce nombre parmi ceux qui ont autant de chiffres que lui ; 3.°

trouver le rang qu'occupe dans ce même nombre le chiffre dont il s'agit.

Pour rendre le procédé général plus intelligible, voyons d'abord, sur un exemple particulier, comment on peut résoudre successivement les trois questions auxquelles le problème se trouve ramené. Soit $n=6192$; c'est-à-dire, supposons qu'il soit question de déterminer le 6192.^{me} chiffre de la série proposée.

1.° On rencontre d'abord, dans cette suite, 9 nombres d'*un* seul chiffre, ce qui fait 9 chiffres; et puisqu'on a $6192>9$, il s'ensuit que le nombre dont le chiffre cherché fait partie a plus d'*un* chiffre.

Viennent ensuite 90 nombres de *deux* chiffres, formant en tout 180 chiffres; or, $6192-9=6183>180$; donc le nombre dont le chiffre cherché fait partie a plus de *deux* chiffres.

A la suite des nombres de deux chiffres viennent 900 nombres de *trois* chiffres, formant ensemble 2700 chiffres; or $6183-180=6003>2700$; donc le nombre dont le chiffre cherché fait partie a plus de *trois* chiffres.

A la suite des nombres de trois chiffres viennent 9000 nombres de *quatre* chiffres, formant ensemble 36000 chiffres ; or $6003-2700=3303<36000$; donc le nombre dont le chiffre cherché fait partie n'a pas plus de *quatre* chiffres; et, puisqu'il en a plus de trois, ce nombre a précisément quatre chiffres.

2.° Le dernier reste 3303 prouve de plus que le chiffre cherché occupe le 3303.^{me} rang, à partir du premier chiffre de gauche de 1000, premier nombre de quatre chiffres ; d'où il suit que la question est ramenée à chercher quel est le chiffre qui occupe le 3303.^{me} rang dans la suite

$$1000100110021000310041005\ldots\ldots\ldots\ldots9999\,.$$

des nombres naturels, à portir de 1000.

Si 3303 était exactement divisible par *quatre*, il est évident que le quotient exprimerait le rang qu'occupe, dans cette dernière suite, le nombre dont le chiffre cherché fait partie, et que même ce chiffre y occuperait le dernier rang à droite; mais si la division donne un reste, ce sera le quotient augmenté d'une unité qui exprimera le rang de ce nombre, dans lequel le chiffre cherché n'occupera plus alors la dernière place.

Or, en divisant 3303 par 4, on obtient 825 pour quotient et 3 pour reste; donc le nombre dont le chiffre cherché fait partie est le 826.me de notre dernière suite; et, puisque cette suite commence à 1000, ce nombre est 1825.

3.° Enfin, le reste 3 indiquant que le chiffre cherché est le troisième chiffre de ce nombre, en allant de gauche à droite, il s'ensuit que ce chiffre est 2.

En récapitulant donc, on voit que le procédé général peut se réduire à ce qui suit : du nombre proposé n, retranchez successivement les nombres $1.9=9$, $2.90=180$, $3.900=2700$, $4.9000=36000$, ... aussi long-temps que les soustrations pourront être faites; divisez le dernier reste par autant d'unités, plus deux que le dernier nombre retranché aura de zéros à sa droite; ne prenez que le quotient entier le plus approché, et notez le reste; augmentez ce quotient d'une unité de l'ordre marqué par le diviseur; comptez, dans ce quotient, ainsi augmenté, autant de chiffres, en allant de gauche à droite, que le reste aura d'unités; alors le dernier chiffre compté de cette manière sera le chiffre demandé.

On peut, pour plus de commodité, disposer l'opération comme on le voit ici :

Nombre n proposé.	6192		
-1.9	9		
1.er reste.	6183		
-2.90	180		
2.e reste	6003		
-3.900	2700		
3.e reste.	3303	4	diviseur
reste.	3	1825	quotient augmenté
		...	

Le chiffre cherché est 2.

Voilà sous quelle forme M. Ollive a présenté le procédé. MM. Lenthéric et Vecten ont cherché à l'abréger, en remplaçant cette suite de soustractions par une soustraction unique de la somme de tous les nombres à retrancher ; ils ont entrevu sans doute que ces nombres formant la suite très-régulière

$$1.9+2.90+3.900+4.9000+\dots\dots\dots$$

la somme de cette suite, à quelque nombre de termes qu'on le bornât, devait affecter une forme également régulière ; et l'examen dans lequel ils se sont engagés à ce sujet a pleinement justifié ce soupçon.

On a, en effet,

$$1.9 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots 9\,;$$

$$1.9+2.90 \dots\dots\dots\dots\dots = \dots 189\,,$$

$$1.9+2.90+3.900 \dots\dots\dots\dots = \dots 2889\,,$$

1.9

$$1.9+2.90+3.900+4.9000 \ldots\ldots = 38889 ,$$

$$1.9+2.90+3.900+4.9000+5.90000=488889 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

de sorte qu'on est conduit à soupçonner que le nombre unique à retrancher pourrait bien être, en général, un nombre terminé par 9, précédé d'une suite de 8, précédés eux-mêmes d'un nombre d'autant d'unités qu'il y a de 8 à sa droite.

Pour changer ce soupçon en certitude, désignons généralement par S_m la somme qu'on obtient pour la série, lorsqu'on y admet m termes, et supposons que la loi se soit soutenue pour toutes les sommes de termes, jusqu'à la somme des $m-1$ premiers inclusivement ; nous aurons ainsi

$$S_{m-1}=9+80(1+10+10^2+10^3+\ldots+10^{m-4}+10^{m-3})+(m-2)10^{m-1} ;$$

or,

$$S_m=S_{m-1}+m.9.10^{m-1} ;$$

donc

$$S_m=9+80(1+10+10^2+10^3+\ldots+10^{m-4}+10^{m-3})+(m-2)10^{m-1}+m.9.10^{m-1} ;$$

or,

$$(m-2)10^{m-1}+m.9.10^{m-1}=80.10^{m-2}+(m-1)10^m ;$$

donc enfin

$$S_m=9+80(1+10+10^2+10^3+\ldots+10^{m-3}+10^{m-2})+(m-1)10^m ;$$

valeur qui ne diffère de celle de S_{m-1} qu'en ce que $m-1$ y est changé en m. Il demeure donc établi que, si la loi se maintient jusqu'à la série de $m-1$ termes, elle aura lieu également pour une série de m termes ; puis donc qu'elle a lieu pour les séries de 1, 2, 3, 4, 5 termes, il s'ensuit qu'elle est générale.

Cette remarque conduit MM. Lenthéric et Vecten à réduire le procédé à ce qui suit : écrivez un 9 sous les unités du nombre n et une suite de 8 à la gauche de ce 9, en tel nombre qu'en écrivant un pareil nombre d'unités à la gauche du dernier, vous n'excédiez pas le nombre n ; faites alors la soustraction, et divisez le reste par autant d'unités, plus deux que vous aurez écrit de 8 ; augmentez le quotient d'une unité de l'ordre marqué par le diviseur ; comptez enfin, dans ce quotient, ainsi augmenté, autant de chiffres, de gauche à droite, que vous aurez d'unités au reste ; le dernier chiffre sur lequel vous vous serez arrêté sera le chiffre cherché.

Exemple. Soit $n=528276$; on opérera comme on le voit ici :

Nombre proposé	828276		
Nombre à retrancher	488889		
Reste	339387	6 divis.	
reste	3	156564 quot.	
		. . .	

ce qui montre que le chiffre cherché est un 6.

Remarque I. Si le reste de la division était zéro, le chiffre cherché serait le dernier chiffre de la droite du quotient diminué d'une unité, à moins cependant que celui-ci ne fût un zéro, auquel cas le chiffre cherché serait un 9.

Exemple I. Soit $n=3157$.

Nombre proposé	3157	
Nombre à retrancher	2889	
Reste.	268	4 diviseur
reste	0	1067 quotient aug.

ce qui montre que le chiffre cherché est un 6.

Exemple II. Soit $n=59439$.

Nombre proposé	59439	
Nombre à retrancher.	38889	
Reste.	20550	5 diviseur
reste	0	14110 quotient

ce qui montre que le chiffre cherché est un 9.

Remarque II. Si, pour former le nombre à retrancher, on est obligé d'écrire le chiffre 8 neuf fois consécutivement, on ne mettra rien à gauche, le dernier 8 tenant lieu du nombre des 8; mais ce dernier 8 ne devra pas entrer en compte dans la recherche du nombre des unités du diviseur.

De même si l'on devait écrire dix-neuf 8, on n'écrirait qu'un 1 à leur gauche, le 18 exprimant alors le nombre des 8, lequel ne devrait compter que pour dix-huit dans la recherche du diviseur. On se comportera d'une manière analogue, dans tous les cas semblables.

De même, si l'on devait écrire nonante 8, on ne mettrait rien à leur gauche, et ils ne devraient compter que pour huitante-huit, les deux derniers exprimant seulement le nombre des 8 écris à droite. Si l'on devait en écrire cent nonante, on n'écrirait qu'un 1 à la gauche, et ainsi de suite.

Exemple. Soit $n=8889754327$.

Nombre proposé	8889754327	
Nombre à retrancher. .	8888888889	
Reste.	865438	10
reste	8	1000086543
		. . . .

d'où l'on voit que le chiffre cherché est un 5.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. QUEL est le plus petit des parallélogrammes circonscrits à une ligne du second ordre qui a un centre ?

II. Quel est le plus petit des parallélipipèdes circonscrits à une surface du second ordre qui a un centre ?

ANALISE TRANSCENDANTE.

Essai d'une nouvelle méthode, servant à intégrer rigoureusement, lorsque cela est possible, toute équation différentielle à deux variables :

Par M. le Professeur KRAMP, correspondant de l'académie royale des sciences, doyen de la faculté des sciences de Strasbourg, chevalier de l'Ordre royal de la Légion d'honneur.

(*Deuxième mémoire.*)

DANS un précédent mémoire (pag. 97), nous avons fait voir que toute équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx}=X+2Yy+Zy^2,$$

où X, Y, Z sont des fonctions quelconques de x, admet une intégrale de la forme

$$y=\frac{A+A'k}{P+P'k},$$

dans laquelle A, A', P, P' sont d'autres fonctions de x, et où k est la constante arbitraire ; et nous avons vu que la détermination de ces dernières fonctions dépend, en général, de l'intégration d'équations linéaires du second ordre à coefficiens variables.

Nous nous réservons de revenir, dans une autre occasion, sur l'intégration de ces équations. Pour le présent, notre but est uniquement de parcourir successivement les diverses formes que peuvent avoir les fonctions de x qui entrent dans l'intégrale, en allant des plus simples aux plus composées.

Supposons, en premier lieu, que l'intégrale soit

$$y=\frac{(a+bx)+(a'+b'x)k}{(p+qx)+(p'+q'x)k}, \qquad \text{(I)}$$

dans laquelle a, a', b, b', p, p', q, q' sont des constantes déterminées, et où k est la constante arbitraire.

Si l'on change k en $\frac{1}{k}$, ce qui est permis, cette formule deviendra

$$y=\frac{(a'+b'x)+(a+bx)k}{(p'+q'x)+(p+qx)k};$$

ce qui prouve que, dans la formule (I), on peut transporter les accens des lettres qui en sont affectées à celles qui en sont dépourvues, sans qu'il en résulte autre chose qu'une simple transformation de la constante arbitraire et conséquemment sans que la valeur de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, délivrée de cette constante, soit aucunement affectée par ce changement.

