ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

W. H. TALBOT

Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la page 248 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 13 (1822-1823), p. 329-330
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__329_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1822-1823, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Démonstration du théorème de géométrie énoncé à la page 248 du présent volume ;

Par M. W. H. TALBOT

THÉORÈME. *Le point d'un plan indéfini dont la somme des distances à trois autres points, situés hors de ce plan, est un* minimum, *est tel que si, par la droite qui va de ce point à l'un quelconque des trois autres, on conduit un plan perpendiculaire à celui dont il s'agit, ce plan divisera en deux parties égales l'angle formé par les droites qui vont du même point aux deux points restans.*

Démonstration. Soit représentée la figure en relief (fig. 5), en représentant par des lignes ponctuées tout ce qui est hors du plan indéfini. Soient O le point cherché sur ce plan, et A B C les trois points donnés hors du même plan ; de manière que OA+OB+OC doive être un minimum.

I.° Supposons, en premier lieu, que l'une des distances, OA par exemple, soit donnée, de telle sorte qu'il ne soit question que de rendre minimum la somme OB+OC des deux autres ; *a*, *b*, *c* étant respectivement les projections de A, B, C sur le plan indéfini. Alors le point O sera l'un de ceux d'une circonférence ayant son centre en *a*, et, en menant une tangente TU à cette circonférence par ce point, il faudra, pour que OB+OC soit *minimum*, que les angles BOT et COU soient égaux ; car, soit substitué à O un autre point O′ du cercle ou de sa tangente, infiniment voisin du premier, du côté de T, il est clair que BO se trouvera diminuée d'une quantité OO′.*Cos*.BOT, tandis que CO se trouvera augmentée d'une quantité OO′.*Cos*.BOU. Or le caractère du *minimum* est que la diminution d'une part se trouve exactement composée par l'augmentation de l'autre, ce qui exige que les angles BOT et COU soient égaux.

2.° La tangente TU étant perpendiculaire au plan du triangle AaO, de l'égalité des angles que font OB et OC avec cette tangente on peut conclure l'égalité des angles que font les mêmes droites avec ce plan.

3.° Il suit de là que les distances des points B et C à ce plan, lesquelles ne sont autre chose que les perpendiculaires $b\beta$, $c\gamma$ abaissées des projections de ces points sur le prolongement du rayon aO, doivent être dans le rapport de OB à OC. Mais si P est le point où le plan AaO rencontre BC et que p soit la projection de ce point, évidemment située sur le prolongement de aO, on aura

$$b\beta : c\gamma :: bp : cp :: \mathrm{BP} : \mathrm{CP} ;$$

donc on doit avoir aussi

$$\mathrm{OB} : \mathrm{OC} :: \mathrm{PB} : \mathrm{PC} ;$$

ce qui prouve que la droite OB suivant laquelle le prolongement du plan AaO coupe le triangle BOC divise l'angle BOC en deux parties égales.

Rome, le 25 novembre 1822.