AMPÈRE

Analise transcendante. Exposition des principes du calcul des variations

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 133-167
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__133_0>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Exposition des principes du calcul des variations (*) ;

Par M. Ampère, de l'Académie royale des sciences de Paris, de celles d'Edimbourg, de Cambridge, de Genève, etc., professeur au Collége de France et à l'École polytechnique.

§. I. *Notions Générales.*

I. Dans le calcul différentiel proprement dit, on ne fait varier, dans les fonctions qu'on y considère, que les seules variables x, y, z ; c'est-à-dire, les coordonnées de certaines courbes ou surfaces déterminées, ce qui répond à des points déterminés de ces mêmes surfaces, pour lesquels on enseigne ce que signifient les différentielles de ces coordonnées ; et on y enseigne également à déterminer les différentielles de toutes sortes de fonctions.

Mais, dans une fonction telle, par exemple, que

$$y=\mathrm{f}(x\,,\ a\,,\ b\,,\ c\,,\ \ldots.)\ ;$$

(*) Cette exposition a été rédigée par l'auteur, pour son cours d'analise à l'Ecole polytechnique. On peut aussi consulter, sur le même sujet, un mémoire inséré au commencement du XIII.e volume du présent recueil.

J. D. G.

rien n'empêche de faire varier les paramètres a, b, c, ... ; et dès lors on sort de la courbe où l'on était d'abord, pour passer à une autre courbe voisine de celle-là. On peut obtenir ainsi une infinité de nouvelles courbes, suivant les valeurs diverses qu'on attribuera à a, b, c, ... On rencontre déjà des exemples de pareils changemens dans la recherche des solutions particulières des équations différentielles, où l'on différentie les équations des courbes par rapport à leurs paramètres, afin que les nouveaux coefficiens différentiels ainsi obtenus donnent, en les égalant à zéro, les solutions particulières demandées.

Si on ne fait varier que les paramètres, dans une courbe

$$y = \mathrm{f}(x, a, b, c, \ldots\ldots);$$

cette courbe se trouvera transportée, suivant ses ordonnées, de AB en A'B' (fig. 1). On peut alors chercher l'augmentation de l'ordonnée ou de y, qui est MM'. On peut aussi demander l'augmentation de dy qui de TQ est devenue T'Q', l'augmentation du rayon de courbure, etc. On pourrait bien se contenter, pour les questions de géometrie, de faire varier les courbes de la sorte, en suivant les ordonnées ; mais ce point de vue n'est pas assez général pour les questions de mécanique. On suppose alors que tous les points d'une courbe se transportent sur une autre courbe, en décrivant eux-mêmes des courbes intermédiaires MM, mm' (fig 2). Alors, en même temps qu'on fait varier les paramètres, on fait aussi varier l'abcisse. Ce sont les accroissemens que l'on donne, soit aux paramètres soit aux variables dépendantes, que l'on appelle leurs *variations*, et que l'on désigne par la caractéristique δ. Par analogie avec les dénominations admises dans le calcul différentiel, nous appellerons variation de la fonction la quantité à laquelle se réduit son accroissement total, lorsqu'on en supprime les termes affectés des puissances supérieures de δx, δa, δb, ... D'après cette définition, u étant une fonction quelconque de x, a, b, ... de même qu'on a

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a}\,\mathrm{d}a + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}b}\,\mathrm{d}b + \ldots,$$

on aura aussi

$$\delta u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\delta x + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a}\,\delta a + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}b}\,\delta b + \ldots .$$

Il est inutile de mettre $\frac{\delta u}{\delta x}$, $\frac{\delta u}{\delta a}$, ... au lieu de $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, ...; parce que ces derniers rapports, étant indépendans des accroissemens donnés à x, a, ..., restent les mêmes, quels que soient ces accroissemens.

La courbe A′B′, sur laquelle on transporte la courbe AB, n'a pas besoin d'être de même forme que celle-ci, pour qu'on puisse prendre sur elle les variations comme nous venons de le dire. En effet, on peut développer en séries les ordonnées de ces deux courbes, comme on le voit ici

pour la courbe AB, $\quad y = b + \frac{b'}{1}(x-\alpha) + \frac{b''}{1.2}(x-\alpha)^2 + \ldots,$

pour la courbe A′B′, $\quad y' = B + \frac{B'}{1}(x-\alpha) + \frac{B''}{1.2}(x-\alpha)^2 + \ldots .$

Elles sont ainsi présentées sous la même forme, ayant un nombre infini de paramètres b, b', b'', ..., B, B', B'', ... Or, ce que nous avons dit tout à l'heure, étant tout-à-fait indépendant du nombre des paramètres, rien n'empêche de supposer $B = b + \delta b$, $B' = b' + \delta b'$, $B'' = b'' + \delta b''$, ..., et par conséquent de regarder la courbe $A'B'$ comme étant la variation de la première AB (*).

§. II. *Construction des formules.*

Soient $PP' = \delta x$, $Pp = dx$; on aura (fig. 2)

$$d\delta x = P'p' - Pp = (pp' + pP') - (PP' + pP') = pp' - PP' ;$$

$$\delta dx = pp' - PP'$$

d'où l'on conclura

$$d\delta x = \delta dx ;$$

c'est-à-dire que *la différentielle de la variation est égale à la variation de la différentielle.*

Le même théorème a lieu pour les fonctions. En effet, soit

$$y = f(x, a, b, c, \ldots\ldots) ;$$

qui donne

$$dy = \frac{dy}{dx} dx ;$$

Si nous appliquons à cette équation une variation, en nous rappe-

(*) Il est bien essentiel de remarquer que les courbes pour lesquelles il s'agit de prouver que l'une peut être considérée comme la variation de l'autre, sont des courbes individuelles, c'est-à-dire, à paramètres invariables ou numériques. Il est bien clair alors que les coefficiens du développement, par la suite de Maclaurin, doivent être regardés comme indépendans les uns des autres, puisque ces $b, b', b'', \ldots\ldots B, B', B'', \ldots\ldots$ sont numériques. Si l'on pouvait donner diverses valeurs aux paramètres des deux courbes que nous considérons, les coefficiens du développement dépendraient les uns des autres, et on ne pourrait plus regarder les coefficiens du second développement comme résultant de la variation de ceux du premier.

lant que, d'après la définition de la variation, semblable à celle de la différentielle,

$$\delta . uv = v\delta u + u\delta v ,$$

nous aurons

$$\delta \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\delta \mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\delta\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} ,$$

c'est-à-dire,

$$\delta \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\delta \mathrm{d}x + \mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\,\delta x + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x\mathrm{d}a}\,\delta a + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x\mathrm{d}b}\,\delta b + \ldots\right).$$

Mais, d'un autre côté

$$\delta y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\delta x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a}\,\delta a + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}b}\,\delta b + \ldots$$