Si, dans la même formule, on change k en $nk+l$, et qu'on multiplie ensuite les deux termes de la fraction par m, ce qui est permis, elle deviendra

$$y=\frac{[m(a+la')+m(b+lb')x]+(mna'+mnb'x)k}{[m(p+lp')+m(q+lq')x]+(mnp'+mnq'x)k};$$

et on pourra profiter de l'indétermination de l, m, n pour rendre trois des coefficiens égaux à trois nombres donnés ; d'où il suit que, dans les deux séries de coefficiens

$$a\ ,\ b\ ,\ p\ ,\ q\ ,$$

$$a'\ ,\ b'\ ,\ p'\ ,\ q'\ ,$$

de la formule (I) on peut toujours amener trois des coefficiens à devenir trois nombres donnés, pourvu que ces coefficiens n'appartiennent pas tous trois à une même série, et qu'on modifie les cinq autres conformément au changement que ceux-là auront éprouvé ; on n'aura fait ainsi, en effet, que l'équivalent d'une transformation de constante arbitraire, et conséquemment la valeur de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, délivrée de cette constante, ne sera aucunement affectée de ce changement.

En chassant le dénominateur et transposant, la valeur de y donne

$$\{(a+bx)-(p+qx)y\}+\{(a'+b'x)-(p'+q'x)y\}k=0\ ,$$

dont la différentielle est

$$\left\{(b-qy)-(p+qx)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right\}+\left\{(b'-q'y)-(p'+q'x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right\}k=0\ ;$$

éliminant k entre l'une et l'autre, il viendra, en développant, réduisant et ordonnant,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(ab'-ba')+[(bp'-pb')-(aq'-qa')]y+(pq'-qp')y^2}{(ap'-pa')+[(bp'-pb')+(aq'-qa')]x+(bq'-qb')x^2}\ ;$$

qu'on pourra représenter par

$$\frac{dy}{dx}=\frac{A+2By+Cy^2}{P+2Qx+Rx^2}\,, \qquad \text{(D)}$$

en posant, pour abréger,

$$ab'-ba'=A\,,\ (1)\quad (bp'-pb')-(aq'-qa')=2B\,,\quad pq'-qp'=C\,,\ (3)$$

$$ap'-pa'=P\,,\ (2)\quad (bp'-pb')+(aq'-qa')=2Q\,,\quad bq'-qb'=R\,,\ (4)$$

et l'on pourra évidemment remplacer les deux équations sans numéros par les deux suivantes :

$$bp'-pb'=Q+B\,, \qquad (5)$$

$$aq'-qa'=Q-B\,. \qquad (6)$$

Lors donc que l'on rencontrera une équation différentielle de la forme (D), on sera fondé à soupçonner que son intégrale pourrait bien être de la forme (I); et tout se réduira à déterminer les coefficiens a, a', b, b', p, p', q, q', au moyen des six relations ci-dessus ; à la vérité, elles sembleraient insuffisantes pour cet objet, mais nous avons vu tout à l'heure que trois de ces coefficiens étaient tout-à-fait arbitraires ; il n'est donc question que de déterminer les cinq autres en fonction de ces trois-là ; puis donc que nous avons pour cela six équations, il s'ensuit que le problème, loin d'être indéterminé comme il le paraissait d'abord, est, au contraire, plus que déterminé, et que conséquemment il doit exister, entre les six coefficiens A, B, C, P, Q, R une équation de condition, au défaut de laquelle une équation différentielle de la forme (D) ne pourrait être supposée avoir une intégrale de la forme (I).

Nous verrons tout à l'heure quelle est cette équation de condition, et, pour le moment, nous observerons seulement que, si, dans les équations que nous avons numérotées, on transporte les accens des lettres qui en sont affectées à celles qui en sont dépourvues, on ne fera ainsi que changer les signes des six coefficiens A, B, C, P, Q, R, ce qui ne changera aucunement la valeur de $\frac{dy}{dx}$; conclusion tout-à-fait conforme à ce que nous avions d'abord annoncé.

Rien n'est plus facile que de déduire, de ces six équations, deux groupes de quatre équations chacun, tels que dans le premier il n'y entre que les lettres dépourvues d'accens, et dans le second celles qui en portent, on trouve, en effet,

$$(Q+B)a=Pb-Ap\,, \quad (7) \qquad (Q+B)a'=Pb'-Ap'\,, \quad (7')$$

$$(Q-B)b=Ra+Aq\,, \quad (8) \qquad (Q-B)b'=Ra'+Aq'\,, \quad (8')$$

$$(Q+B)q=Rp-Cb\,, \quad (9) \qquad (Q+B)q'=Rp'-Cb'\,, \quad (9')$$

$$(Q-B)p=Pq+Ca\,, \quad (10) \qquad (Q-B)p'=Pq'+Ca'\,. \quad (10')$$

Il est présentement plus facile d'obtenir l'équation de condition. Si l'on fait successivement le produit des équations (7, 8′) et celui des équations (7′, 8), on aura

$$(Q^2-B^2)ab'=PRba'+APbq'-ARpa'-A^2pq'\,;$$

$$(Q^2-B^2)ba'=PRab'+APqb'-ARap'-A^2qp'\,;$$

prenant la différence de ces équations, et transposant, nous aurons

$$(Q^2-B^2+PR)(ab'-ba')=AP(bq'-qb')+AR(ap'-pa')-A^2(pq'-qp');$$

mettant ici pour $ab'-ba'$, $bq'-qb'$, $ap'-pa'$, $pq'-qp'$ leurs valeurs respectives A, R, P, C et divisant ensuite par A, il viendra, en réduisant et transposant,

$$Q^2-PR=B^2-AC\ ;$$

Et telle est l'équation de condition qui doit avoir lieu pour qu'une équation différentielle de la forme (D) admette une intégrale de la forme (I).

Lors donc que l'on rencontrera une équation différentielle de la forme (D) qui satisfera à cette condition, on pourra être certain qu'elle a une intégrale de la forme (I), et, pour l'obtenir, on prendra arbitrairement trois des huit coefficiens a, a', b, b', p, p', q, q', en les choisissant telles néanmoins qu'ils ne soient ni tous pourvus, ni tous dépourvus d'accens. Supposons, pour fixer les idées, que ce soient les trois coefficiens a, b, a'; l'équation (1) fera connaître b', et ensuite p, q seront donnés par (7, 8), tandis que p', q' le seront par (7', 8'); il ne sera donc plus question que de substituer les valeurs de ces coefficiens dans la formule (I) pour avoir l'intégrale demandée (*).

(*) La formule (D) revient à

$$\frac{dx}{P+2Qx+Rx^2}=\frac{dy}{A+2By+Cy^2}\ ,$$

ou encore à

$$\frac{Rdx}{R^2x^2+2QRx+PR}=\frac{Cdy}{C^2x^2+2BCy+AC}\ .$$

Si l'on a, comme on le suppose ici, $B^2-AC=Q^2-PR$; en représentant chacun de ces deux binomes par M^2, on pourra, dans les dénominateurs des deux membres changer respectivement PR et AC en Q^2-M^2 et B^2-M^2, ce qui changera notre équation en celle-ci:

$$\frac{Rdx}{(Rx+Q)^2-M^2}=\frac{Cdy}{(Cy+B)^2-M^2}\ ;$$

posant alors

Pour appliquer ce procédé à un exemple ; soit l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3-6y+2y^2}{1-8x+13x^2};$$

nous aurons ici

$$\left.\begin{array}{l} Rx+Q=x' \\ Cy+B=y' \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} R\mathrm{d}x=\mathrm{d}x' \\ C\mathrm{d}y=\mathrm{d}y' \end{array}\right.$$

elle devient

$$\frac{\mathrm{d}x'}{x'^2-M^2}=\frac{\mathrm{d}y'}{y'^2-M^2};$$

or, cette équation appartient à une classe qu'on sait intégrer algébriquement, (Voyez le *Traité de calcul différentiel et intégral* de M. LACROIX, dernière édition, tome II, page 477, n.° 693), et son intégrale est, comme l'on sait,

$$k(y'-x')^2=(x'^2-M^2)(y'^2-M^2),$$

où k est la constante arbitraire.

En y changeant k en k^2-M^2, ce qui est permis ; cette intégrale devient

$$(x'y'-M^2)^2=k^2(x'-y')^2;$$

or, comme le signe de la constante k est arbitraire, il suffira d'écrire simplement

$$x'y'-M^2=k(x'-y').$$

En remettant pour x', y' leurs valeurs, nous aurons donc

$$(Rx+Q)(Cy+B)-M^2=k\{Rx-Cy+(Q-B)\};$$

ce qui donne

$$y=\frac{1}{C}\cdot\frac{[(M^2-BQ)-BRx]+[(Q-B)+Rx]k}{(Q+Rx)+k};$$

$$A=+3\,,\quad B=-3\,,\quad C=+2\,;$$

$$P=+1\,,\quad Q=-4\,,\quad R=+13\,;$$

$$Q+B=-7\,,\quad Q-B=-1$$

$$B^2-AC=Q^2-PR=3\,;$$

---

c'est la formule qui répond au cas où l'on aurait pris arbitrairement a, b, a' respectivement égaux à M^2-BQ, $-BR$, $Q-B$.

On peut observer, au surplus, que

$$\frac{\mathrm{d}x'}{x'^2-M^2}=\frac{1}{2M}\left\{\frac{\mathrm{d}x'}{x'-M}-\frac{\mathrm{d}x'}{x'+M}\right\}$$

dont l'intégrale est

$$\frac{1}{2M}\,\mathrm{Log.}\frac{x'-M}{x'+M}\,;$$

l'intégrale de $\dfrac{\mathrm{d}y'}{y'^2-M^2}$ sera donc pareillement

$$\frac{1}{2M}\,\mathrm{Log.}\frac{y'-M}{y'+M}\,;$$

égalant donc entre elles ces deux intégrales, en ajoutant à l'un des deux membres la constante $\dfrac{\mathrm{Log.}k}{2M}$, il viendra, en réduisant et passant aux nombres

$$\frac{y'-M}{y'+M}=k\,\frac{x'-M}{x'+M}\,;$$

ou, en remettant pour x', y' leurs valeurs,

$$\frac{(B-M)+Cy}{(B+M)+Cy}=k\,\frac{(Q-M)+Rx}{(Q+M)+Rx}\,,$$

intégrale également algébrique.

J. D. G.

l'équation

l'équation de condition est donc satisfaite. En conséquence, nous prendrons arbitrairement

$$a=1\ ,\qquad b=2\ ,\qquad a'=3\ ,$$

d'après quoi l'équation (1) donnera

$$b'=9\ ;$$

on aura ensuite, par les équations (7, 8), (7', 8')

$$p=3\ ,\quad q=-5\ ,\quad p'=10\ ,\quad q'=-16\ ;$$

au moyen de quoi la valeur générale de y sera

$$y=\frac{(1+2x)+(3+9x)k}{(3-5x)+(10-16x)k}\ ,$$

comme il est d'ailleurs facile de le vérifier, par la différentiation et l'élimination de k.

Soit présentement la formule

$$y=\frac{(a+2bx+cx^2)+(a'+2b'x+c'x^2)k}{(p+2qx+rx^2)+(p'+2q'x+r'x^2)k}\ ; \tag{I}$$

on prouvera, comme ci-dessus, que, par de simples transformations de la constante arbitraire, les accens peuvent être transportés des lettres qu'ils affectent à celles qui en sont dépourvues ; et que, par le même moyen, on peut amener trois des douze coefficiens à devenir égaux à trois nombres donnés arbitrairement, pourvu que ces coefficiens ne soient ni tous trois affectés ni tous trois dépourvus d'accens.

