GERGONNE

Philosophie mathématique. Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 209-231
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__209_0>

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue.

Par M. GERGONNE.

Tantum series juncturaque pollet. (HOR.)

LES diverses théories dont se compose le domaine de la science de l'étendue peuvent être rangées en deux classes très-distinctes. Il est, en effet, certaines de ces théories qui dépendent essentiellement des *relations métriques* qui se trouvent exister entre les diverses portions d'étendue que l'on compare, et qui conséquemment ne sauraient être établies qu'à l'aide des principes du calcul. D'autres, au contraire, sont tout-à-fait indépendantes de ces mêmes relations, et résultent uniquement de la *situation* que se trouvent avoir les uns par rapport aux autres, les êtres géométriques sur lesquels on raisonne; et, bien que très-souvent on les déduise des proportions et du calcul, on peut toujours, en s'y prenant d'une manière convenable, les en dégager complètement. Mais il peut quelquefois devenir nécessaire pour cela de passer tour à tour de la géométrie plane à celle de l'espace et de celle-ci à la première, comme Monge et les géomètres de son école l'ont si souvent pratiqué, et avec tant de succès.

Il est donc raisonnablement permis de se demander, d'après cela, si notre manière de diviser la géométrie en *géométrie plane* et *géométrie de l'espace* est aussi naturelle et aussi exactement conforme à l'essence des choses que vingt siècles d'habitude ont pu nous le persuader. Toujours du moins demeure-t-il vrai qu'en y renonçant on parviendrait, en ne recourant, pour ainsi dire, qu'à la simple intuition, à pousser assez avant dans la géométrie des commençans que l'étude du calcul, présentée dès l'entrée, ne rebute que trop souvent, et qui peut-être s'y livreraient plus tard avec beaucoup moins de répugnance, lorsque leur intelligence se serait agrandie et fortifiée, par l'étude d'une série plus ou moins prolongée de propriétés de l'étendue.

Mais un caractère extrêmement frappant de cette partie de la géométrie qui ne dépend aucunement des relations métriques entre les parties des figures ; c'est qu'à l'exception de quelques théorèmes symétriques d'eux-mêmes, tels, par exemple, que le théorème d'Euler sur les polyèdres, et son analogue sur les polygones, tous les théorèmes y sont doubles ; c'est-à-dire que, dans la géométrie plane, à chaque théorème il en répond toujours nécessairement un autre qui s'en déduit en y échangeant simplement entre eux les deux mots *points* et *droites* ; tandis que, dans la géométrie de l'espace, ce sont les mots *points* et *plans* qu'il faut échanger entre eux pour passer d'un théorème à son corrélatif.

Parmi un grand nombre d'exemples que nous pourrions puiser, dans le présent recueil, de cette sorte de *dualité* des théorèmes qui constituent la *géométrie de situation*, nous nous bornerons à indiquer, comme les plus remarquables, les deux élégans théorèmes de M. Coriolis, démontrés d'abord à la page 326 du XI.ᵉ volume, puis à la page 69 du XII.ᵉ, et l'article que nous avons nous-même publié à la page 157 du précédent volume, sur les lois générales qui régissent les polyèdres. C'est, au surplus, une suite inévitable des propriétés des pôles, polaires, plans polaires et polaires conjuguées des lignes et surfaces du second ordre, qui jouent ici un rôle assez analogue à celui que joue le triangle supplémentaire, dans la trigonométrie sphérique où, comme il a été montré, dans tout le cours de l'intéressant mémoire de M. Sorlin (tom. XV, pag. 273), les théorèmes peuvent également être répartis en en deux séries parallèles, de manière à se correspondre deux à deux, avec la plus grande exactitude.

Toutefois, quelque digne de remarque que puisse être un fait géométrique de cette importance, et quelque ressource qu'il puisse offrir, dans un grand nombre de cas, pour faire deviner, en quelque sorte, de nouveaux théorèmes, à peine a-t-il été entrevu, même par les géomètres qui, dans ces derniers temps, se sont le plus spécialement occupés de la recherche des propriétés de l'étendue; tant est peu philosophique encore, même de nos jours, la manière d'étudier les sciences.

Voilà ce qui nous détermine à faire de cette sorte de géométrie *en parties doubles*, s'il est permis de s'exprimer ainsi, le sujet d'un écrit spécial dans lequel, après avoir rendu manifeste le fait philosophique dont il s'agit, dans l'exposé même des premières notions, nous nous en appuyerons, soit pour démontrer quelque théorèmes nouveaux, soit pour donner de quelques théorèmes déjà connus des démonstrations nouvelles, qui les rendent à l'avenir tout à fait indépendans des relations métriques desquelles on a été jusqu'ici dans l'usage de les déduire.

Nous pourrions fort bien nous borner à démontrer seulement une moitié de nos théorèmes, et à en déduire l'autre moitié, à l'aide de la théorie des pôles. Mais nous préférons les démontrer directement les uns et les autres, tant pour ne pas sortir des premiers élémens et rendre ce qu'on va livre accessible à ceux là-même qui ne connaissent pas les *Élémens d'Euclide*, que pour avoir l'occasion de faire remarquer qu'il existe entre les démonstrations de deux théorèmes d'une même couple la même correspondance qu'entre leurs énoncés. Nous aurons même soin, afin de rendre cette correspondance plus apparente, de présenter les théorèmes analogues dans deux colonnes, en regard l'une de l'autre, comme nous en avons déjà usé, dans l'article sur les polyèdres rappelé plus haut; de telle sorte que les démonstrations puissent se servir réciproquement de contrôle.