En différentiant cette dernière équation et observant que, puisque la différentielle se prend le long de la courbe, en ne faisant varier que x et y, il s'ensuit que δa, δb, ... doivent ici être considérées comme des constantes, on aura

$$\mathrm{d}\delta x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}\delta x + \mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}a\mathrm{d}x}\,\delta a + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}b\mathrm{d}x}\,\delta b + \ldots\right).$$

En comparant entre eux les développemens de $\delta\mathrm{d}y$ et de $\mathrm{d}\delta y$, en observant que, d'après ce qui a été prouvé ci-dessus,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\delta \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}\delta x$$

et que d'ailleurs, parce que l'ordre des différentiations est indifférent,

$$\frac{d^2y}{dx\,da}=\frac{d^2y}{da\,dx}\,,\quad \frac{d^2y}{dx\,db}=\frac{d^2y}{db\,dx}\,,\ \ldots.$$

on verra que ces deux développemens sont égaux, et qu'ainsi

$$d\delta y=\delta dy\,.$$

On peut tirer de ceci une conclusion semblable, par rapport au signe d'intégration. Soit, en effet

$$\int v\,dx=u\,,\qquad \text{d'où}\qquad v\,dx=du\,,$$

donc

$$\delta.v\,dx=\delta du=d\delta u\,;$$

d'où, en intégrant,

$$\int\delta.v\,dx=\delta u=\delta\int v\,dx\,.$$

Ainsi, on peut intervertir l'ordre des signes $\int$ et δ.

La courbe AB ayant été transportée sur A′B′ (fig. 3), de manière que les points M et m soient venus en M′ et m'; si nous menons les tangentes MT et MS, aux courbes MB et MM′; il est clair, d'après la définition que nous avons donnée de δy, qui est, du reste,

$$\delta y=\frac{dy}{dx}\delta x+\frac{dy}{da}\delta a+\frac{dy}{db}\delta b+\ldots.\,;$$

il est clair, disons nous, que $\delta y=SQ$; puisque ce doit être la partie de M′Q qui ne contient pas les termes infiniment petits par rapport aux premiers. Mais, si l'on suppose que la position A′B′ soit infiniment voisine de la position AB, on aura, à la limite,

$$\delta y = M'Q \;, \quad \frac{dy}{dx}\delta x \quad \text{ou} \quad p\delta x = HQ \;,$$

donc

$$\delta y - p\delta x = M'Q - HQ = M'H \;:$$

De même

$$\frac{dy}{dx}\delta x = p\delta x = TQ$$

sera, à la limite, la distance des deux courbes. Or, on sait déjà que

$$\delta y - p\delta x = \frac{dy}{da}\,\delta a + \frac{dy}{db}\,\delta b + \ldots.$$

Nous représenterons désormais par ω cette quantité, dépendant seulement de la variation des paramètres; quantité qui, lorsque les variations deviennent infiniment petites, représente, ainsi que nous venons de le voir, la distance entre les deux courbes. Nous aurons donc ainsi

$$\delta y = p\delta x + \omega \;;$$

c'est cet ω qui reste seul, quand on suppose $\delta x = 0$, et que les paramètres seuls varient.

Comme p est une fonction de x, de même qu'on a établi

$$\delta y = p\delta x + \omega \;,$$

on peut poser aussi

$$\delta p = q\delta x + \omega' \;,$$

$$\delta q = r\delta x + \omega'' \;,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Enfin si V est une fonction de x, y, p, q, ...; comme on peut toujours exprimer y, p, q, ... en fonction de x seul, et par conséquent V aussi; on aura de même

$$\delta V = \left[\frac{dV}{dx}\right]\delta x + \Omega\ ;$$

ou $\left[\frac{dV}{dx}\right]$ représente la différentielle de V par rapport aux x non seulement en évidence, mais même contenus dans y, p, q, ...

Il existe des relations remarquables entre ces ω, ω', ω'', ...Ω Soit, en effet, comme ci-dessus

$$y = f(x, a, b, c, \ldots..) \qquad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = p\ ,$$

d'où

$$\delta y = \frac{dy}{dx}\delta x + \frac{dy}{da}\delta a + \frac{dy}{db}\delta b + \ldots.$$

et

$$\omega = \delta y - p\delta x = \frac{dy}{da}\delta a + \frac{dy}{db}\delta b + \ldots.$$

On entend par $\frac{d\omega}{dx}$ la dérivée de cette fonction de x, a, b, ... δa, δb, ... en n'y faisant varier que x, parce que

$$\delta a = a' - a\ , \qquad \delta b = b' - b\ , \ldots..$$

sont constantes, quand a, b, ... a', b', ... le sont. Ainsi

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{d^2y}{da\,dx}\delta a + \frac{d^2y}{db\,dx}\delta b + \ldots.\ .$$

D'un autre côté, $p=\frac{dy}{dx}$ étant une fonction de x, a, b, ...; on a

$$\delta p=\frac{d^2y}{dx^2}\delta x+\frac{d^2y}{dxda}\delta a+\frac{d^2y}{dxdb}\delta b+\ldots\ldots;$$

en se rappelant donc que

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=q\,;$$

et qu'en outre

$$\frac{d^2y}{dxda}=\frac{d^2y}{dadx}\,,\qquad \frac{d^2y}{dxdb}=\frac{d^2y}{dbdx}\,,\ldots$$

on trouve

$$\delta p=q\delta x+\frac{d\varpi}{dx}\,:$$

On trouvera de même

$$\delta q=r\delta x+\frac{d^2\varpi}{dx^2}$$

. . . .

d'où l'on voit que

$$\omega'=\frac{d\varpi}{dx}\,,\qquad \omega''=\frac{d^2\varpi}{dx^2}\,,\ \ldots\ldots \qquad (*)$$

(*) Il est essentiel de remarquer que a', b', ..., étant de nouvelles valeurs de a, b, ..., sont constantes, dans les différentiations relatives à d; et que $\delta a=a'-a$, $\delta b=b'-b$, ...; parce que, dans les différentiations relatives à δ, les quantités a, b, ... sont, dans la fonction $y=f(x, a, b, \ldots)$ et dans ses dérivées, des variables indépendantes, pour lesquelles les différentielles marquées par δa, δb, ... sont la même chose que les différences entières représentées par $a'-a$, $b'-b$, ...

