
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

L. C. BOUVIER

**Analyse transcendante. Développement remarquable
des racines et des logarithmes**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 16 (1825-1826), p. 294-295

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1825-1826__16__294_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1825-1826, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Développement remarquable des racines et des logarithmes;

Par M. L. C. BOUVIER, ex-officier du génie, ancien élève
de l'école polytechnique.

Soit posé

$$z = \frac{x^n}{x^n + 1}, \text{ d'où } x = \sqrt[n]{\frac{z}{1-z}}, \text{ et } \sqrt[m]{x} = \sqrt[\frac{mn}{m}]{\frac{z}{1-z}} :$$

c'est-à-dire,

$$\sqrt[m]{x} = \sqrt[\frac{mn}{m}]{z} \cdot (1-z)^{-\frac{1}{mn}} \quad (1)$$

En remarquant que $z = 1 - (1-z)$, on aura

$$\sqrt[\frac{mn}{m}]{z} = 1 - \frac{1}{mn} (1-z) - \frac{1}{mn} \cdot \frac{mn-1}{2mn} (1-z)^2 - \frac{1}{mn} \cdot \frac{mn-1}{2mn} \cdot \frac{2mn-1}{3mn} (1-z)^3 - \dots$$

On a d'ailleurs,

$$(1-z)^{-\frac{1}{mn}} = 1 + \frac{1}{mn} z + \frac{1}{mn} \cdot \frac{mn+1}{2mn} z^2 + \frac{1}{mn} \cdot \frac{mn+1}{2mn} \cdot \frac{2mn+1}{3mn} z^3 + \dots$$

En substituant donc dans (1), et remettant ensuite pour z sa valeur en x , il viendra, quel que soit n ,

$$\sqrt[n]{x} = \left\{ \begin{aligned} & \left\{ 1 - \frac{1}{mn} \left(\frac{1}{x^n+1} \right) - \frac{1}{mn} \cdot \frac{mn-1}{2mn} \left(\frac{1}{x^n+1} \right)^2 - \frac{1}{mn} \cdot \frac{mn-1}{2mn} \cdot \frac{2mn-1}{3mn} \left(\frac{1}{x^n+1} \right)^3 - \dots \right\} \\ & \times \left\{ 1 + \frac{1}{mn} \left(\frac{x^n}{x^n+1} \right) + \frac{1}{mn} \cdot \frac{mn+1}{2mn} \left(\frac{x^n}{x^n+1} \right)^2 + \frac{1}{mn} \cdot \frac{mn+1}{2mn} \cdot \frac{2mn+1}{3mn} \left(\frac{x^n}{x^n+1} \right)^3 + \dots \right\} \end{aligned} \right\}.$$

Si l'on prend pour n un nombre pair, les deux séries dont le produit compose le développement de $\sqrt[n]{x}$ seront constamment convergentes, quelque valeur entière ou fractionnaire, positive ou négative qu'on donne à x .

On a aussi.

$$\text{Log. } x = \frac{1}{n} \left\{ \text{Log } z - \text{Log.}(1-z) \right\}; \quad (2)$$

mais on sait que

$$\begin{aligned} \text{Log. } z &= -(1-z) - \frac{1}{2}(1-z)^2 - \frac{1}{3}(1-z)^3 - \frac{1}{4}(1-z)^4 - \dots, \\ -\text{Log.}(1-z) &= z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \dots \dots \dots; \end{aligned}$$

substituant dans (2), et remettant ensuite pour z sa valeur en x , on aura, quel que soit n ,

$$\text{Log } x = \frac{1}{n} \left\{ \frac{x^n-1}{x^n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{2n}-1}{(x^n+1)^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{3n}-1}{(x^n+1)^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{4n}-1}{(x^n+1)^4} + \dots \right\};$$

série qui, lorsqu'on prendra pour n un nombre pair, aura le même avantage que le développement ci-dessus.

Si, en particulier, on y fait $n=2$, on retombera sur le développement déjà obtenu (tom. XIV, pag. 279).