En chassant le dénominateur et transposant, cette formule devient

$$\{(a+2bx+cx^2)-(p+2qx+rx^2)y\}$$
$$+\{(a'+2b'x+c'x^2)-(p'+2q'x+r'x^2)y\}k=0\ ,$$

dont la différentielle est

$$\left\{2[(b+cx)-(q+rx)y]-(p+2qx+rx^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right\}$$
$$+\left\{2[(b'+c'x)-(q'+r'x)y]-(p'+2q'x+r'x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right\}k=0\ ;$$

d'où, en éliminant la constante,

$$\left\{(a+2bx+cx^2)-(p+2qx+rx^2)y\right\}\left\{2[(b'+c'x)-(q'+r'x)y]-(p'+2q'x+r'x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right\}$$
$$=\left\{(a'+2b'x+c'x^2)-(p'+2q'x+r'x^2)y\right\}\left\{2[(b+cx)-(q+rx)y]-(p+2qx+rx^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right\}$$

En résolvant cette équation par rapport à $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, développant, réduisant et ordonnant, on obtiendra un résultat de cette forme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2.\frac{(A+2Bx+Cx^2)+2(D+2Ex+Fx^2)y+(G+2Hx+Ix^2)y^2}{P+4Qx+6Rx^2+4Sx^3+Tx^4}\ ; \qquad \text{(D)}$$

dans lequel on aura

$$ab'-ba'=A\ , \quad (1) \qquad pq'-qp'=G\ , \quad (2)$$
$$ac'-ca'=2B\ , \quad (3) \qquad pr'-rp'=2H\ , \quad (4)$$
$$bc'-cb'=C\ , \quad (5) \qquad qr'-rq'=I\ , \quad (6)$$
$$ap'-pa'=P\ , \quad (7) \qquad cr'-rc'=T\ , \quad (8)$$

$$(bp'-pb')-(aq'-qa')=2D\ ,$$

$$(cp'-pc')-(ar'-ra')=4E\ ,$$

$$(cq'-qc')-(br'-rb')=2F\ ;$$

$$(bp'-pb')+(aq'-qa')=2Q\ ,$$

$$(cq'-qc')+(br'-rb')=2S\ ,$$

$$(ar'-ra')+4(bq'-qb')+(cp'-pc')=6R\ :$$

Lors donc qu'on rencontrera une équation différentielle de la forme (D), on sera fondé à soupçonner que son intégrale pourrait bien être de la forme (I); et tout se réduira à déterminer, s'il est possible, les coefficiens a, a', b, b', c, c', p, p', q, q', r, r', au moyen des *quatorze* équations ci-dessus.

Mais ces coefficiens sont au nombre de *douze* seulement; sur lesquels nous avons vu que *trois* pouvaient être pris d'une manière tout-à-fait arbitraire; il n'y en a donc que *neuf* à déterminer en fonction tant de ces trois-là que des 14 coefficiens dont se compose la valeur de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; puis donc que nous avons quatorze équations pour déterminer ces neuf coefficiens, il s'ensuit qu'une équation différentielle de la forme (D) ne peut avoir une intégrale de la forme (I) que sous *cinq* conditions distinctes.

Nous verrons bientôt quelles sont ces conditions; mais, avant d'y parvenir, occupons-nous à isoler les uns des autres les quinze binomes que renferment nos quatorze équations. Des équations qui ne sont point encore numérotées, on tire facilement, par addition et soustraction,

$$bp'-pb'=Q+D\ , \qquad (9) \qquad aq'-qa'=Q-D\ , \qquad (10)$$

$$cq'-qc'=S+F\ , \qquad (11) \qquad br'-rb'=S-F\ , \qquad (12)$$

$$ar'-ra'=3R-2E-2(bq'-qb')\ ,\quad cp'-pc'=3R+2E-2(bq'-qb')\ ;$$

voilà donc tous ces binomes isolés les uns des autres, sauf le binome $bq'-qb'$

Posons, pour abréger,

$$bq'-qb'=V\ , \qquad (15)$$

d'où

$$ar'-ra'=3R-2E-2V\ , \quad (13) \qquad cp'-pc'=3R+2E-2V\ , \quad (14)$$

Remarquons présentement que l'on peut, de six manières différentes, faire des combinaisons de quatre sortes de lettres où se trouvent les deux sortes de lettres b, q qui entrent dans V, savoir :

$$abcq\ ,\quad abcr\ ,\quad abqr\ ,\quad abpq\ ,\quad bcpq\ ,\quad bcrq\ ,$$

d'où il suit que le binome $bq'-qb'$ où V est susceptible de six déterminations différentes, en fonction des quatorze lettres qui entrent dans la valeur de $\frac{dy}{dx}$; on trouve aisément, en effet,

$$2BV=A(S+F)+C(Q-D)\ , \qquad (\alpha)$$

$$2HV=I(Q+D)+G(S-F)\ , \qquad (\beta)$$

$$PV=(Q+D)(Q-D)+AG\ , \qquad (\gamma)$$

$$TV=(S+F)(S-F)+CI\ , \qquad (\delta)$$

$$V(3R+2E-2V)=(Q+D)(S+F)-CG\ , \qquad (\epsilon)$$

$$V(3R-2E-2V)=(Q-D)(S-F)-AI\ , \qquad (\zeta)$$

Or, ces six équations devant donner la même valeur pour V, il s'ensuit qu'en éliminant V entre elles, les cinq équations résultantes en A, B, C, D, E, F, G, H, I, P, Q, R, S, T, seront les équations de condition cherchées. Nous n'effectuerons pas l'élimination, car la forme des équations résultantes dépendrait uniquement de la manière arbitraire dont nous aurions procédé. Il n'en est pas, en effet, du cas où l'on a plusieurs équations de condition comme de celui où l'on n'en a qu'une seule ; dans ce dernier cas, en effet, en chassant les dénominateurs, et même les radicaux s'il y en a, réduisant et passant tout dans le premier membre, on parviendra toujours à la même équation réduite, sous quelque forme que se présente d'ailleurs l'équation primitive ; tandis qu'au contraire, lorsqu'on a plusieurs équations de condition, elles peuvent être remplacées, d'une infinité de manières différentes, par le système d'un même nombre d'autres équations en même nombre, résultant de leur combinaison, sans qu'il soit possible de deviner, d'après l'un de ces systèmes, la forme des équations primitives desquelles il a été dérivé.

Puis donc que nos six équations sont d'une forme assez simple et symétrique, nous les conserverons sous cette forme. Lorsqu'on voudra en faire usage, il ne s'agira que de déterminer la valeur de V, au moyen de l'une quelconque des quatre premières, où cette lettre ne se trouve qu'au premier degré, et d'examiner ensuite si cette valeur satisfait aux cinq autres.

On peut remarquer, au surplus, que nos cinq équations de condition donnent les valeurs de P, Q, R, S, T, en fonction de A, B, C, D, E, F, G, H, I; de sorte que si l'on veut former une valeur de $\frac{dy}{dx}$ qui soit intégrale algébriquement, on pourra se donner arbitrairement tous les coefficiens du numérateur, tandis que ceux du dénominateur se trouveront tous déterminés par ceux-là.

Des valeurs de nos quinze binomes, il est aisé de déduire deux systèmes de vingt équations chacun, tels que le premier renferme toutes les combinaisons trois à trois des lettres dépourvues d'accens, tandis que le second ne renferme que celles qui en sont affectées ; voici le premier de ces deux systèmes :

$$Ac+Ca=2Bb\,, \qquad (16) \qquad 2Bq=(Q-D)c-(S+F)a\,, \qquad (26)$$

$$Gr+Ip=2Hq\,, \qquad (17) \qquad 2Hb=(S-F)p-(Q-D)r\,, \qquad (27)$$

$$Pb-Ap=(Q+D)a\,, \qquad (18) \qquad Pc-2Bp=(3R+2E-2V)a\,, \qquad (28)$$

$$Tq-Ic=(S+F)r\,, \qquad (19) \qquad Tp-2Hc=(3R+2E-2V)r\,, \qquad (29)$$

$$Va+Aq=(Q-D)b\,, \qquad (20) \qquad Pr+2Ha=(3R-2E-2V)\,, \qquad (30)$$

$$Vr+Ib=(S-F)q\,, \qquad (21) \qquad Ta+2Br=(3R-2E-2V)\,, \qquad (31)$$

$$Vp-Gb=(Q+D)q\,, \qquad (22) \qquad (Q+D)c-Cp=(3R+2E-2V)b\,, \qquad (32)$$

$$Vc-Cq=(S+F)b\,, \qquad (23) \qquad (S+F)p-Gc=(3R+2E-2V)q\,, \qquad (33)$$

$$Pq+Ga=(Q-D)p\,, \qquad (24) \qquad (Q-D)r+Ia=(3R-2E-2V)q\,, \qquad (34)$$

$$Tb+Cr=(S-F)c\,, \qquad (25) \qquad (S-F)a+Ar=(3R-2E-2V)b\,. \qquad (35)$$

Le second système ne devant différer de celui-là qu'en ce que les petites lettres y portent des accens, nous nous dispenserons de l'écrire, et nous conviendrons d'en désigner les équations, comme ci-dessus, par les mêmes nombres affectés d'accens.

Lors donc que l'on rencontrera une équation différentielle de la forme (D) qui satisfera à nos cinq conditions, on pourra être assuré que son intégrale est de la forme (I) ; et, pour l'obtenir, on prendra arbitrairement trois des douze coefficiens a, a', b, b', c, c', p, p', q, q', r, r' ; en les choisissant toutefois de telle sorte qu'ils ne soient ni tous pourvus ni tous dépourvus d'accens. Supposons, pour fixer les idées, que ce soit les trois coefficiens a, b, a' ; l'équation (1) fera connaître b' ; on aura ensuite c, c', par les équations (16, 16') ; les équations (18, 18') donneront

p, p'; on aura q, q' par les équations (20, 20'); et enfin r, r', par les équations (17, 17'); il ne s'agira donc plus que de substituer les valeurs de ces douze coefficiens dans la formule (I) pour avoir l'intégrale cherchée.

Pour appliquer ce procédé à un exemple, soit l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx}=2.\frac{(10+4x-14x^2)-2(5-2x-6x^2)y+(3+x-x^2)y^2}{7+12x+22x^2+24x^3+7x^4};$$

nous aurons ici

$$A=+10\,,\qquad D=-5\,,\qquad G=+3\,,$$

$$2B=+4\,,\qquad 2E=+2\,,\qquad 2H=+1\,,$$

$$C=-14\,,\qquad F=+6\,,\qquad I=-1\,,$$

$$P=+7\,,\ 4Q=+12\,,\ 6R=+22\,,\ 4S=+24\,,\ T=+7$$

et de là

$$Q+D=-2\,;\quad Q-D=+8\,,\quad 3R+2E=+13\,,$$

$$S+F=+12\,,\quad S-F=\pm 0\,,\quad 3R-2E=+9\,,$$

ces valeurs substituées dans nos équations (α, β, γ, δ, ε, ζ), ces équations deviendront

$$4V=8\,,\quad (\alpha)\qquad 7V=14\,,\quad (\gamma)\qquad V(13-2V)=18\,,\quad (\varepsilon)$$

$$V=2\,,\quad (\beta)\qquad 7V=14\,,\quad (\delta)\qquad V(9-2V)=10\,,\quad (\zeta)$$

les quatre premières s'accordent à donner $V=2$, valeur qui satisfait également aux deux autres; nos cinq conditions sont donc satisfaites; et conséquemment l'intégrale de l'équation proposée est algébrique et de la forme (I).

En conséquence, pour en obtenir l'intégrale, nous prendrons arbitrairement

$$a=3\,, \qquad b=2\,; \qquad a'=1\,,$$

l'équation (1) donnera

$$b'=4\,,$$

les équations (16, 16') donneront ensuite

$$c=5\,, \qquad c'=3\,,$$

de là on conclura, par les équations (18, 18'),

$$p=2\,, \qquad p'=3\,,$$

par les équations (20, 20')

$$q=1\,, \qquad q'=3\,,$$

et enfin, par les équations (17, 17'),

$$r=1\,, \qquad r'=2\,.$$

Substituant donc toutes ces valeurs dans la formule (I), nous aurons, pour l'intégrale de l'équation proposée,

$$y=\frac{(3+4x+5x^2)+(1+8x+3x^2)k}{(2+2x+\ x^2)+(3+6x+2x^2)k}\,;$$

comme il est d'ailleurs facile de le vérifier par la différentiation et l'élimination de la constante k.

QUESTIONS

QUESTIONS RESOLUES.

Solution du dernier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 132 du X.e volume de ce recueil ;

Par un Abonné.