Pour $V=F(x, y, p, q, \ldots)$, où les paramètres a, b, c,... entrent implicitement, on a

$$\delta V=\left[\frac{dV}{dx}\right]\delta x+\left[\frac{dV}{da}\right]\delta a+\left[\frac{dV}{db}\right]\delta b+\ldots ;$$

mais, en désignant par M, N, P, Q, ... les coefficiens différentiels de V par rapport aux x, y, p, q, ... en évidence, on a

$$dV=Mdx+Ndy+Pdp+Qdq+\ldots ;$$

$$\left[\frac{dV}{dx}\right]=M+Np+Pq+Qr+\ldots ;$$

et il en résulte

$$\delta V=M\delta x+N\delta y+P\delta p+Q\delta q+\ldots .$$

Si nous substituons pour δy, δp, δq, ... les valeurs précédemment obtenues, il en résultera

$$\delta V=(M+Np+Pq+Qr+\ldots)\delta x+N\omega+P\frac{d\omega}{dx}+Q\frac{d^2\omega}{dx^2}+\ldots ;$$

valeur qui, comparée à

$$\delta V=\left[\frac{dV}{dx}\right]\delta x+\left[\frac{dV}{da}\right]\delta a+\left[\frac{dV}{db}\right]\delta b+\ldots=\left[\frac{dV}{dx}\right]\delta x+\Omega ,$$

fait voir que

$$\Omega=N\omega+P\frac{d\omega}{dx}+Q\frac{d^2\omega}{dx^2}+\ldots$$

La variation de V, savoir :

$$\delta V=(M+Np+Pq+Qr+\ldots.)\delta x+N\omega+P\frac{d\omega}{dx}+Q\frac{d^2\omega}{dx^2}+\ldots.$$

une fois trouvée, celle de l'intégrale $\int V dx$ est facile à en déduire. On sait en effet que

$$\delta\int V dx=\int\delta(V dx)=\int(\delta V.dx+V\delta dx)=\int(V d\delta x+\delta V.dx),$$

substituant pour δV la valeur que nous venons d'obtenir, on aura

$$\delta\int V dx=\int\left\{V d\delta x+\left[\frac{dV}{dx}\right]dx\delta x+N\omega dx+P\frac{d\omega}{dx}dx+Q\frac{d^2\omega}{d^2x}dx+\ldots\right\}.$$

Or, en premier lieu,

$$\int\left(V d\delta x+\left[\frac{dV}{dx}\right]dx\delta x\right)=V\delta x;$$

on trouve ensuite, en intégrant par parties,

$$\int P\frac{d\omega}{dx}dx=P\omega-\int\frac{dP}{dx}\omega dx,$$

$$\int Q\frac{d^2\omega}{dx^2}dx=Q\frac{d\omega}{dx}-\frac{dQ}{dx}\omega+\int\frac{d^2Q}{dx^2}\omega dx,$$

$$\int R\frac{d^3\omega}{dx^3}dx=R\frac{d^2\omega}{dx^2}-\frac{dR}{dx}\cdot\frac{d\omega}{dx}+\frac{d^2R}{dx^2}\omega-\int\frac{d^3R}{dx^3}\omega dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

réunissant alors tous ces termes, on aura finalement

$$\delta\int V dx=V\delta x+\left(P-\frac{dQ}{dx}+\frac{d^2R}{dx^2}-\ldots.\right)\omega+\left(Q-\frac{dR}{dx}+\ldots.\right)\frac{d\omega}{dx}+\ldots.$$

$$+\int\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\ldots\right)\omega dx\,.$$

§. III. *Application aux questions de* maxima *et* minima.

La dernière formule que nous venons d'obtenir sert à résoudre une des questions les plus importantes du calcul des variations, celle des *maxima* et *minima*. Une partie de cette question ressort du calcul différentiel ; mais cette partie est peu étendue ; elle ne comprend que le cas où l'on demande le *maximum* ou le *minimum* d'une fonction dans laquelle on ne fait varier que les variables courantes x, y, ... Ainsi, ce sera la détermination de l'ordonnée *maximum* ou *minimum* d'une certaine courbe ou d'une certaine surface. Mais si, dans une fonction, on fait varier les constantes ou paramètres, on peut se demander quelles sont les valeurs à leur attribuer, pour que la fonction jouisse d'une certaine propriété à un degré *maximum* ou *minimum*. Cette importante question a beaucoup occupé les géomètres du dernier siècle. Euler l'a résolue, en partie, dans un ouvrage ayant pour titre : *Methodus inveniendi*, etc.

Or, la série de Taylor donne, comme on sait, dans le cas de plusieurs variables, et conséquemment pour

$$u=f(x,\ y,\ p,\ q,\ \ldots\ a,\ b,\ c,\ \ldots),$$

$$f(x+\delta x\,,\ y+\delta y\,,\ p+\delta p\,,\ q+\delta q\,,\ \ldots\ a+\delta a\,,\ b+\delta b\,,\ c+\delta c\,,\ \ldots)$$

$$=u+\frac{du}{dx}\delta x+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{\delta x^2}{1.2}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{du}{dy}\delta y+2\frac{d^2u}{dxdy}\cdot\frac{\delta x\delta y}{1.2}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p}\delta p+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}\cdot\frac{\delta y^2}{1.2}\qquad+\ldots\ldots$$

$$+\ldots\ldots\ldots+2\,\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}p}\cdot\frac{\delta p\,\delta x}{1.2}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a}\delta a+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots$$

$$+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}b}\delta b+2\,\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}a}\cdot\frac{\delta x\,\delta a}{1.2}+\ldots\ldots$$

$$+\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots$$

ou bien

$$U=u+\frac{\delta u}{1}+\frac{\delta^2u}{1.2}+\frac{\delta^3u}{1.2.3}+\ldots.,$$

en désignant par δ^2u la variation de δu, par δ^3u celle de δ^2u, et ainsi de suite.

Or, si U est un *maximum* ou un *minimum*, on sait que δu doit être nul, puisqu'il ne contient que les premières puissances des variations δx, δy, ……, et change conséquemment de signe avec elles. Au contraire δ^2u n'en devra pas changer, puisqu'il contient ces variations à la seconde puissance.

Quand on demande le *maximum* ou le *minimum* d'une fonction, on ne peut souvent exprimer cette fonction que par des intégrales définies, entre les limites où la fonction doit avoir lieu. Il faut alors considérer le développement de la série de Taylor relatif à $\int V\mathrm{d}x$, savoir :

$$\int V\mathrm{d}x+\frac{\delta\int V\mathrm{d}x}{1}+\frac{\delta^2\int V\mathrm{d}x}{1.2}+\frac{\delta^3\int V\mathrm{d}x}{1.2.3}+\ldots$$

S'il y a *maximum* ou *minimum*, il faut que $\delta\int V\mathrm{d}x=0$. Les valeurs de δx, δy, ... qui satisfont à cette condition, devront rendre, en outre, $\delta^2\int V\mathrm{d}x$ *négatif*, dans le cas du *maximum*, et *positif* dans le cas du *minimum*.

