ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Algèbre élémentaire. Recherche du nombre des termes d'un polynome complet, d'un degré quelconque, composé d'un nombre de lettres aussi quelconque

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 13 (1822-1823), p. 282-288

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__282_1>

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

Recherche du nombre des termes d'un polynome complet, d'un degré quelconque, composé d'un nombre de lettres aussi quelconque;

Par M. GERGONNE.

J'AI donné, à la page 115 du IV^e volume de ce recueil, d'après M. G. Fornier, un procédé fort simple, pour parvenir à la formule générale qui donne le nombre des termes d'un polynome complet d'un degré quelconque, composé d'un nombre de lettres aussi quelconque. En revenant de nouveau sur ce sujet, je me suis aperçu que la recherche dont il s'agit pouvait être présentée sous une forme plus régulière, et par conséquent plus simple, et c'est à la reproduire sous cette nouvelle forme que je destine l'article que l'on va lire.

Soit un polynome complet du $m.^{me}$ degré composé des lettres a, b, c, ..., au nombre de n. En supposant tous les coefficiens positif et égaux à l'unité, il devra d'abord renfermer le terme 1. Soient ensuite P_1 l'ensemble de ses termes d'une seule dimension, P_2 l'ensemble de ses termes de deux dimensions; et ainsi de suite, P_k l'ensemble de ses termes de k dimensions, P_{m-1} l'ensemble de ses termes de $m-1$ dimensions, et enfin P_m l'ensemble de ses termes de m dimensions, ce polynome sera

$$P_m+P_{m-1}+\dots\dots+P_k+\dots\dots+P_2+P_1+1\,; \qquad (1)$$

dont il s'agit d'assigner le nombre des termes.

Ce nombre étant évidemment déterminé, dès que m et n sont connus, ne saurait être qu'une fonction de ces deux nombres; fonction encore inconnue, que nous pouvons désigner par $\varphi(m, n)$ Tout se reduit donc à assigner la forme de la fonction désignée par φ.

Soient multipliés

L'ensemble des termes P_m par $a^0+b^0+c^0+\dots\dots$ ou n;

L'ensemble des termes P_{m-1} par $a+b+c+\dots\dots$,

. . . . ;

L'ensemble des termes P_k par $a^{m-k}+b^{m-k}+c^{m-k}+\dots\dots$,

. . . . ,

L'ensemble des termes P_2 par $a^{m-2}+b^{m-2}+c^{m-2}+\dots\dots$,

L'ensemble des termes P_1 par $a^{m-1}+b^{m-1}+c^{m-1}+\dots\dots$;

Et enfin le terme 1 par $a^m+b^m+c^m+\dots\dots$;

et soit prise, sans faire de réductions, la somme des différens produits, que nous désignerons par S.

Comme chacun des termes du polynome (1) aura été multiplié par un polynome de n termes, il s'ensuit que S aura n fois autant de termes que (1), et qu'ainsi le nombre des termes de S, avant toutes réductions, sera exprimé par

$$n\varphi(m, n).$$

De plus, dans chaque multiplication, le multiplicande et le multiplicateur étant homogènes, et la somme de leurs dimensions étant constamment égale à m, m sera aussi le nombre des dimensions des différens produits, et par suite de leur somme S qui sera ainsi un polynome homogène de m dimensions, formé avec les n lettres $a, b, c, \ldots$

Or il est aisé de voir que, non seulement le polynome S renfermera tous les termes de m dimensions que l'on peut former avec les n lettres $a, b, c, \ldots$; mais que de plus chacun de ces termes s'y trouvera répété $m+n$ fois; car soit un de ces termes

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

avec la condition $\alpha+\beta+\gamma+\ldots=m$, on l'aura obtenu en multipliant, savoir

$$\begin{array}{llllll}
a^\alpha \text{ par } & b^\beta c^\gamma \ldots, & b^\beta \text{ par } & a^\alpha c^\gamma \ldots, & c^\gamma \text{ par } & a^\alpha b^\beta \ldots, \ldots \\
a^{\alpha-1} \text{ par } & a b^\beta c^\gamma \ldots, & b^{\beta-1} \text{ par } & a^\alpha b c^\gamma \ldots, & c^{\gamma-1} \text{ par } & a^\alpha b^\beta c \ldots, \ldots \\
\ldots & \ldots, & \ldots & \ldots, & \ldots & \ldots, \ldots \\
a^2 \text{ par } & a^{\alpha-2} b c^\gamma \ldots, & b^2 \text{ par } & a^\alpha b^{\beta-2} c^\gamma \ldots, & c^2 \text{ par } & a^\alpha b^\beta c^{\gamma-2} \ldots, \ldots \\
a \text{ par } & a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma \ldots, & b \text{ par } & a^\alpha b^{\beta-1} c^\gamma \ldots, & c \text{ par } & a^\alpha b^\beta c^{\gamma-1} \ldots, \ldots \\
a^0 \text{ par } & a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots, & b^0 \text{ par } & a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots, & c^0 \text{ par } & a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots, \ldots
\end{array}$$

on l'aura donc obtenu un nombre de fois exprimé par

$$(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)+\ldots=(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)+(1+1+1+\ldots)=m+n,$$

comme nous l'avions annoncé.

Ainsi la somme S sera, après les réductions faites, un polynome homogène complet de m dimensions, formé avec les n lettres

a,

a, b, c, ... et dont tous les termes seront affectés du coefficient $m+n$; de sorte qu'on aura

$$S=(m+n)S',$$

S' étant un pareil polynome dans lequel tous les coefficiens sont égaux à l'unité. D'où l'on voit qu'avant les réductions S devait avoir $m+n$ fois autant de termes que S'.