*P*ROBLÈME. *Construire graphiquement, pour l'un quelconque des points d'une courbe plane donnée, soumise ou non à la loi de continuité, le centre de courbure de cette courbe ?*

Solution. Quelque procédé qu'on veuille employer pour résoudre ce problème, ce procédé ne pourra jamais être qu'un à-peu-près dont le résultat sera d'autant plus douteux que l'arc de courbe donné aura moins d'amplitude.

La méthode qui s'offre le plus naturellement à l'esprit, pour parvenir au but, est la suivante : Par le procédé déjà indiqué (tom. X, pag. 89), ou par tout autre équivalent, soient menées des tangentes à différens points de l'arc de courbe donné; en menant des perpendiculaires à ces tangentes par leurs points de contact respectifs, ces perpendiculaires seront des normales à la même courbe; et conséquemment leur courbe enveloppe sera la développée de l'arc dont il s'agit. Traçant donc cette courbe enveloppe, et lui menant ensuite une tangente par le point donné, le point de contact de cette tangente sera le centre de courbure de l'arc de courbe en ce même point, c'est-à-dire, le point cherché.

Mais d'abord, le procédé que l'on est obligé d'employer pour mener une tangente à une courbe par l'un de ses points, n'est pas tellement simple qu'on puisse regarder comme chose facile de mener un certain nombre de pareilles tangentes. En second lieu, s'il est déjà quelquefois assez difficile de tracer, à la main, une courbe qui passe par des points donnés, il l'est bien plus encore de tracer, à la main, une courbe qui touche à la fois une suite de droites données. Enfin, s'il est assez facile de mener, à la simple vue, une tangente à une telle courbe par un point qui lui est extérieur, il ne l'est pas également de bien fixer le point de contact de cette tangente, qui se confond sensiblement avec la courbe même, dans une partie de sa longueur.

Nous pensons donc que, par toutes ces considérations, on préférera le procédé que voici, lequel, en même temps qu'il n'exige le tracé que d'une seule normale, détermine le centre cherché par l'intersection de cette normale avec une courbe assujettie à passer par des points donnés.

Soit M le point de l'arc de courbe pour lequel on veut déterminer son centre de courbure, et d'abord soit menée la normale de ce point, au moyen de sa tangente.

Soient pris sur la courbe, à la droite du point M, des points arbitraires M', M'', M''',......, et à sa gauche d'autres points arbitraires $M_{\prime}$, $M_{\prime\prime}$, $M_{\prime\prime\prime}$,........ Sur les milieux de MM', MM'', MM''',....., soient élevées respectivement à ces cordes des perpendiculaires indéfinies, coupant la normale en C', C'', C''',......... Soient aussi élevées sur les milieux de $MM_{\prime}$, $MM_{\prime\prime}$, $MM_{\prime\prime\prime}$,....... des perpendiculaires indéfinies à ces cordes, coupant la normale en $C_{\prime}$, $C_{\prime\prime}$, $C_{\prime\prime\prime}$,..... respectivement.

Par les points C', C'', C''',....... soient élevées à la normale, du côté droit, des perpendiculaires $C'N'$, $C''N''$, $C'''N'''$,........, respectivement égales aux longueurs MM', MM'', MM''', ..., ou *n* fois plus grandes que ces longueurs (*n* étant un nombre arbitraire). Par les points $C_{,}$, $C_{,,}$, $C_{,,,}$, ... soient élevées à la normale, du côté gauche, des perpendiculaires $C_{,}N_{,}$, $C_{,,}N_{,,}$, $C_{,,,}N_{,,,}$, ..., respectivement égales aux longueurs $MM_{,}$, $MM_{,,}$, $MM_{,,,}$, ... ; ou *n* fois plus grandes que ces longueurs. En joignant les points ......N''', N'', N', $N_{,}$, $N_{,,}$, $N_{,,,}$, ... par une courbe continue, le point C où cette courbe coupera la normale sera le centre de courbure cherché.

Si, en effet, des points ......C''', C'', C', C, $C_{,}$, $C_{,,}$, $C_{,,,}$, ... comme centres, et avec leurs distances au point M prises pour rayons respectifs, on décrit une suite de cercles, tous ces cercles toucheront la courbe en ce point M, et en outre ils la couperont aux points ......M''', M'', M', M, $M_{,}$, $M_{,,}$, $M_{,,,}$, ... ; le cercle dont le centre est C touchera donc et coupera en même temps la courbe au point M ; et par conséquent ce cercle sera le cercle osculateur et son centre C le centre de courbure pour le point M.

Il sera même facile de juger, par la situation de la courbe .....N''', N'', N', C, $N_{,}$, $N_{,,}$, $N_{,,,}$, ... par rapport à la normale, si le contact du cercle osculateur avec la courbe est d'un ordre supérieur au second, et si la courbure en M est *maximum* ou *minimum*.

Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 132 de ce volume;

Par M. Vecten, licencié ès sciences,
Et par M. J. B. Durrande, professeur de mathématiques au collége royal de Cahors.

Théorème I. *Si, considérant successivement deux à deux trois cercles tracés sur un même plan, on détermine, pour chaque système de deux cercles, les centres de similitude, tant interne qu'externe, et que, dans chaque système, on fasse de la distance entre ces deux centres le diamètre d'un nouveau cercle; les trois cercles obtenus par cette construction se couperont deux à deux aux deux mêmes points, et auront conséquemment une corde commune et leurs centres sur une même perpendiculaire à cette corde.*

Démonstration. Soient généralement trois points C, C′, C″ donnés sur un plan, et supposons qu'on se propose de trouver, sur ce plan, un point X dont les distances respectives x, x', x'' à ces trois points soient proportionnelles à trois longueurs données R, R', R''.

Il est clair que, si l'on construit séparément le lieu L de tous les points dont les distances aux points C′, C″ sont dans le rapport de R' à R'', et le lieu L′ de tous les points dont les distances aux points C″, C sont dans le rapport de R'' à R, chacune des intersections de ces deux lieux pourra être prise pour le point cherché X; en effet, en représentant par x, x', x'', les distances de cette intersection aux points C, C′, C″, on aura

Parce que X est sur L .... $\dfrac{x'}{R'}=\dfrac{x''}{R''}$,

Parce que X est sur L′ .... $\dfrac{x}{R}=\dfrac{x''}{R''}$,

on aura donc aussi $\dfrac{x}{R}=\dfrac{x'}{R'}$. Donc, si l'on construit le lieu L″ de tous les points dont les distances aux points C, C′ sont dans le rapport de R à R', ce lieu devra passer par tous les points X, c'est-à-dire, par tous les points d'intersection des deux lieux L, L′, de sorte que les trois lieux L, L′, L″ doivent se couper aux mêmes points.

Or, il est connu que le lieu de tous les points d'un plan dont les distances à deux points fixes pris sur ce plan sont dans un rapport donné est une circonférence qui a son centre sur la droite qui joint ces deux points; donc les trois lieux L, L′, L″ sont des cercles qui ont respectivement leurs centres sur C′C″, C″C, CC′; ces trois cercles se coupent donc aux deux mêmes points; ils ont donc une corde commune; et par conséquent leurs centres sont sur une même perpendiculaire au milieu de cette corde.

Si présentement on suppose que les points C, C′, C″ sont les centres de trois cercles et que les longueurs R, R', R'' en sont les rayons, on tombera exactement sur le théorème qu'il s'agissait de démontrer.

Si deux des trois cercles L, L′, L″ sont tangens l'un à l'autre, il est clair qu'ils devront aussi être tangens au troisième; de sorte qu'alors les trois cercles n'auront qu'un seul point commun.

Si deux des cercles ne se rencontraient pas, il est clair qu'ils ne devraient pas non plus rencontrer le troisième; mais on voit, par le principe de continuité de M. Poncelet, qu'ils devraient avoir alors un axe radical commun.

THÉORÈME II. Si, considérant successivement deux à deux quatre sphères situées d'une manière quelconque dans l'espace, on détermine, pour chaque système de deux sphères, les centres de similitude, tant interne qu'externe, et que, dans chaque système, on fasse de la distance entre ces deux centres le diamètre d'une nouvelle sphère; les six sphères obtenues par cette construction passeront par les deux mêmes points, et auront ainsi une corde commune et leurs centres dans un même plan perpendiculaire sur le milieu de cette corde.

Démonstration. Ce théorème se démontre exactement comme le précédent. Soient en effet C, C', C'', C''' les centres des quatre sphères données, et R, R', R'', R''' leurs rayons. Représentons de plus par (CC'), (CC''), (C'C''), (CC'''), (C'C'''), (C''C''') les six sphères qui résultent de la construction indiquée. Chacune d'elles sera le lieu de tous les points de l'espace dont les distances aux deux points qui la désignent seront proportionnelles aux rayons des cercles dont ces points sont les centres.

Les intersections des trois lieux (CC'), (CC''), (CC''') seront donc deux points dont les distances aux points C, C', C'', C''' seront proportionnelles à R, R', R'', R'''; d'où il suit que les lieux (C'C''), (C'C'''), (C''C''') devront passer par ces deux mêmes points; c'est-à-dire que nos six sphères doivent se couper en deux points, suivant quatre cercles seulement, et avoir conséquemment leurs centres sur quatre droites situées dans un même plan.

Si deux des six sphères ne font que se toucher, les quatre autres les toucheront aussi à leurs points de contact, de sorte que les six centres seront sur une même droite.

Si deux des six sphères ne se rencontrent pas, les autres ne les rencontreront pas non plus; mais elles auront alors un axe radical commun, et ne fourniront deux à deux que quatre plans radicaux seulement.

Solution du problème de géométrie proposé à la page 163 de ce volume;

Par M. Frédéric Sarrus, docteur ès sciences.

PROBLÈME. *Déterminer graphiquement les élémens d'une section conique dont on n'a qu'un arc qui ne renferme aucun des sommets?*

Solution. Soient menées à l'arc dont il s'agit deux cordes parallèles quelconques; en joignant leurs milieux par une droite, cette droite sera un diamètre; et si, par le point où ce diamètre coupe la courbe, on mène une parallèle aux deux cordes dont il joint les milieux, cette parallèle sera une tangente à la courbe en ce point, et, par suite, une parallèle au conjugué du diamètre dont il s'agit.

En répétant la même opération par rapport à un autre système de deux cordes parallèles entre elles, mais non parallèles aux premières, on obtiendra un second diamètre et une tangente à son extrémité, ces deux diamètres se couperont en un point qui sera le *centre* de la courbe.

Nous aurons donc ainsi, pour deux points M, M′ de l'arc donné, les diamètres D, D′ et les tangentes T, T′ à leurs extrémités.

Menant par M′ une parallèle à T, prolongée au-delà de D d'une quantité égale à elle-même ; son extrémité M'' sera un troisième point de la courbe.

Menant par M'' une parallèle à T'; prolongée, au-delà de D', d'une quantité égale à elle-même ; son extrémité M''' sera un quatrième point de la courbe.

En poursuivant de la même manière, on déterminera tant de points du périmètre de la courbe qu'on voudra ; et, excepté le cas où par le progrès de l'opération on retomberait de nouveau sur quelque point déjà déterminé, ce qu'on peut toujours éviter, puisque les deux points de départ M, M' sont arbitraires sur l'arc donné ; ces points, distribués sur tout le périmètre de la courbe, pourront toujours être rendus si voisins qu'on le voudra.

On pourra donc toujours en trouver un P, au moins, tellement situé qu'en décrivant un cercle du centre C de la courbe et du rayon CP, ce cercle vienne couper l'arc donné en quelque point P'. Menant donc, par le centre, une parallèle et une perpendiculaire à PP', ces deux droites seront les directions des diamètres principaux ; et, comme on connaît en outre une tangente et son point de contact ; il sera facile, suivant les procédés connus, de construire les quatre sommets.

Solution

Solution du premier des deux problèmes de combinaisons proposés à la page 204 de ce volume;

Par M. Frédéric Sarrus, docteur ès sciences.