Il est encore à remarquer que, si le *maximum* ou le *minimum* doit avoir lieu entre certaines limites, non seulement $\int V\mathrm{d}x$ mais aussi

$$\delta\int V\mathrm{d}x\,,\qquad \delta^2\int V\mathrm{d}x\,,\qquad \delta^3\int V\mathrm{d}x\,,\,\ldots.$$

devront être pris entre ces limites. Or nous avons trouvé ci-dessus

$$\delta\int V\mathrm{d}x=V\delta x+\left(P-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}-\ldots.\right)\omega+\left(Q-\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\ldots.\right)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x}+\ldots..$$

$$+\int\left(N-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}x^2}-\ldots.\right)\omega\mathrm{d}x\;;$$

et si nous nous rappelons que

$$\omega=\delta y-p\delta x\,,\qquad \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x}=\delta p-q\delta x\,,\qquad \frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}x^2}=\delta q-r\delta x\,,\,\ldots...\;;$$

il viendra, en substituant,

$$0=\delta\int V\mathrm{d}x=\left\{V-P\left(P-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}-\ldots\right)-q\left(Q-\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\ldots.\right)-r\left(R-\ldots.\right)-\ldots.\right\}\delta x$$

$$+\left(P-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}-\ldots.\right)\delta y+\left(Q-\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\ldots\right)\delta p+\left(R-\ldots..\right)\delta q+\ldots.$$

$$+\int\left(N-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3}+\ldots..\right)\omega\mathrm{d}x\,,$$

qu'il faudra prendre entre les limites données.

Il se présente ici plusieurs cas à examiner.

1.° Supposons d'abord que l'on donne, pour les deux limites, les valeurs x', x'', y', y'', p', p'', ... de x, y, p, ... Alors, ces valeurs extrêmes étant fixes, leurs variations seront nulles, de sorte que l'équation à laquelle nous venons de parvenir se réduira simplement à

$$\int\left(N-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3}+\ldots\ldots\right)\omega\mathrm{d}x=0\ .$$

Or, on ne peut supposer $\omega=0$, parce que, sous le signe $\int$, c'est le ω courant, et qu'il ne peut être nul qu'aux limites; il faut donc que

$$N-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3}+\ldots=0\ ; \qquad (\mathrm{A})$$

de sorte que cette équation sera l'équation différentielle du *maximum* ou du *minimum* cherché. Mais si

$$V=\mathrm{f}(x\,,\,y\,,\,p\,,\,q\,,\,\ldots\ldots)$$

contient un coefficient différentiel de l'ordre n, il est clair que cette équation sera de l'ordre $2n$, de sorte qu'en l'intégrant elle donnera $2n$ constantes arbitraires; or, comme aux deux limites x', x'', il faut qu'elle reproduise y', y'', p', p'', q', q'', ... (*) en nombre $2n$, on aura $2n$ relations pour déterminer les $2n$ constantes arbitraires introduites par l'intégration; et on le pourra aisément.

(*) On ne donne que $2n-2$ coefficiens différentiels p', p'', q', q'', ..., s'il doit y en avoir n dans l'équation indéfinie; parce que les conditions de $y=y'$ et $y=y''$, lorsque $x=x'$ et $x=x''$ fournissent des relations restantes, le cas où l'on donnerait $2n$ coefficiens différentiels ou plus n'a pas encore été traité.

2.° Supposons qu'on ne donne que les deux limites x', x'', y', y'', sans assigner, pour ces limites, les valeurs de p', p'', q', q'', ... Il faudra toujours, dans le développement de $\delta\int V\mathrm{d}x$, égaler séparément à zéro la partie contenue sous le signe $\int$ et la partie en avant de ce signe. En effet, supposons que nous ayons trouvé la courbe qui satisfait au *maximum* ou au *minimum*, entre les deux points donnés, et prenons, pour les points limites, les valeurs de p', p'', q', q''; ......; cherchons ensuite la courbe qui satisfait au *maximum* ou au *minimum*, pour ces valeurs fixes de p, q, ...; il est manifeste que nous devrons retomber de nouveau sur la courbe dont il s'agit; or, en fixant p', p'', q', q'', ... tout aussi bien que x', x'', y', y'', il faut, comme nous l'avons vu ci-dessus, que l'on ait l'équation (A); donc, cette équation devra encore avoir lieu, lorsqu'on ne fixera pas p', p'', q', q'', ... (*). Comme ces quantités sont indépendantes entre elles, pour que la première partie de $\delta\int V\mathrm{d}x$ soit nulle, il faudra égaler séparément à zéro les coefficiens

$$Q'-\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x'}+\frac{\mathrm{d}^2S'}{\mathrm{d}x'^2}-\ldots\text{ de }\delta p',\qquad Q''-\frac{\mathrm{d}R''}{\mathrm{d}x''}+\frac{\mathrm{d}^2S''}{\mathrm{d}x''^2}-\ldots\text{ de }\delta p'',$$

$$R'-\frac{\mathrm{d}S'}{\mathrm{d}x'}+\ldots\ldots\ldots\text{ de }\delta q',\qquad R''-\frac{\mathrm{d}S''}{\mathrm{d}x''}+\ldots\ldots\ldots\text{ de }\delta q'',$$

$$S'-\ldots\ldots\ldots\ldots\text{ de }\delta r',\qquad S''-\ldots\ldots\ldots\ldots\text{ de }\delta r'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

(*) M. Ampère est ici le premier qui ait expliqué nettement pourquoi, dans tous les cas, la quantité sous le signe $\int$ que contient l'équation commune au *maximum* et au *minimum* doit être séparément nulle. C'est le seul point sur lequel notre mémoire du tom. XIII, déjà cité, nous avait semblé vulnérable.

J. D. G.

Les équations résultantes ne seront qu'au nombre de $2n-2$, parce que le δ du dernier coefficient différentiel manque dans la première partie de $\delta\int V\mathrm{d}x$, comme le fait voir bien évidemment la forme des coefficiens de δp, δq, ... Par exemple, s'il n'y a que cinq coefficiens différentiels p, q, r, s, t, la première partie de $\delta\int V\mathrm{d}x$, finira par $T\delta s$, et ne contiendra point δt. Mais il faut qu'aux deux limites l'intégrale de l'équation donne pour $x=x'$ ou x'', $y=y'$ ou y''. Cela fournira deux nouvelles relations qui, jointes aux $2n-2$ dont il vient d'être question, complèteront le nombre total de celles qui seront nécessaires pour la détermination des $2n$ constantes arbitraires introduites par l'intégration de (A).

Il est presque superflu d'observer que, si quelques-unes seulement des quantités p', p'', q', q'', étaient données, il n'y aurait à égaler à zéro que les coefficiens des $\delta p'$, $\delta p''$, $\delta q'$, $\delta q''$, ... non donnés. Les autres relations nécessaires pour déterminer les $2n$ constantes arbitraires de l'intégrale de (A), seraient fournies par celles des quantités p', p'', q', q'', ... dont les valeurs seraient connues.

Nous remettons à traiter plus tard du cas où les limites ne seraient pas invariablement fixées, mais assujetties seulement à la condition de se trouver sur deux lieux géométriques donnés; et nous nous occuperons, pour le présent, des cas où l'équation (A) est susceptible de quelques simplifications.

§. IV. *Simplifications du procédé général.*

Il est de cas où l'équation

$$N-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}^3R}{\mathrm{d}x^3}+\dots\dots=0 \qquad \text{(A)}$$

peut être simplifiée.