Nous croyons superflu d'accompagner ce mémoire de figures, souvent plus embarrassantes qu'utiles, dans la géométrie de l'espace; figures que nous ne pourrions d'ailleurs offrir que sous un aspect unique et individuel au lecteur qui pourra, au contraire, les construire et façonner à son gré, si toutefois il en juge le secours nécessaire. Il ne s'agit ici, en effet, que de déductions logiques, toujours faciles à suivre, lorsque les notations sont choisies d'une manière convenable.

§. I.

Notions préliminaires.

1. Deux points, distincts l'un de l'autre, donnés dans l'espace, déterminent une droite indéfinie qui, lorsque ces deux points sont désignés par A et B, peut être elle-même désignée par AB.	1. Deux plans, non parallèles, donnés dans l'espace, déterminent une droite indéfinie qui, lorsque ces deux plans sont désignés par A et B, peut être elle-même désignée par AB.
2. Trois points donnés dans l'espace, ne se confondant pas deux à deux et n'appartenant pas à une même ligne droite, déterminent un plan indéfini qui, lorsque ces trois points sont respectivement désignés par A, B, C, peut être lui-même désigné par ABC.	2. Trois plans, non parallèles deux à deux dans l'espace, et ne passant pas par une même ligne droite, déterminent un point qui, lorsque ces trois plans sont respectivement désignés par A, B, C, peut être lui-même désigné par ABC.
3. Un plan peut aussi être déterminé dans l'espace par une droite et par un point qui ne	3. Un point peut aussi être déterminé dans l'espace par une droite et par un plan dans le-

s'y trouve pas contenu, ou encore par deux droites qui concourent en un même point.

4. Ce n'est qu'accidentellement que des points, au nombre de plus de trois, dans l'espace, déterminent un plan unique, que l'on peut alors désigner par la totalité des lettres qui désignent ces différens points. Ce n'est aussi qu'accidentellement que deux droites, et à plus forte raison un plus grand nombre, sont dans un même plan.

5. Généralement parlant, des points en nombre n, déterminent, dans l'espace, des droites au nombre de

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2},$$

et des plans au nombre de

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}.$$

Ce n'est qu'accidentellement qu'ils en déterminent un moindre nombre.

6. Si l'on peut prouver de plus de deux droites que, sans passer toutes par un même point, deux d'entre elles, de quelque

quel elle ne se trouve pas située, ou encore par deux droites situées dans un même plan.

4. Ce n'est qu'accidentellement que des plans, au nombre de plus de trois, dans l'espace, déterminent un point unique, que l'on peut alors désigner par la totalité des lettres qui désignent ces différens plans. Ce n'est aussi qu'accidentellement que deux droites, et à plus forte raison un plus grand nombre concourent en un même point.

5. Généralement parlant, des plans en nombre n, déterminent, dans l'espace, des droites au nombre de

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2},$$

et des points au nombre de

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}.$$

Ce n'est qu'accidentellement qu'ils en déterminent un moindre nombre,

6. Si l'on peut prouver de plus de deux droites que, sans être toutes dans un même plan, deux d'entre elles, de quelque manière

manière qu'on les choisisse, sont toujours dans un même plan, on en pourra conclure qu'elles sont toutes situées dans un plan unique.

7. Quatre droites, comprises dans un même plan, déterminent, en général, six points, distribués trois à trois sur ces quatre droites. Ces six points déterminent trois nouvelles droites qui, à leur tour, déterminent trois nouveaux points.

9. Des points, en nombre quelconque, situés dans un même plan, peuvent être considérés comme les *sommets* d'un polygone, dont les *côtés* sont déterminés par ces mêmes points, pris consécutivement deux à deux, et dans un ordre quelconque, du premier au dernier et de celui-ci au premier.

10. Des droites, en nombre quelconque, issues d'un même point de l'espace, peuvent être considérées comme les *arêtes* d'un angle polyèdre, dont les *faces* sont déterminées par ces mêmes droites, prises consécutivement deux à deux, et dans un ordre

qu'on les choisisse, concourent toujours en un même point, on en pourra conclure qu'elles concourent toutes en un point unique.

7. Quatre droites issues d'un même point de l'espace, déterminent, en général, six plans, passant trois à trois par ces quatre droites. Ces six plans déterminent trois nouvelles droites qui à leur tour, déterminent trois nouveaux plans.

9. Des plans, en nombre quelconque, issus d'un même point de l'espace, peuvent être considérés comme les *faces* d'un angle polyèdre, dont les *arêtes* sont déterminées par ces mêmes plans, pris consécutivement, deux à deux, et dans un ordre quelconque, du premier au dernier et de celui-ci au premier.

10. Des droites, en nombre quelconque, situées dans un même plan, peuvent être considérées comme les *côtés* d'un polygone, dont les *sommets* sont déterminés par ces mêmes droites, prises consécutivement deux à deux, et dans un ordre quelconque, de

quelconque, de la première à la dernière, et de celle-ci à la première.

la première à la dernière, et de celle-ci à la première.

11. Un polygone qui a autant de côtés qu'un autre a de sommets est dit *circonscrit* à celui-ci, lorsque, ces deux polygones étant situés dans un même plan, les sommets du dernier sont respectivement situés sur les directions des côtés du premier.