Problème. De combien de manières peut-on choisir n *lettres parmi* m *lettres, desquelles il s'en trouve un nombre* α *égales à* a, *un nombre* β *égales à* b, *un nombre* γ *égales à* c, *et ainsi de suite? ou, en d'autres termes, combien le monome* $a^\alpha b^\beta c^\gamma....$, *dans lequel* $\alpha+\beta+\gamma+........=m$, *admet-il de diviseurs de* n *dimensions ?*

Solution. On sait que tous les termes et les seuls termes du produit.

$$(1+a+a^2+.....+a^\alpha)(1+b+b^2+.....+b^\beta)(1+c+c^2+.....+c^\gamma)......$$

sont les diviseurs du monome $a^\alpha b^\beta c^\gamma......$, lesquels ne s'y trouvent chacun qu'une seule fois; d'où il résulte que les diviseurs de n dimensions de ce monome sont les termes de n dimensions du produit dont il s'agit.

Or, si l'on pose $a=b=c=.........=x$, auquel cas ce même produit deviendra

$$(1+x+x^2+....+x^\alpha)(1+x+x^2+....+x^\beta)(1+x+x^2+....+x^\gamma).....$$

ou encore

$$\frac{1-x^{\alpha+1}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{\beta+1}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{\gamma+1}}{1-x}..........;$$

le nombre de ses termes de n dimensions ni le nombre des dimensions de ces termes ne changera pas ; et il arrivera seulement que chacun d'eux se réduira à x^n, d'où il résulte qu'ils se réduiront tous à ce terme affecté d'un coefficient égal au nombre cherché.

Le nombre cherché est donc le coefficient numérique de x^n dans le développement du produit

$$(1+x+x^2+\ldots+x^\alpha)(1+x+x^2+\ldots.+x^\beta)(1+x+x^2+\ldots.+x^\gamma)\ldots.$$

Qu'on demande, par exemple, le nombre des diviseurs de trois dimensions du produit a^3b^2c ; on développera le produit

$$(1+x+x^2+x^3)(1+x+a^2)(1+x)\ ,$$

ce qui donnera

$$1+3x+5x^2+6x^3+5x^4+3x^5+x^6\ ;$$

et le coefficient 6 de x^3, dans le développement, sera le nombre des diviseurs de trois dimensions de a^3b^2c : ces diviseurs sont, en effet,

$$a^3\ ,\quad a^2b\ ,\quad ab^2\ ,\quad abc\ ,\quad a^2c\ ,\quad b^2c\ .$$

Comme il y a autant de manières de choisir $m-n$ facteurs parmi m que d'en laisser n, on voit que le produit $a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots\ldots$ aura toujours autant de diviseurs de $m-n$ dimensions qu'il en aura de n dimensions. Dans le développement du produit de nos polynomes en x, il arrivera donc que les termes également distans des extrêmes auront constamment des coefficiens égaux ; cela résulte d'ailleurs de la nature même de l'opération.

Si le nombre n n'était supérieur à aucun des exposans α, β, γ, ...; il est aisé de voir qu'on pourrait supposer ces exposans plus grands qu'ils ne le sont en effet sans rien changer au résultat final ; il serait donc permis aussi de les supposer infinis ; auquel cas, en désignant par m le nombre des lettres a, b, c, ... le produit à développer deviendrait

$$(1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots\ldots)^m,$$

ou

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^m \quad \text{ou enfin} \quad (1-x)^{-m};$$

or, le développement de cette puissance est

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}x^2+\ldots\ldots+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\ldots\ldots\frac{m+n-1}{n}x^n+\ldots\ldots;$$

donc, le nombre des diviseurs de n dimensions du monome $a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots\ldots$ dans lequel il y a m lettres et où α, β, γ, ... sont des exposans quelconques $>n$ est

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\ldots\ldots\frac{m+n-1}{n}.$$

Or, si l'on demandait le nombre des termes du polynome complet et homogène de n dimensions qu'on peut former avec m sortes de lettres en nombre indéfini de chaque sorte, le problème reviendrait évidemment à celui-ci ; donc le nombre de ces termes est

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\ldots\ldots\frac{m+n-1}{n}=\frac{(m-n+1)!}{(m-1)!\,n!}.$$

Soit présentement une équation complète du $n.^{\text{me}}$ degré entre m inconnues x, y, z, ... dont on demande le nombre des termes ; en introduisant dans chacun de ses termes une puissance d'une $(m+1)^{\text{me}}$ inconnue t du degré nécessaire pour les rendre tous homogènes et de n dimensions, son premier membre deviendra un polynome homogène de n dimensions, formé avec $m+1$ sortes de lettres ; le nombre des termes de la proposée est donc ce que devient la formule ci-dessus, en y changeant m en $m+1$ ou $m-1$ en m ; c'est-à-dire que *le nombre des termes d'une équation complète de* n.^{me} *degré entre* m *inconnues, comme aussi le nombre de ceux d'une équation complète du* m.^{me} *degré entre* n *inconnues est*

$$\frac{(m+n)!}{m!n!}.$$

Cette démonstration d'un théorème d'ailleurs assez important nous paraît beaucoup plus courte et plus claire que celle de M. G. Fornier, rapportée par M. Gergonne, à la page 115 du IV.^{e} volume de ce recueil.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. ETANT donnés, sur un plan, trois droites indéfinies et deux points, correspondant respectivement à deux d'entre elles ; sur quelle courbe doit être situé un troisième point pour que les trois points puissent être considérés respectivement comme les pôles des trois droites, par rapport à une même section conique ?

II. Etant donnés, sur un plan, trois points et deux droites indéfinies, correspondant respectivement à deux d'entre eux ; à quelle courbe une troisième droite doit-elle être tangente pour que les trois droites puissent être considérées respectivement comme les polaires des trois points, par rapport à une même section conique ?

ANALISE ALGÉBRIQUE.

Note sur la résolution d'une classe particulière d'équations algébriques ;

Par M. Bernard Berndtson, officier civil au département de la guerre de S. M. Suédoise ;

Communiquée au Rédacteur des Annales,

Par M. Berzelius, secrétaire perpétuel de l'académie des sciences de Stockholm.

Lettre de M. Berzelius au Rédacteur.

Monsieur,

La note ci-jointe m'a été remise par un zélé mathématicien de mes amis, pour vous être adressée. L'auteur se trouverait heureux si vous la jugiez digne d'une place dans vos *Annales*.

Agréez, etc.

Stockholm, le 17 mars 1821.

Note de M. Berndtson.

Le soussigné a l'honneur de donner avis à M. le Rédacteur des *Annales de mathématiques* que, s'étant proposé de résoudre l'équation

$$x^{2n+1}-x-k=0\ ,$$

dans laquelle n est un nombre entier positif et où k est une quantité réelle positive quelconque ; il a trouvé, par une méthode spéciale, appropriée aux divers cas particuliers que renferme cette formule générale, qu'en posant

$$a=\sqrt[2n+1]{1+k}\ ,\quad b=+\sqrt[2n]{1+\frac{k}{a}}\ ,\quad c=+\sqrt[2n]{1+\frac{k}{b}}\ ;$$

la seule racine réelle positive que puisse avoir cette équation est exactement exprimée par la formule

$$x=\frac{b^2-ac}{2b-(a+c)}\ .$$

De cette détermination générale de la racine réelle positive de l'équation il suit, pour les cas particuliers, que cette racine sera celle de l'équation

$$x^3-x-k=0\ ,$$

si l'on pose

$$a=\sqrt[3]{1+k}\ ,\quad b=+\sqrt{1+\frac{k}{a}}\ ,\quad c=+\sqrt{1+\frac{k}{b}}\ ;$$

quelle sera celle de l'équation

$$x^5-x-k=0\ ,$$

si l'on pose

$$a=\sqrt[3]{1+k}\ ,\quad b=+\sqrt[4]{1+\frac{k}{a}}\ ,\quad c=+\sqrt[4]{1+\frac{k}{b}}\ ;$$

et ainsi de suite.

L'exposition des faits analitiques qui ont amené le résultat qu'on vient de faire connaître ne paraît guère susceptible, à raison des développemens qu'elle exigerait, de trouver place dans un recueil périodique ; mais l'auteur s'engage à communiquer ces faits aux géomètres qu'ils pourraient particulièrement intéresser (*).

(*) Dans l'ignorance où nous sommes des considérations qui ont pu conduire l'auteur à ce singulier résultat, nous aurions desiré d'offrir du moins à nos lecteurs une vérification simple de ses formules ; mais, même pour le cas particulier du troisieme degré, les calculs sont trop longs et offrent trop peu d'intérêts pour mériter de trouver place ici. Nous nous bornerons donc à remarquer que depuis long-temps nous avons observé que, quels que soient a, b, m, l'une des racines de l'équation

$$x^m-ax-b=0\ ,$$

peut être indistinctement exprimée par l'une ou l'autre des deux formules prolongées à l'infini

$$x=\sqrt[m]{b+a\sqrt[m]{b+a\sqrt[m]{b+\ldots}}}$$

$$x=\sqrt[m-1]{a+\frac{b}{\sqrt[m-1]{a+\frac{b}{\sqrt[m-1]{a+\frac{b}{\sqrt[m-1]{a+\ldots\ldots}}}}}}}$$

Ces résultats sont, comme l'on voit, du genre de ceux qu'a présenté M. Shmidten dans un précédent mémoire.

J. D. G.

ARITHMÉTIQUE.

Evaluation de l'erreur qui peut affecter les produits et puissances des nombres approximatifs;

Par un Abonné.

Soient trois nombres entiers quelconques 7341, 824, 75; on aura

$$7341\times824\times73=441575832,$$

et ce produit sera rigoureusement exact, si ses facteurs le sont eux-mêmes.

Mais, si l'on n'est pas certain de l'exactitude de ces mêmes facteurs, et que l'on sache seulement de chacun d'eux que, s'il est fautif, ce ne peut être que d'une quantité qui ne saurait excéder une demi-unité; voici comment on parviendra à déterminer jusqu'à quel ordre d'unités on peut compter sur l'exactitude du produit.

On fera la supposition la plus défavorable; c'est-à-dire que l'on admettra que ces facteurs sont tous fautifs, qu'ils le sont tous dans le même sens, et que l'erreur qui affecte chacun d'eux est précisément d'une demi-unité. En conséquence, le véritable produit devra être

$$(7341\pm\tfrac{1}{2})(824\pm\tfrac{1}{2})(73\pm\tfrac{1}{2});$$

les signes supérieurs ou les signes inférieurs devant être pris, suivant que ces facteurs seront fautifs en moins ou en plus. En développant, il viendra

$$7341\times824\times73\pm\tfrac{1}{2}(7341\times824+7341\times73+824\times73)$$
$$+\tfrac{1}{4}(7341+824+73)\pm\tfrac{1}{8}\ .$$

Le véritable produit devant être compris entre celui qui résulte de l'emploi des signes supérieurs et celui qui résulte de l'emploi des signes inférieurs, la différence entre l'un et l'autre donnera la limite de l'erreur dont le produit apparent peut être affecté. Cette différence est rigoureusement

$$7341\times824+7341\times73+824\times73+\tfrac{1}{4}\ ;$$

mais il est clair que ce qui suit la somme des produits deux à deux est trop petit vis-à-vis de cette somme, pour qu'il importe d'y avoir égard ; de sorte qu'on peut prendre simplement pour limite de l'erreur

$$7341\times824+7341\times73+824\times73=6645029\ ;$$

or, ce nombre est plus grand qu'une demi-dixaine de millions ; d'où il suit que dans le produit apparent 441575832, on n'est pas même sûr du second chiffre à gauche, qui pourrait se trouver fautif de plus de la moitié de l'une des unités qu'il exprime, ce dont beaucoup de gens sans doute ne se douteraient guère.

On voit par là que, si les trois facteurs avaient été

$$734{,}1\ ;\qquad 8{,}24\ ;\qquad 0{,}0073\ ;$$

approchés seulement à moins d'une demi-unité décimale du dernier ordre pris, auquel cas le produit apparent aurait été

$$44,157832\ ;$$

non seulement on n'aurait pu compter sur aucun des chiffres décimaux de ce produit ; mais on n'aurait pas même été sûr du chiffre des unités.