1.° Quand V ne contient pas y, on a $N=0$, et par suite

$$\frac{dP}{dx}-\frac{d^2Q}{dx^2}+\frac{d^3R}{dx^3}-\ldots\ldots=0\ ;$$

ce qui donne, en multipliant par dx et intégrant,

$$P-\frac{dQ}{dx}+\frac{d^2R}{dx^2}-\ldots\ldots=C\ ; \qquad \text{(C)}$$

équation de l'ordre $2n-1$. Si en outre p manquait dans V, l'équation pourrait, par un procédé analogue, être amenée à l'ordre $2n-2$, et ainsi de suite.

2.° Quand V ne contient pas x, et que l'on a conséquemment

$$V=\mathrm{f}(y\,,\,p\,,\,q\,,\,\ldots\ldots)\ ,$$

et par suite

$$\left[\frac{dV}{dx}\right]=Np+Pq+Qr+\ldots\ldots\ .$$

Si nous substituons ici la valeur de N tirée de l'équation (A), qui est

$$N=\frac{dP}{dx}-\frac{d^2Q}{dx^2}+\frac{d^3R}{dx^3}-\ldots\ldots,$$

nous aurons

$$\frac{dV}{dx}=Pq+Qr+Rs+\ldots\ldots+p\frac{dP}{dx}-p\frac{d^2Q}{dx^2}+p\frac{d^3R}{dx^3}-\ldots\ldots\ ;$$

multipliant par dx, et observant que

$$q dx=dp\ , \qquad r dx=dq\ , \qquad s dx=dr\ ,\ \ldots\ldots,$$

il viendra

$$\frac{dV}{dx}dx = Pdp + Qdq + Bdr + \ldots\ldots + p\,\frac{dP}{dx}\,dx - p\,\frac{d^2Q}{dx^2}\,dx + p\,\frac{d^3R}{dx^3}\,dx - \ldots$$

et par conséquent

$$V = \int Pdp + \int Qdq + \int Rdr + \ldots + \int p\,\frac{dP}{dx}\,dx - \int p\,\frac{d^2Q}{dx^2}\,dx + \int p\,\frac{d^3R}{dx^3}\,dx - \ldots$$

Or, en intégrant par parties, on trouve

$$\int Pdp = Pp - \int p\,\frac{dP}{dx}\,dx\ ,$$

$$\int Qdq = Qq - p\,\frac{dQ}{dx} + \int p\,\frac{d^2Q}{dx^2}\,dx\ ,$$

$$\int Rdr = Rr - q\,\frac{dR}{dx} + p\,\frac{d^2R}{dx^2} - \int p\,\frac{d^3R}{dx^3}\,dx\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

ce qui donne, en subtituant,

$$V = p\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \ldots\right) + q\left(Q - \frac{dR}{dx} + \ldots\right) + r\left(R - \ldots\right) + \ldots + C\ ;\ \text{(D)}$$

qui n'est plus que de l'ordre $2n-1$.

3.° Quand V ne contient ni x ni y, on peut abaisser l'équation (A), qu'on appelle quelquefois l'équation *indéfinie*, parce que son intégrale donne l'équation du *maximum* ou du *minimum*, avec des constantes arbitraires. On a alors, à la fois,

$$M = 0\ , \qquad N = 0\ ,$$

et

$$\frac{dV}{dx} Pq+Qr+Rs+\ldots\ldots ;$$

l'équation indéfinie se réduit donc à

$$\frac{dP}{dx}-\frac{d^2Q}{dx^2}+\frac{d^3R}{dx^3}-\ldots\ldots=0 ,$$

et donne, en intégrant

$$P=\frac{dQ}{dx}-\frac{d^2R}{dx^2}+\ldots\ldots+C ;$$

puis, en substituant

$$\frac{dV}{dx}=Qr+Rs+\ldots.+q\frac{dQ}{dx}-q\frac{d^2R}{dx^2}+\ldots\ldots+Cq ;$$

et ensuite, en multipliant par dx et intégrant,

$$V=\int Qdq+\int Rdr+\ldots.+\int q\frac{dQ}{dx}dx-\int q\frac{d^2R}{dx^2}dx+\ldots..+Cp+C' ;$$

mais, nous avons trouvé ci-dessus, en intégrant par parties,

$$\int Qdq=Qq-p\frac{dQ}{dx}+\int p\frac{d^2Q}{dx^2}dx ,$$

$$\int Rdr=Rr-q\frac{dR}{dx}+p\frac{d^2R}{dx^2}-\int p\frac{d^3R}{dx^3}dx ,$$

. . . . ;

il viendra donc, en substituant,

$$V=q\left(Q-\frac{dR}{dx}+\frac{d^2S}{dx^2}-....\right)+r\left(R-\frac{dS}{dx}+....\right)+s\left(S-...\right)+....+Cp+C' \; ; \quad \text{(E)}$$

équation qui ne s'élève qu'à l'ordre $n-2$ seulement, et qu'on pourrait abaisser encore si p était nul.

§. V. *Applications diverses.*

Soit proposé d'assigner la courbe, joignant deux points donnés, dont la révolution autour de l'axe des x engendre une surface *minimum* ?

La surface de révolution considérée comme indéfinie, étant exprimée par $2\varpi\int y dx\sqrt{1+p^2}$, il faudra qu'on ait

$$\delta\int y dx\sqrt{1+p^2}=0 \; ;$$

on a donc ici

$$V=y\sqrt{1+p^2} \; ,$$

$$M=\frac{dV}{dx}=0 \; ,$$

$$N=\frac{dV}{dy}=\sqrt{1+p^2} \; ,$$

$$P=\frac{dV}{dp}=\frac{py}{\sqrt{1+p^2}} \; ,$$

et les quantités Q, R, S, ... sont toutes nulles. Puis donc que x n'entre pas dans V, on peut faire usage de l'équation (D), qui est simplement ici

$$V = pP + C\ ,$$

et qui devient, par les substitutions,

$$y\sqrt{1+p^2} = \frac{p^2 y}{\sqrt{1+p^2}} + C\ ,$$

ou encore

$$\frac{y}{\sqrt{1+p^2}} = c\ ,$$

d'où on tire

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{c}{\sqrt{y^2-c^2}}\ ,$$

et par suite

$$\frac{dx}{c} = \frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}}\ ;$$

ce qui donne, en intégrant

$$\frac{x}{c} = \text{Log.}(y+\sqrt{y^2-c^2}) + c'\ .$$

Il resterait à déterminer c et c' par la condition que la courbe passe par les deux points donnés; mais leur détermination ne peut avoir lieu, parce qu'elle entraînerait la résolution d'une équation exponentielle.