11. Un angle polyèdre qui a autant d'arêtes qu'un autre a de faces, est dit inscrit à celui-ci, lorsque, ces deux angles polyèdres ayant même sommet, les plans des faces du dernier contiennent respectivement les arêtes du premier.

12. Un angle polyèdre qui a autant de faces qu'un autre a d'arêtes, est dit *circonscrit* à celui-ci, lorsque, ces deux angles polyèdres ayant même sommet, les arêtes du dernier sont respectivement dans les plans des faces du premier.

12. Un polygone qui a autant de sommets qu'un autre a de côtés, est dit *inscrit* à celui-ci, lorsque, ces deux polygones étant situés dans un même plan, les directions des côtés du dernier contiennent respectivement les sommets du premier.

13. Un polygone est dit *inscrit* à un angle polyèdre qui a autant d'arêtes que ce polygone a de sommets, lorsque les sommets du polygone sont respectivement sur les arêtes de l'angle polyèdre.

13. Un angle polyèdre est dit *circonscrit* à un polygone qui a autant de côtés que cet angle polyèdre a de faces, lorsque les faces de l'angle polyèdre contiennent respectivement les côtés du polygone.

14. Des points, en nombre quelconque, dans l'espace, peuvent être considérés comme les *sommets* d'un polyèdre. Ceux de ces points qui appartiennent à un même plan déterminent les

14. Des plans, en nombre quelconque, dans l'espace, peuvent être considérés comme les *faces* d'un polyèdre. Ceux de ces plans qui passent par un même point déterminent les *sommets* du polyè-

faces du polyèdre, dont les *arêtes* sont les côtés de ces mêmes faces.

15. Un polyèdre qui a autant de faces qu'un autre a de sommets, est dit *circonscrit* à celui-ci, lorsque les sommets du dernier sont respectivement dans les plans des faces du premier.

dre, dont les *arêtes* sont celles de ces mêmes sommets.

15. Un polyèdre qui a autant de sommets qu'un autre a de faces, est dit *inscrit* à celui-ci, lorsque les plans des faces du dernier contiennent respectivement les sommets du premier.

Remarque. Dans ce qui précède, nous avons disposé les propositions, en regard les unes des autres, comme elles doivent l'être dans la géométrie à trois dimensions, et nous en userons de même dans tout ce qui va suivre. Dans la géométrie plane, leur correspondance serait un peu différente. Alors, par exemple, la proposition 8 de la série de droite devrait correspondre à la proposition 7 de la série de gauche.

Les géomètres ayant remarqué que les droites que déterminent deux sommets non consécutifs d'un polygone ou d'un polyèdre, ainsi que les plans que déterminent deux arêtes non consécutives d'un angle polyèdre, jouaient un rôle assez important en géométrie, ont cru utile de leur donner des dénominations particulières, et ils les ont appelés *diagonales* et *plans diagonaux*. Mais les points que déterminent deux côtés non consécutifs d'un polygone; mais les droites que déterminent les plans de deux faces non consécutives, soit d'un polyèdre soit d'un angle polyèdre, ne sont pas d'une moindre importance, et pourtant on ne leur a assigné aucune dénomination spéciale. On n'aurait sans doute pas manqué de le faire, si les relations que nous nous efforçons ici de faire ressortir avaient été aperçues par les créateurs de la science; ce qui prouve, pour le dire en passant, que ce n'est seulement que lorsqu'une science est déjà parvenue en un assez haut degré de maturité qu'on peut espérer d'en bien faire la langue. Quoi qu'il en soit, plutôt que de créer des dénominations nouvelles, qui pourraient fort bien ne pas plaire également à tous les lecteurs, nous préferons nous interdire ici l'usage des mots *diagonales* et *plans diagonaux*, qui manqueraient d'analogues, et les remplacer constamment par la périphrase équivalente.

Souvent à l'avenir, de ce que deux droites seront situées dans un même plan, il nous arrivera de conclure qu'elles concourent en un même point; mais il faudra alors sous-entendre que ce point peut fort bien être infiniment éloigné.

§. II.

Théorèmes sur les triangles, les quadrilatères, les angles trièdres et les angles tétraèdres.

16. *THÉORÈME. Si deux triangles sont tellement situés dans l'espace que les droites que déterminent leurs sommets correspondans concourent toutes trois au même point; leur côtés correspondans concourront en trois points qui appartiendront à une même ligne droite.*

Démonstration. Soient A, B, C les trois sommets de l'un des triangles, et A′, B′, C′ leurs correspondans respectifs dans l'autre, de manière que les droites AA′, BB′, CC′ concourent en un même point P.

Les deux droites AA′, BB′, concourant en un même point P, sont dans un même plan,

16. *THÉORÈME. Si deux angles trièdres sont tellement situés dans l'espace que les droites que déterminent leurs faces correspondantes soient toutes trois situées dans un même plan; leurs arêtes correspondantes détermineront trois plans qui se couperont suivant une même ligne droite.*

Démonstration. Soient A, B, C les trois faces de l'un des angles trièdres, et A′, B′, C′ leurs correspondantes respectives dans l'autre, de manière que les droites AA′, BB′, CC′ soient situées dans un même plan P.

Les deux droites AA′, BB′ étant situées dans un même plan P, concourent en un même point, qui contiendra conséquemment les quatre points A, A', B, B'; donc les droites AB et A'B' sont dans ce plan, et doivent, par suite, concourir en un point. Ainsi, deux côtés correspondans quelconques, dans les deux triangles, concourent en un point.

