MICHEL PAGANI
STEIN
QUERRET

Solution du problème d'analise transcendante proposé à la page 321 du XII.e volume des Annales

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 13 (1822-1823), p. 105-114
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__105_0>

Solution du problème d'analise transcendante proposé à la page 321 du XII.e volume des Annales ;

Par MM. Pagani Michel, ingénieur à Genève,
M....s, à Berlin,
C. G., à Grenoble,
Stein, professeur au collége de Trèves, ancien élève de l'école polytechnique,
Et Querret, chef d'institution à St-Malo.

Problème. *On demande la somme finie de la suite infinie*

$$1+\frac{a\mathrm{Cos}.x}{1}+\frac{a^2\mathrm{Cos}.2x}{1.2}+\frac{a^3\mathrm{Cos}.3x}{1.2.3}+\frac{a^4\mathrm{Cos}.4x}{1.2.3.4}+\ldots\ ?$$

Solution. La plupart des solutions qu'on a données de ce problème reviennent pour le fond à ce qu'il suit.

Si, dans le terme général,

$$\frac{a^n\mathrm{Cos}.nx}{1.2.3\ldots n},$$

on met pour Cos.nx sa valeur connue

$$\mathrm{Cos}.nx=\frac{(\mathrm{Cos}.x+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.x)^n+(\mathrm{Cos}.x-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}.x)^n}{2},$$

en faisant, pour abréger,

$$a(\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)=p\ ,\qquad a(\text{Cos}.x-\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)=q\ ;$$

ce terme général deviendra

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{p^n+q^n}{1.2.3\ldots\ldots n}\ ;$$

donc la suite proposée est la somme de deux autres dont les termes généraux sont respectivement

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{p^n}{1.2.3\ldots\ldots n}\ ,\qquad \tfrac{1}{2}\cdot\frac{q^n}{1.2.3\ldots\ldots n}\ ;$$

or, ces suites sont connues et sont les développemens respectifs de

$$\tfrac{1}{2}e^p\ ,\qquad \tfrac{1}{2}e^q\ ;$$

donc, en désignant par S la somme de la suite proposée, on aura

$$2S=e^p+e^q\ ,$$

ou, en remettant pour p et q les fonctions dont ils sont les symboles,

$$2S=e^{a\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\,a\text{Sin}.x}+e^{a\text{Cos}.x-\sqrt{-1}\,a\text{Sin}.x}\ ;$$

ou bien encore

$$2S=e.^{a\text{Cos}.x}\left(e^{+\sqrt{-1}\,a\text{Sin}.x}+e^{-\sqrt{-1}\,a\text{Sin}.x}\right)\ ;$$

mais on sait que

$$e^{+\sqrt{-1}\,a\text{Sin}.x}+e^{-\sqrt{-1}\,a\text{Sin}.x}=2\text{Cos}.(a\text{Sin}.x)\ ;$$

donc enfin

$$S = e^{a\text{Cos}.x}.\text{Cos}.(a\text{Sin}.x)\ .$$

M. Querret déduit ce résultat d'un théorème très-général. Si l'on sait, dit-il, sommer la suite

$$A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + A_3 a^3 + A_4 a^4 + \ldots\ldots \qquad (1)$$

dans laquelle A_0, A_1, A_2, ... sont supposés des coefficiens numériques, et qu'on en représente la somme par $\text{f}(a)$, on aura

$$\frac{\text{f}[a(\text{Cos}.x + \sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)] + \text{f}[a(\text{Cos}.x - \sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)]}{2}$$

pour la somme de la série

$$A_0 + A_1 a\text{Cos}.x + A_2 a^2\text{Cos}.2x + A_3 a^3\text{Cos}.3x + \ldots\ldots \qquad (2)$$

et

$$\frac{\text{f}[a(\text{Cos}.x + \sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)] - \text{f}[a(\text{Cos}.x - \sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)]}{2\sqrt{-1}}$$

pour la somme de la série

$$A_1 a\text{Sin}.x + A_2 a^2\text{Sin}.2x + A_3 a^3\text{Sin}.3x + \ldots\ldots \qquad (3)$$

En effet, suivant la signification donnée à la caractéristique f, en changeant successivement a en

$$a(\text{Cos}.x + \sqrt{-1}\,\text{Sin}.x) \qquad \text{et} \qquad a(\text{Cos}.x - \sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)\ ,$$

on a

$$\text{f}[a(\text{Cos}.x + \sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)]$$

pour la somme de la série

$$A_0+A_1a(\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)+A_2a^2(\text{Cos}.2x+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.2x)+\ldots \quad (4)$$

et

$$\text{f}[a(\text{Cos}.x-\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)]$$

pour la somme de la série

$$A_0+A_1a(\text{Cos}.x-\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)+A_2a^2(\text{Cos}.2x-\sqrt{-1}\,\text{Sin}.2x)+\ldots \quad (5)$$

or, la série (2) est la somme des séries (4, 5) divisée par 2; et la série (3) est la différence de ces mêmes séries, divisée par $2\sqrt{-1}$, donc la somme de la série (2) doit être la somme des séries (4, 5) divisée par 2; et la série (3) doit être la difference de ces mêmes séries, divisée par $2\sqrt{-1}$.