En appliquant les mêmes raisonnemens au produit d'un plus grand nombre de facteurs, on parvient à cette conclusion générale :

Le produit de m *facteurs, entiers ou décimaux, approchés seulement à moins d'une demi-unité pris du dernier ordre de chacun d'eux, peut être fautif dans autant de chiffres sur la droite qu'en renferme la somme des produits* $m-1$ *à* $m-1$ *de ces mêmes facteurs considérés comme des nombres entiers.*

Dans l'application de cette règle à la pratique, on pourra, le plus souvent, se contenter d'examiner combien aurait de chiffres le produit des $m-1$ facteurs qui, considérés comme entiers, se trouvent les plus grands.

Si l'on suppose que tous les facteurs sont égaux, on obtient la règle suivante pour les puissances :

La m.^{me} *puissance d'un nombre, entier ou décimal, approché seulement à moins d'une demi-unité du dernier ordre prés peut être fautif dans autant de chiffres sur la droite qu'en renferme* m *fois la* $(m-1)^{me}$ *puissance du même nombre considéré comme entier.*

Nous ne dirons rien de l'erreur qui peut affecter les résultats de divisions et d'extractions de racines, exécutées sur des nombres approchés, parce que, dans aucun cas, cette erreur ne saurait être très-grave. Mais les principes que nous venons d'établir nous sembleraient devoir trouver place dans tous les traités élémentaires. Il n'arrive que trop souvent, en effet, que, faute de les connaître, on se fait illusion sur l'exactitude de certains résultats, où l'on conserve un grand nombre de chiffres décimaux qui les compliquent en pure perte, et que l'on serait d'autant mieux fondé à supprimer, qu'on pourrait, à tout aussi bon droit, les remplacer par d'autres, écrits tout-à-fait au hasard.

Ceux qui désireront de plus amples détails sur ce sujet pourront consulter un petit ouvrage ayant pour titre : *Essai sur les nombres approximatifs* (Paris, Duprat, an VII); mais ce qui précède nous paraît plus simple et plus élémentaire.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du premier des problèmes de géométrie proposés à la page 228 *de ce volume;*

Par M. GERGONNE.

POUR ne point interrompre la marche de nos recherches par des questions incidentes, nous allons, avant d'entrer en matière, établir quelques formules qui nous seront nécessaires pour parvenir à notre but.

Soit une section conique rapportée à deux axes obliques quelconques, et donnée par l'équation

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2A'x+2B'y+C'=0\,, \qquad (1)$$

et soit une droite rapportée aux mêmes axes et donnée par l'équation

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\,. \qquad (2)$$

Nous allons chercher quelle relation il doit exister entre les coefficiens de ces deux equations, pour que la droite soit tangente à la section conique.

Pour obtenir cette relation, remarquons d'abord qu'en désignant par (x', y') le point de contact, l'equation de la tangente est

$$(Ax'+Cy'+A')x+(By'+Cx'+B')y+(A'x'+B'y'+C')=0\,,$$

ou bien

$$\frac{x}{-\dfrac{A'x'+B'y'+C'}{Ax'+Cy'+A'}}+\frac{y}{-\dfrac{A'x'+B'y'+C'}{By'+Cx'+B'}}=1\,;$$

cette équation devant être la même que l'équation (2), il s'ensuit qu'on doit avoir

$$-\frac{A'x'+B'y'+C'}{Ax'+Cy+A'}=a\,, \qquad -\frac{A'x'+B'y'+C'}{By'+Cx'+B'}=b\,,$$

ou

$$a(Ax'+Cy'+A')+(A'x'+B'y'+C')=0\,,$$

$$b(By'+Cx'+B')+(A'x'+B'y'+C')=0\,,$$

ou encore

$$(aA+A')x'+(aC+B')y'+(aA'+C')=0\,,$$

$$(bB+B')y'+(bC+A')x'+(bB'+C')=0\,;$$

mais, parceque le point de contact est sur la droite (2), on doit avoir aussi

bx'

$$bx'+ay'-ab=0\ ;$$

éliminant donc x', y' entre ces trois dernières équations, il viendra pour l'équation qui exprime la condition demandée

$$\left.\begin{array}{r} a^2b^2(C^2-AB)+2a^2b(A'C-AB')+\ a^2(A'^2-AC') \\ +2ab^2(B'C-BA')+2ab(CC'-A'B') \\ +\ b^2(B'^2-BC') \end{array}\right\}=0\,. \quad (3)$$

Si la droite donnée était l'axe des x ou celui des y, on aurait, dans le premier cas, $b=0$ et dans le second $a=0$, ce qui réduirait la condition à

$$A'^2-AC'=0\ , \qquad (4) \qquad \text{ou} \qquad B'^2-BC'=0\ . \qquad (5)$$

Si, après avoir changé respectivement a, b en λa, λb, on suppose ensuite $\lambda=0$, la droite passera par l'origine, et aura pour équation

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0\ ; \qquad (6)$$

en faisant les mêmes transformations dans l'équation (3), elle devient

$$a^2(A'^2-AC')+2ab(CC'-A'B')+b^2(B'^2-BC')=0\ ; \qquad (7)$$

c'est donc là l'équation de condition qui exprime que la droite (6) est tangente à la courbe (1).

Si, de plus, la courbe (1) passait elle-même par l'origine, qui serait alors le point de contact, on aurait $C'=0$; ce qui réduirait la condition (7) à celle-ci :

$$aA'-bB'=0\ . \qquad (8)$$

Nous terminerons par rappeler que le centre de la courbe (1) est donné par les dérivées de son équation, prises successivement par rapport à x, y, lesquelles sont

$$Ax+Cy+A'=0\,, \qquad (9) \qquad By+Cx+B'=0\,, \qquad (10)$$

et donnent

$$(c^2-AB)x+(B'C-A'B)=0\,, \qquad (11)$$

$$(c^2-AB)y+(A'C-B'A)=0\,. \qquad (12)$$

PROBLÈME I. Déterminer le lieu des centres de toutes les sections coniques qui touchent à la fois quatre droites données quelconques ?

Solution. Soient prises deux quelconques des droites données pour axes des coordonnées, et soient les équations des deux autres ainsi qu'il suit :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\,. \qquad \frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}=1\,.$$

Supposons que l'équation (1) soit celle des courbes dont il s'agit; parce que ces courbes doivent toucher les deux axes, les équations (4, 5) auront lieu ; on exprimera ensuite que ces courbes touchent les deux autres droites, en exprimant que l'équation (3) a lieu, ainsi qu'une autre équation que l'on déduirait de celle-là en y changeant respectivement a, b en a', b' ; mais, en vertu des conditions (4, 5), ces équations se simplifient et deviennent

$$ab\,(C^2-AB)+2a\,(A'C-AB')+2b\,(B'C-BA')+2(CC'-A'B')=0\,;$$

$$a'b'(C^2-AB)+2a'(A'C-AB')+2b'(B'C-BA')+2(CC'-A'B')=0\,.$$

En y substituant pour les deux binomes $A'C-AB'$, $B'C-BA'$

leurs valeurs données par les équations (11, 12), où x, y sont les coordonnées des centres, elles deviendront

$$(C^2-AB)(2b\,x+2a\,y-a\,b)=2(CC'-A'B')\ ,$$

$$(C^2-AB)(2b'x+2a'y-a'b')=2(CC'-A'B')\ ;$$

d'où, en multipliant en croix et réduisant

$$2bx+2ay-ab=2b'x+2a'y-a'b'\ ;$$

le lieu des centres des sections coniques qui touchent à la fois les quatre droites données est donc une ligne droite.

Il ne s'agit, pour construire cette droite, que de connaître deux points de sa direction; or, il est aisé de voir qu'on satisfait également à son équation soit qu'on fasse

$$\left\{\begin{array}{l} x=\tfrac{1}{2}a\ , \\ y=\tfrac{1}{2}b'\ , \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} x=\tfrac{1}{2}a'\ , \\ y=\tfrac{1}{2}b\ ; \end{array}\right.$$

or, par la situation de nos quatre tangentes, il est aisé de reconnaître l'un ou l'autre de ces points pour le point milieu de la droite qui joint l'intersection de deux quelconques de ces tangentes à l'intersection des deux autres; on a donc cet élégant théorème :

THEORÈME. Le lieu géométrique des centres de toutes les sections coniques inscrites à un même quadrilatère est la droite qui joint les milieux des trois diagonales de ce quadrilatère (*).

(*) C'est un renversement du théorème de Newton, cité par M. le capitaine Poncelet, à la page 211 de ce volume. Cet estimable géomètre nous en a adressé récemment une démonstration purement géométrique que nous publierons à la première occasion.

Rien ne sera plus aisé, d'après cela, que d'assigner le centre de la section conique inscrite à un pentagone donné quelconque. Il ne s'agira en effet, pour cela, que de faire tour à tour abstraction d'un côté puis d'un autre côté du pentagone, et de construire, à chaque fois, la droite, lieu des centres des sections coniques qui touchent ses quatre autres côtés; on obtiendra ainsi deux droites dont l'intersection sera le centre cherché; on voit clairement par là que le problème ne saurait avoir qu'une solution.

Comme on peut obtenir cinq droites qui contiennent le centre demandé et que ce centre est unique, il s'ensuit que ces cinq droites doivent se couper au même point; d'où résulte un élégant théorème sur le pentagone, que nous laissons au lecteur le soin de suppléer.

Lorsqu'une section conique est inscrite à un triangle, on peut toujours la considérer comme inscrite à un quadrilatère, pourvu que l'on regarde son point de contact avec l'un des côtés comme un quatrième sommet tel que les deux côtés du quadrilatère qui s'y terminent font entre eux un angle égal à deux angles droits; on a donc ce théorème:

THÉORÈME. Le lieu géométrique des centres de toutes les sections coniques qui, étant inscrites à un même triangle, touchent l'un de ses côtés en un même point, est la droite qui passe par le milieu de ce côté et par le milieu de la distance du sommet opposé au point de contact commun.

Il sera donc très-facile d'assigner le centre de la section conique qui, étant inscrite à un triangle donné, touche deux côtés du triangle en des points donnés; il ne s'agira pour cela, en effet, que de mener des droites par les milieux de ces deux côtés et par les milieux des distances des sommets opposés aux points de contact donnés; ces deux droites se couperont au centre cherché.

Lorsqu'une section conique touche les deux côtés d'un angle, on peut toujours la considérer comme inscrite à un quadrilatère, pourvu que l'on regarde ses points de contact avec les deux côtés de l'angle comme deux sommets opposés du quadrilatère, et qu'on admette que ses deux autres sommets se confondent avec le sommet même de l'angle ; de là, et de ce qui a été dit ci-dessus, résulte ce théorème :

THÉORÈME. Le lieu géométrique des centres de toutes les sections coniques qui touchent les deux côtés d'un même angle aux deux mêmes points, est la droite menée du sommet de cet angle au milieu de celle qui joint les deux points de contact.

PROBLÈME II. *Déterminer le lieu des centres de toutes les sections coniques qui, touchant à la fois trois droites données, passent en même temps par un même point donné ?*

Solution. Soient encore prises ici deux quelconques de trois droites données pour axes des coordonnées, et soit pour l'équation de la troisième

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ ;$$

soient enfin a', b' les coordonnées du point donné. D'abord, parce que nos courbes touchent les deux axes, nous aurons (4, 5)

$$A'^2-AC'=0\ ,\qquad B'^2-BC'=0\ ;$$

en second lieu, parce qu'elles touchent la troisième droite, nous aurons, comme ci-dessus,

$$(C^2-AB)(2bx+2ay-ab)=2(CC'-A'B')\ ;$$

en outre, parce que ces courbes passent par le point donné, nous aurons

$$Aa'^2+Bb'^2+2Ca'b'+2A'a'+2B'b'+C'=0\ ;$$

enfin, x, y désignant les coordonnées des centres dont le lieu est demandé, nous aurons encore (9, 10)

$$Ax+Cy+A'=0\ , \qquad By+Cx+B'=0\ ;$$

et tout se réduira à éliminer A, B, C, A', B', C' entre ces six équations.