Soient respectivement α, β, γ, les points de concours des côtés correspondans BC et B'C', CA et C'A', AB et A'B', des deux triangles. Parce que ces points sont situés sur les directions des trois côtes du triangle ABC, ils doivent être dans le plan de ce triangle ; mais, parce qu'ils sont situés sur les directions des trois côtés du triangle A'B'C', ils doivent être aussi dans le plan de ce dernier triangle ; donc les trois points α, β, γ se trouvent à la fois dans deux plans ; donc ils appartiennent à l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire, à une ligne droite.

Si l'on conçoit que le point de concours des trois droites que déterminent les sommets correspondans des deux triangles s'approche sans cesse du plan de l'un

où concourront conséquemment les quatre plans A, A', B, B', donc les droites AB et A'B' concourent aussi en ce point, et par suite sont dans un même plan. Ainsi, deux arêtes correspondantes quelconques, dans les deux angles trièdres, sont situées dans un même plan.

Soient respectivement α, β, γ les plans qui contiennent les arêtes correspondantes BC et B'C', CA et C'A', AB et A'B' des deux angles trièdres. Parce que ces plans contiennent les trois arêtes de l'angle trièdre ABC, ils doivent concourir à son sommet ; mais, parce qu'ils contiennent les trois arêtes de l'angle trièdre A'B'C', ils doivent aussi concourir au sommet de ce dernier angle trièdre ; donc les trois plans α, β, γ passent à la fois par les deux mêmes points ; donc ils contiennent tous trois la droite que déterminent ces deux points ; c'est-à-dire, qu'ils se coupent tous trois suivant la même droite.

Si l'on conçoit que le plan des trois droites que déterminent les faces correspondantes des deux angles trièdres s'approche sans cesse du sommet de l'un d'eux, d'eux; le plan de l'autre fera avec le sien un angle sans cesse décroissant, jusqu'à ce qu'enfin ces deux plans se confondront en un seul, contenant le point dont il s'agit; et comme, dans ce mouvement, les trois points α, β, γ n'auront pas cessé d'appartenir à une même ligne droite; il en résulte le théorème suivant :

17. *THÉORÈME. Si deux triangles, situés dans un même plan, sont tels que les droites que déterminent leurs sommets correspondans passent toutes trois par un même point; les points que détermineront leurs côtés correspondans appartiendront tous trois à une même droite.*

18. Donc, *THÉORÈME. Si deux angles trièdres de même sommet sont tels que les plans que déterminent leurs arêtes correspondantes passent tous trois par une même droite; les droites que détermineront leurs faces correspondantes seront toutes trois dans un même plan.*

Démonstration. Si, en effet, on coupe les deux angles trièdres par un même plan, qui ne passe pas par leur sommet commun, les sections seront deux triangles,

la distance de ce sommet au sommet de l'autre ira sans cesse en décroissant, jusqu'à ce qu'enfin ces deux sommets se confondront en un seul point, situé dans le plan dont il s'agit; et comme, dans ce mouvement, les trois plans α, β, γ n'auront pas cessé de se couper suivant une même droite, il en résulte le théorème suivant :

17. *THÉORÈME. Si deux angles trièdres de même sommet sont tels que les droites que déterminent leurs faces correspondantes soient toutes trois dans un même plan, les plans que détermineront leurs arêtes correspondantes se couperont tous trois suivant une même droite.*

18. Donc, *THÉORÈME. Si deux triangles, situés dans un même plan, sont tels que les points que déterminent leurs côtés correspondans appartiennent tous trois à une même droite, les droites que détermineront leurs sommets correspondans passeront toutes trois par un même point.*

Démonstration. Si, en effet, on considère ces deux triangles comme les sections, par un même plan, de deux angles trièdres, ayant un même sommet hors de ce plan, dans le cas de la proposition ci-dessus (17); d'où il résulte évidemment que les deux angles trièdres doivent jouir de la propriété annoncée.

ces deux angles trièdres se trouveront dans le cas de la proposition ci-dessus (17); d'où il résulte évidemment que les deux triangles doivent jouir de la propriété annoncée.

Remarques. La correspondance entre ces divers théorèmes est ici telle que l'exige la géométrie de l'espace. Dans la géométrie plane, au contraire, le numéro 18 (*série de droite*) répondrait au numéro 17 (*série de gauche*).

Les théorèmes compris sous ces deux numéros, susceptibles de revêtir une multitude de formes différentes, et desquels on en peut déduire un grand nombre d'autres, sont fondamentaux, dans la *géométrie de la règle.* Ils offrent, en particulier, les méthodes les plus simples qu'on puisse employer, pour la résolution des deux problèmes suivans, se correspondant l'un à l'autre, dans la géométrie plane : I. *Deux points déterminant une droite inconnue, qu'un obstacle empêche de tracer, trouver sur une droite donnée,* EN NE FAISANT USAGE QUE DE LA RÈGLE, *un troisième point de cette droite ?* II. *Un point inconnu devant être déterminé par deux droites, qu'un obstacle empêche de prolonger, mener, par un point donné,* EN NE FAISANT USAGE QUE DE LA RÈGLE, *une troisième droite qui passe par ce point ?*

Si l'on suppose (17, *série de droite* et 18, *série de gauche*) que le sommet commun des deux angles trièdres devient le centre d'une sphère de rayon quelconque, on obtiendra, sur la sphère, des théorèmes analogues aux théorèmes 17 (*série de gauche*) et 18 (*série de droite*), dans lesquels les droites se trouveront remplacées par des arcs de grands cercles. On en conclura la possibilité de résoudre, sur la sphère, des problèmes analogues aux deux que nous venons d'énoncer, en ne faisant usage que du *compas règle*, c'est-à-dire, du compas à ouverture fixe, servant à décrire des grands cercles, et dans lequel, conséquemment, la distance entre les points est l'hypothénuse d'un triangle isocèle rectangle, dont les deux côtés de l'angle droit sont égaux au rayon de la sphère.

