G. C. GERONO

Géométrie élémentaire. Note sur la détermination de l'aire d'un triangle rectiligne en fonction de ses trois côtés

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), p. 305-307
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__305_0>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Note sur la détermination de l'aire d'un triangle rectiligne en fonction de ses trois côtés;

Par M. G. C. GERONO.

SOIENT A, B, C les trois sommets d'un triangle rectiligne, et a, b, c les côtés respectivement opposés. Posons

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c)=s\ ;$$

d'où

$$\tfrac{1}{2}(b+c-a)=s-a\ ,$$

Professeur de navigation dans l'un de nos ports ; et il languit, à l'âge de plus de 50 ans et chargé de famille, dans un emploi fort obscur et fort peu lucratif; ce qui prouverait, si toutefois une telle assertion avait besoin de nouvelle preuve, qu'il faut souvent quelque chose de plus que du mérite pour percer dans le monde. Nous nous estimerions extrêmement heureux si, en faisant connaître, dans notre recueil, les titres de ce savant modeste, nous parvenions à attirer sur lui les regards et la bienveillance des hommes puissans qui sont en situation d'influer sur son sort.

$$\tfrac{1}{2}(c+a-b)=s-b\,,$$

$$\tfrac{1}{2}(a+b-c)=s-c\,.$$

Soit inscrit au triangle proposé un cercle dont O soit le centre ; et soient A′, B′, C′ respectivement les points de contact de ce cercle avec les côtés a, b, c ; il est connu, et il est d'ailleurs facile de démontrer qu'on aura

$$AB'=s-a\,,\qquad BC'=s-b\,,\qquad CA'=s-c\,.$$

En conséquence, en désignant par r le rayon du cercle, on aura

$$\mathrm{Tang.}AOB'=\frac{s-a}{r}\,,\quad \mathrm{Tang.}BOC'=\frac{s-b}{r}\,,\quad \mathrm{Tang.}COA'=\frac{s-c}{r}\,;$$

mais, parce que ces angles sont les moitiés respectives des angles B′OC′, C′OA′, A′OB′, dont la somme est quatre angles droits, leur somme doit valoir deux angles droits, et conséquemment on doit avoir, par un théorème connu et d'ailleurs facile à démontrer,

$$\mathrm{Tang.}AOB'+\mathrm{Tang.}BOC'+\mathrm{Tang.}COA'=\mathrm{Tang.}AOB'.\mathrm{Tang.}BOC'\mathrm{Tang.}COA'\,;$$

c'est-à-dire, en substituant,

$$\frac{s-a}{r}+\frac{s-b}{r}+\frac{s-c}{r}=\frac{s-a}{r}.\frac{s-b}{r},\frac{s-c}{r}\,,$$

d'où

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\ ;$$

mais, en désignant par T l'aire du triangle, on a

$$T=rs\ ;$$

donc, en substituant,

$$T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ ;$$

Agréez, etc.

Du Château des Tuileries, le 18 janvier 1825.