ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

MAYOR

# Géométrie transcendante. Constructions approchées du problème de la duplication du cube

*Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome 15 (1824-1825), p. 90-92
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1824-1825__15__90_0>

# GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

## *Constructions approchées du problème de la duplication du cube ;*

Par M. Mayor, de Pétersbourg.

Communiquée au Rédacteur des *Annales* par M. Bouvier.

Les deux constructions du problème de la duplication du cube que j'ai l'honneur de vous transmettre font le sujet d'un opuscule que le hasard a fait tomber entre mes mains, il y a environ un an. L'auteur, qui apparemment fait de la géométrie expérimentale, les donne comme éxactes. Bien certain à l'avance qu'elles ne pouvaient l'être, j'ai voulu voir au moins à quel point elles étaient approchées, et j'ai trouvé qu'elles donnaient, en proportion de leur simplicité, une approximation assez satisfaisante pour mériter d'être connues.

### *Première construction.*

Soit $AB=a$ (fig. 9) le côté du cube donné, et soit $x$ le côté du cube double. Sur $EB=3AB$ comme diamètre, soit décrit une circonférence. Soit mené le diamètre $FG$, perpendiculaire au premier. Par son extrémité $G$ et par le point $A$, soit menée une corde se terminant en $H$; on aura sensiblement $x=AH$.

En effet, on déduit aisément de cette construction $x = a\,\frac{2\sqrt{10}}{5}$, et sa véritable valeur devrait être $x = a\sqrt[3]{2}$; or, on a

$$\frac{2\sqrt{10}}{5} < 1{,}26492\ ,$$

$$\sqrt[3]{2} > 1{,}25992\ ,$$

donc

$$\frac{2\sqrt{10}}{5} - \sqrt[3]{2} < 0{,}00500\ ,$$

c'est-à-dire que AH ne diffère pas en plus de la véritable longueur du côté du cube double de la moitié d'un centième, de AB.

*Deuxième construction.*

Soit encore $AB = a$ (fig. 10) le côté du cube donné et $x$ le côté du cube double. Sur $AC = 2AB$ décrivez un cercle. Portez le rayon de C en D et de D en E. Tirez la corde CE, sur laquelle du point D vous abaisserez la perpendiculaire DF. Portez CF sur CA de C en G. Tirez une corde de C au milieu K de DE et élevez au point G à AC une perpendiculaire rencontrant cette corde en L. Menez enfin AL et BK se coupant en H; et vous aurez sensiblement $x = AH$.

En effet, on déduit aisément de cette construction

$$x = a\,.\,\frac{\sqrt{226 + 24\sqrt{3}}}{13}\ ,$$

or, on a

$$\sqrt[3]{2} < 1{,}25993\ ,$$

$$x > 1{,}25828\ ,$$

donc

$$\sqrt[3]{2}-x<0{,}00165\ ;$$

d'où l'on voit que la différence en moins de AH avec la véritable longueur du cube double est environ six fois plus petite que la centième partie de AB.

Si au triple de la dernière valeur approchée de AH, savoir, 3,77484, on ajoute la première 1,26492, et qu'on prenne le quart de la somme 5,03976, on aura 1,25994 qui ne diffère guère que d'un cinquante millième de la véritable longueur du côté du cube double de celui dont le côté est AB (*).

---

(*) Ceux de nos lecteurs pour qui ces constructions approchées, dont la première idée paraît due à Viète, peuvent offrir quelque intérêt, trouveront, à la page 245 du VIII.e volume des *Annales*, quelques rectifications approchées de la circonférence ; ils trouveront aussi, à la page 200 du X.e volume, une construction approchée du problème de la trisection de l'angle, et à la page 242 du même volume, une construction approchée du problème de la duplication du cube.

La recherche de ces sortes de constructions pourrait, au surplus, être assujettie à des procédés généraux. On sait, en effet, que toute la difficulté des problèmes qui dépendent d'une géométrie élevée tient à ce que les formules qui donnent les valeurs des inconnues renferment des radicaux de degrés plus ou moins élevés, tandis que nous ne savons construire, avec la règle et le compas, que les radicaux du second degré. Tout se réduirait donc à savoir approximativement substituer à ces radicaux des radicaux du second degré, et avec quel degré d'approximation on voudrait. Or, c'est là une chose toujours possible, comme on va le voir.

Soit la formule

$$x=\sqrt[m]{a}=(a)^{\frac{1}{m}}=(a)^{\frac{p}{mp}}\ ,$$

dans laquelle nous supposons $m$ un nombre premier impair et où $p$ peut être un nombre quelconque. Si nous supposons que ce nombre $p$ soit très-grand, nous pourrons poser approximativement