Si, dans la quatrième équation, on substitue pour A', B' les valeurs données par les deux dernières, elle donnera

$$C'=a'(2x-a')A+b'(2y-b')B+2(b'x+a'y-a'b')C\ .$$

Cette valeur et celles de A', B' étant substituées dans les trois premières, elles deviendront

$$\{(x-a')A+(y-b')C\}^2+b'(2y-b')(C^2-AB)=0\ ,$$

$$\{(y-b')B+(x-a')C\}+a'(2x-a')(C^2-AB)=0\ ,$$

$$2\{(x-a')A+(y-b')C\}\{(y-b')B+(x-a')C\}$$

$$=\{2(b'x+a'y-a'b')-2bx+2ay-ab)\}(C^2-AB)\ ;$$

de telle sorte qu'en posant, pour abréger,

$$(x-a')A+(y-b')C=P\ ,$$

$$(y-b')B+(x-a')C=Q\ ,$$

$$C^2-AB=R^2\ ,$$

tout se réduira à éliminer P, Q, R, entre les trois équations

$$P^2+b'(2y-b')R^2=0\ , \qquad Q^2+a'(2x-a')R^2=0\ ,$$

$$2PQ=\{2(b'x+a'y-a'b')-(2bx+2ay-ab)\}R^2\ .$$

La valeur de R^2, introduite dans les deux premières, au moyen de la dernière, donne en réduisant

$$2b'(2y-b')Q+\{2(b'x+a'y-a'b')-(2bx+2ay-ab)\}P=0\ ,$$

$$2a'(2x-a')P+\{2(b'x+a'y-a'b')-(2bx+2ay-ab)\}Q=0\ ;$$

d'où, en transposant, multipliant membre à membre, et divisant ensuite par PQ,

$$4a'b'(2x-a')(2y-b')=\{2(b'x+a'y-a'b')-(2bx+2ay-ab)\}^2\ ;$$

le lieu cherché est donc une section conique (*).

Voyons quel est le centre de cette courbe; on sait que ce centre est donné par les deux dérivées de l'équation de la courbe, prises successivement par rapport à x et y; les deux équations du centre cherché seront donc

$$2a'b'(2y-b')=(b'-b)\{2(b'x+a'y-a'b')-(2bx+2ay-ab)\}\ ,$$

$$2a'b'(2x-a')=(a'-a')\{2(b'x+a'y-a'b')-(2bx+2ay-ab)\}\ .$$

Ce centre se trouvera donc aussi sur toute ligne dont l'équation sera une combinaison quelconque de ces deux-là; il sera donc, en particulier, sur la droite dont on obtient l'équation en divisant ces deux-là membre à membre; c'est-à-dire, sur la droite dont l'équation est

$$\frac{2x-a'}{a-a'}=\frac{2y-b'}{b-b'}\ .$$

Or, on voit aisément, 1.° que cette droite passe par le milieu de la distance du point donné à l'origine; 2.° qu'elle passe aussi

(*) M. le capitaine Poncelet a aussi démontré cette proposition, par des considérations géométriques.

par le milieu du segment de la troisième tangente intercepté entre celles qui ont été prises pour axes.

En considérant donc que cette troisième tangente peut être choisie de trois manières différentes, on parviendra à la construction suivante du centre de la section conique, lieu des centres de toutes les sections coniques qui, étant inscrites ou ex-inscrites à un même triangle donné, passent par un même point donné, intérieur ou extérieur à ce triangle : *Par le milieu de la distance du point donné à chacun des sommets et par le milieu du côté opposé soit menée une droite ; les trois droites menées de cette manière se couperont en un même point, qui sera le centre cherché* (*).

A l'aide de l'équation de la courbe, on peut obtenir autant de ses points qu'on voudra. Occupons-nous seulement de la recherche de ceux qui paraissent être de la construction la plus facile; mais d'abord mettons l'équation sous une autre forme. En développant le second membre comme le quarré d'un binome, et transposant dans le premier le premier terme de ce quarré, il vient, en réduisant,

$$4(a'y-b'x)^2=(2bx+2ay-ab)\{4(b'x+a'y-a'b')-(2bx+2ay-ab)\}\ .$$

Or, on satisfait à cette équation, en posant à la fois

$$a'y-b'x=0\ ,$$

$$2bx+2ay=ab\ ;$$

(*) On voit par là, pour le dire en passant, que si le point donné est le centre de gravité de l'aire du triangle formé par les tangentes données, ce point sera en même temps le centre de la courbe cherchée.

d'où

d'où il suit que ce sont là les équations de deux droites qui se coupent sur la courbe dont il s'agit. Or, la première est celle qui joint le point donné à l'origine; et quant à la seconde, c'est la droite qui joint les milieux des segmens des deux premières tangentes déterminés par la troisième; en prenant donc tour à tour chacune des tangentes pour la troisième, on aura la construction suivante de trois points de la courbe : *inscrivez au triangle des tangentes un autre triangle dont les sommets soient les milieux des côtés du premier*; *les points où les côtés de ce second triangle seront respectivement coupés par les droites menées du point donné aux sommets du premier seront trois points de la courbe demandée;* et, comme le centre est connu, par ce qui précède, rien ne sera plus facile que d'obtenir *trois autres* points de cette courbe.

Si l'on demandait le centre d'une section conique touchant à la fois quatre droites données et passant en outre par un point donné; ce centre devant se trouver à la fois (*Prob. I*) sur une droite et (*Prob. II*) sur une section conique, le problème aurait au plus deux solutions.

Mais, si l'on demandait le centre d'une section conique qui, touchant à la fois trois droites données, passât en outre par deux points donnés; on voit (*Prob. II*) que ce centre devrait se trouver à la fois sur deux sections coniques, et qu'ainsi le problème pourrait avoir jusqu'à quatre solutions.

Si l'on demandait le lieu géométrique des centres de toutes les sections coniques qui, passant par un point donné, fussent inscrites à un angle donné et touchassent en outre un de ses côtés en un point donné; on considérerait la distance du point de contact donné au sommet de l'angle donné comme un triangle d'une aire nulle, ayant deux côtés égaux et coïncidens, et son troisième côté, de longueur nulle, dirigé suivant l'autre côté de l'angle donné; le problème se trouverait donc ramené au précédent; le lieu cherché serait donc une section conique, et l'on pourrait assigner son centre ainsi que six points de son périmètre.

PROBLÈME III. Déterminer le lieu des centres de toutes les sections coniques qui, touchant à la fois deux droites données, passent en outre par deux points donnés?

Solution. Prenons les deux tangentes pour axes des coordonnées, et soient $(a\,,\,b)$, $(a'\,,\,b')$ les deux points donnés. En supposant toujours que l'équation (1) est celle des courbes dont on cherche le lieu des centres, nous aurons d'abord (4, 5)

$$A'^2-AC'=0\,, \qquad (\alpha) \qquad B'^2-BC'=0\,. \qquad (\beta)$$

En second lieu, parce que ces courbes passent par les deux points donnés, nous aurons

$$Aa^2+Bb^2+2Cab+2A'a+2B'b+C'=0\,, \qquad (\gamma)$$

$$Aa'^2+Bb'^2+2Ca'b'+2A'a'+2B'b'+C'=0\,; \qquad (\gamma')$$

enfin, x, y étant les coordonnées du lieu des centres, nous aurons encore (9, 10)

$$Ax+Cy+A'=0\,, \qquad (\delta) \qquad By+Cx+B'=0\,; \qquad (\varepsilon)$$

et il s'agira d'éliminer A, B, C, A', B', C' entre ces six équations.

Si d'abord on élimine C' entre les deux premières, et C entre les deux dernières, on aura

$$AB'^2=BA'^2\,,$$

$$x(Ax+A')=y(By+B')\,.$$

En éliminant B entre ces deux équations, on trouve

$$(A'x-B'y)\{A(A'x+B'y)+A'^2\}=0\,,$$

équation qui peut être satisfaite de deux manières. Prenons d'abord

$$A(A'x+B'y)+A'^2=0\ ,$$

nous en conclurons

$$A=-\frac{A'^2}{A'x+B'y}\ ,$$

puis, en vertu de l'équation $AB'^2=BA'^2$,

$$B=-\frac{B'^2}{A'x+B'y}\ ;$$

l'équation (δ) donnera alors

$$C=-\frac{A'B'}{A'x+B'y}\ ;$$

et l'on aura enfin par l'équation (α)

$$C'=-(A'x+B'y)\ ;$$

Toutes ces valeurs étant substituées dans l'équation (γ), elle deviendra

$$\{A'(x-a)+B'(y-b)\}^2=0\ ,$$

d'où

$$A'(x-a)+B'(y-b)=0\ ;$$

On aura de même, par l'équation (γ'),

$$A'(x-a')+B'(y-b')=0\ ;$$

d'où, en transposant, divisant et réduisant,

$$\frac{x-a}{x-a'}=\frac{y-b}{y-b'}\ ,$$

ou encore

$$\frac{x-a}{a-a'}=\frac{y-b}{b-b'}\ ;$$

équation de la droite qui passe par les deux points donnés.

Or, cette droite ne saurait être le lieu cherché des centres; car alors elle devrait l'être encore lorsque les points donnés seraient respectivement sur les deux côtés de l'angle des tangentes données; tandis qu'il a été reconnu ci-dessus (*Prob. I*) qu'alors la droite, lieu des centres, devait passer par le sommet de cet angle.

Il faut donc adopter l'autre équation

$$A'x=B'y\ ;$$

en substituant dans $AB'^2=BA'^2$, elle donne

$$Ax^2=By^2\ ;$$

on a donc

$$B=A\frac{x^2}{y^2}\ ,\qquad B'=A'\frac{x}{y}\ ;$$

et de plus, par (α) et (δ),

$$C'=\frac{A'^2}{A}\ ,\qquad C=-\frac{Ax+A'}{y}\ ;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (γ), elle deviendra

$$(ay-bx)^2A^2+2y(bx+ay-ab)AA'+y^2A'^2=0\ ;$$

l'équation (γ') donnera pareillement

$$(a'y-b'x)^2A^2+2y(b'x+a'y-a'b')AA'+y^2A'^2=0\ ,$$

en éliminant $A'y$ comme inconnue, entre ces deux équations, A disparaîtra de lui-même, et l'on obtiendra, pour l'equation de la courbe cherchée

$$\{(ay-bx)^2-(a'y-b'x)^2\}^2$$

$$=4\{(bx+ay-ab)-(b'x+a'y-a'b')\}\{(ay-bx)^2(b'x+a'y-a'b')-(a'y-b'x)^2(bx+ay-ab)\}\ .$$

En développant cette équation, on trouve qu'elle est généralement du qatrième degré, non décomposable en deux facteurs rationnels du second; de sorte que le lieu cherché n'est ni une section conique ni un système de sections coniques.

PROBLÈME IV. Déterminer le lieu des centres de toutes les sections coniques qui, touchant une même droite donnée, passent en outre par les trois mêmes points donnés?

Solution. Soit pris l'un quelconque des trois points donnés pour origine, et soient fait passer les axes des x et des y par les deux autres que nous supposons distants de celui-là des quantités a, b. Soit de plus l'équation

$$\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}=1\ ,$$

celle de la tangente. En prenant toujours l'équation (1) pour l'équation des courbes dont on cherche le lieu des centres, nous exprimerons que les courbes passent par l'origine en faisant $C'=0$. Les conditions de passer par les deux autres points donneront ensuite

$$Aa+2A'=0\ ,\qquad Bb'+2B'=0\ ,$$

de plus, la condition de toucher la droite donnée deviendra (3), à cause de $C'=0$,

$$a'^2b'^2(C^2-AB)+2a'^2b'(A'C-AB')+(a'A'-b'B')^2=0 :$$

$$+2a'b'^2(B'C-BA') .$$

Enfin, x, y étant les coordonnées du lieu des centres, on devra avoir (9, 10)

$$Ax+Cy+A'=0 , \qquad By+Cx+B'=0 ;$$

et il s'agira d'éliminer A, B, C, A', B' entre ces cinq équations.

