Autre solution du même problème et de son analogue pour les surfaces du second ordre

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), p. 199-204
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__199_1>

Autre solution du même problème et de son analogue pour les surfaces du second ordre ;

Par un ABONNÉ.

SOIT une ligne quelconque du second ordre ayant un centre, rapportée à ses diamètres principaux ; et soit alors son équation

$$ax^2+by^2=c\,. \qquad (1)$$

Par son centre O, soient menées arbitrairement deux droites perpendiculaires entre elles, la rencontrant en A et B; et cherchons l'expression de la perpendiculaire p abaissée du centre O sur la corde AB.

Pour cela, soient pris respectivement OA et OB pour axes des t et des u; pour passer au nouveau système de coordonnées; il faudra faire

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha t+\beta u\,, \\ y&=\alpha' t+\beta' u\,; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ce qui donnera, en substituant,

$$a(\alpha t+\beta u)^2+b(\alpha' t+\beta' u)^2=c\,. \qquad (3)$$

Si, dans cette équation, on fait tour à tour chaque coordonnée égale à zéro, et qu'on tire ensuite la valeur de l'autre, on obtiendra ainsi OA et OB, qu'on trouvera être

$$\mathrm{OA}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a\alpha^2+b\alpha'^2}}\,, \qquad \mathrm{OB}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a\beta^2+b\beta'^2}}\,; \qquad (4)$$

Cela posé, l'aire du triangle rectangle ACB ayant également pour expression $\frac{1}{2}$OA.OB et $\frac{1}{2}p$.AB, on doit avoir

$$p=\frac{\mathrm{OA.OB}}{\mathrm{AB}}\,,$$

ou bien

$$p=\frac{\mathrm{OA.OB}}{\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}^2}+\frac{1}{\overline{\mathrm{OB}}^2}}}\,;$$

introduisant, dans cette expression, pour OA et OB leurs valeurs (4), elle deviendra

$$p=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a(\alpha^2+\beta^2)+b(\alpha'^2+\beta'^2)}}\,;$$

mais on sait que

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^2+\beta^2=1\,,\\ \alpha'^2+\beta'^2=1\,;\end{array}\right\}\quad(5)$$

donc cette expression se réduit simplement à

$$p=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+b}}\,,$$

quantité constante ; de sorte qu'on a ce théorème :

THÉORÈME I. Les cordes d'une ligne du second ordre hypothénuses d'une suite de triangles rectangles, ayant pour sommet commun de l'angle droit le centre de la courbe, sont toutes tangentes à un même cercle.

On peut toujours supposer c positif, et conséquemment le numérateur réel ; le cercle ne sera donc réel qu'autant que $a+b$ sera une quantité positive, circonstance qui aura toujours lieu dans l'ellipse.

Soit, en second lieu, une surface quelconque du second ordre ayant un centre, rapportée à ses diamètres principaux ; et soit alors son équation

$$ax^2+by^2+cz^2=d\,. \qquad (1)$$

Par son centre O, soient menées arbitrairement trois droites perpendiculaires entre elles, la rencontrant en A, B, C ; et cherchons l'expression de la perpendiculaire p abaissée de son centre O sur le plan du triangle ABC.

Pour cela, soient pris respectivement OA, OB, OC pour axes des t, u, v; pour passer au nouveau système de coordonnées, il faudra faire

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha t+\beta u+\gamma v\,, \\ y=\alpha' t+\beta' u+\gamma' v\,, \\ z=\alpha'' t+\beta'' u+\gamma'' v\,; \end{array}\right\} \quad (2)$$

ce qui donnera, en substituant,

$$a(\alpha t+\beta u+\gamma v)^2+b(\alpha' t+\beta' u+\gamma' v)^2+c(\alpha'' t+\beta'' u+\gamma'' v)^2=d\,. \quad (3)$$

Si, dans cette équation, on fait tour-à-tour deux des coordonnées égales à zéro, et qu'on en tire ensuite la valeur de la troisième, on obtiendra ainsi les valeurs de OA, OB, OC, qu'on trouvera être

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{OA}=\dfrac{\sqrt{d}}{\sqrt{a\alpha^2+b\alpha'^2+c\alpha''^2}}\,, \\ \mathrm{OB}=\dfrac{\sqrt{d}}{\sqrt{a\beta^2+b\beta'^2+c\beta''^2}}\,, \\ \mathrm{OC}=\dfrac{\sqrt{d}}{\sqrt{a\gamma^2+b\gamma'^2+c\gamma''^2}}\,. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Cela posé, considérons le tétraèdre rectangle dont le sommet est en O et dont ABC est la face hypothénusale. Les aires des faces rectangulaires de ce tétraèdre sont

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{OB.OC}\,, \qquad \tfrac{1}{2}\mathrm{OC.OA}\,, \qquad \tfrac{1}{2}\mathrm{OA.OB}\,;$$

on sait d'ailleurs que la somme de leurs quarrés doit être égale au quarré de l'aire de la face hypothénusale; d'où il suit qu'on doit avoir

$$ABC=\tfrac{1}{2}\sqrt{\overline{OB}^2.\overline{OC}^2+\overline{OC}^2.\overline{OA}^2+\overline{OA}^2.\overline{OB}^2}\;.$$

Présentement, le volume du tétraèdre peut être indistinctement exprimé par $\tfrac{1}{3}p.ABC$ ou par $\tfrac{1}{6}OA.OB.OC$; d'où il suit qu'on doit avoir

$$p=\frac{OA.OB.OC}{2ABC}\;.$$

c'est-à-dire en substituant,

$$p=\frac{OA.OB.OC}{\sqrt{\overline{OB}^2.\overline{OC}^2+\overline{OC}^2.\overline{OA}^2+\overline{OA}^2.\overline{OB}^2}}\;,$$

ou encore

$$p=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\overline{OA}^2}+\dfrac{1}{\overline{OB}^2}+\dfrac{1}{\overline{OC}^2}}}\;;$$

ce qui donnera, en introduisant pour OA, OB, OC, les valeurs (4),

$$p=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{a(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+b(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)+c(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2)}}\;.$$

Mais on a, dans le cas présent,

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\;,\\ \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1\;,\\ \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1\;;\end{array}\right\}\;(5)$$

donc cette expression se réduit simplement à

$$p=\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{a+b+c}}\;,$$

quantité constante; de sorte qu'on a ce théorème:

THÉORÈME II. Les triangles inscrits à une surface du second ordre, faces hypothénusales d'une suite de tétraèdres rectangles, ayant pour sommet commun de l'angle droit trièdre le centre de cette surface, sont tous tangens à une même sphère.

On peut toujours supposer d positif, et conséquemment le numérateur réel ; la sphère ne sera donc réelle qu'autant que $a+b+c$ sera une quantité positive ; ce qui, en particulier, aura toujours lieu pour l'ellipsoïde.