Toutefois, on peut reconnaître quelle est la nature de cette courbe. En effet, il est visible que y ne saurait être moindre que c; de manière que c est l'ordonnée *minimum*. Si donc nous prenons cette ordonnée pour axe des y, il faudra qu'en posant $x=0$, on trouve $y=c$, d'où $c' = -\text{Log.}c$; donc

$$\text{Log.}\,\frac{y+\sqrt{y^2-c^2}}{c}=\frac{x}{c}\,,$$

donc aussi

$$\text{Log.}\,\frac{c}{y+\sqrt{y^2-c^2}}\quad\text{ou}\quad\text{Log.}\,\frac{y-\sqrt{y^2-c^2}}{c}=-\frac{x}{c}\,:$$

cela donne

$$y+\sqrt{y^2-c^2}=ce^{+\frac{x}{c}}\,,$$

$$y-\sqrt{y^2-c^2}=ce^{-\frac{x}{c}}\,;$$

d'où en ajoutant,

$$2y=c\left(e^{+\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)\,;$$

équation que l'on reconnaît pour celle d'une chainette dont l'axe principal est celui autour duquel la révolution s'exécute (*).

Soit proposé, en second lieu, de trouver la courbe pour laquelle l'aire comprise entre un arc, les deux normales extrêmes et l'arc correspondant de la développée soit un *maximum* ?

Soit u l'aire dont il s'agit, et r le rayon de courbure ; ou aura

$$\mathrm{d}u=\tfrac{1}{2}r\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{2q}=\frac{(1+p^2)^2\mathrm{d}x}{2q}\,,$$

d'où

(*) Voyez *Annales*, tom. I, pag. 58.

J. D. G.

$$u=\int\frac{(1+p^2)^2\mathrm{d}x}{2q},$$

de sorte qu'il faudra poser

$$\delta\int\frac{(1+p^2)^2\mathrm{d}x}{2q}=0,$$

on aura donc ici

$$V=\frac{(1+p^2)^2}{2q},$$

$$M=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=0,$$

$$N=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}=0,$$

$$P=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}=\frac{2p(1+p^2)}{q},$$

$$Q=-\frac{(1+p^2)^2}{2q^2},$$

R, S, ... seront nuls ; et comme ni x ni y n'entrent dans V, nous pourrons faire usage de l'équation (E) qui se réduira à

$$V=qQ+Cp+C',$$

et deviendra, par les substitutions,

$$\frac{(1+p^2)^2}{q}=Cp+C'.$$

Il faudra intégrer cette dernière équation, et déterminer les quatre constantes arbitraires, en exprimant que la courbe passe par les deux points limites, et qu'en ces deux points Q' et Q'' sont nuls.

Mais si l'on veut seulement savoir quelle est la nature de la courbe, on remarquera que, r désignant toujours le rayon de courbure, son équation différentielle revient à

$$r\sqrt{1+p^2}=Cp+C',$$

ce qui donne successivement

$$r=\frac{Cp+C'}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$\mathrm{d}r=\frac{(C-C'p)\mathrm{d}p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$r\mathrm{d}r=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}\cdot\frac{(C-C'p)\mathrm{d}p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(C-C'p)\mathrm{d}p}{q}=(C-C'p)\mathrm{d}x\,;$$

c'est-à-dire,

$$r\mathrm{d}r=C\mathrm{d}x-C'\mathrm{d}y$$

d'où, en intégrant et transformant les constantes,

$$r^2=Cx+C'y+C''. \qquad (1)$$

On peut faire disparaître ces constantes, en choisissant les axes d'une manière convenable. On peut d'abord porter l'origine au point pour lequel le rayon de courbure est nul. En désignant alors par α, β les coordonnées de ce point, on aura

$$C\alpha+C'\beta+C''=0. \qquad (2)$$

Nous pourrons ensuite faire tourner le système des axes autour de la nouvelle origine (α, β). Les formules générales de cette transformation étant, comme l'on sait

$$x=\alpha+t\text{Cos}.m-u\text{Sin}\,m\ ,\qquad y=\beta+t\text{Sin}.m+u\text{Cos}.m$$

on trouvera, en substituant dans (1) et ayant égard à la relation (2)

$$r^2=t(C\text{Cos}.m+C'\text{Sin}.m)+u(C'\text{Cos}.m-C\text{Sin}.m)\ .$$

L'angle m étant arbitraire, on pourra en disposer de manière que

$$C\text{Cos}.m+C'\text{Sin}.m=0\ ,$$

il en résultera

$$\text{Cos}.m=\frac{C'}{\sqrt{C^2+C'^2}}\ ,\qquad \text{Sin}.m=-\frac{C}{\sqrt{C^2+C'^2}}\ ;$$

on aura conséquemment

$$r^2=u(C'\text{Cos}.m-C\text{Sin}.m)=u\frac{C^2+C'^2}{\sqrt{C^2+C'^2}}=u\sqrt{C^2+C'^2}\ ;$$

ou, en transformant les constantes

$$r^2=4au\ ;$$

Soient faits

$$\frac{du}{dt}=p_1\ ,\qquad \frac{d^2u}{dt^2}=\frac{dp_1}{dt}=q_1\ ,\qquad \text{d'où}\ r=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q_1}\ ;$$

il en résultera

$$\frac{\frac{dp_1}{dt}}{(1+p_1^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{r}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\,\frac{1}{\sqrt{u}}\ ,\qquad \text{et}\qquad \frac{2p_1dp_1}{(1+p_1^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{p_1dt}{\sqrt{u}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{du}{\sqrt{u}}\ ;$$

d'où, en intégrant,

$$-\frac{1}{\sqrt{1+p_1}}=\sqrt{\frac{u}{a}}\ ,\quad 1+p_1^2=\frac{a}{u}\ ,\quad p_1=\frac{du}{dt}=\pm\sqrt{\frac{a}{u}-1}\ ;$$

équation qui appartient à une cycloïde engendrée par un cercle dont le diamètre est égal à a.

Souvent la courbe qui doit donner le *maximum* ou le *minimum* est assujettie à certaines conditions de constance, comme d'être d'une longueur donnée, de produire une aire de révolution de grandeur donnée, etc. On exprime ces conditions en écrivant que les variations des expressions des fonctions qui doivent demeurer constantes sont nulles. Ainsi, soient les conditions

$$\int V'\mathrm{d}x=l'\ ,\qquad \int V''\mathrm{d}x=l''\ ,\qquad \int V''\mathrm{d}x=l'''\ ,\ \ldots..$$

en nombre quelconque, on écrira

$$\delta\int V'\mathrm{d}x=0\ ,\qquad \delta\int V''\mathrm{d}x=0\ ,\qquad \delta\int V'''\mathrm{d}x=0\ ,\ \ldots..$$

Soit, du reste,

$$\delta\int V\mathrm{d}x=0$$

la condition du *maximum* ou du *minimum*.

