
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

QUERRET

**Questions résolues. Solution des trois problèmes d'analyse
transcendante énoncés à la page 247 du présent volume**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 13 (1822-1823), p. 353-360

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__353_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1822-1823, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution des trois problèmes d'analyse transcendante énoncés à la page 247 du présent volume ;

Par M. QUERRET, chef d'institution, à St-Malo.

PROBLÈME. Assigner la somme finie de chacune des trois suites infinies que voici :

$$1^{\circ}. \frac{a \cos.x}{1} - \frac{a^3 \cos.3x}{3} + \frac{a^5 \cos.5x}{5} - \frac{a^7 \cos.7x}{7} + \dots$$

$$2^{\circ}. \cos.x + \frac{1}{2} \frac{\cos.3x}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{\cos.5x}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{\cos.7x}{7} + \dots$$

$$3^{\circ}. \frac{\cos.x \cos.y}{1} - \frac{\cos.2x \cos.2y}{2} + \frac{\cos.3x \cos.3y}{3} - \frac{\cos.4x \cos.4y}{4} + \dots$$

Solution. Nous allons déduire la sommation de chacune de ces trois suites du théorème que nous avons établi à la page 107 de ce volume, et que nous rappelons en ces termes :

Si l'on représente par $f(a)$ la somme de la suite infinie

$$A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + A_3 a^3 + A_4 a^4 + \dots ;$$

dans laquelle A_0, A_1, A_2, \dots sont supposés représenter des coefficients numériques ; les sommes des deux séries

$$= A_0 + A_1 a \cos x + A_2 a^2 \cos 2x + A_3 a^3 \cos 3x + A_4 a^4 \cos 4x + \dots$$

$$A_0 + A_1 a \sin x + A_2 a^2 \sin 2x + A_3 a^3 \sin 3x + A_4 a^4 \sin 4x + \dots$$

seront respectivement

$$\frac{f[a(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)] + f[a(\cos x - \sqrt{-1} \sin x)]}{2},$$

et

$$\frac{f[a(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)] - f[a(\cos x - \sqrt{-1} \sin x)]}{2\sqrt{-1}}.$$

Cela posé, on a

$$\frac{a}{1} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} - \frac{a^7}{7} + \frac{a^9}{9} - \dots = \text{Arc}(\text{Tang.} = a),$$

donc 1.^o la somme de la série

$$\frac{a \cos x}{1} - \frac{a^3 \cos 3x}{3} + \frac{a^5 \cos 5x}{5} - \frac{a^7 \cos 7x}{7} + \dots$$

sera

$$\frac{\text{Arc}[\text{Tang.} = a(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)] + \text{Arc}[\text{Tang.} = a(\cos x - \sqrt{-1} \sin x)]}{2}$$

Soient M le premier de ces arcs et N le second, on aura, pour la somme de la série $\frac{M+N}{2}$, et de plus

$$\text{Tang. } M = a(\cos x + \sqrt{-1} \sin x),$$

$$\text{Tang. } N = a(\cos x - \sqrt{-1} \sin x);$$

d'où

$$\text{Tang. } M + \text{Tang. } N = 2a \text{Cos. } x,$$

$$\text{Tang. } M \text{Tang. } N = a^2;$$

d'où encore

$$1 - \text{Tang. } M \text{Tang. } N = 1 - a^2;$$

donc

$$\text{Tang. } (M + N) = \frac{\text{Tang. } M + \text{Tang. } N}{1 - \text{Tang. } M \text{Tang. } N} = \frac{2a \text{Cos. } x}{1 - a^2};$$

donc

$$M + N = \text{Arc} \left(\text{Tang.} = \frac{2a \text{Cos. } x}{1 - a^2} \right);$$

donc enfin

$$\frac{M + N}{2} = \frac{1}{2} \text{Arc} \left(\text{Tang.} = \frac{2a \text{Cos. } x}{1 - a^2} \right)$$

qui sera conséquemment la somme finie demandée de la première des trois séries infinies proposées.

Si l'on suppose $a = 1$, on a

$$\frac{M + N}{2} = \frac{1}{2} \text{Arc}(\text{Tang.} = \infty) = \frac{1}{4} \pi;$$

donc, comme on le savait déjà,

$$\frac{\pi}{4} = \text{Cos. } x - \frac{\text{Cos. } 3x}{3} + \frac{\text{Cos. } 5x}{5} - \frac{\text{Cos. } 7x}{7} + \dots$$

quel que soit x .