Parmi les nombreuses conséquences qui résultent des théorèmes (17 et 18), nous nous bornerons à signaler les suivantes;

19. *THÉORÈME. Si deux quadrilatères sont inscrit et circonscrit l'un à l'autre, de telle sorte que les droites que déterminent leurs sommets opposés passent toutes quatre par un même point; les points que détermineront leurs côtés opposés appartiendront tous quatre à une même ligne droite.*

Démonstration. Soient A et B deux sommets de l'inscrit adjacens à un même côté; et soient A′ et B′ leurs opposés respectifs. Soient désignés respectivement par α, β, α', β', les côtés du circonscrit qui contiennent les points A, B, A′, B′; les côtés consécutifs de l'inscrit seront AB, BA′, A′B′, B′A; et les sommets correspondans du circonscrit seront $\alpha\beta$, $\beta\alpha'$, $\alpha'\beta'$, $\beta'\alpha$.

On suppose que les deux droites AA′ et BB′, celle que déterminent les deux sommets $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$, et celle que déterminent les deux sommets $\alpha\beta'$ et $\alpha'\beta$, passent toutes quatre par un même point

19. *THÉORÈME. Si deux angles tétraèdres sont inscrit et circonscrit l'un à l'autre, de telle sorte que les droites que déterminent leurs faces opposées soient toutes quatre dans un même plan; les plans que détermineront leurs arêtes opposées passeront tous quatre par une même droite.*

Démonstration. Soient A et B deux faces du circonscrit adjacentes à une même arête; et soient A′ et B′ leurs opposées respectives. Soint désignées respectivement par α, β, α', β' les arêtes de l'inscrit qui sont contenues dans les plans A, B, A′, B′; les arêtes consécutives du circonscrit seront AB, BA′, A′B′, B′A; et les faces correspondantes de l'inscrit seront $\alpha\beta$, $\beta\alpha'$, $\alpha'\beta'$, $\beta'\alpha$.

On suppose que les deux droites AA′ et BB′, celle que déterminent les deux faces $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$, et celle que déterminent les deux faces $\alpha\beta'$ et $\alpha'\beta$, sont toutes quatre dans un même plan P; Si donc l'on com-

P ; si donc l'on compare le triangle dont les trois sommets sont A , B et $\alpha\beta$ à celui dont les trois sommets sont A', B' et $\alpha'\beta'$, on verra que, par l'hypothèse, les droites que déterminent leurs sommets correspondans passent toutes trois par un même point P ; d'où l'on conclura (17) que leurs côtés correspondans AB et $A'B'$ déterminent un point en ligne droite avec les deux points $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$. La comparaison du triangle dont les sommets sont A , B' et $\alpha\beta'$ à celui dont les sommets sont A', B et $\alpha'\beta$ prouvera semblablement que le point déterminé par les côtés AB' et $A'B$ est aussi en ligne droite avec les deux mêmes points $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$; ce qui complète la démonstration du théorème.

En raisonnant comme nous l'avons fait (18), on conclura facilement de là cet autre théorème :

20. *THÈORÈME. Si deux angles tétraèdres sont inscrits et circonscrits l'un à l'autre, de telle sorte que les plans que déterminent leurs arêtes opposées passent tous quatre par une même droite, les droites que détermineront leurs*

pare l'angle trièdre dont les trois faces sont A , B et $\alpha\beta$ à celui dont les trois faces sont A', B' ; et $\alpha'\beta'$, on verra que, par l'hypothése, les droites que déterminent leur faces correspondantes sont toutes trois dans un même plan P, d'où l'on conclura (17) que leurs arêtes correspondantes AB et $A'B'$ déterminent un plan coupant, suivant une même ligne droite, les deux plans $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$. La comparaison de l'angle trièdre dont les faces sont A , B' et $\alpha\beta'$ à celui dont les faces sont A', B et $\alpha'\beta$ prouvera semblablement que le plan déterminé par les arêtes AB' et $A'B$ coupe, suivant une même droite, les deux même plans $\alpha\alpha$ et $\beta\beta'$; ce qui complète la démonstration du théorème.

En raisonnant comme nous l'avons fait (18), on conclura facilement de là cet autre théorème :

20. *THÉORÈME. Si deux quadrilatères sont inscrits et circonscrits l'un à l'autre, de telle sorte que les points que déterminent leurs côtés opposés appartiennent tous quatre à une même droite ; les droites que détermi-*

faces opposées appartiendront toutes quatre à un même plan.

neront leurs sommets opposés passeront toutes quatre par un même point.

Remarques. Il est plus que superflu d'observer qu'en géométrie plane ce serait le n.o 20 (*série de droite*) qui correspondrait au n.o 19 (*série de gauche*).