Il est clair que, si une fonction a un *maximum* ou un *minimum*, elle en aura encore un si on lui ajoute des quantités constantes; puis donc que $\int V'\mathrm{d}x$, $\int V''\mathrm{d}x$, $\int V'''\mathrm{d}x$, ... sont constantes, il en sera de même de $c'\int V'\mathrm{d}x$, $c''\int V''\mathrm{d}x$, $c'''\int V'''\mathrm{d}x$, ..., c', c'', c''', ... représentant des constantes indéterminées; donc on devra avoir

$$\delta\left(\int V\mathrm{d}x+c'\int V'\mathrm{d}x+c''\int V''\mathrm{d}x+\ldots\right)=\delta\int\left(V+c'V'+c''V''+\ldots\right)\mathrm{d}x=0\ .$$

Nous pourrons traiter $\delta\int(V+c'V'+c''V''+\ldots.)\mathrm{d}x$, comme nous avons traité $\delta\int V\mathrm{d}x$, dans ce qui précède, et nous trouverons ainsi le *maximum* ou le *minimum* cherché, avec les conditions auxquelles il doit satisfaire. Mais, une fois parvenus à l'équation indéfinie, il faudra la déterminer de manière à satisfaire non seulement aux conditions que nous avons indiquées, en traitant du *maximum* et du *minimum* de $\int V \mathrm{d}x$, mais encore aux conditions $\int V' \mathrm{d}x = l'$, $\int V'' \mathrm{d}x = l''$, ... ; et c'est à quoi serviront les constantes c', c'', c''', ... Il était nécessaire de les introduire, pour n'avoir pas moins de quantités à déterminer que de conditions à remplir. Du reste, nous aurons ici autant de conditions qu'il en faudra pour en assigner les valeurs.

Soit, par exemple, à trouver, parmi toutes les courbes isopérimètres, celle qui a la plus grande aire.

On a, en général, pour la courbe de plus grande aire.

$$\delta \int y \mathrm{d}x = 0 .$$

Si l est la longueur donnée, on aura, en outre

$$\int \mathrm{d}x \sqrt{1+p^2} = l ;$$

nous poserons donc

$$\delta \int (y + c\sqrt{1+p^2}) \mathrm{d}x = 0 ;$$

nous aurons ainsi

$$V = y + c\sqrt{1+p^2} ,$$

$$M = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 0 ,$$

$$N = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} = 1 ,$$

$$P = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} = \frac{cp}{\sqrt{1+p^2}} ;$$

et tous les coefficiens ultérieurs seront nuls. L'équation (D) qui est celle qui convient au cas actuel, et qui se réduit à

$$V = pP + C ,$$

deviendra, en substituant

$$y+c\sqrt{1+p^2}=\frac{cp^2}{\sqrt{1+p^2}}+C\ ;$$

ou bien

$$y+\frac{c}{\sqrt{1+p^2}}=C\ ,\qquad \text{d'où}\qquad p=\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{c^2-(y-C)^2}}{y-C}\ ;$$

et, par suite

$$\frac{(y-C)dy}{\sqrt{c^2-y(y-C)^2}}=dx\ ;$$

ce qui donne, en intégrant

$$\sqrt{c^2-(y-C)^2}=-x+C'\ ,$$

c'est-à-dire,

$$(y-C)^2+(x-C')^2=c^2\ ;$$

équation du cercle. Il restera à déterminer les constantes c, C, C', par les conditions que l'arc se termine à deux points donnés, et que sa longueur entre ces deux points soit égale à l.

Il est à remarquer qu'ayant dû poser ici

$$\delta\int y\,dx=0\ ;\qquad \delta\int dx\sqrt{1+p^2}=0\ ;$$

ce sont aussi les mêmes équations que nous aurions posées s'il avait été question d'assigner, parmi les arcs de courbes qui comprennent une aire donnée, celui de moindre longueur; de sorte que le cercle doit résoudre, à la fois, les deux problèmes. Il est clair, en effet, que si, à longueur égale, le cercle embrasse la plus grande aire, il s'ensuit qu'il contient le plus de surface sous le moindre développement possible; et, par suite, à aire égale, il aura la moindre longueur.

Proposons-nous encore d'assigner, parmi les courbes isopérimètres, celle qui engendre l'aire de révolution *minimum*?

Nous aurons ici l'équation

$$\delta\int(y+c)\sqrt{1+p^2}.dx=0\ .$$

En faisant

$$y+c=y', \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dx}, \quad \text{ou } p=p',$$

notre équation deviendra

$$\delta\int y'\sqrt{1+p'^2}.dx=0 ;$$

équation que nous avons déjà traitée ci-dessus, et qui nous a conduit à l'équation de la chainette ; c'est donc encore cette courbe qui résout ce dernier problème. Il arrive seulement ici que son axe principal se trouve à la distance c de l'axe de révolution. Du reste, la constante c, ainsi que les autres qu'introduira l'intégration de l'équation indéfinie, provenant de $\delta\int y'\sqrt{1+p'^2}\,dx=0$, se détermineront comme dans l'exemple qui précède celui-ci.

§. VI. *Application aux fonctions de trois variables.*

Si, dans l'équation

$$\delta\int V dx=0,$$

V contenait, outre x et y, une troisième variable, z liée aux deux premières par une équation de relation, on l'exprimerait au moyen de celles-ci, et on ramenerait V à ne plus contenir ainsi que x, y, p, q, ...

Qu'il soit question, par exemple, de trouver la courbe la moins longue que l'on puisse tracer sur un cylindre, entre deux points de sa surface. En prenant l'axe du cylindre pour axe des y et désignant par a son rayon, l'équation de sa surface sera

$$z=\sqrt{a^2-x^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{dz}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} ;$$

On aura ensuite, pour la longueur de l'arc

$$s=\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\int dx\sqrt{1+p^2+\frac{a^2}{a^2-x^2}}=\int dx\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}+p^2} ;$$

de sorte que la condition du *minimum* sera

$$\delta\int dx\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}+p^2}=0\ .$$

On aura donc ici

$$V=\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}+p^2}\ ,\qquad P=\frac{p}{\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}+p^2}}\ .$$

Comme y manque dans V, nous pourrons prendre pour équation indéfinie l'équation (C) qui, dans le cas actuel, est simplement $P=C$; c'est-à-dire, en substituant,

$$\frac{p}{\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}+p^2}}=C\ ,\qquad \text{d'où}\quad p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{C}{\sqrt{1-C^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\ ;$$

ce qui donne, en intégrant,

$$y=\frac{C}{\sqrt{1-C^2}}\cdot a\mathrm{Arc}\left(\mathrm{Tang.}=\frac{x}{a}\right)+C'\ .$$

Si l'on prend l'une des extrémités de l'arc dans le plan des yz, à une distance b de l'axe des z, on devra avoir, en même temps, $x=0$, $y=b$; en mettant donc simplement C pour $\frac{C}{\sqrt{1-C^2}}$, on aura

$$y=C\ .\ \mathrm{Arc}\left(\mathrm{Tang.}=\frac{x}{a}\right)+b\ ;$$

dans laquelle C se déterminera en fixant la situation de l'autre extrémité de l'arc demandé.