En second lieu

$$a + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{a^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{a^7}{7} + \dots = \text{Arc}(\text{Sin.} = a);$$

ainsi qu'il est aisé de s'en assurer, en intégrant par les séries la fonction différentielle

$$\frac{da}{\sqrt{1-a^2}} = d.\text{Arc}(\text{Sin.} = a);$$

donc, la somme de la série

$$\text{Cos.}x + \frac{1}{2} \frac{\text{Cos.}3x}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\text{Cos.}5x}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\text{Cos.}7x}{7} + \dots$$

sera

$$\frac{\text{Arc}(\text{Sin.} = \text{Cos.}x + \sqrt{-1}\text{Sin.}x) + \text{Arc}(\text{Sin.} = \text{Cos.}x - \sqrt{-1}\text{Sin.}x)}{2}.$$

Soient P le premier de ces arcs et Q le second; la somme cherchée sera donc

$$\frac{P+Q}{2},$$

et l'on aura

$$\text{Sin.}P = \text{Cos.}x + \sqrt{-1}\text{Sin.}x,$$

$$\text{Sin.}Q = \text{Cos.}x - \sqrt{-1}\text{Sin.}x,$$

d'où

$$\text{Cos.}P = \sqrt{-2\sqrt{-1}\text{Sin.}x\text{Cos.}x},$$

$$\text{Cos.}Q = \sqrt{+2\sqrt{-1}\text{Sin.}x\text{Cos.}x}.$$

done

$\text{Cos.}P$

$$\text{Cos.}P\text{Cos.}Q=2\text{Sin.}x\text{Cos.}x;$$

on a d'ailleurs

$$\text{Sin.}P\text{Sin.}Q=1;$$

donc

$$\text{Cos.}(P+Q)=\text{Cos.}P\text{Cos.}Q-\text{Sin.}P\text{Sin.}Q=2\text{Sin.}x\text{Cos.}x-1;$$

donc aussi

$$P+Q=\text{Arc}(\text{Cos.}=2\text{Sin.}x\text{Cos.}x-1),$$

et par suite

$$\frac{P+Q}{2} = \frac{1}{2} \text{Arc}(\text{Cos.}=2\text{Sin.}x\text{Cos.}x-1);$$

qui est conséquemment la somme finie demandée de la seconde des trois séries infinies proposées.

Si l'on suppose $x=0$, on a

$$\frac{P+Q}{2} = \frac{1}{2} \text{Arc}(\text{Cos.}=-1)=\frac{1}{2}\pi;$$

donc, comme on le savait déjà,

$$\frac{1}{2}\pi = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} + \dots$$

Quant à la troisième série, on peut la mettre sous cette forme

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\text{Cos.}(x+y)}{1} - \frac{\text{Cos.}2(x+y)}{2} + \frac{\text{Cos.}3(x+y)}{3} - \frac{\text{Cos.}4(x+y)}{4} + \dots \\ & + \frac{\text{Cos.}(x-y)}{1} - \frac{\text{Cos.}2(x-y)}{2} + \frac{\text{Cos.}3(x-y)}{3} - \frac{\text{Cos.}4(x-y)}{4} + \dots \end{aligned} \right\}$$

Or on a, (pag, 114 du présent volume)

$$\frac{\text{Cos.}x}{1} - \frac{\text{Cos.}2x}{2} + \frac{\text{Cos.}3x}{3} - \frac{\text{Cos.}4x}{4} + \dots = \text{Log.}2 + \text{Log.} \text{Cos.}^{\frac{1}{2}}x;$$

c'est-à-dire

$$\frac{\text{Cos.}x}{1} - \frac{\text{Cos.}2x}{2} + \frac{\text{Cos.}3x}{3} - \frac{\text{Cos.}4x}{4} + \dots = \text{Log.}2 \text{Cos.}^{\frac{1}{2}}x;$$

en changeant donc, tour à tour x en $x+y$ et $x-y$, il viendra

$$\frac{\text{Cos.}(x+y)}{1} - \frac{\text{Cos.}2(x+y)}{2} + \frac{\text{Cos.}3(x+y)}{3} - \frac{\text{Cos.}4(x+y)}{4} + \dots = \text{Log.}2 \text{Cos.}^{\frac{1}{2}}(x+y)$$

$$\frac{\text{Cos.}(x-y)}{1} - \frac{\text{Cos.}2(x-y)}{2} + \frac{\text{Cos.}3(x-y)}{3} - \frac{\text{Cos.}4(x-y)}{4} + \dots = \text{Log.}2 \text{Cos.}^{\frac{1}{2}}(x-y)$$

donc, en prenant la demi-somme ;

$$\frac{\text{Cos.}x \text{Cos.}y}{1} - \frac{\text{Cos.}2x \text{Cos.}2y}{2} + \frac{\text{Cos.}3x \text{Cos.}3y}{3} - \dots = \frac{1}{2} \{ \text{Log.}2 \text{Cos.}^{\frac{1}{2}}(x-y) + \text{Log.}2 \text{Cos.}^{\frac{1}{2}}(x+y) \}$$