Mais d'abord, au moyen des équations (11, 12), nous pouvons simplifier la troisième qui devient

$$(a'A'-b'B')^2=a'b'(2b'x+2a'y-a'b')(C^2-AB) ;$$

ou, en y mettant pour A', B' leurs valeurs données par les deux premières équations

$$(Aaa'-Bbb')^2=4a'b'(2b'x+2a'y-a'b')(C^2-AB) ;$$

les mêmes valeurs, substituées dans les deux dernières, donnent

$$(2x-a)A+2Cy=0 , \qquad (2y-b)B+2Cx=0 ;$$

tirant de celles-ci les valeurs de A, B, pour les substituer dans la précédente, C s'en ira de lui-même, et il viendra, pour l'équation du lieu demandé,

$$\{bb'x(2x-a)-aa'y(2y-b)\}^2$$

$$+a'b'(2x-a)(2y-b)(2bx+2ay-ab)(2b'x+2a'y-a'b')=0$$

équation du quatrième degré, non décomposable en deux facteurs rationnels du second degré. Ainsi, en général, le lieu cherché n'est ni une section conique, ni un système de sections coniques.

Si néanmoins la tangente passait par l'origine, c'est-à-dire, par l'un quelconque des points donnés; en supposant son equation

$$\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}=0,$$

ce qui revient à supposer que a', b' se changent respectivement en $\lambda a'$, $\lambda b'$, et à faire ensuite $\lambda=0$, l'équation deviendrait simplement

$$bb'x(2x-a)=aa'y(2y-b)\ ;$$

qui est celle d'une section conique. Ainsi, le lieu des centres de toutes les sections coniques qui, passant par les trois mêmes points, sont tangentes à une même droite en l'un de ces points est lui-même une section conique.

Si l'on prend successivement les dérivées de cette équation par rapport à x et y, on aura, pour déterminer le centre de la courbe, les deux équations

$$4x-a=0\ , \qquad 4y-b=0\ .$$

Ainsi ce centre est le milieu de la droite menée du point qui est sur la tangente au milieu de la distance entre les deux autres; de sorte que le centre de la courbe est tout-à-fait indépendant de la direction de la tangente. On voit d'ailleurs que la courbe a deux diamètres conjugués, paralleles aux droites qui joignent le point de contact aux deux autres points.

On voit que la courbe passe par le point de contact, et, d'après la position du centre, elle passe aussi par le milieu de l'intervalle entre les deux autres points; elle passe encore par les milieux des distances du point de contact aux deux autres. Il serait facile au surplus, à l'aide de l'équation ci-dessus, de trouver d'autres points de cette courbe.

PROBLÈME V. Déterminer le lieu des centres de toutes les sections coniques qui passent par les quatre mêmes points donnés?

Solution. Faisons passer l'axe des x par deux quelconques des quatre points donnés et l'axe des y pour les deux autres ; et soient alors les équations de ces quatre points ainsi qu'il suit:

$$\left\{\begin{array}{l}x=a\,,\\ y=0\,;\end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l}x=a'\,,\\ y=0\,;\end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l}x=0\,,\\ y=b\,;\end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l}x=0\,,\\ y=b'\,;\end{array}\right.$$

En prenant toujours l'équation (1) pour l'équation commune des courbes dont il s'agit, et exprimant qu'elles passent par ces quatre points, nous aurons

$$Aa^2+2A'a+C'=0\,,\qquad Bb^2+2B'b+C'=0\,,$$

$$Aa'^2+2A'a'+C'=0\,,\qquad Bb'^2+2B'b'+C'=0\,.$$

De plus, x, y étant les coordonnées du lieu des centres, on aura

$$Ax+Cy+A'=0\,,\qquad By+Cx+B'=0\,.$$

Eliminant A, A' entre les équations de gauche, et B, B' entre celles de droite; il viendra, en réduisant,

$$\{2x-(a+a')\}C'+2aa'yC=0\,,$$

$$\{2y-(b+b')\}C'+2bb'xC=0\,;$$

d'où, éliminant enfin C, C', on obtiendra, pour l'équation du lieu demandé

$bb'x$

$$bb'x\{2x-(a+a')\}=aa'y\{2y-(b+b')\}\ ;$$

ce lieu est donc une section conique.

En égalant à zéro les dérivées de cette équation, prises successivement par rapport à x et y, on aura, pour déterminer le centre de la courbe, les deux équations

$$x=\tfrac{1}{4}(a+a')\ , \qquad y=\tfrac{1}{4}(b+b')\ .$$

Ainsi, la courbe a pour centre le milieu de la droite qui joint le milieu de la distance de deux quelconques de nos quatre points au milieu de la distance entre les deux autres.

On voit, par la forme de l'équation, que la courbe a deux diamètres conjugués paralleles aux axes des coordonnées; d'où l'on peut conclure que si, par le centre de la courbe, on mène deux droites, l'une parallèle à la droite qui joint deux quelconques de nos quatre points et l'autre parallèle à celle qui joint les deux autres, les directions de ces droites seront celles de deux diamètres conjugués.

Voyons présentement quels sont les points les plus remarquables du cours de la courbe. On voit d'abord que cette courbe passe par l'origine: ce qui revient à dire que, si l'on joint deux quelconques des quatre points dont il s'agit par une droite, et les deux autres par une autre droite, le point de concours de ces deux droites sera un point de la courbe.

On satisfait aussi à l'équation de la courbe en posant

$$x=0\ , \qquad y=\tfrac{1}{2}(b+b')\ ,$$

or, ce sont là les coordonnées du milieu de l'intervalle entre les deux points situés sur l'axe des y; puis donc que ces points sont quelconques, on en peut conclure que le milieu de l'intervalle entre deux quelconques des quatre points donnés est un point de la courbe.

Enfin, on satisfait encore à cette équation en posant

$$x=\tfrac{1}{2}(a+a')\ ,\qquad y=\tfrac{1}{2}(b+b')\ ;$$

donc, si l'on mène une parallèle à chacun des axes par le milieu de l'intervalle entre les deux points situés sur l'autre, les deux droites ainsi menées se couperont en un point de la courbe ; ce qui revient à dire que si, ayant joint deux quelconques des points donnés par une droite et les deux autres par une autre droite, on mène par le milieu de chacune de ces deux droites une parallèle à l'autre, les deux droites ainsi menées se couperont en un point de la courbe.

On a donc, en résumé, le théorème suivant :

THÉORÈME. Dans tout quadrilatère simple, les six points milieux des quatre côtés et des deux diagonales, les trois points d'intersection tant des deux diagonales que des deux systèmes de côtés opposés, et enfin les trois points d'intersection des parallèles menées soit à chaque diagonale par le milieu de l'autre, soit à chaque côté par le milieu de son opposé, sont douze points d'une même section conique. Son centre est au milieu commun des droites qui joignent les milieux soit des deux diagonales, soit des côtés opposés du quadrilatère. Enfin, les trois systèmes de deux droites, menés par ce centre parallèlement soit aux deux diagonales, soit à deux côtés opposés, sont trois systèmes de diamètres conjugués de la courbe. Cette section conique est le lieu des centres de toutes les sections coniques circonscrites au quadrilatère dont il s'agit.

Il est facile de se convaincre, au surplus, que les douze points de la courbe que nous venons de désigner sont situés deux à deux aux extrémités d'un même diamètre.

Il est également facile de voir que la section conique sera une hyperbole ou une ellipse, suivant que le quadrilatère sera ou ne ne sera pas convexe.

Si donc l'on demandait le centre d'une section conique qui passât par cinq points donnés ; en faisant tour à tour abstraction de deux de ces cinq points on trouverait, par ce qui précède, que le centre de la courbe doit être à la fo sur deux sections coniques ; et comme il est d'ailleurs connu que la section conique qui passe par cinq points donnés est unique ; il s'ensuit que les deux sections coniques qui devraient déterminer le centre de celle-là devraient être tangentes l'une à l'autre. On peut, en excluant ainsi, tour à tour, chacun des cinq points donnés, obtenir cinq sections coniques qui devront toutes se toucher en un même point.

Concevons présentement que de deux des sommets consécutifs du quadrilatère l'un marche en ligne droite vers l'autre jusqu'à se confondre avec lui ; il est clair que notre théorème ne cessera pas pour cela d'être vrai ; mais alors notre quadrilatère se réduira à un triangle, le côté d'une longueur nulle à une droite indéfinie, menée d'une manière quelconque, par l'un des sommets de ce triangle, et les sections coniques circonscrites à des sections coniques passant par deux points donnés et touchant une même droite en un point donné ; on a donc ce théorème :

THÉORÈME. Le lieu des centres de toutes les sections coniques qui, passant par les deux mêmes points donnés, touchent en outre une même droite donnée en un même point est une autre section conique passant par le point de contact donné, par le milieu de la droite qui joint les deux autres points donnés, par le point où cette dernière droite coupe la tangente donnée, par le point où la parallèle menée à la même droite par le point de contact rencontre la parallèle menée à la tangente par le milieu de l'intervalle entre les deux points donnés, enfin par les milieux des distances de ces deux points au point de contact. Cette section conique a son centre au milieu commun de deux droites dont l'une joint le point de contact au milieu de l'intervalle entre les deux autres, tandis que l'autre joint les milieux des distances du point de contact à ces deux-là. Elle a un système de diamètres conjugués parallèles aux droites qui joignent le point de contact aux deux *autres points, et un autre dans lequel un des diamètres est parallèle à la droite qui joint ces deux derniers points, tandis que l'autre est parallele à la tangente.*

Il est, au reste, facile de voir que la courbe est une hyperbole ou une ellipse, suivant que les deux points qui ne sont pas sur la tangente sont situés de même ou de différens côtés par rapport à elle. On aperçoit aussi très-facilement que les six points du cours de cette courbe que nous venons d'assigner sont, deux à deux, aux extrémités d'un même diamètre.

Si présentement nous supposons que les deux points qui ne sont pas sur la tangente se rapprochent l'un de l'autre jusqu'à se confondre, ainsi que l'avaient déjà fait les deux autres, nous obtiendrons ce théorème, déjà obtenu par d'autres considérations (*Prob. I*); mais qui se trouve ici plus complet.

THÉORÈME. Le lieu des centres des sections coniques qui touchent à la fois les deux côtés d'un même angle aux deux mêmes points est le système de deux droites dont l'une joint les deux points de contact, tandis que l'autre joint le sommet de l'angle au milieu de l'intervalle qui sépare ces deux points.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de Géométrie.

QUELLE est la courbe enveloppe de toutes les sections coniques qui, passant par les mêmes m points donnés, touchent les mêmes n droites données ; sous la condition $m+n=4$?

FIN DU ONZIÈME VOLUME.

TABLE

Des matières contenues dans le XI.e volume des Annales.

ANALISE ALGÉBRIQUE.

ANALISE INDÉTERMINÉE.

ANALISE TRANSCENDANTE.

ARITHMÉTIQUE.

ASTRONOMIE.

COMBINAISONS.

DIOPTRIQUE.

GÉOMETRIE ANALITIQUE.

GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE.

GÉOMÉTRIE DES COURBES.

GÉOMÉTRIE ELEMENTAIRE.

OPTIQUE.

STATIQUE.

TRIGONOMETRIE.

CORRESPONDANCE

Entre les questions proposées *et les* questions résolues.

ERRATA

Pour le onzième volume des Annales.

PAGE 79, à la note, ligne 1, — perdendiculaire ; *lisez* : perpendiculaire.
Pag. 337, ligne 6, — ès lettres ; *lisez* : ès sciences.
Pag. 357, ligne 6, en remontant, — intégrale ; *lisez* : intégrable.

*Supplément à l'*Errata *du X.e volume.*

Pag. 320, au titre, — APPLIQUÉE ; *lisez* : APPROCHÉE.
Pag. 393, ligne 7, — au lieu de ——— ; *lisez* : 184—188.