L'équation que nous venons d'obtenir est celle d'une hélice; et c'est ce qu'il était facile de prévoir à l'avance. La plus courte ligne qu'on puisse tracer sur un cylindre, entre deux points de sa surface, doit être telle, en effet, qu'elle demeure encore la plus courte, en développant la surface de ce cylindre sur un plan; il faut donc que, par l'effet du développement de cette surface, elle devienne une ligne droite, ce qui est la propriété caractéristique de l'hélice.

§. VII. *Examen du cas des limites variables.*

Nous avons vu, dans ce qui précède, comment, quand on fixe les deux limites entre lesquelles le *maximum* ou le *minimum* doit avoir lieu, on peut déterminer les $2n$ constantes qu'introduit, en général, l'intégration de l'équation indéfinie

$$o=N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2P}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\ldots\ldots$$

On pourrait ne pas donner proprement les deux limites, mais seulement les assujettir à la condition de se trouver sur deux courbes données. Il y aura alors $2n+4$ inconnues à déterminer, savoir, les $2n$ constantes c, c', c'', ..., introduites par l'intégration de l'équation indéfinie, et les quatre coordonnées x', y', x'', y'', des deux extrémités de la courbe cherchée. Or ici les $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta x''$, $\delta y''$ ne sont plus nulles ; mais, puisqu'elles ont lieu le long des courbes données, ce sont les différentielles des coordonnées de ces courbes. En prenant donc les différentielles de leurs équations, nous pourrons exprimer $\delta y'$ et $\delta y''$, respectivement, en fonction de $\delta x'$ et $\delta x''$. En faisant la substitution de leurs valeurs dans la première partie du développement de $\delta\int V dx$, il s'y trouvera $2n$ variations $\delta y'$, $\delta y''$, $\delta p'$, $\delta p''$, ..., dont nous pourrons séparément égaler les coefficiens à zéro. Ensuite, x', y', x'', y'', devront satisfaire aux deux courbes données, ce qui fournira deux relations ; ils devront enfin satisfaire à la courbe trouvée, ce qui en fournira deux autres ; de sorte qu'on aura en tout $2n+4$ conditions pour déterminer les $2n+4$ inconnues.

Supposons, par exemple, que l'on demande une courbe, qui se terminant à deux hyperboles équilatères

$$y'=\frac{a^2}{x'} \quad ; \qquad y''=-\frac{b^2}{x''} \quad ,$$

produise une aire de révolution *maximum* autour de l'axe des x. On posera toujours

$$\delta\int y\,\mathrm{d}x\sqrt{1+p^2}=0\ ;$$

ce qui donnera, en opérant comme ci-dessus,

$$y=\frac{1}{2c'}\left(e^{+\frac{x}{c}}+c'^2e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

Pour déterminer les deux constantes c, c', ainsi que les points extrêmes de la courbe, c'est-à-dire, pour déterminer les six inconnues c, c', x', y', x'', y'', nous écrirons les premiers termes du développement de $\delta\int y\mathrm{d}x\sqrt{1+p^2}$, qui sont ici

$$\frac{y'}{\sqrt{1+p'^2}}\delta x'+\frac{p'y'}{\sqrt{1+p'^2}}\delta y'$$
$$-\frac{y''}{\sqrt{1+p''^2}}\delta x''-\frac{p''y''}{\sqrt{1+p''^2}}\delta y''\ .$$

Or, la différentiation des équations des deux hyperboles donne

$$\delta y'=-\frac{a^2}{x'^2}\delta x'\ ,\qquad \delta y''=+\frac{b^2}{x''^2}\delta x''\ ,$$

en substituant donc, il viendra

$$\frac{y'}{\sqrt{1+p'^2}}\left(1-\frac{a^2p'}{x'^2}\right)\delta x'-\frac{y''}{\sqrt{1+p''^2}}\left(1+\frac{b^2p''}{x''^2}\right)\delta x''\ .$$

Il faudra donc poser

$$1-\frac{a^2p'}{x'^2}=0\ ,\qquad 1+\frac{b^2p''}{x''^2}=0\ ;$$

et comme d'ailleurs

$$-\frac{a^2}{x'^2}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}\ ,\qquad \frac{b^2}{x''^2}=\frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x''}\ ;$$

cela reviendra à

$$1+p'\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}=0\ ,\qquad 1+p''\frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x''}=0\ ;$$

équations qui expriment qu'aux points limites la chainette génératrice doit être normale aux deux hyperboles données.

En remplaçant, dans ces équations p' et p'', par leurs valeurs, déduites de l'équation de la chainette; savoir

$$p'=\frac{1}{2cc'}\left(e^{+\frac{x'}{c}}-c^2e^{-\frac{x'}{c}}\right),\qquad p''=\frac{1}{2cc'}\left(e^{+\frac{x''}{c}}-c^2e^{-\frac{x''}{c}}\right),$$

elles deviennent

$$2cc'x'^2-a^2\left(e^{+\frac{x'}{c}}-c^2e^{-\frac{x'}{c}}\right)=0,\quad 2cc'x''^2+b\left(e^{+\frac{x''}{c}}-c^2e^{-\frac{x''}{c}}\right)=0\,.$$

On a d'ailleurs

$$y'=+\frac{a^2}{x'},\qquad y''=-\frac{b^2}{x''},$$

$$y'=\frac{1}{2c'}\left(e^{+\frac{x'}{c}}+c^2e^{-\frac{x'}{c}}\right),\qquad y''=\frac{1}{2c'}\left(e^{+\frac{x''}{c}}+c^2e^{-\frac{x''}{c}}\right);$$

on se trouve donc avoir six équations, pour déterminer c, c', x', y', x'', y''.

Si la courbe qui doit satisfaire au *maximum* ou au *minimum* était assujettie à des conditions de constance, comme d'avoir une aire, une longueur, etc., déterminée, il serait facile d'opérer comme il a déjà été dit.

Si cependant ces conditions, au lieu d'être exprimées par des intégrales, l'étaient par des équations algébriques; si, par exemple, au lieu de donner $\int V\mathrm{d}x=l$, on donnait $\varphi(x', y', x'', y'', l)=0$; on remplacerait d'abord y' et y'' par leurs valeurs en x' et x'', ce qui donnerait $\psi(x', x'', l)=0$, d'où $\delta x''=\delta x'\Phi(x', l)$. Remplaçant donc $\delta x''$ par cette valeur, on n'aurait plus que le coefficient de $\delta x'$ à égaler à zéro, ce qui ne laisserait plus que $2n+3$ relations; mais celle qui aurait disparu se trouverait alors suppléée par l'équation donnée $\varphi(x', y', x'', y'', l)=0$. C'est ainsi, par exemple, qu'on en agirait, si la chainette qui doit se terminer aux deux hyperboles était assujettie à avoir une corde d'une longueur donnée. L'équation de condition serait ainsi $(x'-x'')^2+(y'-y'')^2=l^2$.