L'application à la série proposée est facile; on a, comme l'on sait,

$$e^a=1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1.2}+\frac{a^3}{1.2.3}+\frac{a^4}{1.2.3.4}+\ldots\ldots;$$

donc $e^a=\text{f}(a)$; donc la somme de la série

$$1+\frac{a\text{Cos}.x}{1}+\frac{a^2\text{Cos}.2x}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos}.3x}{1.2.3}+\frac{a^4\text{Cos}.4x}{1.2.3.4}+\ldots.$$

sera, d'après ce qui précède,

$$S=\frac{e^{a(\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)}+e^{a(\text{Cos}.x-\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)}}{2},$$

ou

$$S=\frac{e^{a\text{Cos}.x}\left(e^{+\sqrt{-1}\,a\text{Sin}.x}+e^{-\sqrt{-1}\,a\text{Sin}.x}\right)}{2};$$

c'est-à-dire

$S=$

$$S=e^{a\text{Cos}.x}.\text{Cos}.(a\text{Sin}.x)\ ;$$

comme ci-dessus ; résultat qu'on peut mettre aussi sous la forme

$$\frac{e^{ae^{+x\sqrt{-1}}}+e^{ae^{-x\sqrt{-1}}}}{2}.$$

M. C. G. observe qu'au surplus le résultat

$$e^{a\text{Cos}.x}.\text{Cos}.(a\text{Sin}.x)=1+\frac{a\text{Cos}.x}{1}+\frac{a^2\text{Cos}.2x}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos}.3x}{1.2.3}+\ldots.$$

peut se vérifier immédiatement par le développement. On sait, en effet, que

$$e^{a\text{Cos}.x}=1+\frac{a\text{Cos}.x}{1}+\frac{a^2\text{Cos}.^2x}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos}.^3x}{1.2.3}+\frac{a^4\text{Cos}.^4x}{1.2.3.4}+\ldots\ ;$$

$$\text{Cos}.(a\text{Sin}.x)=1-\frac{a^2\text{Sin}.^2x}{1.2}+\frac{a^4\text{Sin}.^4x}{1.2.3.4}-\frac{a^6\text{Sin}.^6x}{1.2.3\ldots6}+\frac{a^8\text{Sin}.^8x}{1.2.3\ldots.8}-\ldots\ ;$$

multipliant ces équations membre à membre, ordonnant le second membre du produit par rapport à a, et faisant attention qu'en général

$$\text{Cos}.nx=\text{Cos}.^nx-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\text{Sin}.^2x\text{Cos}.^{n-2}x+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}\text{Sin}.^4x\text{Cos}.^{n-4}x-\ldots$$

il viendra

$$e^{a\text{Cos}.x}.\text{Cos}.(a\text{Sin}.x)=1+\frac{a\text{Cos}.x}{1}+\frac{a^2\text{Cos}.2x}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos}.3x}{1.2.3}+\frac{a^4\text{Cos}.4x}{1.2.3.4}+\ldots\quad(\alpha)$$

M. Stein observe que, par le même procédé, on se convaincra facilement que

$$e^{a\text{Cos}.x}.\text{Sin}\,(a\text{Sin}.x)=\frac{a\text{Sin}.x}{1}+\frac{a^2\text{Sin}.2x}{1.2}+\frac{a^3\text{Sin}.3x}{1.2.3}+\ldots;\qquad(\beta)$$

nous observerons, à notre tour, qu'en changeant x en $\frac{1}{2}\varpi-x$, on déduit de ces formules

$$e^{a\text{Sin}.x}.\text{Cos}.(a\text{Cos}.x)=1+\frac{a\text{Sin}.x}{1}-\frac{a^2\text{Cos}.2x}{1.2}-\frac{a^3\text{Sin}.3x}{1.2.3}+\ldots\qquad(\gamma)$$

$$e^{a\text{Sin}.x}\text{Sin}.(a\text{Cos}.x)=\frac{a\text{Cos}.x}{1}+\frac{a^2\text{Sin}.2x}{1.2}-\frac{a^3\text{Cos}.3x}{1.2.3}-\frac{a^4\text{Sin}.4x}{1.2.3.4}+\ldots\qquad(\delta)$$