Il est facile de voir que les théorèmes compris sous ces deux numéros ont leurs analogues sur la sphère, lesquels se déduiront des numéros 19 (*série de droite*) et 20 (*série de gauche*), en supposant que le sommet commun des deux angles tétraèdres devient le centre d'une sphère.

Ce sera ici le lieu très-naturel des deux théorèmes de M. Coriolis déjà cités, démontrés, comme ils l'ont été, tom. XII, pag. 70. Ils auront leurs correspondans dans l'espace, desquels on en déduira d'analogues sur la sphère.

§. III.

Théorèmes sur les polyèdres.

21. *THÉORÈME. Si deux tétraèdres sont tellement disposés dans l'espace que les droites qui déterminent leurs sommets correspondans passent toutes quatre par un même point; les droites que détermineront leurs faces correspondantes seront toutes quatre dans un même plan.*

Démonstration. On voit d'abord (16) que les trois arêtes d'une même face de l'un des tétraèdres concourront avec leurs cor-

21. *THÉORÈME. Si deux tétraèdres sont tellement disposés dans l'espace que les droites que déterminent leurs faces correspondantes soient toutes quatre dans un même plan; les droites que détermineront leurs sommets correspondans passeront toutes quatre par un même point.*

Démonstration. On voit d'abord (16) que les trois arêtes d'un même sommet de l'un des tétraèdres, avec leurs correspondantes

respondantes dans l'autre en trois points qui appartiendront à une même ligne droite, déterminée par les plans de ces deux faces; donc les arêtes de l'un et leurs correspondantes dans l'autre concourront en six points, distribués trois à trois sur les quatre droites déterminées par les plans des faces correspondantes; d'où il est facile de conclure que ces quatre droites appartiendront à un même plan.

22. *THÉORÈME. Dans tout octaèdre hexagone tel que les droites que déterminent les sommets opposés passent toutes trois par un même point; les droites que déterminent les faces opposées appartiennent toutes quatre à un même plan.*

Démonstration. On voit d'abord (16) que les arêtes d'une face quelconque de l'octaèdre et leurs opposées, dans la face opposée à celle-là, concourront en trois points, situés dans une même ligne droite, déterminée par les plans de ces deux faces; donc les douze arêtes de l'octaèdre concourront deux à deux en six points, distribués trois à trois sur les quatre droites déterminées par les

dans l'autre détermineront trois plans se coupant suivant une même droite, déterminée par les deux sommets dont il s'agit; donc les arêtes de l'un et leurs correspondantes dans l'autre détermineront six plans, passant trois à trois par les quatre droites déterminées par les sommets correspondans; d'où il est facile de conclure que ces quatre droites concourront en un même point.

22. *THÉORÈME. Dans tout hexaèdre octogone tel que les droites que déterminent les faces opposées sont toutes trois dans un même plan; les droites que déterminent les sommets opposés passent toutes quatre par un même point.*

Démonstration. On voit d'abord (16) que les arêtes d'un sommet quelconque de l'hexaèdre et leurs opposées, du sommet opposé à celui-là, détermineront trois plans se coupant suivant une même ligne droite, déterminée par les deux sommets dont il s'agit; donc les douze arêtes de l'hexaèdre détermineront deux à deux six plans, se coupant trois à trois suivant les quatre droites déterminées par plans des faces opposées ; d'où il est aisé de conclure que ces quatre droites appartiendront à un même plan.

23. Réciproquement, *THÉORÈME. Dans tout octaèdre hexagone tel que les droites que déterminent les faces opposées sont toutes quatre dans un même plan ; les droites que déterminent les sommets opposés passent toutes trois par un même point.*

Démonstration. Ces quatre droites étant dans un même plan, chacune d'elles contient trois de leurs six points d'intersection, lesquels sont, en même temps, les points de concours des arêtes opposées ; donc les trois arêtes d'une même face et leurs trois opposées dans la face opposée concourent en trois points appartenant à une même droite ; d'où l'on doit conclure (17, *série de droite*) que les droites que déterminent les sommets opposés de l'octaèdre passent toutes trois par un même point.

Remarques. Les six points de concours des arêtes opposées de l'octaèdre, distribués trois à trois sur quatre droites situées dans

les sommets opposés ; d'où il est aisé de conclure que ces quatre droites passeront par un même point.

23. Réciproquement, *THÉORÈME. Dans tout hexaèdre octogone tel que les droites que déterminent les sommets opposés passent toutes quatre par un même point ; les droites que déterminent les faces opposées sont toutes trois dans un même plan.*

Démonstration. Ces quatre droites passant par un même point, chacune d'elle est la commune section de trois des six plans qu'elles déterminent deux à deux, lesquels sont, en même temps, les plans déterminés par les arêtes opposées ; donc les trois arêtes d'un même sommet et leurs trois opposées du sommet opposé déterminent trois plans se coupant suivant une même droite ; d'où l'on doit conclure (17, *série de gauche*) que les droites que déterminent les faces opposées de l'hexaèdre sont toutes trois dans un même plan.

Remarques. Les six plans déterminés par les arêtes opposées de l'hexaèdre, se coupant trois à trois suivant quatre droites pas-un même plan, déterminent (7) trois nouvelles droites, lesquelles ne sont autre chose que les intersections du plan de ces quatre droites avec les trois plans qui contiennent deux à deux les droites que déterminent les sommets opposés de l'octaèdre. Ces nouvelles droites déterminent trois nouveaux points qui sont ceux où ce même plan est percé par les droites que déterminent les sommets opposés.