Présentement si, dans S', on fait une des lettres a, b, c, ...; a, par exemple égale à l'unité, le nombre de ses termes n'en sera pas changé ; mais il deviendra alors évidemment un polynome complet du m^{me}. degré, formé des $n-1$ lettres b, c, d, ..., dont le nombre des termes devra être exprimé par $\varphi(m, n-1)$; dont tel était aussi le nombre des termes de S' avant d'avoir fait $a=1$; d'où il suit qu'avant toutes réductions le nombre des termes de S devait être

$$(m+n).\varphi(m, n-1).$$

puis donc que nous venons de trouver, tout à l'heure, que le nombre de ces termes devait être

$$n\,\varphi(m, n),$$

il s'ensuit qu'on doit avoir

$$n.\varphi(m, n)=(m+n).\varphi(m, n-1). \qquad (2)$$

Si l'on considère présentement que cette dernière équation doit avoir lieu quel que soit le nombre entier n, en observant que, d'après la nature de la fonction φ, on doit avoir $\varphi(m, 1)=m+1$, on pourra écrire cette suite d'équations

$$n\,\varphi(m, n\quad)=(m+n\quad).\varphi(m, n-1),$$

$$(n-1).\varphi(m, n-1)=(m+n-1).\varphi(m, n-2),$$

$$(n-2).\varphi(m\,,n-2)=(m+n-2).\varphi(m\,,n-3)\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;$$

$$3.\varphi(m\,,3)=(m+3).\varphi(m\,,2)\,,$$

$$2.\varphi(m\,,2)=(m+2).\varphi(m\,,1)\,,$$

$$1.\varphi(m\,,1)=(m+1)\,,$$

en les multipliant donc membre à membre, supprimant les facteurs communs dans l'équation résultante et résolvant enfin cette équation par rapport à $\varphi(m\,,n)$ on aura

$$\varphi(m\,,n)=\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}\cdots\cdots\frac{m+n}{n}=\frac{(m+n)!}{m!n!}\,. \qquad (3)$$

telle est la formule générale cherchée.

On conclut évidemment de là

$$\varphi(m\,,n)=\varphi(n\,,m)=\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+3}{3}\cdots\frac{m+n}{m}\,; \qquad (4)$$

on peut donc choisir, entre ces deux formules, celle qui se compose d'un moindre nombre de facteurs. Il résulte aussi de leur équivalence *qu'il y a autant de termes dans un polynome complet du* n$^{\text{me}}$ *degré formé avec* m *lettres qu'il y en a dans un polynome complet du* m$^{\text{me}}$ *degré formé avec* n *lettres*. C'est ainsi, par exemple, que l'équation complète du 3.$^{\text{e}}$ degré à deux variables et l'équation complète du 2$^{\text{e}}$ degré à trois variables ont également *dix* termes.

Si dans le polynome (1) on suppose $a=1$, le nombre de ses termes ne changera pas, et sera toujours $\varphi(m, n)$; mais alors les polynomes P_m, P_{m-1}, ...P_k, ...P_2, P_1 deviendront des polynomes complets des degrés marqués par leurs indices respectives formés des $n-1$ lettres restantes $b, c, d, \ldots$; le nombre des termes de chacun d'eux pourra donc être représenté par $\varphi(m, n-1)$, $\varphi(m-1, n-1)$, ...$\varphi(k, n-1)$, ...$\varphi(2, n-1)$, $\varphi(1, n-1)$; de sorte qu'on doit avoir

$$\varphi(m, n)=1+\varphi(1, n-1)+\varphi(2, n-1)+\ldots\ldots+\varphi(m-1, n-1)+\varphi(m, n-1); \quad (5)$$

en changeant m en $m-1$, on aura pareillement

$$\varphi(m-1, n)=1+\varphi(1, n-1)+\varphi(2, n-1)+\ldots\ldots+\varphi(m-1, n-1);$$

ce qui donne, en retranchant,

$$\varphi(m, n)-\varphi(m-1, n)=\varphi(m, n-1)$$

ou en transposant

$$\varphi(m, n)=\varphi(m, n-1)+\varphi(m-1, n) \quad (6)$$

formule qui justifie la construction du triangle arithmétique de Pascal.

La formule (4) donne successivement

$$\varphi(1, n-1)=\frac{n}{1},$$

$$\varphi(2, n-1)=\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2};$$

$$\varphi(3,n-1)=\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3}\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi(m,n-1)=\frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3}\cdots\cdots\frac{m+n-1}{m}\,;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (5) et mettant dans son premier membre pour $\varphi(m,n)$ sa valeur (4), on aura

$$\left.\begin{array}{r}1\\[4pt] +\dfrac{n}{1}\\[8pt] +\dfrac{n}{1}\cdot\dfrac{n+1}{2}\\[8pt] +\dfrac{n}{1}\cdot\dfrac{n+1}{2}\cdot\dfrac{n+2}{3}\\[8pt] +\cdots\cdots\cdots\cdots\\[8pt] +\dfrac{n}{1}\cdot\dfrac{n+1}{2}\cdot\dfrac{n+2}{3}\cdots\cdots\dfrac{m+n-1}{m}\end{array}\right\}=\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+3}{3}\cdot\frac{n+4}{4}\cdots\cdots\frac{m+n}{m}\,;$$

formule utile pour opérer des réductions dans divers résultats algébriques.