M. Querret déduit bien facilement le premier de ces trois derniers développemens de sa formule générale. En continuant, en effet, de faire $f(a)=e^a$, la série (3) deviendra

$$\frac{a\text{Sin}.x}{1}+\frac{a^2\text{Sin}\,2x}{1.2}+\frac{a^3\text{Sin}.3x}{1.2.3}+\frac{a^4\text{Sin}.4x}{1.2.3.4}+\ldots\ldots$$

dont la somme sera conséquemment

$$\frac{e^{a(\text{Cos}\,x+\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)}-e^{a(\text{Cos}.x-\sqrt{-1}\,\text{Sin}.x)}}{2\sqrt{-1}},$$

ou bien

$$\frac{e^{a\text{Cos}.x}.\left(e^{+\sqrt{-1}\,a\text{Sin}.x}-e^{-\sqrt{-1}\,a\text{Sin}.x}\right)}{2\sqrt{-1}},$$

ou enfin

$$e^{a\text{Cos}.x}.\text{Sin}.(a\text{Sin}.x)\,.$$

M. C. G. observe que la formule

$$e^{a\mathrm{Cos}.x}.\mathrm{Cos}.(a\mathrm{Sin}.x)=1+\frac{a\mathrm{Cos}.x}{1}+\frac{a^2\mathrm{Cos}.2x}{1.2}+\frac{a^3\mathrm{Cos}.3x}{1.2.3}+\frac{a^4\mathrm{Cos}.4x}{1.2.3.4}+\ldots$$

a cela de très-remarquable qu'elle renferme, comme cas particuliers, les développemens, tant des exponentiels que des fonctions circulaires. Si, en effet, on y fait successivement $x=0$ et $x=\frac{1}{2}\varpi$, on trouve

$$e^a=1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1.2}+\frac{a^3}{1.2.3}+\frac{a^4}{1.2.3.4}+\ldots,$$

$$\mathrm{Cos}.a=1-\frac{a^2}{1.2}+\frac{a^4}{1.2.3.4}-\frac{a^6}{1.2.3\ldots6}+\ldots;$$

la formule

$$e^{a\mathrm{Cos}.x}.\mathrm{Sin}.(a\mathrm{Sin}.x)=\frac{a\mathrm{Sin}.x}{1}+\frac{a^2\mathrm{Sin}.2x}{1.2}+\frac{a^3\mathrm{Sin}.3x}{1.2.3}+\frac{a^4\mathrm{Sin}.4x}{1.2.3.4}+\ldots$$

donnera pareillement, en faisant $x=\frac{1}{2}\varpi$,

$$\mathrm{Sin}.a=\frac{a}{1}-\frac{a^3}{1.2.3}+\frac{a^5}{1.2.3.4.5}-\frac{a^7}{1.2.3\ldots7}+\ldots$$

M. Stein remarque, à son tour, que, connaissant la série proposée, on en peut déduire les sommes d'autres séries également remarquables. En y changeant, par exemple, x en $2x$, il vient

$$e^{a\mathrm{Cos}.2x}.\mathrm{Cos}.(a\mathrm{Sin}.2x)=1+\frac{a\mathrm{Cos}.2x}{1}+\frac{a^2\mathrm{Cos}.4x}{1.2}+\frac{a^3\mathrm{Cos}.6x}{1.2.3}+\ldots;$$

or, le terme général $\frac{a^n.\mathrm{Cos}.2nx}{1.2.3\ldots\ldots n}$ de cette nouvelle série peut également être mis sous les deux formes

$$\frac{a^n}{1.2.3\ldots.n}-\frac{2a^n\text{Sin.}^2nx}{1.2.3\ldots\ldots n}, \qquad \frac{2a^n\text{Cos.}^2nx}{1.2.3\ldots\ldots n}-\frac{a^n}{1.2.3\ldots.n};$$

il viendra donc, en faisant successivement les deux substitutions,

$$e^{a\text{Cos.}2x}.\text{Cos}\,(a\text{Sin.}2x)=\left(1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1.2}+\frac{a^3}{1.2.3}+\ldots\right)$$

$$-2\left(\frac{a\text{Sin.}^2x}{1}+\frac{a^2\text{Sin.}^22x}{1.2}+\frac{a^3\text{Sin.}^23x}{1.2.3}+\ldots.\right)$$

$$e^{a\text{Cos.}2x}.\text{Cos.}(a\text{Sin.}2x)=2\left(\frac{a\text{Cos.}^2x}{1}+\frac{a^2\text{Cos.}^22x}{1.2}+\frac{a^3\text{Cos.}^23x}{1.2.3}+\ldots.\right)$$

