ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

GERGONNE

Démonstration de M. Gergonne

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 13 (1822-1823), p. 328

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__328_1>

Démonstration de M. Gergonne.

En transformant le théorème en problème on peut se demander *quelle est la trajectoire orthogonale de toutes les hyperboles équilatères qui ont les mêmes asymptotes?*

En prenant ces asymptotes pour les axes des coordonnées, on pourra prendre, pour l'équation commune à toutes ces hyperboles,

$$xy=A\ ,$$

dans laquelle A est un paramètre indéterminé. Si alors $(x',\ y')$ est le point de l'une de ces courbes où elle est coupée par l'une des courbes cherchées, les équations des tangentes à ces deux courbes en ce point seront

$$y-y'=-\frac{y'}{x'}(x-x'),\qquad y-y'=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}(x-x')\ ;$$

afin donc qu'elles se coupent perpendiculairement, on devra avoir

$$1-\frac{y'\mathrm{d}y'}{x'\mathrm{d}x'}=0\qquad \text{ou}\qquad x'\mathrm{d}x'-y'\mathrm{d}y'=0\ ;$$

équation qui a pour intégrale, en supprimant les accens,

$$x^2-y^2=\mathrm{B},$$

qui appartient bien, en effet, à toutes les hyperboles équilatères qui ont pour diamètres principaux les asymptotes des premières.

Démonstration