ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

L. C. BOUVIER

Géométrie élémentaire. Démonstration élémentaire de la propriété de minimum dont jouissent le périmètre du carré et la surface du cube, parmi les parallélogrammes rectangles de même surface, et les parallélipipèdes rectangles de même volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), p. 115-118
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__115_0>

GEOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration élémentaire de la propriété de minimum *dont jouissent le périmètre du carré et la surface du cube, parmi les parallélogrammes rectangles de même surface, et les parallélipipèdes rectangles de même volume ;*

Par M. L. C. Bouvier, ex-officier du génie, ancien élève de l'école polytechnique.

I. Soit t le côté d'un carré donné, sa surface sera t^2 et son périmètre $4t$.

Si l'on nie que ce périmètre soit *minimum* entre ceux des rectangles de même surface, il faudra admettre qu'il existe un rectangle équivalent au carré donné ayant un périmètre moindre que le sien. Soient x, y les deux dimensions de ce rectangle, sa surface sera xy et son périmètre $2(x+y)$; et l'on devra avoir

$$xy=t^2\,, \qquad 2(x+y)<4t\,.$$

En vertu de $xy=t^2$, si x et y sont inégaux, ils ne pourront être ni tous deux plus grands ni tous deux plus petits que t ; d'un autre côté, l'un d'eux ne pourra être égal à t, puisqu'alors l'autre devrait l'être aussi ; il faudra donc que l'un soit plus grand et l'autre plus petit que t. Si donc on suppose $x>y$, on devra avoir $x>t$, et l'on pourra poser $x=pt$, p étant >1.

Cette valeur de x, substituée dans l'équation, donnera $y=\frac{t}{p}$; substituant ensuite les valeurs de x et y dans l'inégalité, elle deviendra, en divisant par $2t$, chassant le dénominateur et transposant,

$$p^2-2p+1<0\,, \qquad \text{ou} \qquad (p-1)^2<0\,;$$

conclusion absurde qui prouve la vérité de la proposition que nous voulions démontrer.

Il est facile d'en conclure qu'à l'inverse de tous les rectangles de même périmètre le carré a le *maximum* de surface ; car, en admettant que la surface d'un certain rectangle R pût excéder celle d'un carré C de même périmètre ; on n'aurait qu'à construire un rectangle R′ semblable à R et équivalent à C ; et ce rectangle se trouverait d'un moindre périmètre que C, contrairement à ce qui vient d'être démontré.

II. Soit t l'arète d'un cube donné ; son volume sera t^3 et sa surface $6t^2$.

Si l'on nie que cette surface soit *minimum* parmi celles des parallélipipèdes rectangles équivalens au cube dont il s'agit, il faudra admettre qu'il existe un parallélipipède rectangle, équivalant au cube donné, ayant une surface moindre que la sienne. Soient x, y, z les trois dimensions de ce parallélipipède ; son volume sera xyz et sa surface $2(xy+xz+yz)$; et l'on devra avoir

$$xyz=t^3\,, \qquad 2(xy+xz+yz)<6t^2\,.$$

En vertu de $xyz=t^3$, si, comme on le suppose, les trois quantités x, y, z ne sont pas égales entre elles et conséquemment à t, il y en aura au moins une plus grande et une autre plus petite que t. En effet, on n'en saurait d'abord supposer deux égales à t, puisqu'alors la troisième devrait l'être aussi ; et si l'on en supposait une seule égale à t, on retomberait dans le cas discuté ci-dessus, et conséquemment des deux restantes, l'une devrait être plus grande et l'autre plus petite que t. On voit d'ailleurs que l'on ne saurait les supposer ni toutes trois plus grandes ni toutes trois plus petites que t. Enfin, si l'on en supposait deux plus grandes que t, la troisième, par compensation, devrait être plus petite; et si, au contraire, on en supposait deux plus petites, la troisième, par compensation, devrait être plus grande.

Soient donc

$$x>t\ ,\qquad y<t\ ;$$

nous pourrons poser

$$x=pt\ ,\qquad y=\frac{t}{q}\ ,$$

p et q étant des nombres plus grands que l'unité.

Ces valeurs, substituées dans l'équation, donneront $z=\frac{qt}{p}$; substituant ensuite les valeurs de x, y, z dans l'inégalité, elle deviendra, en divisant par $2t^2$,

$$\frac{p}{q}+q+\frac{1}{p}<3\ ,$$

ou, en chassant les dénominateurs et transposant,

$$p^2+pq^2+q-3pq<0\ ,$$

ou encore

$$(p-q)^2+q(p-1)(q-1)<0\ ;$$

conclusion absurde, qui prouve la vérité de la proposition que nous avons annoncée.

Il est facile d'en conclure qu'à l'inverse de tous les parallélipipèdes rectangles de même surface le cube a le *minimum* de volume; car, en admettant que le volume d'un certain parallélipipède rectangle P pût excéder celui d'un cube C de même surface ; on n'aurait qu'à construire un parallélipipède rectangle P', semblable à P et équivalent à C ; et ce parallélipipède se trouverait d'une moindre surface que C, contrairement à ce qui vient d'être démontré.

M. Lhuilier, dans son ouvrage *De relatione mutuâ capacitatis*, etc., a démontré le même théorème, tant géométriquement qu'algébriquement ; mais, comme il le déduit d'un autre plus général, sa démonstration est naturellement beaucoup plus longue et plus compliquée ; aussi n'a-t-elle aucun rapport avec celle-ci.