$$+2-\left(1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1.2}+\frac{a^3}{1.2.3}+\ldots\right);$$

d'où on tirera, en transposant et remplaçant l'une des séries par sa valeur e^a,

$$\frac{a\text{Sin.}^2x}{1}+\frac{a^2\text{Sin.}^22x}{1.2}+\frac{a^3\text{Sin.}^23x}{1.2.3}+\ldots\ldots=\frac{e^a-e^{a\text{Cos.}2x}.\text{Cos.}(a\text{Sin.}2x)}{2},$$

$$1+\frac{a\text{Cos.}^2x}{1}+\frac{a^2\text{Cos.}^22x}{1.2.}+\frac{a^3\text{Cos.}^23x}{1.2.3}+\ldots.=\frac{e^a+e^{a\text{Cos.}3x}.\text{Cos.}(a\text{Sin.}2x)}{2},$$

M. Stein remarque encore que, par des moyens semblables à ceux qui ont été appliqués à la série proposée, on parviendrait aussi à sommer la série

$$\frac{a\text{Sin.}x}{1}+\frac{a^2\text{Sin}\,2x}{2}+\frac{a^3\text{Sin.}3x}{3}+\frac{a^4\text{Sin.}4x}{4}+\ldots..,$$

dont le terme général est $\frac{a^n \text{Sin}.nx}{n}$. Le résultat serait compliqué d'imaginaires qu'on ne pourrait faire disparaître que par des moyens peu directs; et on trouverait finalement pour la somme cherchée

$$\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{a\text{Sin}.x}{1-a\text{Cos}.x}\right);$$

aussi la série proposée n'est-elle autre chose que la valeur que l'on tire pour y de l'équation

$$\text{Tang}.y=\frac{a\text{Sin}.x}{1-a\text{Cos}.x},$$

très-usitée en géodesie.

M. Querret tire de sa méthode générale plusieurs autres sommations. Posant, par exemple, $f(a)=\text{Log}.(1+a)$ ou

$$f(a)=\frac{a}{1}-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\frac{a^5}{5}-\ldots.$$

il en conclut que la somme de la série

$$\frac{a\text{Cos}.x}{1}-\frac{a^2\text{Cos}.2x}{2}+\frac{a^3\text{Cos}.3x}{3}-\frac{a^4\text{Cos}.4x}{4}+\ldots;$$

doit être

$$\frac{\text{Log}.[1+a(\text{Cos}.x+\sqrt{-1}\text{Sin}.x)]+\text{Log}.[1+a(\text{Cos}.x-\sqrt{-1}\text{Sin}.x)]}{2},$$

ou encore

$$\frac{\text{Log}.(1+2a\text{Cos}.x+a^2)}{2};$$

de sorte qu'on a

$$\text{Log.}(1+2a\,\text{Cos.}x+a^2)=2\left(\frac{a\,\text{Cos.}x}{1}-\frac{a^2\,\text{Cos.}2x}{2}+\frac{a^3\,\text{Cos.}3x}{3}-\ldots\right).$$

En faisant successivement $a=+1$ et $a=-1$, il vient

$$\text{Log.}(1+\text{Cos.}x)=-\text{Log.}2+2\left(\frac{\text{Cos.}x}{1}-\frac{\text{Cos.}2x}{2}+\frac{\text{Cos.}3x}{3}-\frac{\text{Cos.}4x}{4}+\ldots\right),$$

$$\text{Log.}(1-\text{Cos.}x)=-\text{Log.}2-2\left(\frac{\text{Cos.}x}{1}+\frac{\text{Cos.}2x}{2}+\frac{\text{Cos.}3x}{3}+\frac{\text{Cos.}4x}{4}+\ldots\right);$$

développemens donnés par Euler (Voyez son *Calcul intégral*, tom. I, à la fin du chap. VI) ; il en déduit ensuite

$$\text{Log.Cos.}\tfrac{1}{2}x=-\text{Log.}2+\text{Cos.}x-\tfrac{1}{2}\text{Cos.}2x+\tfrac{1}{3}\text{Cos.}3x-\tfrac{1}{4}\text{Cos.}4x+\ldots$$

$$\text{Log.Sin.}\tfrac{1}{2}x=-\text{Log.}2-\text{Cos.}x-\tfrac{1}{2}\text{Cos.}2x-\tfrac{1}{3}\text{Cos.}3x-\tfrac{1}{4}\text{Cos}\,4x-\ldots$$

$$\text{Log.Tang.}\tfrac{1}{2}x=-2(\text{Cos.}x+\tfrac{1}{3}\text{Cos.}3x+\tfrac{1}{5}\text{Cos.}5x+\tfrac{1}{7}\text{Cos.}7x+\ldots\ldots).$$