QUERRET

Questions résolues. Note sur les deux problèmes traités aux pages 145 et 289 du présent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 13 (1822-1823), p. 389-392
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1822-1823__13__389_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Note sur les deux problèmes traités aux pages 145 *et* 289 *du présent volume* ;

Par M. QUERRET, chef d'institution, à St-Malo.

LE problème de M. Dubois-Aimé, dont M. de St-Laurent a rectifié la solution à la page 145 du présent volume, avait déjà été l'objet des recherches de plusieurs illustres géomètres. On trouve dans les *Mémoires de l'académie des sciences* de Paris, pour 1732, sous la date du 16 janvier, un mémoire de Bouguer sur ce sujet. Ce géomètre donne à la courbe dont il s'agit le nom de *Ligne de poursuite* ; parce que c'est la courbe que décrirait un vaisseau qui en poursuivrait un autre en mouvement, en se dirigeant constamment sur lui. Prenant pour axe des x celui qu'a choisi M. de St-Laurent pour axe des y, et *vice versâ*, nommant n la vitesse constante du vaisseau poursuivant, et m celle du vaisseau poursuivi, il parvient à l'équation

$$x=\frac{n}{2(2+m)}a^{-\frac{m}{n}}y^{\frac{n+m}{n}}-\frac{n}{2(n-m)}a^{+\frac{m}{n}}y^{\frac{n-m}{n}}+\frac{mn}{n^2-m^2}a\,;$$

a représentant la même ligne que dans le mémoire de M. de St-Laurent.

Si, dans l'équation de Bouguer on met x pour y et y pour x; et qu'après avoir changé m en n^2 on multiplie par $\frac{2}{a}$, il viendra

$$2\left(\frac{y}{a}\right)=\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}+\frac{1}{n-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}-\frac{2n}{n^2-1},$$

ou bien

$$2\left(\frac{y}{a}\right)=\frac{1}{n+1}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}-1\right\}+\frac{1}{n-1}\left\{\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}-1\right\};$$

qui est exactement l'équation (15) de M. de St-Laurent (*).

Mais la valeur de s donnée par l'équation (10), laquelle est en général susceptible d'un double signe, nous paraît devoir être prise avec un signe différent de celui qui a été admis par M. de St-Laurent, pour exprimer réellement la route parcourue par le chien depuis son départ; il faut, en effet, que s croisse *positivement* à mesure que x devient plus petit, ce qui exige qu'on écrive

$$2\left(\frac{s}{a}\right)=\frac{1}{n-1}\left\{\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}-1\right\}-\frac{1}{n+1}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}-1\right\}.$$

Maupertuis reprit le même problème quelques jours après Bouguer, et en donna une solution plus courte. Il enseigna de plus le moyen de former l'équation différentielle du second ordre de la courbe cherchée, lorsque le vaisseau poursuivi, au lieu de dé-

---

(*) Nous avons négligé de noter, au commencement du mémoire de M. de St-Laurent, que l'équation de M. Dubois-Aymé est à tel point défectueuse qu'elle ne saurait être rendue homogène par aucune détermination de a.

J. D. G.

crire une ligne droite, décrit une courbe quelconque, toujours d'un mouvement uniforme. Le mémoire de Bouguer renferme quelques applications, et fait connaître, en outre, diverses propriétés curieuses de la courbe dont il s'agit. L'auteur prouve, *à priori*, que la courbe est rectifiable, ce qui résulte également de l'analise de M. de St-Laurent.

Quant au problème traité à la page 289, il se ramène très-facilement à celui-là, au moyen des considérations suivantes.

Le plan d'une courbe rapportée à deux axes rectangulaires étant supposé glisser, d'un mouvement rectiligne et uniforme, sur un autre plan fixe, sur lequel deux axes rectangulaires sont aussi tracés, de manière que les axes des y coïncident constamment, et un point étant supposé se mouvoir d'un mouvement uniforme sur la courbe mobile; si, pour une même abscisse x, on représente par y l'ordonnée du point mobile rapporté aux axes fixes, par y' l'ordonnée du même point rapporté aux axes mobiles, par k le nombre de fois que la vitesse du plan contient celle du point mobile, et par s l'arc de courbe parcouru par ce point depuis l'origine des temps, la courbe qu'il aura tracé sur le plan fixe aura pour équation

$$y-ks=y' \qquad \text{ou} \qquad y=y'+ks.$$

En effet, pendant que le point mobile aura parcouru l'arc s sur sa courbe, l'axe des x mobile se sera avancé parallèlement à lui-même d'une quantité ks, d'où il résulte qu'il faudra diminuer l'ordonnée y de cette même quantité pour retrouver l'autre ordonnée y'.

Il suit de là que, toutes les fois que l'arc s sera exprimable en fonction de x seulement, en substituant sa valeur ainsi que celle de y', dans l'équation ci-dessus, on aura immédiatement l'ordonnée de la courbe cherchée. Dans l'hypothèse contraire, on pourra, tout au moins, parvenir à l'équation différentielle de cette courbe.

L'application de cette remarque au problème dont il s'agit est manifeste. Soient, comme on l'a supposé, k la vitesse du chien, g celle de son maître, et h celle du courant; et soit posé, pour abréger, $g-h=nk$. Au lieu de supposer l'eau courante, on pourra la supposer stagnante, en admettant que le canal et le terrain sur lequel il est situé sont transportés dans le sens de sa direction avec la vitesse h, sur un plan fixe, et que le maître marche sur ce terrain mouvant avec une vitesse $g-h$ ou nk; de sorte que le rapport de la vitesse du maître à celle de son chien sera encore n, comme dans le premier problème, auquel se rapporteront aussi les circonstances du mouvement du chien sur le plan mobile, puisque ce mouvement aura lieu dans une eau stagnante par rapport à ce plan. Nous aurons donc ici $r=\frac{h}{k}$; et en outre nous avons trouvé ci-dessus, pour le premier problème,

$$y'=\frac{a}{2}\left\{\frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}-1\right]+\frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}-1\right]\right\},$$

$$s=\frac{a}{2}\left\{\frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}-1\right]-\frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}-1\right]\right\};$$

Substituant donc ces valeurs dans l'équation

$$y=y'+\frac{h}{k}s \quad \text{ou} \quad ky=ky'+hs\ ;$$

il viendra

$$\frac{2ky}{a}=\frac{k-h}{n+1}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}-1\right\}+\frac{k+h}{n-1}\left\{\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}-1\right\},$$

qui est exactement l'équation (19) du second problème (*).

(*) Nous recevons à l'instant un travail de M. Tédenat, recteur honoraire, correspondant de l'académie royale des sciences, dont l'objet est également