On voit aussi que les octaèdres hexagones du genre de ceux que nous considérons ici peuvent, de trois manières différentes, être envisagés comme la *somme* ou la *différence* de deux pyramides quadrangulaires, de même base, suivant que les deux sommets sont de *différens* côtés ou du *même* côté de la base commune.

Une partie de ce qui précède peut encore être énoncé de la manière suivante :

24. *THÉORÈME. Si l'on construit dans l'espace trois quadrilatères, ayant deux à deux, deux sommets opposés communs, et conséquemment six sommets en*

sant par un même point, déterminent (7) trois nouvelles droites lesquelles ne sont autre chose que celles qui joignent le point de concours de ces quatre droites aux trois points que déterminent deux à deux les droites intersections des plans des faces opposées de l'hexaèdre. Ces nouvelles droites déterminent deux à deux trois nouveaux plans qui sont ceux qui contiennent le point de concours des quatre premières droites et les droites que déterminent les faces opposées.

On voit que les hexaèdres octogones du genre de ceux que nous considérons ici peuvent, de trois manières différentes, être envisagés comme la *différence* ou la *somme* de deux pyramides quadrangulaires de même sommet, suivant que les deux bases sont du *même* côté ou de *différens* côtés du sommet commun.

Une partie de ce qui précède peut encore être énoncé de la manière suivante :

24. *THÉORÈME. Si l'on construit dans l'espace trois angles tétraèdres, ayant, deux à deux, deux faces opposées communes, et conséquemment six fa-*

tout, de manière que les droites déterminées par leurs sommets opposés, lesquelles ne seront ici qu'au nombre de trois seulement, passent toutes par un même point; les points que détermineront leurs côtés opposés seront six points distribués trois à trois sur quatre droites comprises dans un même plan. En outre, ces six points détermineront trois nouvelles droites qui seront celles suivant lesquelles leur plan sera coupé par les plans des trois quadrilatères; et ces nouvelles droites détermineront, à leur tour, trois nouveaux points, qui seront ceux où le même plan sera percé par les droites que déterminent les sommets opposés communs aux trois quadrilatères pris deux à deux.

Rien n'empêche de supposer que les trois quadrilatères sont dans un même plan (*); et, si alors on raisonne comme on l'a

ces en tout, de manière que les droites déterminées par les plans de leurs faces opposées, lesquelles ne seront ici qu'au nombre de trois seulement, soient toutes trois dans un même plan; les plans que détermineront leurs arêtes opposées seront six plans se coupant trois à trois suivant quatre droites passant par un même point. En outre, ces six plans détermineront trois nouvelles droites contenant le point commun aux quatre premières et les sommets des trois angles tétraèdres; et ces nouvelles droites détermineront, à leur tour, trois nouveaux plans, dont chacun contiendra le point commun aux six premiers, et une des droites déterminées par les plans des faces opposées communes aux trois angles tétraèdres pris deux à deux.

Rien n'empêche de supposer que les trois angles tétraèdres ont même sommet; et, si alors on raisonne comme on l'a fait

(*) On obtient ainsi le théorème dont la démonstration a été demandée à la page 396 du XV.e volume du présent recueil.

(18), on obtiendra ce nouveau théorème :

25. *THÉORÈME. Si l'on construit trois angles tétraèdres de même sommet, ayant, deux à deux, deux arêtes opposées communes, et conséquemment six arêtes en tout, de manière que les plans déterminés par leurs arêtes opposées, lesquels ne seront ici qu'au nombre de trois seulement passent par une même droite ; les droites que détermineront leurs faces opposées seront six droites distribuées trois à trois sur quatre plans passant par le sommet commun des trois angles tétraèdres. En outre, ces six droites détermineront trois nouveaux plans, passant aussi par ce sommet commun ; et ces trois derniers plans détermineront trois nouvelles droites dont chacune sera dans le plan des arêtes opposées de l'un des angles tétraèdres.*

En particulier, ce théorème contient le suivant ;

26. *THÉORÈME. Dans tout angle hexaèdre, tel que les plans que déterminent les arêtes opposées passent tous trois par la même droite ; les droites que dé-*

(18), on obtiendra ce nouveau théorème :

25. *THÉORÈME. Si l'on construit, sur un même plan trois quadrilatères, ayant, deux à deux, deux côtés opposés communs, et conséquemment six côtés en tout, de manière que les points déterminés par leurs côtés opposés, lesquels ne seront ici qu'au nombre de trois seulement, appartiennent à une même droite ; les droites que détermineront leurs sommets opposés, seront six droites se coupant trois à trois en quatre points du plan de ces quadrilatères. En outre, ces six droites détermineront trois nouveaux points de ce plan ; et ces trois points détermineront trois nouvelles droites dont chacune contiendra le point déterminé par deux côtés opposés de l'un des quadrilatères.*

En particulier, ce théorème contient le suivant :

26. *THÉORÈME. Dans tout hexagone tel que les points que déterminent les côtés opposés, appartiennent tous trois à une même droite ; les droites que dé-*

terminent les faces opposées appartiennent toutes trois à un même plan.

Puis, en raisonnant comme nous l'avons fait (18) ;

27. *THÉORÈME. Dans tout hexagone tel que les droites que déterminent les sommets opposés passent toutes trois par le même point ; les points que déterminent les côtés opposés appartiennent tous trois à une même droite.*

terminent les sommets opposés passent toutes trois par le même point.