ou encore

$$\frac{\text{Cos.}x \text{Cos.}y}{1} - \frac{\text{Cos.}2x \text{Cos.}2y}{2} + \frac{\text{Cos.}3x \text{Cos.}3y}{3} - \dots = \frac{1}{2} \text{Log.}4 \text{Cos.}^{\frac{1}{2}}(x-y) \text{Cos.}^{\frac{1}{2}}(x+y)$$

mais

$$2 \text{Cos.}^{\frac{1}{2}}(x-y) \text{Cos.}^{\frac{1}{2}}(x+y) = \text{Cos.}x + \text{Cos.}y$$

d'où

$$4 \text{Cos.}^{\frac{1}{2}}(x-y) \text{Cos.}^{\frac{1}{2}}(x+y) = 2(\text{Cos.}x + \text{Cos.}y)$$

donc enfin, la somme finie de la troisième des suites infinies proposées est

$$\frac{1}{2} \text{Log.}(2 \text{Cos.} x + 2 \text{Cos.} y).$$

Si, au lieu de prendre la demi-somme des deux séries ci-dessus; on prend leur demi-différence, on aura

$$\frac{\text{Sin.} x \text{Sin.} y}{1} - \frac{\text{Sin.} 2x \text{Sin.} 2y}{2} + \frac{\text{Sin.} 3x \text{Sin.} 3y}{3} - \dots$$

$$= \frac{1}{2} \text{Log.} \{ 2 \text{Cos.} \frac{x-y}{2} - \text{Log.} 2 \text{Cos.} \frac{x+y}{2} \};$$

ou encore

$$\frac{\text{Sin.} x \text{Sin.} y}{1} - \frac{\text{Sin.} 2x \text{Sin.} 2y}{2} + \frac{\text{Sin.} 3x \text{Sin.} 3y}{3} - \dots = \frac{1}{2} \text{Log.} \frac{\text{Cos.} \frac{x-y}{2}}{\text{Cos.} \frac{x+y}{2}}.$$

Or,

$$\frac{\text{Cos.} \frac{x-y}{2}}{\text{Cos.} \frac{x+y}{2}} = \frac{2 \text{Cos.} \frac{x-y}{2} \text{Cos.} \frac{x+y}{2}}{2 \text{Cos.} \frac{x+y}{2}} = \frac{\text{Cos.} x + \text{Cos.} y}{1 + \text{Cos.}(x+y)};$$

donc enfin

$$\frac{\text{Sin.} x \text{Sin.} y}{1} - \frac{2 \text{Sin.} 2x \text{Sin.} 2y}{2} + \frac{\text{Sin.} 3x \text{Sin.} 3y}{3} - \dots = \frac{1}{2} \text{Log.} \frac{\text{Cos.} x + \text{Cos.} y}{1 + \text{Cos.}(x+y)}.$$

Si, dans ce résultat et dans le précédent, on fait $y=x$, ils deviendront

$$\frac{\text{Cos.}^2 x}{1} - \frac{\text{Cos.}^2 2x}{2} + \frac{\text{Cos.}^2 3x}{3} - \frac{\text{Cos.}^2 4x}{4} + \dots = \frac{1}{2} \text{Log.} 4 \text{Cos.} x;$$

$$\frac{\text{Sin.}^2 x}{1} - \frac{\text{Sin.}^2 2x}{2} + \frac{\text{Cos.}^2 3x}{3} - \frac{\text{Cos.}^2 4x}{4} + \dots = \frac{1}{2} \text{Log.} \frac{2 \text{Cos.} x}{1 + \text{Cos.} 2x}.$$

En résumé, si nous faisons abstraction des divers résultats particuliers auxquels nous sommes parvenus, et qui n'avaient pas été demandés, nous aurons

$$1^{\circ}. \frac{1}{2} \text{Arc}(\text{Tang.} = \frac{2a \text{Cos.} y}{1-a^2}) = \frac{a \text{Cos.} x}{1} - \frac{a^3 \text{Cos.} 3x}{3} + \frac{a^5 \text{Cos.} 5x}{5} - \dots$$

$$2^{\circ}. \frac{1}{2} \text{Arc}(\text{Sin.} = 2 \text{Sin.} x \text{Cos.} x - 1) = \text{Cos.} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{Cos.} 3x}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\text{Cos.} 5x}{5} + \dots$$

$$3^{\circ}. \frac{1}{2} \text{Log.} 2(\text{Cos.} x + \text{Cos.} y) = \frac{\text{Cos.} x \text{Cos.} y}{1} - \frac{\text{Cos.} 2x \text{Cos.} 2y}{2} + \frac{\text{Cos.} 3x \text{Cos.} 3y}{3} - \dots$$

résultats qu'au surplus on peut présentement vérifier d'un grand nombre de manières diverses.