Puis, en raisonnant comme nous l'avons fait (18) ;

27. *THÉORÈME. Dans tout angle hexaèdre tel que les droites que déterminent les faces opposées appartiennent toutes trois à un même plan ; les plans que déterminent les arêtes opposées passent tous trois par une même droite.*

En Géométrie plane, ce serait le n.° 26 (*série de droite*) qui correspondrait au n.° 27 (*série de gauche*).

28. *THÉORÈME. Dans tout hexagone gauche tel que ses côtés opposés sont deux à deux dans trois plans ; les droites que déterminent les sommets opposés passent toutes trois par un même point, intersection de ces trois plans* (*).

Démonstration. Si en effet on joint chaque sommet aux deux qui ne lui sont pas opposés par des droites, on aura ainsi douze droites que l'on pourra considé-

28. *THÉORÈME. Dans tout hexagone gauche, tel que ses côtés opposés concourent deux à deux en trois points ; les droites que déterminent les plans des angles opposés sont toutes trois dans un même plan, déterminé par ces trois points* (*).

Démonstration. Si en effet on considère les intersections du plan de chaque angle avec les plans des deux angles qui ne lui sont pas opposés, on aura ainsi douze

(*) On reconnaît ici les deux théorèmes dont M. Dandelin a tiré un si heureux parti. (Tom. XV, pag. 393).

rer comme les douze arêtes d'un octaèdre hexagone du genre de ceux dont il a été question (21 et suivant). Or les droites déterminées par les sommets opposés de l'hexagone gauche ne seront autre que les droites déterminées par les sommets opposés de l'octaèdre ; d'où il résulte que ces trois droites passeront par un même point.

droites que l'on pourra considérer comme les douze arêtes d'un hexaèdre octogone du genre de ceux dont il a été question (21 et suivant). Or les droites déterminées par les plans des angles opposés de l'hexagone gauche ne seront autres que les droites déterminées par les faces opposées de l'hexaèdre, d'où il suit que ces trois droites appartiendront à un même plan.

Remarques. On pourrait traiter ici de l'icosaèdre dodécagone et du dodécaèdre icosagone dans lesquels les droites que déterminent les sommets opposés passent par le même point, ou dans lesquels les droites déterminées par les plans des faces opposées appartiennent à un même plan. On pourrait traiter ensuite de l'inscription et de la circonscription du tétraèdre à lui-même, de celle de l'octaèdre hexagone à l'hexaèdre hexagone, et de celle de l'icosaèdre dodécagone au dodécaèdre icosagone. On pourrait enfin placer ici l'article sur les lois générales qui régissent les polyèdres, rappelé au commencement du présent mémoire, ainsi qu'une grande partie de l'article de la page 321 du tome IX.ᵉ

Quelques personnes trouveront peut-être que ce qui précède manque de développement ; mais nous les prierons de remarquer que nous n'écrivons pas pour les commençans, et qu'il nous a dû sembler préférable de multiplier les points de comparaison que d'entrer sur quelques-uns d'entre eux dans de minutieux détails que tout lecteur tant soit peu versé dans la géométrie pourra facilement suppléer. Nous croyons en avoir dit suffisamment pour mettre hors de toute contestation ces deux points de philosophie mathématique, savoir 1.° qu'il est une partie assez notable de la géométrie dans laquelle les théorèmes se correspondent exactement deux à deux, ainsi que les raisonnemens qu'il faut faire pour les établir, et cela en vertu de la nature même de l'étendue; 2.° que cette partie de la géométrie, qui prendrait une très-grande étendue, si l'on voulait y comprendre les lignes et les surfaces courbes (*), peut être complètement développée indépendamment du calcul et de la connaissance d'aucune des propriétés métriques des grandeurs que l'on considère.

Il nous a paru qu'un point de doctrine d'une importance aussi majeure, dont nous avons été frappés pour la première fois il y a plus de dix ans, et que l'esprit de détail avait dérobé jusqu'ici à la vue des géomètres, ne devait pas demeurer plus long-temps sans être mis en pleine évidence. Nous craignons bien toutefois que ce que nous venons d'écrire passe sans être aperçu ou que du moins d'après un examen superficiel, beaucoup n'y voient qu'un de ces rapprochemens forcés qui n'ont de consistance que dans l'esprit de ceux qui les imaginent.

(*) Voici de quelle manière on pourrait débuter dans la partie de cette géométrie relative aux lignes et surfaces courbes.

Définition. Soient dans l'espace, un plan fixe et trois droites, non situées deux à deux dans un même plan; et concevons une droite mobile posant constamment sur les trois droites fixes. Cette droite mobile et le plan fixe détermineront une série de points; et la courbe plane qui les comprendra tous sera ce qu'on appelle une *ligne du second ordre*.

THÉOREME. Toute surface conique qui passe par une ligne du second ordre est une surface conique du second ordre.

Démonstration. Etc., etc.

Définition. Soient, dans l'espace, un point fixe et trois droites fixes, non concourant deux à deux en un même point; et concevons une droite mobile posant constamment sur les trois droites fixes. Cette droite mobile et le point fixe détermineront une série de plans, et la surface conique à laquelle ils seront tous tangens sera ce qu'on appelle une *surface conique du second ordre.*

THEOREME. Toute section plane faite à une surface conique du second ordre est une ligne du second ordre.

Démonstration. Etc., etc.